

EXPOSÉ XXVI

SOUS-GROUPES PARABOLIQUES DES GROUPES RÉDUCTIFS

par M. DEMAZURE

⁽⁰⁾ Cet exposé étudie les sous-groupes paraboliques d'un S-groupe réductif G . Le résultat essentiel en est le théorème de conjugaison (5.4). L'outil essentiel est la notion de position transversale de deux sous-groupes paraboliques, notion qui est étudiée systématiquement dans le n°4. Un autre fait joue un rôle important : la décomposition du radical unipotent $\text{rad}^u(P)$ d'un sous-groupe parabolique P en extensions successives de groupes vectoriels (2.1) ⁽¹⁾. 426

Différents schémas associés à G sont étudiés dans le n°3 ; le n°6 traite des sous-tors déployés ⁽²⁾ de G et de leurs relations avec les sous-groupes paraboliques.

Enfin, dans le n°7, nous exposons brièvement comment se formule, sur une base semi-locale, la « théorie relative » des groupes réductifs telle qu'elle est exposée dans le cas des corps dans l'article de A. Borel et J. Tits, *Groupes réductifs*, Publications Mathématiques de l'IHÉS, n°27. Dans cet article, cité [BT65] dans la suite, le lecteur trouvera d'ailleurs, dans le cas d'un corps de base, d'autres résultats qui n'ont pas été effleurés ici.

1. Rappels. Sous-groupes de Levi

Définition 1.1. — Soient S un schéma, G un S-groupe réductif, P un sous-S-schéma en groupes de G . On dit que P est un *sous-groupe parabolique* de G si

(i) P est lisse sur S ,

427

(ii) pour chaque $s \in S$, le \bar{s} -schéma quotient $G_{\bar{s}}/P_{\bar{s}}$ est propre (i.e. *Bible*, §6.4, th. 4 (= [Ch05], §6.5, th. 5), $P_{\bar{s}}$ contient un sous-groupe de Borel de $G_{\bar{s}}$).

⁽⁰⁾N.D.E. : Version du 13/10/2024

⁽¹⁾N.D.E. : Comme les sous-groupes de Levi de P forment un torseur sous $\text{rad}^u(P)$ (1.9), ceci entraîne, lorsque S est semi-local, que P possède un sous-groupe de Levi et donc un tore maximal (2.4).

⁽²⁾N.D.E. : On a remplacé la terminologie de « tore trivial » par celle de « tore déployé ».

Proposition 1.2 (Exp. XXII, 5.8.5). — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G . Alors P est fermé dans G , à fibres connexes, et

$$P = \underline{\text{Norm}}_G(P).$$

De plus, le faisceau-quotient G/P est représentable par un S -schéma lisse et projectif sur S .

Proposition 1.3 (Exp. XXII, 5.3.9 et 5.3.11). — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, P et P' deux sous-groupes paraboliques de G . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) P et P' sont conjugués dans G , localement pour la topologie étale (resp. (fpqc)).
- (ii) Pour chaque $s \in S$, $P_{\bar{s}}$ et $P'_{\bar{s}}$ sont conjugués par un élément de $G(\bar{s})$.
- (iii) Le transporteur strict $\underline{\text{Transt}}_G(P, P')$ de P dans P' (défini par

$$\underline{\text{Transt}}_G(P, P')(S') = \{g \in G(S') \mid \text{int}(g)P_{S'} = P'_{S'}\}$$

pour tout $S' \rightarrow S$), est un sous-schéma fermé de G , lisse et de présentation finie sur S , qui est un fibré principal homogène à droite sous P , et à gauche sous P' .

Proposition 1.4. — Soient S un schéma non vide, (G, T, M, R) un S -groupe réductif déployé, R' une partie de R . Les conditions suivantes sur R' sont équivalentes :

428

(i) $\mathfrak{g}_{R'} = \mathfrak{t} \oplus \coprod_{\alpha \in R'} \mathfrak{g}^\alpha$ est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe parabolique de G contenant T (nécessairement unique, Exp. XXII, 5.3.5).

(ii) R' est de type (R) (Exp. XXII, 5.4.2) et contient un système de racines positives.

(iii) R' est une partie close de R et vérifie : si $\alpha \in R - R'$, alors $-\alpha \in R'$ (c.-à-d., $R = R' \cup (-R')$).

(iv) Il existe un système de racines simples Δ , et une partie A de Δ tels que R' soit la réunion de l'ensemble des racines positives et de l'ensemble des racines négatives combinaisons linéaires des éléments de A .

(v) R' contient un système de racines simples de R ; de plus, si $\Delta \subset R'$ est un système de racines simples de R et si on pose

$$A = (-R') \cap \Delta,$$

alors R' est la réunion de l'ensemble des racines positives et de l'ensemble des racines négatives combinaisons linéaires des éléments de A .

On a (i) \Leftrightarrow (ii) par Exp. XXII, 5.4.5 (ii) et 5.5.1. On a (iii) \Rightarrow (ii) par Exp. XXI, 3.3.6 et Exp. XXII, 5.4.7. On a évidemment (v) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (iii). On a (iii) \Rightarrow (v) par Exp. XXI, 3.3.6 et 3.3.10.

Il reste donc à prouver que (i) entraîne que R' est une partie close de R . Or cette dernière assertion peut se vérifier sur une fibre géométrique quelconque ; on peut donc supposer que S est le spectre d'un corps algébriquement clos.

Soit P le sous-groupe parabolique de G contenant T dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}_{R'}$. Comme les sous-groupes de Borel de P sont les sous-groupes de Borel de G contenus dans P , il résulte de *Bible*, § 12.3, th. 1, et de Exp. XXII, 5.4.5 (i), que si on note U le

429

radical unipotent de P , alors $T \cdot U$ est le sous-groupe de G contenant T d'algèbre de Lie

$$\mathfrak{g}_{R''} = \mathfrak{t} \oplus \coprod_{\alpha \in R''} \mathfrak{g}^\alpha,$$

où R'' est l'intersection des systèmes de racines positives de R contenus dans R' . Il en résulte en particulier que R'' est *close* et que $R'' \cap (-R'') = \emptyset$. D'autre part, le groupe $H = P/U$ est réductif, l'image canonique \overline{T} de T en est un tore maximal ($T \rightarrow \overline{T}$ est un isomorphisme), et on a un isomorphisme de T -modules, i.e. d'espaces vectoriels gradués de type M

$$\text{Lie}(H) \simeq \mathfrak{t} \oplus \coprod_{\alpha \in R_s} \mathfrak{g}^\alpha,$$

où R_s est le complémentaire de R'' dans R' . Il s'ensuit que R_s s'identifie naturellement à l'ensemble des racines de H relativement à \overline{T} , et en particulier vérifie $R_s = -R_s$. Il s'ensuit aussitôt que l'on a

$$R'' = \{\alpha \in R', -\alpha \notin R'\}, \quad R_s = \{\alpha \in R', -\alpha \in R'\}.$$

Montrons maintenant que R' est clos. Soient $\alpha, \beta \in R'$ tels que $\alpha + \beta \in R$; prouvons que $\alpha + \beta \in R'$. Si $\alpha, \beta \in R''$, alors $\alpha + \beta \in R''$ car R'' est clos. Si $\alpha \in R_s, \beta \in R''$, et si $\alpha + \beta \notin R'$, alors $\alpha + \beta \in -R''$, et on a $-\alpha = -(\alpha + \beta) + \beta \in R''$ car R'' est clos, ce qui entraîne $-\alpha \in R'' \cap R_s$ et contredit le fait que $R_s \cap R'' = \emptyset$. Il reste donc à étudier le cas où $\alpha, \beta \in R_s$. Si $\alpha + \beta \notin R'$, alors $\alpha + \beta \in -R''$. Mais, comme $\alpha + \beta \neq 0$, il existe un système de racines positives du système de racines R_s contenant α et β , donc un sous-groupe de Borel de $H = P/U$ contenant l'image canonique de U_α et U_β . Son image inverse dans P est un sous-groupe de Borel contenant U_α, U_β et U , donc U_α, U_β et $U_{-(\alpha+\beta)}$, ce qui est impossible.

Corollaire 1.5. — *Un sous-groupe parabolique d'un groupe réductif est de type (RC)* 430 (Exp. XXII, 5.11.1).

Proposition 1.6 (Exp. XXII, 5.11.4). — *Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, P un sous-groupe de type (RC) ⁽³⁾ de G .*

(i) *P possède un plus grand sous-schéma en groupes invariant, lisse et de présentation finie sur S , à fibres géométriques connexes et unipotentes. C'est un sous-groupe caractéristique de P , appelé le radical unipotent de P , noté $\text{rad}^u(P)$. Le faisceau-quotient $P/\text{rad}^u(P)$ est représentable par un S -groupe réductif.*

(ii) *Si T est un tore maximal de P , P possède un sous-groupe réductif L contenant T , tel que :*

- (a) *Tout sous-groupe réductif de P contenant T est contenu dans L .*
- (b) *P est le produit semi-direct $L \cdot \text{rad}^u(P)$, i.e. le morphisme canonique $L \rightarrow P/\text{rad}^u(P)$ est un isomorphisme.*

⁽³⁾N.D.E. : On a remplacé « sous-groupe parabolique » par « sous-groupe de type (RC) », comme dans Exp. XXII, 5.11.4, car il sera utile plus loin (4.5.1, 6.17) de pouvoir appliquer cet énoncé à $P \cap P'$, lorsque P, P' sont deux sous-groupes paraboliques tels que $P \cap P'$ soit de type (RC).

De plus, L est l'unique sous-groupe (resp. sous-groupe réductif) de P , contenant T et vérifiant (b) (resp. (a)). Enfin, on a

$$\underline{\text{Norm}}_P(L) = L, \quad \underline{\text{Norm}}_P(T) = \underline{\text{Norm}}_L(T).$$

1.7. — Un sous-groupe L de P vérifiant la condition (b) ci-dessus est appelé un *sous-groupe de Levi* de P . C'est un sous-groupe réductif maximal de P ; en effet, il est réductif, car isomorphe à $P/\text{rad}^u(P)$, montrons qu'il est maximal pour cette propriété; soit L' un sous-groupe réductif de P contenant L ; pour prouver que $L' = L$, on peut raisonner localement pour la topologie (fpqc), et donc supposer que L possède un tore maximal T , et on est ramené à 1.6 (ii).

431 Si L et L' sont deux sous-groupes de Levi de P , L et L' sont conjugués dans P , localement pour la topologie (fpqc). En effet, localement pour cette topologie, on peut supposer que L (resp. L') possède un tore maximal T (resp. T'); comme T et T' sont conjugués dans P localement pour la topologie (fpqc), on peut supposer $T = T'$, et on a alors $L = L'$, par 1.6 (ii). Mais comme $P = L \cdot \text{rad}^u(P)$ et $\underline{\text{Norm}}_P(L) = L$, on en déduit aussitôt :

Corollaire 1.8. — Soit P un sous-groupe de type (RC) ⁽⁴⁾ du S -groupe réductif G . Si L et L' sont deux sous-groupes de Levi de P , il existe un unique $u \in \text{rad}^u(P)(S)$ tel que $\text{int}(u)L = L'$.

Notons $\underline{\text{Lev}}(P)$ le foncteur des sous-groupes de Levi de P : pour $S' \rightarrow S$, $\underline{\text{Lev}}(P)(S')$ est l'ensemble des sous-groupes de Levi de $P_{S'}$. On déduit de 1.8 :

Corollaire 1.9. — Soit P un sous-groupe de type (RC) ⁽⁴⁾ du S -groupe réductif G . Alors $\underline{\text{Lev}}(P)$ est un fibré principal homogène sous le S -groupe $\text{rad}^u(P)$, et en particulier est représentable par un S -schéma lisse et affine sur S , à fibres géométriques intègres.

Il résulte immédiatement de 1.6 :

Corollaire 1.10. — Soit P un sous-groupe de type (RC) ⁽⁴⁾ du S -groupe réductif G . Le foncteur $\underline{\text{Tor}}(P)$ des tores maximaux de P est représentable par un S -schéma lisse et affine, la « relation $L \supset T$ » définit un morphisme

$$\underline{\text{Tor}}(P) \longrightarrow \underline{\text{Lev}}(P),$$

la fibre de ce morphisme au-dessus de $L \in \underline{\text{Lev}}(P)(S)$ s'identifie à $\underline{\text{Tor}}(L)$ (Exp. XXII, 5.8.3).

La première assertion de 1.10 est conséquence des deux autres et de Exp. XXII, 5.8.3.

432 **Définition 1.11.** — Soient S un schéma non vide, G un S -groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G , $\mathcal{E} = (T, M, R, \Delta, (X_\alpha)_{\alpha \in \Delta})$ un épinglage de G . On dit que \mathcal{E} est *adapté* à P , ou que \mathcal{E} est un épinglage du couple (G, P) si $P \supset T$ et si l'algèbre de Lie de P est de la forme $\mathfrak{t} \oplus \coprod_{\alpha \in R'} \mathfrak{g}^\alpha$, où R' est une partie de R contenant R_+ .

⁽⁴⁾N.D.E. : cf. la N.D.E. (3).

En particulier, si $T \subset B$ est le couple de Killing défini par l'épinglage, on a $T \subset B \subset P$.

Sous les conditions précédentes, on note $\Delta(P) = \Delta \cap (-R')$; alors, par Exp. XXII, 5.4.3, on a :

$$\alpha \in \Delta(P) \iff \alpha \in \Delta \text{ et } U_{-\alpha} \subset P \iff \alpha \in \Delta \text{ et } U_{-\alpha} \cap P \neq e.$$

Il résulte aussitôt de 1.4 (v) et Exp. XXII, 5.11.3 et 5.10.6 :

Proposition 1.12. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G , $(T, M, R, \Delta, (X_\alpha)_{\alpha \in \Delta})$ un épinglage de G adapté à P , $\Delta(P)$ la partie de Δ définie ci-dessus.

(i) Le radical unipotent $\text{rad}^u(P)$ de P n'est autre que

$$U_{R''} = \prod_{\alpha \in R''} U_\alpha,$$

où R'' est l'ensemble des racines positives qui dans leur décomposition sur Δ , contiennent au moins un élément de $\Delta - \Delta(P)$ ⁽⁵⁾ avec un coefficient non nul.

(ii) L'unique sous-groupe de Levi L de P contenant T n'est autre que

$$Z_{\Delta(P)} = \underline{\text{Centr}}_G(T_{\Delta(P)}),$$

où $T_{\Delta(P)}$ est le tore maximal de $\bigcap_{\alpha \in \Delta(P)} \text{Ker}(\alpha)$; de plus on a $T_{\Delta(P)} = \text{rad}(L)$.

Corollaire 1.13. — Tout sous-groupe de Levi L du sous-groupe parabolique P du groupe réductif G est un sous-groupe critique de G , i.e. vérifie (Exp. XXII, 5.10.4) : 433

$$L = \underline{\text{Centr}}_G(\text{rad}(L)).$$

Cela résulte aussitôt de 1.12 et du lemme suivant, contenu dans 1.4 et Exp. XXII, 5.4.1 :

Lemme 1.14. — Localement pour la topologie étale, tout couple (G, P) , où P est un sous-groupe parabolique du groupe réductif G , peut être épinglé (1.11).

Notons :

Proposition 1.15. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G , \mathcal{E} et \mathcal{E}' deux épinglages de G adaptés à P . L'unique automorphisme intérieur de G sur S qui transforme \mathcal{E} en \mathcal{E}' (Exp. XXIV, 1.5) provient de P , par le morphisme

$$P \longrightarrow P / \underline{\text{Centr}}(P) = P / \underline{\text{Centr}}(G) \longrightarrow G / \underline{\text{Centr}}(G).$$

En effet, il suffit de raisonner comme dans Exp. XXIV, 1.5, en utilisant :

Lemme 1.16 (Exp. XXII, 5.3.14 et 5.2.6). — Les tores maximaux (resp. sous-groupes de Borel, resp. couples de Killing) d'un sous-groupe parabolique P du S -groupe réductif G sont conjugués dans P , localement pour la topologie étale.

⁽⁵⁾N.D.E. : On a corrigé $\Delta(P)$ en $\Delta - \Delta(P)$.

Proposition 1.17. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, P et P' deux sous-groupes paraboliques de G , B un sous-groupe de Borel contenu dans P et P' . Si P et P' sont conjugués dans G , localement pour la topologie étale, alors $P = P'$.

434 En effet, on peut supposer qu'il existe $g \in G(S)$ tel que $\text{int}(g)P = P'$. Alors B et $\text{int}(g)^{-1}B$ sont deux sous-groupes de Borel de P . Quitte à étendre S , on peut par 1.16, supposer qu'il existe $p \in P(S)$ tel que $\text{int}(p)\text{int}(g^{-1})B = B$. Alors

$$p g^{-1} \in \underline{\text{Norm}}_G(B)(S) = B(S),$$

et $g \in B(S) \cdot p \subset P(S)$, donc $P' = \text{int}(g)P = P$.

Remarque 1.18. — Si P et P' sont deux sous-groupes paraboliques de G contenant un même sous-groupe de Borel, alors $P \cap P'$ est encore un sous-groupe parabolique de G . En effet, il est lisse le long de la section unité (Exp. XXII, 5.4.5), et il contient un sous-groupe de Borel.

Proposition 1.19. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, G' son groupe dérivé (Exp. XXII, 6.2.1).

(i) Les applications

$$P \mapsto P' = P \cap G' \quad \text{et} \quad P \mapsto P' \cdot \text{rad}(G) = \underline{\text{Norm}}_G(P')$$

sont des bijections réciproques l'une de l'autre entre l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G et l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G' . On a $\text{rad}^u(P) = \text{rad}^u(P')$.

(ii) Soient P un sous-groupe parabolique de G et $P' = P \cap G'$. Les applications

$$\begin{aligned} L \mapsto L' &= L \cap G' = L \cap P' \\ L' \mapsto L' \cdot \text{rad}(G) &= \underline{\text{Centr}}_G(\text{rad}(L')) \end{aligned}$$

sont des bijections réciproques l'une de l'autre entre l'ensemble des sous-groupes de Levi de P et l'ensemble des sous-groupes de Levi de P' . De plus, on a $\text{rad}(L') = (\text{rad}(L) \cap G')^0$.

435 La démonstration (par réduction au cas déployé, par exemple) se fait sans difficulté et est laissée au lecteur, ainsi que celle, immédiate de :

Proposition 1.20. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G , L un sous-groupe de Levi de P . Les applications

$$Q \mapsto Q \cap L = Q', \quad Q' \mapsto Q' \cdot \text{rad}^u(P)$$

sont des bijections réciproques l'une de l'autre entre l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G contenus dans P et l'ensemble des sous-groupes paraboliques de L . De plus, les sous-groupes de Levi de Q' sont les sous-groupes de Levi de Q contenus dans L .

On peut compléter 1.6 de la manière suivante :

Proposition 1.21. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G .

(i) P possède un plus grand sous-groupe invariant, lisse et de présentation finie sur S , à fibres géométriques connexes et résolubles. C'est un sous-groupe caractéristique de P , appelé le radical de P , et noté $\text{rad}(P)$. Le faisceau-quotient $P/\text{rad}(P)$ est représentable par un S -groupe semi-simple.

(ii) Si L est un sous-groupe de Levi de P , $\text{rad}(P)$ est le produit semi-direct de $\text{rad}^u(P)$ et de $\text{rad}(L)$; on a $\text{rad}(L) = L \cap \text{rad}(P)$, donc $L = \underline{\text{Centr}}_G(L \cap \text{rad}(P))$, et $P/\text{rad}(P) \simeq L/\text{rad}(L)$.

En effet, l'assertion (i) étant locale, on peut supposer que G possède un sous-groupe de Levi L , et on est ramené à prouver que $R = \text{rad}^u(P) \cdot \text{rad}(L)$ possède les propriétés annoncées dans (i), ce qui est immédiat. Pour (ii), il ne reste plus qu'à démontrer que $\text{rad}(L) = L \cap \text{rad}(P)$, ce qui résulte aussitôt du fait que $L \cap \text{rad}(P)$ est lisse et à fibres connexes, L étant le centralisateur d'un tore ⁽⁶⁾.

2. Structure du radical unipotent d'un sous-groupe parabolique

Proposition 2.1. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G , $\text{rad}^u(P)$ son radical unipotent. Il existe une suite de sous-schémas en groupes de $\text{rad}^u(P)$

$$\text{rad}^u(P) = U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \dots \supset U_n \supset \dots$$

possédant les propriétés suivantes :

(i) Chaque U_i est lisse, à fibres connexes, caractéristique et fermé dans P . Le commutateur d'une section de U_i et d'une section de U_j est une section de U_{i+j+1} (sur un $S' \rightarrow S$ variable).

(ii) Pour chaque $i \geq 0$, il existe un \mathcal{O}_S -module localement libre \mathcal{E}_i et un isomorphisme de S -faisceaux en groupes

$$U_i/U_{i+1} \xrightarrow{\sim} W(\mathcal{E}_i).$$

De plus, les automorphismes de P (sur un $S' \rightarrow S$ variable) opèrent linéairement sur $W(\mathcal{E}_i)$.

(iii) Pour tout $s \in S$, on a $U_{n,s} = e$ pour $n > \dim(\text{rad}^u(P)_s)$.

2.1.1. — Supposons d'abord le couple (G, P) épinglable. Soit (T, M, R, Δ, \dots) un épinglage de G adapté à P ; soit $\Delta(P)$ la partie de Δ définie par P . Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ les éléments de $\Delta(P)$, β_1, \dots, β_q les éléments de $\Delta - \Delta(P)$. Toute racine $\gamma \in R$ s'écrit de manière unique ⁴³⁷

$$\gamma = a_1\alpha_1 + \dots + a_p\alpha_p + b_1\beta_1 + \dots + b_q\beta_q.$$

Posons

$$a(\gamma) = b_1 + \dots + b_q. \quad (7)$$

Il résulte aussitôt des définitions les propriétés suivantes (cf. 1.12) :

⁽⁶⁾N.D.E. : cf. XIX 1.4.

⁽⁷⁾N.D.E. : On a corrigé $a_1 + \dots + a_p$ en $b_1 + \dots + b_q$.

- (i) $U_\gamma \subset P \Leftrightarrow a(\gamma) \geq 0$.
- (ii) $U_\gamma \subset \text{rad}^u(P) \Leftrightarrow a(\gamma) > 0$.
- (iii) $a(n\gamma + m\gamma') = n a(\gamma) + m a(\gamma')$ pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$.

Pour $i > 0$, soit R_i l'ensemble des racines $\gamma \in R$ telles que $a(\gamma) > i$. Chaque R_i est un ensemble clos de racines vérifiant $R_i \cap (-R_i) = \emptyset$. Considérons (Exp. XXII, 5.6.5) le S-groupe

$$U_i = U_{R_i} = \prod_{\gamma \in R_i} U_\gamma.$$

C'est un sous-schéma en groupes fermé de G , lisse sur S , à fibres connexes.

Soient $\alpha, \beta \in R$, considérons la relation de commutation de Exp. XXII, 5.5.2

$$p_\alpha(x)p_\beta(y)p_\alpha(-x) = p_\beta(y) \prod_{n,m \in \mathbb{N}^*} p_{n\alpha+m\beta}(C_{n,m,\alpha,\beta} x^n y^m),$$

438 où chaque p_γ est un isomorphisme de groupes vectoriels $\mathbb{G}_{a,S} \xrightarrow{\sim} U_\gamma$. Remarquons d'abord que si $a(\alpha) > i$ et $a(\beta) > j$, on a

$$a(n\alpha + m\beta) = n a(\alpha) + m a(\beta) \geq n(i+1) + m(j+1) > i + j + 1$$

lorsque n et m sont > 0 . Il s'ensuit que le commutateur d'une section de U_α et d'une section de U_β est une section de U_{i+j+1} (sur un $S' \rightarrow S$ variable), ce qui entraîne bien $(U_i, U_j) \subset U_{i+j+1}$. Pour chaque $i \geq 0$, le quotient U_i/U_{i+1} est donc commutatif, il s'identifie naturellement à

$$U_i/U_{i+1} \simeq \prod_{a(\gamma)=i+1} U_\gamma \simeq W(\mathcal{E}_i),$$

où \mathcal{E}_i est la somme directe des \mathfrak{g}^γ pour $a(\gamma) = i + 1$.

Revenons à la formule de commutation ci-dessus, et supposons $a(\alpha) \geq 0$, $a(\beta) > i$. Si $n, m \in \mathbb{N}^*$,

- ou bien $a(n\alpha + m\beta) > i + 1$
- ou bien $a(n\alpha + m\beta) = i + 1$, auquel cas on a nécessairement $m = 1$.

Cela prouve d'abord que $\text{int}(p_\alpha(x))$ respecte U_i (donc aussi U_{i+1}), puis que dans l'expression de $\text{int}(p_\alpha(x))p_\beta(y)$ n'interviennent modulo U_{i+1} que des termes de la forme $p_{n\alpha+\beta}(C_{n,1,\alpha,\beta} x^n y)$ qui sont donc *linéaires* en y . Il s'ensuit que les automorphismes intérieurs définis par des sections de U_α opèrent linéairement dans le quotient U_i/U_{i+1} identifié à $W(\mathcal{E}_i)$. Comme c'est également trivialement vrai pour les automorphismes intérieurs définis par des sections de T , et que P est engendré par T et les U_α , $a(\alpha) \geq 0$, on en déduit que :

- (i) chaque U_i est invariant dans P ,
- (ii) les automorphismes intérieurs définis par des sections de P opèrent linéairement dans $U_i/U_{i+1} \simeq W(\mathcal{E}_i)$.

2.1.2. — Soit maintenant $(T', M', R', \Delta', \dots)$ un nouvel épinglage de G adapté à P . 439 En vertu de 1.15, il existe un automorphisme intérieur de G provenant de P transformant l'ancien épinglage en le nouveau. Quitte à étendre S , on peut supposer que cet

automorphisme intérieur est de la forme $\text{int}(p)$, $p \in P(S)$. Si l'on reprend les constructions précédentes à l'aide du nouvel épinglage, il est clair que les groupes U'_i et les isomorphismes $U'_i/U'_{i+1} \simeq W(\mathcal{E}'_i)$ obtenus se déduisent de U_i et $U_i/U_{i+1} \simeq W(\mathcal{E}_i)$ par transport de structure à l'aide de $\text{int}(p)$. Il résulte des remarques (i) et (ii) ci-dessus que l'on aura donc $U'_i = U_i$, et que les deux structures vectorielles construites sur $U_i/U_{i+1} = U'_i/U'_{i+1}$ coïncident.

Cela nous montre que les groupes U_i et les structures vectorielles sur les quotients U_i/U_{i+1} sont indépendants de l'épinglage considéré (et en particulier invariants par tout automorphisme de P , comme on le voit aisément).

On a donc démontré la proposition lorsque le couple (G, P) est épinglable (la partie (iii) est triviale, car d'après Exp. XXI 3.1.2, l'ensemble $\{a(\gamma) \mid \gamma \in \mathbb{R}\}$ est un intervalle de \mathbb{Z} , donc on ne peut avoir $\dim(U_{i,s}) = \dim(U_{i+1,s})$ que si $U_{i,s} = e$).

2.1.3. — Dans le cas général, il existe une famille couvrante pour la topologie (fpqc), $\{S_j \rightarrow S\}$, telle que chaque couple (G_{S_j}, P_{S_j}) soit épinglable (1.14). En vertu de ce qui précède, on a des données de descente sur les $\text{rad}^u(P_{S_j})_i$, compatibles avec les structures vectorielles des quotients, et on conclut par descente des sous-schémas fermés (resp. des modules localement libres). ⁽⁸⁾

Corollaire 2.2. — Soient S un schéma affine, G un S -groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G . On a

$$H^1(S, \text{rad}^u(P)) = 0,$$

i.e. tout fibré principal homogène sous $\text{rad}^u(P)$ est trivial.

En effet, S se décompose en somme de sous-schémas sur chacun desquels $\text{rad}^u(P)$ est de dimension relative constante. On peut donc par (iii) supposer qu'il existe un n tel que $U_n = e$. Comme $H^1(S, U_i/U_{i+1}) = H^1(S, W(\mathcal{E}_i)) = 0$ par TDTE I, B, 1.1 (ou SGA 1, XI 5.1), on conclut aussitôt.

Corollaire 2.3. — Sous les conditions précédentes, P possède un sous-groupe de Levi L . Si L est un sous-groupe de Levi de P , l'application canonique

$$H^1(S, L) \longrightarrow H^1(S, P)$$

est bijective (cf. l'introduction de Exp. XXIV pour la définition de $H^1(S, \)$).

La première assertion résulte de 2.2 et 1.9. L'application canonique $H^1(S, L) \rightarrow H^1(S, P)$ est surjective, car P est le produit semi-direct $L \cdot \text{rad}^u(P)$. Pour prouver qu'elle est injective, il suffit de voir que pour tout fibré principal homogène Q sous L , on a $H^1(S, \text{rad}^u(P)_Q) = 0$, où l'indice Q désigne l'opération de torsion par le L -fibré Q . Ceci peut se prouver de deux manières : on peut reprendre la démonstration de 2.2, en utilisant le fait que les structures vectorielles sur les U_i/U_{i+1} sont invariantes par L ; on peut aussi remarquer que $\text{rad}^u(P)_Q$ s'identifie au radical unipotent du sous-groupe parabolique P_Q de G_Q , et appliquer 2.2 à P_Q .

⁽⁸⁾N.D.E. : cf. SGA 1, VIII 1.3, 1.9 et 1.10.

Corollaire 2.4. — Soient S un schéma semi-local, G un S -groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G . Il existe un tore maximal T de G contenu dans P .

En effet, vu 2.3, P possède un sous-groupe de Levi L , et il suffit de prouver que L possède un tore maximal, ce qui résulte de Exp. XIV, 3.20.

441 **Corollaire 2.5.** — Soient S un schéma affine, G un S -groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G . Il existe un \mathcal{O}_S -module localement libre \mathcal{E} tel que $\text{rad}^u(P)$ soit isomorphe comme S -schéma à $W(\mathcal{E})$.

En effet, prouvons par récurrence sur i , que l'on a un isomorphisme de S -schémas

$$\text{rad}^u(P)/U_i \simeq W(\mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_{i-1}).$$

C'est clair pour $i = 0$. Supposons $i > 0$, alors $\text{rad}^u(P)/U_i$ est un fibré principal homogène de base $\text{rad}^u(P)/U_{i-1}$, sous le groupe

$$(U_{i-1}/U_i)_{\text{rad}^u(P)/U_{i-1}} \simeq W(\mathcal{E}_{i-1} \otimes \mathcal{O}_{\text{rad}^u(P)/U_{i-1}}).$$

Or la base est affine (par exemple par l'hypothèse de récurrence), donc ce fibré est trivial (TDTE I ou SGA 1 XI, *loc. cit.*), et il existe un isomorphisme de S -schémas $\text{rad}^u(P)/U_i \simeq (\text{rad}^u(P)/U_{i-1}) \times_S (U_{i-1}/U_i)$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 2.6. — Soient S un schéma semi-local, $\{s_i\}$ l'ensemble de ses points fermés, G un S -groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G . L'application canonique

$$\text{rad}^u(P)(S) \longrightarrow \prod_i \text{rad}^u(P)(\text{Spec } \kappa(s_i))$$

est surjective.

En effet, si $S = \text{Spec}(A)$, $\kappa(s_i) = A/\mathfrak{p}_i$, et si \mathcal{E} est donné par le module projectif (donc plat) E , il nous faut prouver que l'application

$$E \longrightarrow \prod_i E \otimes_A A/\mathfrak{p}_i$$

est surjective. Il suffit de le faire lorsque $E = A$, auquel cas c'est bien connu (cf. Bourbaki, *Alg. Comm.* Chap. II, §1, n°2, proposition 5).

442 **Corollaire 2.7.** — Soient k un corps infini, G un k -groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G ; alors $\text{rad}^u(P)(k)$ est dense dans $\text{rad}^u(P)$.

Corollaire 2.8. — Soient S un schéma semi-local, $\{s_i\}$ l'ensemble de ses points fermés, G un S -groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G , et L_i un sous-groupe de Levi de P_{s_i} pour chaque i . Il existe un sous-groupe de Levi L de P induisant L_i pour chaque i .

Soit en effet L_0 un sous-groupe de Levi de P (2.3). Soit, pour chaque i , $u_i \in \text{rad}^u(P)(\text{Spec}(\kappa(s_i)))$ tel que $\text{int}(u_i)L_{0, s_i} = L_i$ (1.8); si $u \in \text{rad}^u(P)(S)$ induit u_i pour chaque i (2.6), alors $L = \text{int}(u)L_0$ répond à la question.

Corollaire 2.9. — Dans la situation de 2.1, soit de plus H un sous-schéma en groupes de G , lisse et de présentation finie sur S , à fibres connexes, tel que $P \cap H$ contienne localement pour la topologie (fpqc) un tore maximal de G . Alors pour chaque $i \geq 0$, il existe un sous-module localement facteur direct \mathcal{F}_i de \mathcal{E}_i tel que l'isomorphisme $U_i/U_{i+1} \xrightarrow{\sim} W(\mathcal{E}_i)$ induise un isomorphisme de groupes

$$(U_i \cap H)/(U_{i+1} \cap H) \xrightarrow{\sim} W(\mathcal{F}_i).$$

En effet, H est un sous-groupe de type (R) de G (Exp. XXII, 5.2.1). D'autre part, l'assertion à démontrer est locale pour la topologie (fpqc), et on peut supposer G déployé relativement à un tore maximal de $P \cap H$; on peut même se ramener dans la situation de 2.1.1, H étant défini par une partie R' de R . Reprenant les notations de *loc. cit.*, on voit par Exp. XXII, 5.6.7 (ii) que $U_i \cap H = \prod_{\alpha \in R_i \cap R'} U_\alpha$, donc que $(U_i \cap H)/(U_{i+1} \cap H)$ s'identifie à $\prod_{\alpha \in R', a(\alpha)=i+1} U_\alpha$, ce qui entraîne le résultat.

Corollaire 2.10. — Dans la situation de 2.9, les conclusions de 2.2, 2.5, 2.6, 2.7 sont également valables en remplaçant $\text{rad}^u(P)$ par $\text{rad}^u(P) \cap H$. 443

Corollaire 2.11. — ⁽⁹⁾ Soient G un S -groupe réductif, P un sous-groupe parabolique, H un sous-groupe de type (RC) de P tel que $\text{rad}^u(H) = \text{rad}^u(P) \cap H$. Alors les énoncés 2.2 à 2.8 sont également valables en remplaçant P par H .

3. Schéma des sous-groupes paraboliques d'un groupe réductif

3.1. — Soit E un S -schéma constant tordu fini (Exp. X, 5.1). Considérons le S -foncteur $\text{Of}(E)$, où $\text{Of}(E)(S')$ est l'ensemble des sous-schémas ouverts et fermés de $E_{S'}$ (ou, ce qui revient au même, l'ensemble des parties ouvertes et fermées de $E_{S'}$); alors $\text{Of}(E)$ est représentable par un S -schéma constant tordu fini. En effet, si $E = A_S$, où A est un ensemble fini, on a aussitôt $\text{Of}(E) \simeq \mathcal{P}(A)_S$ (où $\mathcal{P}(A)$ désigne l'ensemble des parties de A), et on conclut par descente des sous-schémas ouverts et fermés. On a évidemment :

$$\text{Of}(E_{S'}) = \text{Of}(E)_{S'}, \quad \text{Of}(E \times_S E') = \text{Of}(E) \times_S \text{Of}(E').$$

3.2. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif. Le foncteur $\underline{\text{Par}}(G)$ des sous-groupes paraboliques de G est défini par

$$\underline{\text{Par}}(G)(S') = \text{ensemble des sous-groupes paraboliques de } G_{S'}.$$

En particulier $G \in \underline{\text{Par}}(G)(S)$, $\underline{\text{Bor}}(G) \subset \underline{\text{Par}}(G)$. Nous nous proposons de définir un morphisme

$$\mathfrak{t} : \underline{\text{Par}}(G) \longrightarrow \text{Of}(\underline{\text{Dyn}}(G))$$

possédant les propriétés suivantes :

(i) \mathfrak{t} est fonctoriel en G (par rapport aux isomorphismes) et commute à l'extension de la base.

⁽⁹⁾N.D.E. : On a ajouté le corollaire 2.11, qui sera utilisé en 4.5.1 et 6.17.

(ii) Si (T, M, R, Δ, \dots) est un épinglage de G adapté au sous-groupe parabolique P (1.11), l'isomorphisme canonique $\underline{\text{Dyn}}(G) \simeq \Delta_S$ (Exp. XXIV, 3.4 (iii)) transforme $\mathfrak{t}(P)$ en $\Delta(P)_S$ (notations de 1.11, 1.12).

444

Soit d'abord P un sous-groupe parabolique de G et (T, M, R, Δ, \dots) un épinglage de G adapté à P . On définit $\mathfrak{t}(P)$ par (ii); le sous-schéma $\mathfrak{t}(P)$ de $\underline{\text{Dyn}}(G)$ ainsi construit est indépendant de l'épinglage choisi. En effet, si $(T', M', R', \Delta', \dots)$ est un autre épinglage de G adapté à P , l'unique automorphisme intérieur de G transformant le premier épinglage en le second provient de P (1.15); l'isomorphisme canonique $\Delta \xrightarrow{\sim} \Delta'$ transforme donc $\Delta(P)$ en $\Delta'(P)$, ce qui entraîne le résultat annoncé.

Si maintenant on ne suppose plus nécessairement (G, P) épinglable, il résulte aussitôt de 1.14 et de la définition de $\underline{\text{Dyn}}(G)$ (Exp. XXIV, 3.3) que l'on peut définir par descente un sous-schéma ouvert et fermé $\mathfrak{t}(P)$ de $\underline{\text{Dyn}}(G)$, unique, tel que pour tout $S' \rightarrow S$ tel que $(G, P)_{S'}$ soit épinglable, on ait $\mathfrak{t}(P)_{S'} = \mathfrak{t}(P_{S'})$.

Théorème 3.3. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif,

$$\mathfrak{t} : \underline{\text{Par}}(G) \longrightarrow \text{Of}(\underline{\text{Dyn}}(G))$$

le morphisme défini ci-dessus.

(i) Pour que deux sous-groupes paraboliques P et P' de G soient conjugués localement pour la topologie (fpqc) (cf. 1.3), il faut et il suffit que $\mathfrak{t}(P) = \mathfrak{t}(P')$.

(ii) $\underline{\text{Par}}(G)$ est représentable, et le morphisme \mathfrak{t} est lisse, projectif, à fibres géométriques intègres.

445

En vertu de 3.2 (i), et du fait que les automorphismes intérieurs de G opèrent trivialement sur $\underline{\text{Dyn}}(G)$ (Exp. XXIV, 3.4 (iv)), on a bien $\mathfrak{t}(P) = \mathfrak{t}(P')$ lorsque P et P' sont conjugués. Réciproquement, soient P et P' deux sous-groupes paraboliques de G tels que $\mathfrak{t}(P) = \mathfrak{t}(P')$; prouvons que P et P' sont conjugués dans G , localement pour la topologie (fpqc); on peut d'abord supposer les couples (G, P) et (G, P') épinglables (1.14); par conjugaison des épinglages dans G (Exp. XXIV, 1.5), on peut supposer qu'il existe un épinglage (T, M, R, Δ) de G adapté à P et P' . Alors $\mathfrak{t}(P) = \mathfrak{t}(P')$ implique $\Delta(P) = \Delta(P')$, donc $P = P'$ (cf. 1.4 (v)). On a donc prouvé (i). Pour démontrer (ii), reprenons les notations de Exp. XXII, 5.11.5. ⁽¹⁰⁾

On a un morphisme canonique $\underline{\text{Par}}(G) \rightarrow \mathcal{H}_c$, et il est clair (par exemple par réduction au cas épinglé) qu'il se place dans un carré cartésien (où les flèches verticales sont des monomorphismes)

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Par}}(G) & \xrightarrow{\mathfrak{t}} & \text{Of}(\underline{\text{Dyn}}(G)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}_c & \xrightarrow{cl} & \mathcal{C}l_c. \end{array}$$

⁽¹⁰⁾N.D.E. : On rappelle (cf. *loc. cit.*) que $\mathcal{H}_c = \mathcal{H}_c(G)$ désigne le foncteur des sous-groupes de G de type (RC), $\mathcal{C}l_c = \mathcal{C}l_c(G)$ le foncteur des « classes de conjugaison » de tels sous-groupes, et que $cl : \mathcal{H}_c \rightarrow \mathcal{C}l_c$ est la projection canonique.

Or (*loc. cit.*) \mathcal{H}_c est représentable et le morphisme cl est lisse, quasi-projectif, de présentation finie, à fibres géométriques intègres, donc il en est de même de \mathfrak{t} .

Il reste à prouver que \mathfrak{t} est propre ; mais c'est maintenant une assertion locale pour la topologie (fpqc), et on peut se ramener au cas épinglé $G = (G, T, M, R, \Delta, \dots)$. On a alors $\underline{\text{Dyn}}(G) \simeq \Delta_S$, et il suffit de prouver que pour toute partie Δ_1 de Δ , le S-schéma $\mathfrak{t}^{-1}((\Delta_1)_S)$ est propre sur S. Or si P_1 est le sous-groupe parabolique de G contenant T tel que $\Delta(P_1) = \Delta_1$, il résulte de (i) que le morphisme $G \rightarrow \underline{\text{Par}}(G)$ défini ensemblistement par $g \mapsto \text{int}(g)P_1$ induit un isomorphisme de $G/\underline{\text{Norm}}_G(P_1)$ sur $\mathfrak{t}^{-1}((\Delta_1)_S)$. Or, d'après 1.2, $G/\underline{\text{Norm}}_G(P_1) = G/P_1$ est projectif sur S.

Définition 3.4. — $\text{Of}(\underline{\text{Dyn}}(G))$ est appelé le schéma des types de paraboliqes de G ; $\mathfrak{t}(P)$ est appelé le type de P.

Corollaire 3.5. — Le S-foncteur $\underline{\text{Par}}(G)$ est représentable par un S-schéma lisse et projectif sur S. La décomposition

$$\underline{\text{Par}}(G) \longrightarrow \text{Of}(\underline{\text{Dyn}}(G)) \longrightarrow S$$

est la factorisation de Stein (EGA III, 4.3.3) du morphisme structural $\underline{\text{Par}}(G) \rightarrow S$. 446

Corollaire 3.6. — Pour chaque $t \in \text{Of}(\underline{\text{Dyn}}(G))(S)$, le S-schéma

$$\underline{\text{Par}}_t(G) = \mathfrak{t}^{-1}(t)$$

des sous-groupes paraboliques de G de type t est lisse et projectif sur S, homogène sous G. Si P est un sous-groupe parabolique de G, on a un isomorphisme canonique $G/P \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Par}}_{\mathfrak{t}(P)}(G)$. On a $\underline{\text{Par}}_{\emptyset}(G) = \underline{\text{Bor}}(G)$, $\underline{\text{Par}}_{\underline{\text{Dyn}}(G)}(G) \xrightarrow{\sim} S$.

Remarque 3.7. — Le S-schéma $\text{Of}(\underline{\text{Dyn}}(G))$ est muni d'une structure d'ordre naturelle (relation de domination, ici d'inclusion ensembliste, entre sous-schémas). Cette structure d'ordre est réticulée, en particulier la borne inférieure de deux sous-schémas ouverts et fermés de $\underline{\text{Dyn}}(G)_S$ est évidemment leur intersection. Remarquons d'ailleurs que si B est un sous-groupe de Borel de G, on peut définir le foncteur X des sous-groupes paraboliques de G contenant B. Le morphisme $X \rightarrow \text{Of}(\underline{\text{Dyn}}(G))$ induit par \mathfrak{t} est un isomorphisme (pour la structure de « schéma ordonné »), en vertu de l'assertion $P \subset Q \Rightarrow \mathfrak{t}(P) \subset \mathfrak{t}(Q)$ et de :

Lemme 3.8. — Soient S un schéma, G un S-groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G, t' une section de $\text{Of}(\underline{\text{Dyn}}(G))$ sur S, telle que $\mathfrak{t}(P) \subset t'$. Il existe un unique sous-groupe parabolique P' de G, contenant P, et tel que $\mathfrak{t}(P') = t'$.

Quitte à étendre la base, on peut supposer que P contient un sous-groupe de Borel B de G. L'unicité de P' résulte alors de 1.17. Pour démontrer l'existence, on peut se placer dans le cas déployé, auquel cas l'assertion est évidente, cf. n°1.

Remarques 3.8.1. — (i) L'assertion analogue à 3.8 obtenue en renversant les inclusions est évidemment fausse. Elle entraînerait par exemple que tout groupe de type A_1 possède un sous-groupe de Borel, ce qui n'est pas, cf. Exp. XX, n°5.

(ii) Il résulte aussitôt de ce qui précède que $\mathfrak{t}(P) \subset \mathfrak{t}(Q)$ signifie que localement pour (fpqc) ou (ét), P est conjugué à un sous-groupe de Q (il suffit d'ailleurs de

vérifier l'assertion sur les fibres géométriques). De plus, on verra au n°5 que l'on peut remplacer la topologie étale par la topologie de Zariski.

3.9. — Les discussions précédentes peuvent se reprendre dans le cas des sous-groupes critiques. Rappelons (Exp. XXII, 5.10.4 et 5.10.5) qu'un sous-groupe réductif H du groupe réductif G est *critique* si $H = \underline{\text{Centr}}_G(\text{rad}(H))$, qu'un sous-tore Q de G est un *tore C-critique* si $Q = \text{rad}(\underline{\text{Centr}}_G(Q))$ et que sous-groupes critiques et tores C-critiques ⁽¹¹⁾ sont en correspondance biunivoque (par $H \mapsto \text{rad}(H)$ et $Q \mapsto \underline{\text{Centr}}_G(Q)$).

Si (G, T, M, R) est un S-groupe déployé, le sous-groupe de G contenant T correspondant à la partie R' de R (Exp. XXII, 5.4.2) est critique si et seulement si R' est « vectorielle » (c'est-à-dire intersection de R avec un sous-espace vectoriel de $M \otimes \mathbb{Q}$), cf. Exp. XXII, 5.10.6.

Si G est un S-groupe réductif quelconque, on définira comme dans Exp. XXII, 5.11.5, un S-schéma étale fini $\mathcal{C}l_{\text{crit}}$, qui dans le cas déployé sera le schéma constant associé à l'ensemble des parties vectorielles de R modulo l'action du groupe de Weyl. Si $\underline{\text{Crit}}(G)$ désigne le « foncteur des sous-groupes critiques » de G , on aura un morphisme canonique $\underline{\text{Crit}}(G) \xrightarrow{cl} \mathcal{C}l_{\text{crit}}$, qui se placera dans un diagramme cartésien ⁽¹²⁾

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Crit}}(G) & \xrightarrow{cl} & \mathcal{C}l_{\text{crit}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}_c & \xrightarrow{cl} & \mathcal{C}l_c. \end{array}$$

448 **Proposition 3.10.** — Soient S un schéma, G un S-groupe réductif, $\underline{\text{Crit}}(G)$ le foncteur de ses sous-groupes critiques, $\mathcal{C}l_{\text{crit}}$ et $cl : \underline{\text{Crit}}(G) \rightarrow \mathcal{C}l_{\text{crit}}$ le S-schéma étale fini et le morphisme définis ci-dessus.

(i) Pour que les sous-groupes critiques H et H' de G soient conjugués (localement pour la topologie (fpqc), il faut et il suffit que $cl(H) = cl(H')$).

(ii) $\underline{\text{Crit}}(G)$ est représentable et le morphisme cl est lisse, affine, à fibres géométriques intègres.

Cela se démontre comme 3.3 excepté l'assertion « cl est affine ». Il suffit de prouver que $\underline{\text{Crit}}(G)$ est affine sur S . Or $\underline{\text{Crit}}(G)$ s'identifie naturellement au S-foncteur des tores critiques de G , et on a donc un monomorphisme canonique

$$\underline{\text{Crit}}(G) \longrightarrow M$$

où M est le schéma des sous-groupes de type multiplicatif de G (Exp. XI, 4.1). Pour prouver que $\underline{\text{Crit}}(G)$ est affine sur S , il suffit, en vertu de Exp. XII 5.3 de montrer que ce morphisme est une immersion ouverte et fermée, où encore en faisant le changement de base $M \rightarrow S$, de prouver l'assertion suivante : si Q est un sous-groupe de type

⁽¹¹⁾N.D.E. : On a remplacé ici « tore critique » par « tore C-critique », cf. *loc. cit.* Dans la suite, on écrira simplement « *tore critique* » au lieu de « *tore C-critique* ».

⁽¹²⁾N.D.E. : cf. 3.3, N.D.E. (10) pour les notations \mathcal{H}_c et $\mathcal{C}l_c$.

multiplicatif du groupe réductif G , les $S' \rightarrow S$ tels que $Q_{S'}$ soit un tore critique de $G_{S'}$ sont ceux qui se factorisent par un certain sous-schéma ouvert et fermé de S . Or dire que Q est un tore critique, c'est dire :

- (1) que Q est un tore,
- (2) Q étant un tore, que $\text{rad}(\underline{\text{Centr}}_G(Q))$, qui est aussi un tore, est de même dimension relative que Q .

Or ces deux conditions sont bien du type envisagé.

Corollaire 3.11. — *Le S -foncteur $\underline{\text{Crit}}(G)$ est représentable par un S -schéma lisse et affine sur S .* 449

Corollaire 3.12. — *Soit H un sous-groupe critique du S -groupe réductif G . Alors $G/\underline{\text{Norm}}_G(H)$ et G/H sont représentables par des S -schémas affines et lisses sur S .*

La première assertion résulte de 3.11, la seconde de la première et de Exp. XXII, 5.10.2.

Corollaire 3.13. — *Soit Q un sous-tore du S -groupe réductif G . Alors $G/\underline{\text{Centr}}_G(Q)$ est représentable par un S -schéma lisse et affine sur S . Il en est de même de $G/\underline{\text{Norm}}_G(Q)$ si Q est un sous-tore critique de G .*

En effet, $H = \underline{\text{Centr}}_G(Q)$ est critique (Exp. XXII, 5.10.5), et on a $\underline{\text{Norm}}_G(H) = \underline{\text{Norm}}_G(Q)$ si Q est critique (*loc. cit.* 5.10.8).

3.14. — En vertu de la conjugaison des sous-groupes de Levi des sous-groupes paraboliques de G , il existe un morphisme unique

$$u : \text{Of}(\underline{\text{Dyn}}(G)) \longrightarrow \mathcal{C}l_{\text{crit}}$$

tel que pour tout sous-groupe parabolique P de G , et tout sous-groupe de Levi L de P , on ait $\mathcal{C}l(L) = u(\mathfrak{t}(P))$, et que ceci soit vrai après tout changement de base.

3.15. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif. Considérons les S -foncteurs :
(13)

- $\underline{\text{PL}}(S') = \{\text{couples } P \supset L, P \text{ parabolique de } G_{S'}, L \text{ sous-groupe de Levi de } P\};$
- $\underline{\text{PT}}(S') = \{\text{couples } P \supset T, P \text{ parabolique de } G_{S'}, T \text{ tore maximal de } P\};$
- $\underline{\text{CT}}(S') = \{\text{couples } C \supset T, C \text{ sous-groupe critique de } G_{S'}, T \text{ tore maximal de } C\};$
- $\underline{\text{PLT}}(S') = \{\text{triplets } P \supset L \supset T, (P, T) \in \underline{\text{PT}}(S'), L \text{ sous-groupe de Levi de } P\}$

On a des morphismes évidents entre ces foncteurs et les foncteurs $\underline{\text{Par}}(G)$, $\underline{\text{Crit}}(G)$, 450

⁽¹³⁾N.D.E. : On a changé $\underline{\text{LT}}$ en $\underline{\text{CT}}$.

$\underline{\text{Tor}}(G)$ déjà introduits, et on a un diagramme commutatif en forme de cube tronqué (voir la figure suivante) :

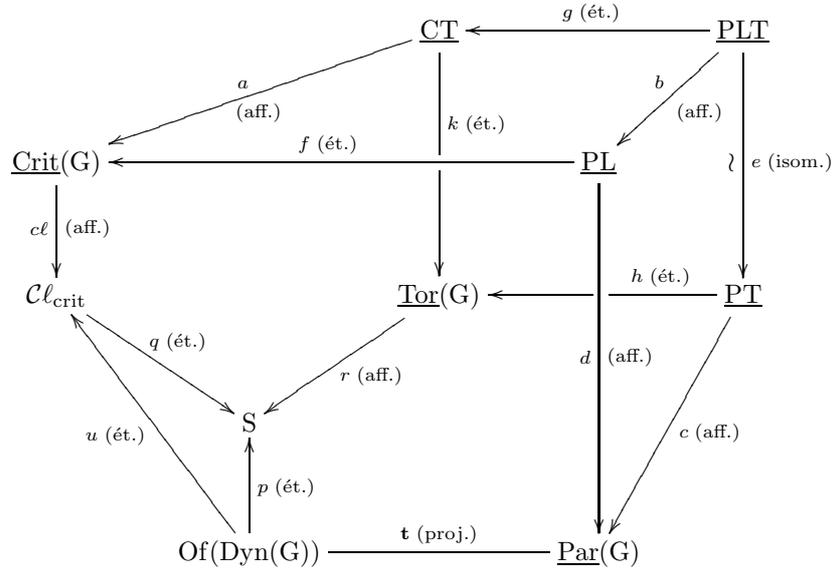


Figure 3.15.1

451 **Théorème 3.16.** — (cf. figure 3.15.1).

(i) *Tous les morphismes du diagramme sont lisses, surjectifs, et de présentation finie.*

(ii) *Tous les morphismes du diagramme, à l'exception de \mathbf{t} , sont affines ; le morphisme \mathbf{t} est projectif.*

(iii) *Tous les morphismes du diagramme sont soit étales finis, soit à fibres géométriques intègres : les morphismes f, g, h, k, p, q et u sont étales finis, les morphismes a, b, c, d, r et cl sont à fibres géométriques intègres, le morphisme e est un isomorphisme.*

(iv) *Le carré (a, b, f, g) est cartésien.*

Démonstration. Il est d'abord clair que e est un isomorphisme, par 1.6 (ii). D'autre part, (iv) est évident.

Le morphisme a est lisse, affine, à fibres géométriques intègres : en effet, par changement de base $\underline{\text{Crit}}(G) \rightarrow \underline{\text{S}}$, il suffit de vérifier que le morphisme $\underline{\text{Tor}}(L_0) \rightarrow \underline{\text{S}}$, où L_0 est le sous-groupe critique universel, possède ces propriétés ; or L_0 est réductif (par définition), et on est ramené à Exp. XXII, 5.8.3. Le morphisme b possède donc les mêmes propriétés, en vertu de (iv).

Le morphisme d est également lisse, affine, à fibres géométriques intègres, en vertu de 1.9; il en est donc de même de $c = dbe^{-1}$. Le morphisme r possède ces mêmes propriétés (Exp. XXII, 5.8.3), de même que le morphisme $c\ell$ (3.10).

D'autre part, on a déjà prouvé que les morphismes p et q sont étales finis surjectifs (3.1 et 3.9). Si nous prouvons que f et k sont étales finis surjectifs, les mêmes propriétés seront vraies pour g (par (iv)) et pour h (car $h = kge^{-1}$); comme les propriétés énoncées de \mathfrak{t} ont été démontrées en 3.3 (ii), il ne nous reste donc plus qu'à prouver que f (resp. k) est étale fini surjectif; faisons la démonstration pour k , celle pour f étant analogue.

Il nous suffit de prouver que si T est un tore maximal de G , le foncteur \underline{C} des sous-groupes critiques de G contenant T est représentable par un S -schéma étale fini à fibres non vides; on peut supposer G déployé par rapport à T ; soit alors E l'ensemble des parties vectorielles de R (système de racines du déploiement); \underline{C} est représentable par E_S (3.9), ce qui achève la démonstration. 452

Corollaire 3.17. — *Tous les foncteurs du diagramme précédent sont représentables par des S -schémas lisses sur S , et ils sont tous affines sur S , à l'exception de $\underline{\text{Par}}(G)$.*

Remarque 3.18. — (i) Le fait que le morphisme $f : \underline{\text{PL}} \rightarrow \underline{\text{Crit}}(G)$ soit étale surjectif entraîne qu'un sous-groupe de G est critique si et seulement si il est, localement pour la topologie étale, sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique de G .

En revanche, il ne faut pas croire qu'en général l'application $f(S) : \underline{\text{PL}}(S) \rightarrow \underline{\text{Crit}}(G)(S)$ soit surjective: il peut très bien arriver qu'un sous-groupe critique C de G ne provienne pas *sur* S d'un sous-groupe parabolique de G ; par exemple, un tore maximal n'est pas toujours contenu dans un sous-groupe de Borel (exemple: une forme non déployée de SL_2 , cf. Exp. XX, n°5).

(ii) De même, il peut arriver que le morphisme $u : \text{Of}(\underline{\text{Dyn}}(G)) \rightarrow \mathcal{C}l_{\text{crit}}$ ne soit pas un isomorphisme: deux sous-groupes paraboliques de types distincts peuvent avoir des sous-groupes de Levi de même type; exemple: dans un groupe de type A_2 , il y a deux types de sous-groupes paraboliques dont les sous-groupes de Levi sont de rang semi-simple 1 (correspondant aux deux sommets du diagramme), alors qu'il n'y a qu'un seul type de sous-groupes critiques de rang 1.

L'exemple analogue avec un groupe de type A_3 montre que, même sur un corps algébriquement clos, des sous-groupes paraboliques non isomorphes peuvent avoir des sous-groupes de Levi de même type. ⁽¹⁴⁾

Terminons ce numéro par une application à la théorie des fibrés principaux.

Lemme 3.20. — ⁽¹⁵⁾ *Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, F un fibré principal* 453

⁽¹⁴⁾N.D.E. : i.e. les sous-groupes paraboliques $P = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}$ et $P' = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}$ de GL_4 ne sont pas isomorphes (car $\text{rad}^u(P) \not\cong \text{rad}^u(P')$), mais leurs sous-groupes de Levi $L = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}$ et $L' = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}$ sont conjugués par l'élément $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

⁽¹⁵⁾N.D.E. : On a conservé la numérotation de l'original: il n'y a pas de n°3.19.

homogène sous G , G^F la forme tordue de G correspondante. Identifions $\underline{\text{Dyn}}(G)$ et $\underline{\text{Dyn}}(G^F)$ (Exp. XXIV, 3.5). Soit P un sous-groupe parabolique de G . On a un isomorphisme canonique

$$F/P \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Par}}_{\mathfrak{t}(P)}(G^F).$$

En particulier, pour que le groupe structural de F puisse se réduire à P , il faut et il suffit que G^F possède un sous-groupe parabolique de type $\mathfrak{t}(P)$.

Le démonstration se fait exactement comme en Exp. XXIV, 4.2.1.

3.21. — Si S est un schéma, G un S -groupe réductif, et si $t \in \text{Of}(\underline{\text{Dyn}}(G))(S)$, on note $H_t^1(S, G)$ la partie de $H^1(S, G)$ formée des classes de fibrés principaux F sous G tels que le groupe associé G^F possède un sous-groupe parabolique de type t . Si G possède lui-même un sous-groupe parabolique P de type t , $H_t^1(S, G)$ n'est autre que l'image de $H^1(S, P)$ dans $H^1(S, G)$, image qui ne dépend donc pas du P choisi.

4. Position relative de deux sous-groupes paraboliques

4.1. Un résultat préliminaire

Lemme 4.1.1. — Soient k un corps, G un k -groupe réductif, P et P' deux sous-groupes paraboliques de G .

- (i) Alors $P \cap P'$ est lisse, de même rang réductif que G et contient un tore maximal T de G .
- (ii) L'ensemble R' des racines de $P \cap P'$ par rapport à T est un sous-ensemble clos de l'ensemble R des racines de G par rapport à T .⁽¹⁶⁾

454 Supposons d'abord k algébriquement clos. Soit B (resp. B') un sous-groupe de Borel de P (resp. P'). On sait qu'il existe $g \in G(k)$ tel que $\text{int}(g)B = B'$. D'autre part, si T_0 est un tore maximal de B et si on pose $N = \underline{\text{Norm}}_G(T_0)$, on sait (théorème de Bruhat, *Bible*, §13.4, cor.1 au th. 3) que $G(k) = B(k)N(k)B(k)$. On voit donc qu'il existe $b, b_1 \in B(k)$ et $n \in N(k)$ tels que $g = bnb_1$, donc $\text{int}(b)\text{int}(n)B = B'$. On a alors

$$P \cap P' \supset B \cap B' = \text{int}(b)(B \cap \text{int}(n)B') \supset \text{int}(b)T_0.$$

Supposons maintenant k quelconque. Appliquant le résultat précédent, on voit que $P_{\bar{k}} \cap P'_{\bar{k}}$ contient un tore maximal de $G_{\bar{k}}$; par Exp. XXII, 5.4.5, on en déduit que $(P \cap P')_{\bar{k}}$ est lisse « le long de la section unité », donc lisse puisque l'on est sur un corps (Exp. VI_A 1.3.1) donc que $P \cap P'$ est lisse. Par Exp. VI_A 2.3.1, la composante neutre $(P \cap P')^0$ de $P \cap P'$ est donc un sous-groupe ouvert de $P \cap P'$, lisse sur S . On peut alors lui appliquer Exp. XIV, 1.1, d'où (i).

Enfin, l'ensemble R_P (resp. $R_{P'}$) des racines de P (resp. P') par rapport à T est clos et l'on a $R' = R_P \cap R_{P'}$, d'où (ii).

⁽¹⁶⁾N.D.E. : On a ajouté le point (ii), qui sera utile en 4.5.1.

Remarque 4.1.2. — On peut prouver ([BT65], 4.5) que $P \cap P'$ est *connexe*; ⁽¹⁷⁾ ceci sera utilisé en 4.5.1.

Remarque 4.1.3. — Le lemme précédent n'est pas vrai sur un schéma quelconque. En effet, soit par exemple G un groupe réductif sur un corps k algébriquement clos, et soit B un groupe de Borel de G . Prenons $G = X$ comme base et considérons les sous-groupes de Borel B_1 et B_2 de G_X , où $B_1 = B_X$ et $B_2 = \text{int}(g_0)B_1$, g_0 étant la section canonique (diagonale) de G_X . Pour chaque $g \in X(k)$, la fibre de $B_1 \cap B_2$ en g n'est autre que $B \cap \text{int}(g)B$. Si on suppose $B \neq G$, la dimension de cette fibre varie avec g , donc $B_1 \cap B_2$ ne peut être lisse sur X .

4.2. Position transversale

Théorème 4.2.1. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, P et Q deux sous-groupes paraboliques de G . Les conditions suivantes sur le couple (P, Q) sont équivalentes :

- (i) $\mathcal{L}ie(P/S) + \mathcal{L}ie(Q/S) = \mathcal{L}ie(G/S)$.
- (ii) Le morphisme canonique $P \times_S Q \rightarrow G$ est lisse.
- (ii') Le morphisme canonique $P \rightarrow G/Q$ est lisse.
- (iii) Le morphisme canonique $P \times_S Q \rightarrow G$ est ouvert.
- (iii') Le morphisme canonique $P \rightarrow G/Q$ est ouvert.
- (iv) Le morphisme canonique $P \times_S Q \rightarrow G$ est dominant fibre par fibre.
- (iv') Le morphisme canonique $P \rightarrow G/Q$ est dominant fibre par fibre.
- (v) Pour tout $s \in S$, « $P_{\bar{s}} \cap Q_{\bar{s}}$ est de dimension minimum », i.e. on a

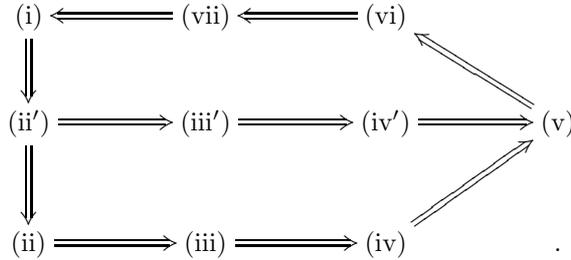
$$\dim(P_{\bar{s}} \cap Q_{\bar{s}}) = \dim P_{\bar{s}} + \dim Q_{\bar{s}} - \dim G_{\bar{s}}.$$

(vi) Il existe une famille couvrante pour la topologie étale $\{S_i \rightarrow S\}$, et pour chaque i un sous-groupe de Borel B_i de P_{S_i} et un sous-groupe de Borel B'_i de Q_{S_i} , tels que $B_i \cap B'_i$ soit un tore maximal de G_{S_i} .

(vii) Il existe une famille couvrante pour la topologie étale $\{S_i \rightarrow S\}$, et pour chaque i un déploiement (T_i, \dots, R_i) de G_{S_i} et un système de racines positives R_i^+ de R_i , tels que P_{S_i} (resp. Q_{S_i}) soit le sous-groupe de type (R) de G_{S_i} contenant T_i et défini par une partie $R_i^{(1)}$ (resp. $R_i^{(2)}$) de R contenant R_i^+ (resp. $-R_i^+$) (voir Exp. XXII, 5.4.2 et 5.2.1 pour les définitions).

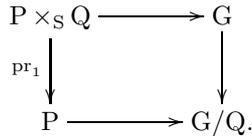
⁽¹⁷⁾N.D.E. : Compte tenu des détails ajoutés en 4.5.1, on a modifié ici l'original (qui indiquait « nous n'utiliserons pas ce fait »).

Démonstration. Nous allons démontrer le théorème suivant le diagramme logique



456 On a trivialement (ii) \Rightarrow (iii) et (ii') \Rightarrow (iii'). Si (iii) est vérifié, l'image ensembliste du morphisme $P \times_S Q \Rightarrow G$ est un ouvert de G qui contient la section unité ; comme les fibres de G sont connexes, cette image est dense sur chaque fibre, ce qui prouve (iv). On a de même (iii') \Rightarrow (iv').

On a (ii') \Rightarrow (ii), en vertu du diagramme cartésien



D'autre part (iv) ou (iv') entraîne (v), en vertu de la théorie de la dimension (cf. EGA IV₂, 5.6.6). On notera que l'on peut en effet supposer $S = \text{Spec}(k)$, k corps algébriquement clos, et que toute fibre non vide du morphisme (iv), resp. (iv'), en un point de $G(k)$, resp. de $(G/Q)(k)$, est isomorphe à $P \cap Q$ (comme le montre un calcul immédiat).

On a (vi) \Rightarrow (vii), par Exp. XXII, 5.5.1 (iv) et 5.9.2.

On a (vii) \Rightarrow (i), car pour vérifier que $\mathcal{L}ie(P) + \mathcal{L}ie(Q) = \mathcal{L}ie(G)$, on peut raisonner localement pour (fpqc), donc si (vii) est vérifié on peut supposer G déployé, $P \supset B_{R+}$ et $Q \supset B_{-R+}$ (notations habituelles), auquel cas on a déjà

$$\mathcal{L}ie(B_{R+}) + \mathcal{L}ie(B_{-R+}) = \mathcal{L}ie(G).$$

Prouvons que (i) implique (ii').

Soit $u : P \rightarrow G/Q$ le morphisme canonique ; pour prouver que u est lisse, on peut se contenter de le faire pour les fibres géométriques de u , car P et G/Q sont lisses sur S , et on peut donc supposer que S est le spectre d'un corps algébriquement clos. Comme le morphisme u est compatible avec l'action évidente de P (on a $u(pp') = pu(p')$) il suffit, par un argument de translation (cf. la démonstration de VI_B 1.3), de vérifier que u est lisse en $e \in P(k)$, i.e. (SGA 1, II 4.7) que l'application tangente à u en e est surjective ; mais celle-ci s'identifie naturellement à l'application canonique $\mathcal{L}ie(P) \rightarrow \mathcal{L}ie(G)/\mathcal{L}ie(Q)$, qui est surjective si (i) est vérifié.

457

Il ne nous reste plus donc qu'à vérifier la dernière assertion, c'est-à-dire (v) \Rightarrow (vi). Supposons d'abord que S soit le spectre d'un corps algébriquement clos. Par 4.1.1, il

existe un tore maximal T contenu dans P et Q ; soit R (resp. R_1 , resp. R_2) l'ensemble des racines de G (resp. P , resp. Q) relativement à T .

On a :

$$\begin{aligned} \dim(G) &= \dim(T) + \text{Card}(R), & \dim(P) &= \dim(T) + \text{Card}(R_1), \\ \dim(Q) &= \dim(T) + \text{Card}(R_2), & \dim(P \cap Q) &= \dim(T) + \text{Card}(R_1 \cap R_2), \end{aligned}$$

par Exp. XXII, 5.4.4 et 5.4.5 par exemple. La condition de (v) est donc équivalente à

$$\text{Card}(R_1 \cap R_2) = \text{Card}(R_1) + \text{Card}(R_2) - \text{Card}(R).$$

c'est-à-dire $R_1 \cup R_2 = R$. Pour démontrer (vi), il suffit, en vertu de Exp. XXII, 5.9.2 et 5.4.5, de prouver que $R_1 \cap -R_2$ contient un système de racines positives de R . On est donc ramené à prouver :

Lemme 4.2.2. — *Soit R un « système de racines » (par exemple l'ensemble des racines d'une donnée radicielle au sens de l'exposé XXI). Soient R_1 et R_2 deux parties closes de R contenant chacune un système de racines positives. Si $R_1 \cup R_2 = R$, alors $R_1 \cap -R_2$ contient un système de racines positives.*

En effet, comme $R_1 \cap -R_2 = R_3$ est évidemment clos, et en vertu de Exp. XXI, 3.3.6, il suffit de montrer que $R_3 \cup -R_3 = R$. Or on sait que $R_1 \cup -R_1 = R = R_2 \cup -R_2$, et on conclut grâce au fait élémentaire suivant : si A, A', B, B' sont quatre parties d'un ensemble E , et si $A \cup A' = B \cup B' = A \cup B = A' \cup B' = E$, on a $(A \cap B') \cup (A' \cap B) = E$.

Ceci achève la démonstration de (v) \Rightarrow (vi) dans le cas où la base est le spectre d'un corps algébriquement clos. Revenons maintenant au cas général et supposons (v) vérifié. Soit $s \in S$; en vertu de ce qui précède, on peut trouver un sous-groupe de Borel \overline{B} (resp. \overline{B}') de $P_{\overline{s}}$ (resp. $Q_{\overline{s}}$) tel que $\overline{B} \cap \overline{B}'$ soit un tore maximal de $G_{\overline{s}}$. 458

Comme le S -schéma $\underline{\text{Bor}}(P) \simeq \underline{\text{Bor}}(P/\text{rad}^u(P))$ des sous-groupes de Borel de P est lisse, on peut, appliquant le « lemme de Hensel » (cf. Exp. XI 1.10) et raisonnant localement pour la topologie étale (i.e. remplaçant S par un $S' \rightarrow S$ étale et couvrant s , et s par un point de sa fibre dans S') supposer qu'il existe un sous-groupe de Borel B de P se projetant sur \overline{B} ; on peut de même supposer qu'il existe un sous-groupe de Borel B' de Q se projetant sur \overline{B}' . Comme $\overline{B} \cap \overline{B}'$ est un tore maximal de G , il existe un ouvert U de S contenant s et tel que $B_U \cap B'_U$ soit un tore maximal de G_U (Exp. XXII, 5.9.4), ce qui démontre (vi). C.Q.F.D.

Définition 4.2.3. — Un couple (P, Q) vérifiant les conditions équivalentes (i) à (vii) du théorème 4.2.1 est dit *en position transversale*. On dit aussi que P est *en position transversale relativement à Q* , ou, par abus de langage, que P et Q sont en position transversale (mutuelle).

Vu (vi), cette définition coïncide dans le cas des sous-groupes de Borel avec celle de Exp. XXII, 5.9.1.

Corollaire 4.2.4. — *Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, P et Q deux sous-groupes paraboliques de G .*

(i) Pour que (P, Q) soit en position transversale, il faut et il suffit que pour chaque point s de S , le couple (P_s, Q_s) soit en position transversale ; si $S' \rightarrow S$ est un morphisme surjectif, et si $(P_{S'}, Q_{S'})$ est en position transversale, alors (P, Q) est en position transversale.

459 (ii) Il existe un sous-schéma ouvert U de S vérifiant la propriété suivante : pour qu'un morphisme $S' \rightarrow S$ se factorise par U , il faut et il suffit que $(P_{S'}, Q_{S'})$ soit en position transversale.

(iii) Considérons les sous-foncteurs

$$\begin{aligned} \underline{\text{Gen}}(G) &\subset \underline{\text{Par}}(G) \times_S \underline{\text{Par}}(G) \\ \underline{\text{Gen}}(/Q) &\subset \underline{\text{Par}}(G) \\ \underline{\text{Gen}}(P/Q) &\subset G \end{aligned}$$

définis comme suit : pour $S' \rightarrow S$, $\underline{\text{Gen}}(G)(S')$ est l'ensemble des couples de sous-groupes paraboliques de $G_{S'}$ en position transversale, $\underline{\text{Gen}}(/Q)(S')$ est l'ensemble des sous-groupes paraboliques de $G_{S'}$ en position transversale relativement à $Q_{S'}$, $\underline{\text{Gen}}(P/Q)(S')$ est l'ensemble des $g \in G(S')$ tels que $\text{int}(g)P_{S'}$ soit en position transversale relativement à $Q_{S'}$.

Chacun de ces foncteurs est représentable par un sous-schéma ouvert universellement schématiquement dense sur S ⁽¹⁸⁾ (cf. Exp. XVIII § 1) du S -schéma correspondant $\underline{\text{Par}}(G) \times_S \underline{\text{Par}}(G)$, resp. $\underline{\text{Par}}(G)$, resp. G .

Les assertions (i) résultent aussitôt de la description 4.2.1 (i) du terme « position transversale ». Pour démontrer (ii), on prend $U = S - \text{Supp}(\text{Coker } u)$ où u est le morphisme canonique $\mathcal{L}ie(P) \oplus \mathcal{L}ie(G) \rightarrow \mathcal{L}ie(G)$.

Comme on a des diagrammes cartésiens

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & \underline{\text{Par}}(G) & & \underline{\text{Par}}(G) & \xrightarrow{f'} & \underline{\text{Par}}(G) \times_S \underline{\text{Par}}(G) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \underline{\text{Gen}}(P/Q) & \longrightarrow & \underline{\text{Gen}}(/Q) & & \underline{\text{Gen}}(/Q) & \longrightarrow & \underline{\text{Gen}}(G) \end{array}$$

(où $f(g) = \text{int}(g)P$ et $f'(R) = (R, Q)$), il suffit de vérifier (iii) dans le cas de $\underline{\text{Gen}}(G)$.
460 Soit alors P_0 le sous-groupe parabolique canonique de $G_{\underline{\text{Par}}(G)}$; posons

$$X = \underline{\text{Par}}(G) \times_S \underline{\text{Par}}(G), \quad P = \text{pr}_1^*(P_0), \quad Q = \text{pr}_2^*(P_0);$$

appliquant aux sous-groupes paraboliques P et Q de G_X l'assertion (ii), on construit un sous-schéma ouvert U de X , qui comme on le vérifie aussitôt s'identifie bien à $\underline{\text{Gen}}(G)$. Il reste à vérifier l'assertion de densité, ce qui peut se faire sur les fibres géométriques ⁽¹⁹⁾ ; on peut donc supposer $S = \text{Spec}(k)$, k corps algébriquement clos ;

⁽¹⁸⁾N.D.E. : On a remplacé « relativement dense » par « universellement schématiquement dense sur S », cf. EGA IV₃, Déf. 11.10.8.

⁽¹⁹⁾N.D.E. : cf. EGA IV₃, 11.10.10.

comme $\underline{\text{Par}}(G)$ est lisse, il suffit de vérifier que $\underline{\text{Gen}}(G)$ coupe chaque composante irréductible de $\underline{\text{Par}}(G) \times_S \underline{\text{Par}}(G)$; autrement dit, par 3.3, il suffit de voir que si $t, t' \in \text{Of}(\underline{\text{Dyn}}(G))(S)$, il existe un couple (P, P') en position transversale, avec $\mathfrak{t}(P) = t, \mathfrak{t}(P') = t'$. Or cela est immédiat : on choisit un couple (B, B') de sous-groupes de Borel de G tel que $B \cap B'$ soit un tore maximal (on déploie G et on applique Exp. XXII, 5.9.2) puis on applique 3.8 pour construire $P \supset B$ et $P' \supset B'$, avec $\mathfrak{t}(P) = t, \mathfrak{t}(P') = t'$; P et P' sont des types voulus et sont en position transversale par 4.2.1 (vi).

Corollaire 4.2.5. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, P et Q deux sous-groupes paraboliques de G , le couple (P, Q) étant en position transversale.

(i) Soient P' et Q' deux sous-groupes paraboliques de G , de même type que P et Q respectivement. Pour que le couple (P', Q') soit en position transversale, il faut et il suffit qu'il soit conjugué au couple (P, Q) , localement pour la topologie étale. (N. B. On verra au §5 qu'on peut remplacer la topologie étale par la topologie de Zariski).

(ii) Le morphisme canonique $P \times_S Q \rightarrow G$ induit un morphisme lisse et surjectif $P \times_S Q \rightarrow \underline{\text{Gen}}(Q/P)$, et un isomorphisme

$$(P \times_S Q)/(P \cap Q) \simeq \underline{\text{Gen}}(Q/P)$$

(où $P \cap Q = R$ opère dans $P \times_S Q$ par $(p, q)r = (pr, r^{-1}q)$).

(iii) Le morphisme canonique $P \rightarrow \underline{\text{Par}}_{\mathfrak{t}(Q)}(G)$ (défini ensemblistement par $p \mapsto \text{int}(p)Q$) induit un morphisme lisse et surjectif $P \rightarrow \underline{\text{Gen}}(/P) \cap \underline{\text{Par}}_{\mathfrak{t}(Q)}(G)$, et un isomorphisme 461

$$P/(P \cap Q) \simeq \underline{\text{Gen}}(/P) \cap \underline{\text{Par}}_{\mathfrak{t}(Q)}(G).$$

(iv) Le morphisme canonique $G \rightarrow \underline{\text{Par}}_{\mathfrak{t}(P)}(G) \times_S \underline{\text{Par}}_{\mathfrak{t}(Q)}(G)$ (défini ensemblistement par $g \mapsto (\text{int}(g)P, \text{int}(g)Q)$) induit un morphisme lisse et surjectif $G \rightarrow \underline{\text{Gen}}(G) \cap (\underline{\text{Par}}_{\mathfrak{t}(P)}(G) \times_S \underline{\text{Par}}_{\mathfrak{t}(Q)}(G))$ et un isomorphisme

$$G/(P \cap Q) \simeq \underline{\text{Gen}}(G) \cap (\underline{\text{Par}}_{\mathfrak{t}(P)}(G) \times_S \underline{\text{Par}}_{\mathfrak{t}(Q)}(G)).$$

Démontrons (i). Il est clair que la condition est suffisante; prouvons qu'elle est nécessaire. Soit donc (P', Q') en position transversale. Comme P et P' sont conjugués localement pour la topologie étale, on peut supposer $P = P'$, et il nous suffit de prouver que si Q et Q' sont deux sous-groupes paraboliques de G , en position transversale relativement à P , et de même type, alors ils sont conjugués, localement pour la topologie étale, par une section de P . Utilisant 4.2.1 (vi), on peut supposer qu'il existe des sous-groupes de Borel B, B', B_1, B'_1 de P, P, Q, Q' respectivement, tels que $B \cap B_1 = T$ et $B' \cap B'_1 = T'$ soient des tores maximaux de G . Or les couples de Killing (B, T) et (B', T') de P sont conjugués localement dans P pour la topologie étale (1.16), et on peut supposer $B = B', T = T'$, auquel cas on a $B_1 = B'_1$ par Exp. XXII, 5.9.2, donc $Q = Q'$ par 3.8.

Les assertions (ii), (iii) et (iv) se démontrent de façon parallèle. Démontrons par exemple (ii); soit $g \in \underline{\text{Gen}}(Q/P)(S)$, i.e. soit $g \in G(S)$ tel que $\text{int}(g)Q$ soit en position transversale relativement à P . En vertu de la démonstration qui précède, Q et

462 $\text{int}(g)Q$ sont conjugués localement pour la topologie étale, par une section de P . Raisonnant localement pour cette topologie, on peut supposer qu'il existe $p \in P(S)$ tel que $\text{int}(g)Q = \text{int}(p)Q$, donc $p^{-1}g \in \underline{\text{Norm}}_G(Q)(S) = Q(S)$; ce qui prouve l'existence d'un $q \in Q(S)$ tel que $g = pq$. On a donc prouvé que le morphisme envisagé dans (ii) est couvrant pour la topologie étale. Comparant avec 4.2.1 (ii), on en déduit qu'il est lisse et surjectif. D'autre part, un raisonnement immédiat montre que la relation d'équivalence définie dans $P \times_S Q$ par le morphisme $P \times_S Q \rightarrow G$ est la relation d'équivalence associée à l'action du groupe $R = P \cap Q$ (opérant par $(p, q)r = (pr, r^{-1}q)$), ce qui démontre la dernière assertion de (ii) (car un morphisme lisse et surjectif est un épimorphisme effectif, par exemple).

Remarque 4.2.6. — Si P et Q sont en position transversale, on notera souvent $P \cdot Q$ l'ouvert $\underline{\text{Gen}}(Q/P)$ de G , notation justifiée par 4.2.5 (ii).

Proposition 4.2.7. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, P et Q deux sous-groupes paraboliques de G , le couple (P, Q) étant en position transversale.

(i) Le groupe $P \cap Q$ est lisse sur S (et en fait à fibres connexes par 4.1.2); introduisons alors $(P \cap Q)^0$ (cf. Exp. VI_B 3.10); c'est un sous-groupe de type (RC) de G (Exp. XXII, 5.11.1), dont le radical unipotent (loc. cit. 5.11.4) se décompose en produit direct

$$\text{rad}^u((P \cap Q)^0) = (\text{rad}^u(P) \cap Q) \times_S (P \cap \text{rad}^u(Q)).$$

(ii) Si S est affine, $H^1(S, \text{rad}^u(P \cap Q)^0) = 0$. Si S est semi-local, $P \cap Q$ contient un tore maximal de G .

En effet, $P \cap Q$ est lisse en vertu de 4.2.1 (ii) et du diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} P \times_S Q & \longrightarrow & G \\ \uparrow & & \uparrow \\ P \cap Q & \longrightarrow & S. \end{array}$$

463 Pour vérifier les assertions annoncées sur $(P \cap Q)^0$, on peut raisonner localement pour la topologie étale, donc en vertu de 4.2.1 (vii), supposer avoir choisi un déploiement (G, T, M, R) de G , tel que P et Q contiennent T et soient définis respectivement par des parties R_1 et R_2 de R , R_1 contenant un système de racines positives R_+ , et R_2 contenant le système opposé R_- . Soit Δ l'ensemble des racines simples de R_+ ; notons

$$A_1 = \Delta \cap -R_1, \quad A_2 = \Delta \cap R_2, \quad A = A_1 \cap A_2.$$

Par 1.4 (v) et 1.12, on a

$$\begin{aligned} R_1 &= R_+ \cup (R_- \cap -NA_1), & R_2 &= (R_+ \cap NA_2) \cup R_-, \\ \text{rad}^u(P) &= \prod_{\alpha \in R_1, \alpha \notin -R_1} U_\alpha, & \text{rad}^u(Q) &= \prod_{\alpha \in R_2, \alpha \notin -R_2} U_\alpha. \end{aligned}$$

Par Exp. XXII, 5.6.7, on a donc

$$\begin{aligned} \text{rad}^u(\text{P}) \cap \text{Q} &= \prod_{\alpha \in \text{R}_1 \cap \text{R}_2, \alpha \notin -\text{R}_1} \text{U}_\alpha = \prod_{\alpha \in \text{K}_2} \text{U}_\alpha, \\ \text{rad}^u(\text{Q}) \cap \text{P} &= \prod_{\alpha \in \text{R}_1 \cap \text{R}_2, \alpha \notin -\text{R}_2} \text{U}_\alpha = \prod_{\alpha \in \text{K}_1} \text{U}_\alpha, \end{aligned}$$

où K_2 est l'ensemble des racines positives, combinaisons linéaires des éléments de A_2 , mais non combinaisons linéaires des éléments de A , et K_1 l'ensemble des racines négatives, combinaisons linéaires des éléments de A_1 , mais non combinaisons linéaires des éléments de A . Il est clair que si $\alpha \in \text{K}_2, \beta \in \text{K}_1, \alpha + \beta$ n'est jamais une racine, ni nul, ce qui entraîne que les deux groupes ci-dessus commutent.

D'autre part, on sait par Exp. XXII, 5.4.5, que $\text{H} = (\text{P} \cap \text{Q})^0$ est défini par l'ensemble de racines $\text{R}_1 \cap \text{R}_2$, soit 464

$$\text{R}_1 \cap \text{R}_2 = (\text{R}_+ \cap \text{NA}_2) \cup (\text{R}_- \cap -\text{NA}_1).$$

Comme $\text{R}_1 \cap \text{R}_2$ est *clos*, H est de type (RC) par définition (Exp. XXII 5.11.1), et par *loc. cit.* 5.11.3 et 5.11.4, on a

$$\text{rad}^u(\text{H}) = \prod_{\alpha \in \text{K}} \text{U}_\alpha,$$

où K est l'ensemble des $\alpha \in \text{R}_1 \cap \text{R}_2$ tels que $\alpha \notin -(\text{R}_1 \cap \text{R}_2)$. Comme la partie symétrique de $\text{R}_1 \cap \text{R}_2$ est évidemment $\text{R} \cap \mathbb{Z}\text{A}$, on voit aussitôt que $\text{K} = \text{K}_1 \cup \text{K}_2$, ce qui termine la démonstration de (i).

La première assertion de (ii) résulte alors de (i) et de 2.10; démontrons la seconde. Comme $(\text{P} \cap \text{Q})^0 / \text{rad}^u((\text{P} \cap \text{Q})^0)$ est réductif, il possède un tore maximal T si la base est semi-locale. L'image réciproque de T dans $(\text{P} \cap \text{Q})^0$ est un sous-groupe N de type (R) de G à fibres résolubles, et on a $\text{N}^u = \text{rad}^u((\text{P} \cap \text{Q})^0)$ (Exp. XXII, 5.6.9). Le schéma des tores maximaux de N est un fibré principal homogène sous N^u (*loc. cit.* 5.6.13), donc possède une section, car $\text{H}^1(\text{S}, \text{N}^u) = 0$.

4.3. Sous-groupes paraboliques opposés

4.3.1. — Si G est un S-groupe réductif, on a défini en Exp. XXIV, 3.16.6, un « automorphisme extérieur » canonique s_G d'ordre ≤ 2 ⁽²⁰⁾ de G , donc un automorphisme canonique d'ordre ≤ 2 de $\text{Dyn}(\text{G})$, donc également un automorphisme d'ordre ≤ 2 de $\text{Of}(\text{Dyn}(\text{G}))$, que nous noterons également s_G ou simplement s . Deux types de sous-groupes paraboliques $t, t' \in \text{Of}(\text{Dyn}(\text{G}))(\text{S})$ seront dits *opposés* lorsque $t = s_G(t')$.

Théorème 4.3.2. — Soient S un schéma, G un S-groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G .

(a) Si L est un sous-groupe de Levi de P , il existe un unique sous-groupe parabolique P' de G tel que $\text{P} \cap \text{P}' = \text{L}$. 465

⁽²⁰⁾N.D.E. : On a remplacé « d'ordre 2 » par « d'ordre ≤ 2 » car s_G peut être trivial (par exemple si G est de type $\text{A}_1, \text{B}_n, \text{C}_n, \dots$).

(b) Pour tout sous-groupe parabolique Q de G , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) Pour tout $s \in S$, $((P \cap Q)_{\overline{s}})^0$ (qui est lisse par 4.1.1) est réductif.
- (ii) $P \cap Q$ est un sous-groupe de Levi de P et de Q .
- (iii) P et Q sont de types opposés, et le couple (P, Q) est en position transversale (cf. 4.2.3).
- (iv) P et Q sont de types opposés et $\text{rad}^u(P) \cap Q = e$.
- (v) $\text{rad}^u(P) \cap Q = \text{rad}^u(Q) \cap P = e$.
- (vi) Le morphisme canonique $\text{rad}^u(P) \times_S Q \rightarrow G$ est une immersion ouverte.
- (vi') Le morphisme canonique $\text{rad}^u(P) \rightarrow G/Q$ est une immersion ouverte.
- (vii) Il existe une famille couvrante pour la topologie étale $\{S_i \rightarrow S\}$, et pour chaque i un déploiement (T_i, M_i, R_i) de G_{S_i} , et une partie $R_i^{(1)}$ de R_i telle que P_{S_i} (resp. Q_{S_i}) soit le sous-groupe de type (R) de G_{S_i} contenant T_i et défini par $R_i^{(1)}$ (resp. par $R_i^{(2)} = -R_i^{(1)}$).

Démonstration. Démontrons d'abord la seconde partie du théorème; on voit tout d'abord que (iii) \Leftrightarrow (vii) en vertu de 4.2.1 (vii) et de la définition de s_G dans le cas déployé (Exp. XXII, 3.16.2 (iv)); on a évidemment (ii) \Rightarrow (i); on a (vi') \Rightarrow (vi) par changement de base $G \rightarrow G/Q$.

466

Supposons maintenant (vii) vérifié, et prouvons toutes les autres conditions; comme elles sont locales pour la topologie étale, on peut supposer $G = (G, T, M, R)$ déployé, P défini par la partie R' de R et Q par la partie $-R'$. Si L est le sous-groupe de type (R) de G contenant T défini par $R' \cap -R'$, il est clair par Exp. XXII, 5.11.3 que L est un sous-groupe de Levi commun à P et Q . Mais $P = L \cdot \text{rad}^u(P)$, $Q = L \cdot \text{rad}^u(Q)$, et par Exp. XXII, 5.6.7, $\text{rad}^u(P) \cap Q = Q \cap \text{rad}^u(P) = e$; donc $P \cap Q = L$, et on a prouvé (ii) et (v). Comme P et Q sont en position transversale, le morphisme canonique $P \rightarrow G/Q$ induit une immersion ouverte $P/P \cap Q \rightarrow G/Q$ (4.2.1); mais le morphisme canonique $\text{rad}^u(P) \rightarrow P/P \cap Q = P/L$ est un isomorphisme, ce qui fait qu'on a prouvé (vi'). Compte tenu de ce qu'on a déjà vu, toutes les assertions sont donc des conséquences de (vii).

Il nous suffit maintenant de prouver que l'une quelconque des assertions (i), (iv), (v), (vi) implique (vii); comme on a déjà prouvé l'équivalence de (ii) et de (iii), il suffit de faire la démonstration sur les fibres géométriques et on peut supposer que S est le spectre d'un corps algébriquement clos. Par 4.1.1, il existe un tore maximal T de G contenu dans $P \cap Q$. Soit R (resp. R_1 , resp. R_2) l'ensemble des racines de G (resp. P , resp. Q) relativement à T .

Soit R_1^a la partie asymétrique de R_1 (i.e. $R_1^a = \{\alpha \in R_1, -\alpha \notin R_1\}$). Introduisons de même R_2^a . On doit prouver que $R_1 = -R_2$.

— La condition (i) entraîne que $R_1 \cap R_2$ est symétrique; soit $\alpha \in R_1$; si $\alpha \notin R_2$, alors $\alpha \in -R_2$, et si $\alpha \in R_2$, alors $\alpha \in R_1 \cap R_2 = -(R_1 \cap R_2) \subset -R_2$; on a donc $R_1 \subset -R_2$, donc par symétrie $R_1 = -R_2$.

– La condition (iv) entraîne $\text{Card}(R_1) = \text{Card}(R_2)$ et $R_1^a \cap R_2 = \emptyset$; la deuxième condition est équivalente à $R_2 \subset -R_1$; la première donne alors $R_2 = -R_1$.

– La condition (v) entraîne $R_1^a \cap R_2 = R_2^a \cap R_1 = \emptyset$, donc $R_2 \subset -R_1$ et $R_1 \subset -R_2$, ce qui donne encore $R_2 = -R_1$.

– La condition (vi) entraîne $\mathcal{L}ie(\text{rad}^u(P)) \oplus \mathcal{L}ie(Q) = \mathcal{L}ie(G)$, ce qui entraîne que R est la réunion disjointe de R_2 et R_1^a donc que $R_2 = -R_1$. 467

Ceci achève la démonstration de la seconde partie du théorème. Prouvons la première; remarquons d'abord qu'en vertu de (vii) \Rightarrow (ii), on a déjà démontré l'existence localement pour la topologie étale du groupe P' cherché; il reste donc à en prouver l'unicité, et cela peut se faire également localement pour la topologie étale. On peut donc supposer G déployé relativement à un tore maximal T de L , et P (resp. P') défini par une partie R_1 (resp. R_1') du système R des racines.

Par hypothèse $R_1 \cap R_1'$ est symétrique; raisonnant comme plus haut, on en tire $R_1' = -R_1$, ce qui prouve que P' est déterminé par P et L et achève la démonstration.

Définition 4.3.3. — Deux sous-groupes paraboliques de G vérifiant les conditions équivalentes (i) à (vii) de 4.3.2 sont dits *opposés*. Si P est un sous-groupe parabolique de G , et si L est un sous-groupe de Levi de P (resp. et si T est un tore maximal de P), on appelle sous-groupe parabolique *opposé à P relativement à L (resp. T)* l'unique sous-groupe parabolique Q de G tel que $P \cap Q = L$ (resp. tel que $P \cap Q$ soit l'unique sous-groupe de Levi de P contenant T , cf. 1.6, ou encore tel que $P \cap Q$ contienne T et que P et Q soient opposés).

En vertu de 4.3.2 (iii), on tire aussitôt de 4.2.4 et 4.2.5 des résultats parallèles; donnons-en un échantillon.

Corollaire 4.3.4. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, P et Q deux sous-groupes paraboliques de G . 468

(i) Pour que P et Q soient opposés, il faut et il suffit que pour tout point $s \in S$, $P_{\bar{s}}$ et $Q_{\bar{s}}$ soient opposés. Si $S' \rightarrow S$ est un morphisme surjectif, et si $P_{S'}$ et $Q_{S'}$ sont opposés, alors P et Q sont opposés.

(ii) Le foncteur $\underline{\text{Opp}}(G)$, tel que pour $S' \rightarrow S$, $\underline{\text{Opp}}(G)(S')$ soit l'ensemble des couples de sous-groupes paraboliques opposés de $G_{S'}$, est représentable par un sous-schéma ouvert de $\underline{\text{Par}}(G)^2$. Le foncteur $\underline{\text{Opp}}(/P)$ tel que pour $S' \rightarrow S$, $\underline{\text{Opp}}(/P)(S')$ soit l'ensemble des sous-groupes paraboliques de $G_{S'}$ opposés à $P_{S'}$ est représentable par un sous-schéma ouvert universellement schématiquement dense sur S ⁽²¹⁾ de $\underline{\text{Par}}_{s(t(P))}(G)$.

(iii) Supposons P et Q opposés; soient P' et Q' deux sous-groupes paraboliques de G , P' étant de même type que P . Pour que P' et Q' soient opposés, il faut et il suffit que localement pour la topologie étale, le couple (P', Q') soit conjugué au couple (P, Q) . (N. B. On verra au § 5 qu'on peut remplacer la topologie étale par la topologie de Zariski).

⁽²¹⁾N.D.E. : On a remplacé « relativement dense » par « universellement schématiquement dense sur S », cf. EGA IV₃, Déf. 11.10.8.

Corollaire 4.3.5. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G .

469 (i) Le morphisme $\underline{\text{Opp}}(/P) \rightarrow \underline{\text{Lev}}(P)$ (cf. 1.9) défini ensemblistement par $Q \mapsto P \cap Q$, est un isomorphisme ; $\underline{\text{Opp}}(/P)$ est un fibré principal homogène sous $\text{rad}^u(P)$ ($\text{rad}^u(P)$ opérant par automorphismes intérieurs). Si S est affine, il existe un sous-groupe parabolique de G opposé à P .

(ii) Supposons S semi-local ; soit $\{s_i\}$ l'ensemble de ses points fermés ; soit, pour chaque i , Q_i un sous-groupe parabolique de G_{s_i} , opposé à P_{s_i} . Il existe un sous-groupe parabolique Q de G , opposé à P , et tel que $Q_{s_i} = Q_i$ pour chaque i .

(iii) Le morphisme $\underline{\text{Opp}}(G) \rightarrow \underline{\text{PL}}$ (cf. 3.15) défini ensemblistement par $(P, Q) \mapsto (P, P \cap Q)$ est un isomorphisme.

Tout cela résulte de la première partie du théorème et de 1.9, 2.3 et 2.8.

Remarque 4.3.6. — Soient P et Q deux sous-groupes paraboliques opposés de G , et soit $P \cdot Q$ le sous-schéma ouvert de G , image faisceautique de $P \times_S Q$, introduit en 4.2.6. Le « morphisme produit » $G \times_S G \rightarrow G$ induit des isomorphismes :

$$\text{rad}^u(P) \times_S Q \xrightarrow{\sim} P \cdot Q \xleftarrow{\sim} P \times_S \text{rad}^u(Q).$$

Cela résulte en effet de 4.3.2 (ou de 4.2.5 (ii)) et du fait que $P \cap Q$ est un sous-groupe de Levi de P et de Q , donc que $P = \text{rad}^u(P) \cdot (P \cap Q)$ et $Q = \text{rad}^u(Q) \cdot (P \cap Q)$.

470 On a de même un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{rad}^u(P) & \hookrightarrow & G/Q \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \underline{\text{Opp}}(/P) & \hookrightarrow & \underline{\text{Par}}_{\text{t}(Q)}(G), \end{array}$$

où les flèches verticales sont induites par $g \mapsto \text{int}(g)Q$.

4.4. Position osculatrice

Proposition 4.4.1. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, P et Q deux sous-groupes paraboliques de G . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $P \cap Q$ est un sous-groupe parabolique de G .
- (ii) $P \cap Q$ contient localement pour la topologie étale un sous-groupe de Borel de G .
- (iii) $P \cap Q$ contient localement pour la topologie étale un tore maximal de G et, pour tout $S' \rightarrow S$ et tout tore maximal T de $G_{S'}$ contenu dans $P_{S'}$ et $Q_{S'}$, l'opposé de $P_{S'}$ relativement à T est en position transversale relativement à $Q_{S'}$.
- (iv) Il existe une famille couvrante pour la topologie étale $\{S_i \rightarrow S\}$, et pour chaque i un tore maximal T_i de G_{S_i} contenu dans P_{S_i} et Q_{S_i} , et tel que l'opposé de P_{S_i} relativement à T_i soit en position transversale relativement à Q_{S_i} .

471 (v) Il existe une famille couvrante pour la topologie étale $\{S_i \rightarrow S\}$, et pour chaque i un déploiement (T_i, M_i, R_i) de G_{S_i} tel que P_{S_i} (resp. Q_{S_i}) soit le sous-groupe de type (R) de G_{S_i} contenant T_i et défini par un ensemble de racines $R_i^{(1)}$ (resp. $R_i^{(2)}$), $R_i^{(1)} \cap R_i^{(2)}$ contenant un système de racines positives de R .

De plus, si ces conditions sont vérifiées, on a $\mathfrak{t}(P \cap Q) = \mathfrak{t}(P) \cap \mathfrak{t}(Q)$ (avec les notations de 3.2).

On a (v) \Rightarrow (ii) et (iii) \Rightarrow (iv) trivialement. D'autre part, (ii) \Rightarrow (i) par 1.18. On a (iv) \Rightarrow (v) : en effet, on peut supposer G déployé, P (resp. Q) défini par l'ensemble de racines R_1 (resp. R_2) ; l'opposé de P est alors défini par $-R_1$, et on est ramené au lemme 4.2.2. On prouve (i) \Rightarrow (iii) par déploiement de la même manière. Enfin, la dernière assertion du théorème peut se démontrer localement pour la topologie étale ; on peut supposer que $P \cap Q$ contient un sous-groupe de Borel B de G et on est ramené à 3.7.

Définition 4.4.2. — Deux sous-groupes paraboliques de G vérifiant les conditions (i) à (v) de 4.4.1 sont dits *en position osculatrice*.

Corollaire 4.4.3. — Soient P et Q deux sous-groupes paraboliques en position osculatrice et soient P' et Q' deux sous-groupes paraboliques de G , de même type que P et Q 472 respectivement ; pour que P' et Q' soient en position osculatrice, il faut et il suffit que le couple (P', Q') soit conjugué au couple (P, Q) , localement pour la topologie étale.

Il suffit de prouver que si P et P' sont en position osculatrice par rapport à Q , ils sont conjugués, localement pour (ét), par une section de Q . Or $P \cap Q$ et $P' \cap Q$ sont deux sous-groupes paraboliques de même type contenus dans Q , donc sont conjugués, localement pour (ét) par une section de Q , en vertu de la partie (ii) du lemme ci-dessous. On peut donc supposer $P \cap Q = P' \cap Q$; on a alors $P = P'$, par la partie (i) du même lemme :

Lemme 4.4.4. — Soient P, P' et Q trois sous-groupes paraboliques du S -groupe réductif G .

(i) Pour que $P = P'$, il faut et il suffit que P et P' soient en position osculatrice et de même type.

(ii) Si $P \subset Q, P' \subset Q$, et si $g \in G(S)$ est tel que $\text{int}(g)P$ et P' soient en position osculatrice, alors $g \in Q(S)$.

La partie (i) résulte trivialement de la dernière assertion de 4.4.1. Démontrons (ii) : Q et $\text{int}(g)Q$ contiennent $P' \cap \text{int}(g)P$, donc sont en position osculatrice ; ils coïncident par (i), donc $g \in \underline{\text{Norm}}_G(Q)(S) = Q(S)$.

Remarquons que les assertions (iii) et (iv) du théorème donnent aussitôt :

473

Corollaire 4.4.5. — Soient P, P' et Q trois sous-groupes paraboliques du S -groupe réductif G , contenant le même tore maximal T de G . Supposons P et P' opposés relativement à T . Pour que Q soit en position osculatrice relativement à P , il faut et il suffit qu'il soit en position transversale relativement à P' . Sous ces conditions $P \cap Q$ est aussi en position transversale relativement à P' .

Corollaire 4.4.6. — Soient P et Q deux sous-groupes paraboliques de G contenant le même tore maximal T . Pour que P et Q soient en position transversale, il faut et il suffit qu'il existe deux sous-groupes paraboliques $P' \subset P$ et $Q' \subset Q$ de G , opposés relativement à T ; on peut même choisir $\mathfrak{t}(P') = \mathfrak{t}(P) \cap s(\mathfrak{t}(Q))$. ⁽²²⁾

La condition est évidemment suffisante (4.2.1 (i) et 4.3.2 (iii)). Montrons qu'elle est nécessaire; soit P^- (resp. Q^-) l'opposé de P (resp. Q) relativement à T . Par 4.4.5, $P^- \cap Q$ est en position transversale relativement à P et Q^- , donc aussi relativement à $P \cap Q^-$ par une nouvelle application de 4.4.5, de plus

$$\mathfrak{t}(P^- \cap Q) = \mathfrak{t}(P^-) \cap \mathfrak{t}(Q) = s(\mathfrak{t}(P)) \cap s(\mathfrak{t}(Q^-)) = s(\mathfrak{t}(P) \cap \mathfrak{t}(Q^-)) = s(\mathfrak{t}(P \cap Q^-)),$$

474 donc $P^- \cap Q = P'$ et $P \cap Q^- = Q'$ sont opposés (4.3.2 (iii)); mais $P' \cap Q' \supset T$, donc ils sont bien opposés relativement à T .

4.5. Position standard

Dans ce numéro, nous indiquons brièvement comment certains des résultats précédents se généralisent.

Proposition 4.5.1. — Si P_1 et P_2 sont deux sous-groupes paraboliques du S -groupe réductif G , les conditions suivantes sont équivalentes : ⁽²³⁾

- (i) $P_1 \cap P_2$ est lisse.
- (ii) $P_1 \cap P_2$ est un sous-groupe de type (R) (ou de type (RC)) de G .
- (iii) $P_1 \cap P_2$ contient localement pour la topologie (fpqc) un tore maximal de G .
- (iv) $P_1 \cap P_2$ contient localement pour la topologie de Zariski un tore maximal de G .

Lorsque S est semi-local, ces conditions équivalent de plus à :

- (v) $P_1 \cap P_2$ contient un tore maximal de G .

Démonstration. ⁽²³⁾ Évidemment, (iv) \Rightarrow (iii) (et (v) \Rightarrow (iv) lorsque S est semi-local), et (ii) \Rightarrow (i) d'après Exp. XXII, Déf. 5.2.1. On va montrer (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii), puis que (iii) entraîne (i) et (iv) (et aussi (v) lorsque S est semi-local). Posons $K = P_1 \cap P_2$. D'après 4.1.1 et [BT65], 4.5, chaque fibre géométrique $K_{\bar{s}}$ contient un tore maximal $T_{\bar{s}}$ de $G_{\bar{s}}$ et est connexe, et l'ensemble des racines de $K_{\bar{s}}$ par rapport à $T_{\bar{s}}$ est un sous-ensemble clos de l'ensemble des racines de $G_{\bar{s}}$ par rapport à $T_{\bar{s}}$. Donc, si K est lisse sur S , alors c'est un sous-groupe de type (RC) (donc a fortiori de type (R)), cf. Exp. XXII 5.2.1 et 5.11.1. On a donc (i) \Leftrightarrow (ii).

Si K est un sous-groupe de type (R), il contient localement pour la topologie étale un tore maximal de G , d'après Exp. XXII 2.2 et Exp. XIX 6.1. Donc (ii) \Rightarrow (iii).

Supposons (iii) vérifié et montrons que K est lisse. Par descente (fpqc), on peut supposer que $G = (G, T, M, R)$ est déployé, où T est un tore maximal contenu dans $P \cap Q$, et qu'il existe deux parties closes R_1 et R_2 de R telles que $P = H_{R_1}$ et $Q = H_{R_2}$.

⁽²²⁾N.D.E. : Rappelons que l'involution s a été définie en 4.3.1.

⁽²³⁾N.D.E. : On a ajouté la démonstration de l'équivalence de ces conditions (ainsi que la condition (v), utilisée implicitement en 6.17 de l'original); en conséquence, on a transformé le n°4.5.1 en la proposition 4.5.1 plus la définition 4.5.1.1.

Comme K est à fibres connexes, il résulte de Exp. XXII 5.4.5 que K égale $H_{R_1 \cap R_2}$, donc est lisse sur S et de type (RC).

Soient R_1^s la partie symétrique de R_1 et $R_1^a = R_1 - R_1^s$; alors $\text{rad}^u(P_1) = H_{R_1^a}$. Comme noté dans la preuve de [BT65], 4.4, $R' = (R_1^s \cap R_2) \cup R_1^a$ est une partie close de R telle que $R' \cup (-R') = R$; donc, d'après Exp. XXI 3.3.6, R' contient un système de racines positives de R . De plus, la partie symétrique de R' est $R_1^s \cap R_2^s$, qui est contenue dans $R_1 \cap R_2$.

On déduit de ce qui précède que $P' = K \cdot \text{rad}^u(P)$ est un sous-groupe parabolique de G , et que K est un sous-groupe de type (RC) de P' tel que $\text{rad}^u(K) = K \cap \text{rad}^u(P')$. Donc, d'après 2.11, K possède un sous-groupe de Levi L . Il résulte alors de Exp. XIV 3.20 et 3.21 que K vérifie l'assertions (iv), ainsi que l'assertion (v) lorsque S est semi-local. Ceci prouve 4.5.1.

Définition 4.5.1.1. — ⁽²⁴⁾ Lorsque les conditions précédentes sont réalisées, on dit que P et Q sont en *position mutuelle standard*; c'est par exemple le cas si P et Q sont en position transversale, ou en position osculatrice, ou si la base est le spectre d'un corps. C'est une notion stable par extension de la base et locale pour la topologie (fpqc).

4.5.2. — Soient (P, Q) et (P', Q') deux couples de sous-groupes paraboliques de G , en position standard, et soit H le sous-foncteur de G défini comme suit : $H(S')$ est l'ensemble des $g \in G(S')$ tels que $\text{int}(g)P = P'$ et $\text{int}(g)Q = Q'$. C'est un sous-schéma fermé de G , lisse sur S et formellement principal homogène sous $P \cap Q$. On en déduit que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) (P, Q) et (P', Q') sont conjugués localement pour la topologie (fpqc),
- (ii) (P, Q) et (P', Q') sont conjugués localement pour la topologie étale.
- (iii) (P, Q) et (P', Q') sont conjugués sur chaque fibre géométrique.

On dit alors que les couples (P, Q) et (P', Q') ont même *type de position mutuelle*. C'est une notion stable par changement de base et locale pour la topologie (fpqc).

4.5.3. — Soit $\text{Stand}(G)$ le sous-foncteur de $\text{Par}(G) \times_S \text{Par}(G)$ « formé des couples en position mutuelle standard ». Alors $\text{Stand}(G)$ est représentable, il existe un S -schéma étale et fini TypeStand (« schéma des types de position mutuelle standard »), et un morphisme lisse, de présentation finie, à fibres géométriques irréductibles (et donc en particulier fidèlement plat)

$$t_2 : \text{Stand}(G) \longrightarrow \text{TypeStand}$$

qui est un quotient de $\text{Stand}(G)$ par l'action de G : deux sections de $\text{Stand}(G)$ (sur un $S' \rightarrow S$ quelconque), ont même type de position mutuelle si et seulement si elles

⁽²⁴⁾N.D.E. : voir la N.D.E. (23). D'autre part, pour un exemple de sous-groupes paraboliques P, Q qui ne sont pas en position standard, voir 7.11 plus loin.

ont même image par \mathbf{t}_2 . On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{\text{Stand}}(G) & \xrightarrow{\mathbf{t}_2} & \underline{\text{TypeStand}} \\
 \downarrow & & \downarrow q \\
 \underline{\text{Par}}(G) \times_S \underline{\text{Par}}(G) & \xrightarrow{\mathbf{t} \times \mathbf{t}} & \text{Of}(\underline{\text{Dyn}}(G)) \times_S \text{Of}(\underline{\text{Dyn}}(G)),
 \end{array}$$

où le morphisme q peut se décrire par descente de la manière suivante : si (P, Q) est un couple de sous-groupes paraboliques de G , en position relative standard, et si T est un tore maximal de $P \cap Q$, alors le morphisme $\underline{\text{Norm}}_G(T) \rightarrow \underline{\text{Stand}}(G)$ défini ensemblistement par $n \mapsto (P, \text{int}(n)Q)$ induit un isomorphisme

$$W_P(T) \backslash W_G(T) / W_Q(T) \simeq q^{-1}(\mathbf{t}(P), \mathbf{t}(Q)).$$

(Le premier membre désigne le faisceau des doubles classes ...). Ces assertions se démontrent sans difficulté (remarquer en particulier que $\mathbf{t}_2^{-1}(\mathbf{t}_2(P, Q)) \simeq G/(P \cap Q)$).

4.5.4. — Soit maintenant P un sous-groupe parabolique fixé de G , et soit $\underline{\text{Par}}(G; P)$ le foncteur des sous-groupes paraboliques de G , en position standard relativement à P . Pour chaque $t \in \text{Of}(\underline{\text{Dyn}}(G))(S)$, posons de même $\underline{\text{Par}}_t(G; P) = \underline{\text{Par}}(G; P) \cap \underline{\text{Par}}_t(G)$. On voit aussitôt que les deux foncteurs précédents s'obtiennent à partir de $\underline{\text{Stand}}(G)$ par produits fibrés, donc sont représentables par des S -schémas lisses et de présentation finie sur S , à fibres non vides. On a un morphisme canonique \mathbf{t}_P induit par \mathbf{t}_2 (i.e. $\mathbf{t}_P(Q) = \mathbf{t}_2(P, Q)$)

477

$$\mathbf{t}_P : \underline{\text{Par}}_t(G; P) \longrightarrow q^{-1}(\mathbf{t}(P), t)$$

qui est lisse et de présentation finie, à fibres géométriques irréductibles. Le morphisme canonique $\underline{\text{Par}}_t(G; P) \rightarrow \underline{\text{Par}}_t(G)$ est un *monomorphisme surjectif*, et peut donc être considéré comme une décomposition cellulaire de $\underline{\text{Par}}_t(G)$ (indexée par l'ensemble des composantes connexes de $q^{-1}(\mathbf{t}(P), t)$).

4.5.5. — Supposons maintenant que le type t soit de la forme $\mathbf{t}(Q)$, où Q est un sous-groupe parabolique de G , en position standard relativement à P , et que $P \cap Q$ contienne un tore maximal T .

Alors $\underline{\text{Par}}_t(G) \simeq G/Q$ et $q^{-1}(\mathbf{t}(P), t) \simeq W_P(T) \backslash W_G(T) / W_Q(T)$, ce qui donne un diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{\text{Par}}_{\mathbf{t}(Q)}(G; P) & \xrightarrow{f} & W_P(T) \backslash W_G(T) / W_Q(T) \\
 \downarrow i & & \\
 \underline{\text{Par}}_{\mathbf{t}(Q)}(G) & \xrightarrow{\sim} & G/Q
 \end{array}$$

où i est un monomorphisme surjectif, et où f est lisse et de présentation finie, à fibres géométriques irréductibles. De plus, si Q_1 et Q_2 sont deux sections de $\underline{\text{Par}}_{\mathbf{t}(Q)}(G; P)$ (sur un $S' \rightarrow S$), c'est-à-dire deux sous-groupes paraboliques de $G_{S'}$ conjugués

478

(localement pour (fpqc)) à Q , et en position standard relativement à $P_{S'}$, alors Q_1 et Q_2 sont conjugués par une section de P (localement pour (fpqc)) si et seulement si $f(Q_1) = f(Q_2)$. Si S est le spectre d'un corps k algébriquement clos, on trouve ainsi la relation

$$P(k) \backslash G(k) / Q(k) \simeq W_P(T)(k) \backslash W_G(T)(k) / W_Q(T)(k).$$

De manière générale, si on suppose que le schéma $W_P(T) \backslash W_G(T) / W_Q(T)$ est constant et de la forme E_S (ce qui a lieu par exemple lorsque G est déployé relativement à T et S est connexe), les $f^{-1}(e)$, $e \in E$, forment une décomposition de $\underline{\text{Par}}_{t(Q)}(G; P)$ en sous-schémas ouverts et fermés, qui sont des espaces homogènes sous P , lisses et de présentation finie sur S , à fibres géométriques irréductibles.

4.5.6. — Revenons à la situation générale de 4.5.4. Le schéma $q^{-1}(t(P), t)$ ⁽²⁵⁾ possède toujours deux sections particulières, correspondant respectivement aux types « position transversale » et « position osculatrice ». L'image réciproque de la première section est un ouvert relativement dense de $\underline{\text{Par}}_t(G; P)$ comme on l'a vu plus haut, c'est la cellule de dimension relative maximum de la décomposition.

L'image réciproque de la seconde section est vraisemblablement un sous-schéma fermé de $\underline{\text{Par}}_t(G; P)$; c'est la cellule de dimension relative minimum de la décomposition.

5. Théorème de conjugaison

479

Théorème 5.1. — Soient S un schéma semi-local, G un S -groupe réductif, P et P' deux sous-groupes paraboliques opposés (4.3.3) de G . Alors

$$\text{rad}^u(P)(S) P' \cdot P = G,$$

i.e. la réunion des ouverts $uP' \cdot P$ (4.3.6), pour u parcourant $\text{rad}^u(P)(S)$ est G tout entier.

La démonstration se fait en plusieurs étapes :

5.1.1. — Il suffit de faire la démonstration dans le cas où S est le spectre d'un corps k ; cela résulte aussitôt de 2.6.

5.1.2. — Soit $L = P \cap P'$. Supposons que L possède un sous-groupe de Borel B_L ; soit T un tore maximal de B_L (Exp. XXII, 5.9.7); on vérifie aussitôt que $B = B_L \cdot \text{rad}^u(P)$ est un sous-groupe de Borel de P ; soit B' le sous-groupe de Borel de G opposé à B relativement à T (i.e. tel que $B \cap B' = T$). On a $B' \subset P'$ comme on le vérifie aussitôt en déployant G relativement à T . Prouvons que

$$(x) \quad B^u(S) B' \cdot B \subset \text{rad}^u(P)(S) P' \cdot P.$$

Comme on a $B^u(S) \subset P(S) = \text{rad}^u(P)(S) \cdot L(S) \subset \text{rad}^u(P)(S) P'(S)$, il suffit de prouver que $B' \cdot B \subset P' \cdot P$, ce qui est évident. Il résulte de (x) qu'il suffit de démontrer 5.1 pour le couple (B, B') .

480

⁽²⁵⁾N.D.E. : On a corrigé $t^{-1}(t(P), t)$ en $q^{-1}(t(P), t)$ et, plus bas, $\underline{\text{Par}}_t(G)$ en $\underline{\text{Par}}_t(G; P)$ (deux fois).

5.1.3. — Le théorème est vrai si k est algébriquement clos ; en effet, la condition de 5.1.2 est vérifiée, et on conclut par Exp. XXII, 5.7.10.

5.1.4. — Le théorème est vrai lorsque k est un corps infini. En effet, $\text{rad}^u(\mathbf{P})(k)$ est dense dans $\text{rad}^u(\mathbf{P})(\bar{k})$ d'après 2.7, et le théorème est vrai pour \bar{k} .

5.1.5. — On est donc ramené au cas où k est un corps fini. Or $\underline{\text{Bor}}(\mathbf{L})$ est un espace homogène *lisse* de \mathbf{L} ; il résulte donc du théorème de Lang (Am. J. of Maths., 78, 1956 ⁽²⁶⁾) que \mathbf{L} possède un sous-groupe de Borel \mathbf{B}_L . Par 5.1.2, on peut donc supposer que $\mathbf{P} = \mathbf{B}$ et $\mathbf{P}' = \mathbf{B}'$ sont des sous-groupes de Borel. On note $\mathbf{T} = \mathbf{B} \cap \mathbf{B}'$.

5.1.6. — Soit \mathbf{K} la clôture algébrique de k ; choisissons un épinglage du triplet $(\mathbf{G}_K, \mathbf{B}_K, \mathbf{T}_K)$, soit \mathbf{R}_+ (resp. Δ), l'ensemble des racines positives (resp. simples). En vertu de Exp. XXII, 5.7.2, il suffit de prouver que pour tout $\alpha \in \Delta$, on a

$$(1) \quad u_\alpha \mathbf{B}'^u(\mathbf{K}) \subset \mathbf{B}^u(k) \mathbf{B}'^u(\mathbf{K}) \mathbf{B}(\mathbf{K}).$$

Soient α_i les différentes racines conjuguées de α sur k (ce sont des éléments de Δ , car \mathbf{B} est « défini sur k »), et soit \mathbf{R}' l'ensemble des racines combinaison linéaire des α_i .
481 Notons $\mathbf{R}'_- = \mathbf{R}'_- \cap \mathbf{R}'$. Comme « \mathbf{R}' est défini sur k », il existe un sous-tore \mathbf{Q} de \mathbf{T} , tel que \mathbf{Q}_K soit le tore maximal du noyau commun des α_i .

Notons $\mathbf{Z} = \underline{\text{Centr}}_{\mathbf{G}}(\mathbf{Q})$, $\mathbf{B}_Z = \mathbf{B} \cap \mathbf{Z}$, $\mathbf{B}'_Z = \mathbf{B}' \cap \mathbf{Z}$ (cf. Exp. XXII, 5.10.2). Montrons qu'il suffit de vérifier l'assertion cherchée dans \mathbf{Z} , c'est-à-dire

$$(2) \quad u_\alpha \cdot \mathbf{B}'^u_Z(\mathbf{K}) \subset \mathbf{B}^u_Z(k) \mathbf{B}'^u_Z(\mathbf{K}) \mathbf{B}_Z(\mathbf{K}).$$

On a $(\mathbf{B}'^u_Z)_K = \prod_{\alpha \in \mathbf{R}'_-} \mathbf{U}_\alpha$; soit \mathbf{R}'' le complémentaire de \mathbf{R}' dans \mathbf{R} , posons

$$\mathbf{V} = \prod_{\alpha \in \mathbf{R}'' \cap \mathbf{R}'_-} \mathbf{U}_\alpha.$$

On a aussitôt $(\mathbf{B}'^u)_K = (\mathbf{B}'^u_Z)_K \cdot \mathbf{V}$, et $(\mathbf{B}_Z)_K$ normalise \mathbf{V} (Exp. XXII, 5.6.7). On tire donc de (2) successivement

$$\begin{aligned} u_\alpha \cdot \mathbf{B}'^u(\mathbf{K}) &= u_\alpha \cdot \mathbf{B}'^u_Z(\mathbf{K}) \mathbf{V}(\mathbf{K}) \subset \mathbf{B}^u_Z(k) \mathbf{B}'^u_Z(\mathbf{K}) \mathbf{B}_Z(\mathbf{K}) \mathbf{V}(\mathbf{K}) \\ &\subset \mathbf{B}^u_Z(k) \mathbf{B}'^u_Z(\mathbf{K}) \mathbf{V}(\mathbf{K}) \mathbf{B}_Z(\mathbf{K}) \end{aligned}$$

ce qui entraîne aussitôt (1).

Nous sommes donc ramenés au cas où $\mathbf{G} = \mathbf{Z}$, c'est-à-dire où le groupe de Galois de \mathbf{K} sur k opère transitivement sur les racines simples.

482 **5.1.7.** — L'assertion à démontrer est équivalente au fait que \mathbf{G}/\mathbf{B} est la réunion des translatés par $\mathbf{B}^u(k)$ de l'ouvert image de \mathbf{B}'^u , assertion qui ne change pas si on remplace \mathbf{G} par son groupe adjoint (ou d'ailleurs par n'importe quel groupe donnant le même groupe adjoint). On peut donc supposer \mathbf{G} adjoint.

⁽²⁶⁾N.D.E. : voir aussi [DG70], § III.5, 7.4.

5.1.8. — Considérons alors le diagramme de Dynkin de G_K . Le groupe de Galois opère *transitivement* sur ce diagramme de Dynkin. Mais ce groupe de Galois n'a que des quotients cycliques et le diagramme de Dynkin n'a pas de cycles. Il en résulte aussitôt que ce diagramme est de type nA_1 , $n \geq 0$, ou mA_2 , $m \geq 0$. Utilisant la décomposition canonique de Exp. XXIV, 5.9, on peut écrire

$$G = \prod_{D/K} G_0,$$

où D est un K -schéma *fini* et G_0 est soit un tore, soit de type A_1 , soit de type A_2 .

Par Exp. XXIV, 5.12, B provient d'un sous-groupe de Borel B_0 de G_0 , T d'un tore maximal T_0 de G_0 ; B' provient du sous-groupe de Borel B'_0 de G_0 opposé à B_0 relativement à T_0 . On a

$$B'^u(k) = B_0^u(D),$$

$$B'^u \cdot T \cdot B^u = \prod_{D/k} B_0'^u \cdot T_0 \cdot B_0^u,$$

et il nous suffit de démontrer l'assertion cherchée sur le triplet (G_0, B_0, T_0) .

5.1.9. — On peut donc supposer que G est de type \emptyset , A_1 ou A_2 . Comme G possède un sous-groupe de Borel B , G est quasi-déployable relativement à B (Exp. XXIV, 3.9.1), donc déployable s'il est de type \emptyset ou A_1 . Comme le théorème a déjà été prouvé dans le cas déployé (Exp. XXII 5.7.10), il ne reste plus que le cas A_2 à traiter. Par Exp. XXIV, 3.11 il existe un morphisme $E \rightarrow \text{Spec}(k)$, fibré principal galoisien sous le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ des automorphismes du diagramme de Dynkin de type A_2 tel que $G = Q\text{-Ép}_{E/\text{Spec}(k)}(A_2)$. Si E possède une section, G est déployable et le théorème est démontré. Sinon, on a nécessairement $E = \text{Spec}(k')$, où k' est une extension quadratique de k . Enfin, comme on l'a vu en 5.1.7, on peut supposer G simplement connexe (i.e. que G est une forme de $SL_{3,k}$). 483

5.1.10. — On est donc dans la situation suivante : on a un corps fini k , une extension quadratique k' de k . Le groupe $SL_{3,k'}$ des matrices 3×3 de déterminant 1 est épinglé comme suit : le tore maximal est le groupe des matrices diagonales, le sous-groupe de Borel est le groupe des matrices triangulaires supérieures, les « épingles » les éléments :

$$u_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On voit aussitôt que la grosse cellule Ω est définie par

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \Omega(S) \iff a \text{ et } ae - bd \text{ inversibles,}$$

et que

$$B^u(k) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \bar{x} & z \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, z \in k', \quad z + \bar{z} = x\bar{x} \right\}.$$

Il nous faut prouver l'inclusion (1) de 5.1.6, c'est-à-dire montrer que pour tous $a, b, c \in K$ (clôture algébrique de k), il existe $x, z \in k'$ tels que $z + \bar{z} = x\bar{x}$ et

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & \bar{x} & z \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \subset \Omega(K).$$

- Si $a \neq -1$, on prend $x = z = 0$.
- Si $a = -1$, les conditions à réaliser s'écrivent

$$\begin{cases} z + \bar{z} = x\bar{x}, \\ bz - \bar{x} \neq 0, \\ (b+c)\bar{z} + bx - 1 \neq 0. \end{cases}$$

Soit q le nombre d'éléments de k ($q \geq 2$). On sait que pour tout $m \in k$, l'équation $z + \bar{z} = m$, avec $z \in k'$, a q solutions.

- Si $b = 0$, prenons $x = 1$; on doit résoudre $z + \bar{z} = 1$, $c\bar{z} \neq 1$, ce qui est toujours possible par la remarque précédente.
- Si $b \neq 0$, prenons $x = 0$; on doit résoudre

$$z + \bar{z} = 0, \quad z \neq 0, \quad (b+c)z \neq 1.$$

Cela est toujours possible si $q \geq 3$. Si $k = \mathbb{F}_2$, c'est possible si $b+c \neq 1$, on peut prendre $z = 1$.

485 - Il ne reste donc à traiter que le cas $k = \mathbb{F}_2$, $b+c = 1$, $b \neq 0$. Le système s'écrit alors

$$z + \bar{z} = x\bar{x}, \quad bz \neq \bar{x}, \quad \bar{z} + bx \neq 1.$$

Si $b = 1$ (resp. $b \notin k'$), faisons $x = 1$; alors les deux dernières conditions s'écrivent $z \neq b^{-1}, 1-b$, et elles sont conséquences de $z + \bar{z} = 1$ qui a des solutions. Enfin, si $b \in k' - k$, on peut prendre $x = \bar{b}, z = b$. C.Q.F.D.

Corollaire 5.2. — Soient S un schéma semi-local, G un S -groupe réductif, P et P' deux sous-groupes paraboliques opposés de G . L'application canonique

$$\text{rad}^u(P)(S) \cdot \text{rad}^u(P')(S) \longrightarrow (G/P)(S)$$

est surjective (en particulier, on a $(G/P)(S) = G(S)/P(S)$). Tout sous-groupe parabolique Q de G , de même type que P , est de la forme $\text{int}(uu')P$ avec $u \in \text{rad}^u(P)(S)$ et $u' \in \text{rad}^u(P')(S)$.

La seconde assertion est évidemment équivalente à la première, démontrons celle-ci. Soient s_i les points fermés de S , soit V l'ouvert de G/P image de P' (et isomorphe à $\text{rad}^u(P')$, cf. 4.3.6) et soit $x \in G/P(S)$. Par 5.1, il existe pour chaque i une section $u_i \in \text{rad}^u(P)(\kappa(s_i))$ telle que $u_i x_{s_i}$ soit une section de V_{s_i} . Si $u \in \text{rad}^u(P)(S)$ relève les u_i (2.6), ux est une section de V , car une telle assertion se vérifie sur les fibres fermées. Mais $\text{rad}^u(P')(S) \xrightarrow{\sim} V(S)$, est bijectif, et on conclut aussitôt.

Corollaire 5.3. — Soient S un schéma semi-local, G un S -groupe réductif, P, P' et Q trois sous-groupes paraboliques de G . Il existe $g \in G(S)$ tel que $\text{int}(g)Q$ soit en position transversale relativement à P et P' . 486

Avec les notations de 4.2.4 (ii), on doit vérifier que l'ouvert universellement schématiquement dense sur S $^{(27)} \underline{\text{Gen}}(Q/P) \cap \underline{\text{Gen}}(Q/P')$ de G possède une section sur S . En fait, choisissons un sous-groupe parabolique de G opposé à Q (4.3.5 (i)), soit Q_1 , et posons $U = \text{rad}^u(Q)$, $U' = \text{rad}^u(Q_1)$. Nous allons montrer qu'il existe $g \in U(S)U'(S)$ répondant à la question; sous cette forme, il résulte de 4.2.4 (i) et 2.6 qu'il suffit de vérifier l'assertion sur les fibres aux points fermés de S , et on peut donc supposer que S est le spectre d'un corps k .

Si k est algébriquement clos, il existe $g \in G(k)$ répondant à la question, or g s'écrit $uu'q$ avec $u \in U(k)$, $u' \in U'(k)$, $q \in Q(k)$ (5.2), et l'on a $\text{int}(uu')Q = \text{int}(g)Q$.

Si k est infini, considérons l'ouvert V de $U \times_k U'$ défini par le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} U \times_k U' & \longrightarrow & G \\ \uparrow & & \uparrow \\ V & \longrightarrow & \underline{\text{Gen}}(Q/P) \cap \underline{\text{Gen}}(Q/P'); \end{array}$$

comme $V(\bar{k}) \neq \emptyset$ en vertu de ce qu'on vient de voir, V est dense dans $U \times_k U'$, donc possède une section par 2.7.

Si k est fini, P (resp. P') possède un sous-groupe de Borel B (resp. B'), en vertu du théorème de Lang (cf. 5.1.5), les schémas $\underline{\text{Bor}}(P) \simeq \underline{\text{Bor}}(P/\text{rad}^u(P))$ et $\underline{\text{Bor}}(Q) \simeq \underline{\text{Bor}}(Q/\text{rad}^u(Q))$ étant lisses. Si B_1 est un sous-groupe de Borel opposé à B (4.3.5 (i)), il existe $a \in B^u(k)$ et $a_1 \in B_1^u(k)$ tels que $\text{int}(aa_1)B = B'$ (5.2); alors $B_0 = \text{int}(aa_1)B_1 = \text{int}(a)B_1$ est opposé à B' et à B ; si Q_0 est l'unique sous-groupe parabolique de G contenant B_0 et de même type que Q (3.8), Q_0 est en position transversale relativement à P et P' (4.2.1 (vi)). D'autre part par 5.2, Q_0 s'écrit $\text{int}(uu')Q$ avec $u' \in U'(k)$, $u \in U(k)$ ce qu'il fallait démontrer. 487

Corollaire 5.4. — Soient S un schéma semi-local, G un S -groupe réductif, P et Q deux sous-groupes paraboliques de G . Il existe $g \in G(S)$ tel que $\text{int}(g)P$ soit en position osculatrice relativement à Q , i.e. (4.4.2) que $\text{int}(g)P \cap Q$ soit un sous-groupe parabolique de G .

En effet, en vertu de 4.3.5 (i), il existe un sous-groupe parabolique P' de G , opposé à P . En vertu de 5.3, il existe un sous-groupe parabolique P'_1 de G de même type que P' , en position transversale relativement à P et Q . Si T est un tore maximal de $P'_1 \cap Q$ (4.2.7 (ii)), et si P_1 est l'opposé de P'_1 relativement à T , alors P_1 et Q sont en position osculatrice, en vertu de 4.4.5. D'autre part, P et P_1 étant opposés à P'_1 , il existe $g \in \text{rad}^u(P'_1)(S)$ tel que $\text{int}(g)P = P_1$ (4.3.5 (i)). C.Q.F.D.

Remarquons d'ailleurs que pour la même raison, il existe $u \in \text{rad}^u(P)(S)$ tel que 488

⁽²⁷⁾N.D.E. : On a remplacé « relativement dense » par « universellement schématiquement dense sur S », cf. EGA IV₃, Déf. 11.10.8.

$\text{int}(u)P' = P'_1$, donc que g s'écrit $\text{int}(u)u'$ avec $u' \in \text{rad}^u(P')(S)$, ce qui donne $P_1 = \text{int}(uu'u^{-1})P = \text{int}(uu')P$ et redémontre au passage 5.2.

Les énoncés 5.3 et 5.4 sont les résultats essentiels de ce paragraphe. Énonçons d'abord quelques conséquences de 5.4.

Corollaire 5.5. — Soient S un schéma semi-local, G un S -groupe réductif.

(i) Si P et Q sont deux sous-groupes paraboliques de G et si $\mathfrak{t}(P) \subset \mathfrak{t}(Q)$ (cf. 3.3), il existe $g \in G(S)$ tel que $\text{int}(g)P \subset Q$.

(ii) Soient

$$P_1 \supset P_2 \supset \cdots \supset P_n \quad \text{et} \quad P'_1 \supset P'_2 \supset \cdots \supset P'_n$$

deux chaînes de sous-groupes paraboliques de G telles que $\mathfrak{t}(P_i) = \mathfrak{t}(P'_i)$. Il existe $g \in G(S)$ tel que $\text{int}(g)P_i = P'_i$ pour chaque i .

(iii) Soient P, Q, P', Q' quatre sous-groupes paraboliques de G tels que $\mathfrak{t}(P) = \mathfrak{t}(P')$ et $\mathfrak{t}(Q) = \mathfrak{t}(Q')$. Si les couples (P, P') et (Q, Q') sont en position transversale (resp. osculatrice), il existe $g \in G(S)$ tel que $\text{int}(g)P = P'$ et $\text{int}(g)Q = Q'$.

(iv) Soient P et P' deux sous-groupes paraboliques de même type, L (resp. L') un sous-groupe de Levi de P (resp. P'). Il existe $g \in G(S)$ tel que $\text{int}(g)P = P'$ et $\text{int}(g)L = L'$.

Démonstration : (i) résulte aussitôt de 5.4; (ii) se démontre par récurrence sur n , le cas $n = 0$ étant trivial; on peut donc supposer $P_i = P'_i$ pour $i = 1, \dots, n-1$; par 5.2 il existe $g \in G(S)$ tel que $\text{int}(g)P_n = P'_n$; mais alors P_n et $\text{int}(g)P_n$ sont contenus dans $P_{n-1} = P'_{n-1}$, donc $g \in P_{n-1}(S)$ (4.4.4 (ii)) et $\text{int}(g)P_i = P'_i$ pour $i = 1, \dots, n$.

D'autre part, (iv) résulte aussitôt de 5.2 et de 1.8. Démontrons (iii) dans le cas « position transversale »; l'assertion est une conséquence de (iv) lorsque les types de P et Q sont opposés (4.3.3 (iii)); dans le cas général, on peut en vertu de 4.2.7 (iii) et 4.4.6, trouver des sous-groupes paraboliques P_1, P'_1, Q_1, Q'_1 de P, P', Q, Q' respectivement, tels que P_1 et P'_1 soient opposés, ainsi que Q_1 et Q'_1 , et que $\mathfrak{t}(P_1) = \mathfrak{t}(P'_1)$; il existe donc $g \in G(S)$ tel que $\text{int}(g)P_1 = P'_1$, $\text{int}(g)Q_1 = Q'_1$, et on peut supposer $P_1 = P'_1$ et $Q_1 = Q'_1$; mais alors P et P' sont en position osculatrice et de même type, donc $P = P'$ (4.4.4 (i)); pour la même raison $Q = Q'$.

Il nous reste à démontrer l'assertion (iii) dans le cas « position osculatrice ». En vertu du théorème de conjugaison (5.2), on peut supposer $P = P'$; en vertu du même théorème, on peut trouver $g \in G(S)$ tel que $\text{int}(g)Q = Q'$; mais alors $g \in P(S)$ par 4.4.4 (ii) et l'on a $\text{int}(g)P = P = P'$.

Définition 5.6. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G . On dit que P est *minimal* si chaque fois que Q est un sous-groupe parabolique de G contenu dans P , on a $Q = P$.

On notera que ce n'est pas une notion stable par passage aux fibres en général.

Corollaire 5.7. — Soient S un schéma semi-local, G un S -groupe réductif.

(i) Soient $t, t' \in \text{Of}(\underline{\text{Dyn}}(\mathbf{G}))(\mathbf{S})$. S'il existe dans \mathbf{G} un sous-groupe parabolique de type t et un sous-groupe parabolique de type t' , il existe un sous-groupe parabolique de type $t \cap t'$. En particulier, il existe un plus petit élément t_{\min} dans l'ensemble des $\mathfrak{t}(\mathbf{P})$, \mathbf{P} parcourant l'ensemble des sous-groupes paraboliques de \mathbf{G} .

(ii) Tout sous-groupe parabolique de \mathbf{G} contient un sous-groupe parabolique minimal. Pour qu'un sous-groupe parabolique de \mathbf{G} soit minimal, il faut et il suffit qu'il soit de type t_{\min} . Deux sous-groupes paraboliques minimaux de \mathbf{G} sont conjugués par un élément de $\mathbf{G}(\mathbf{S})$.

Cela résulte aussitôt de 5.4 et 5.5 (i).

Remarque 5.8. — Un sous-groupe parabolique opposé à un sous-groupe parabolique minimal est également minimal; ceci entraîne $s(t_{\min}) = t_{\min}$.

491

Corollaire 5.9. — Soient \mathbf{S} un schéma, \mathbf{G} un \mathbf{S} -groupe réductif, \mathbf{P} un sous-groupe parabolique de \mathbf{G} . Le morphisme canonique

$$\mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{G}/\mathbf{P} = \mathbf{X}$$

fait de \mathbf{G} un \mathbf{X} -fibré localement trivial (au sens de Zariski) de groupe $\mathbf{P}_{\mathbf{X}}$. Si \mathbf{L} est un sous-groupe de Levi de \mathbf{P} , le morphisme canonique (cf. 3.12)

$$\mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{G}/\mathbf{L} = \mathbf{Y}$$

fait de \mathbf{G} un \mathbf{Y} -fibré localement trivial (au sens de Zariski) de groupe $\mathbf{L}_{\mathbf{Y}}$.

Il suffit de prouver que si on a un morphisme $\mathbf{S}' \rightarrow \mathbf{S}$, où \mathbf{S}' est local et un morphisme $\mathbf{S}' \rightarrow \mathbf{X}$ (resp. $\mathbf{S}' \rightarrow \mathbf{Y}$), il se remonte en un morphisme $\mathbf{S}' \rightarrow \mathbf{G}$. Autrement dit, on peut supposer \mathbf{S} local et on doit montrer que l'application $\mathbf{G}(\mathbf{S}) \rightarrow \mathbf{X}(\mathbf{S})$ (resp. $\mathbf{G}(\mathbf{S}) \rightarrow \mathbf{Y}(\mathbf{S})$) est surjective.

La première assertion a été démontrée en 5.2; démontrons la seconde. Soit $y \in \mathbf{Y}(\mathbf{S})$, son image canonique dans $\mathbf{X}(\mathbf{S})$ provient d'un $g \in \mathbf{G}(\mathbf{S})$; la projection y' de g dans $\mathbf{Y}(\mathbf{S})$ a donc même projection que y dans $\mathbf{X}(\mathbf{S})$. Il existe donc un unique $u \in \text{rad}^u(\mathbf{P})(\mathbf{S})$ tel que $y'u = y$, et la projection de gu dans $\mathbf{Y}(\mathbf{S})$ est bien y .

Corollaire 5.10. — Soient \mathbf{S} un schéma semi-local, \mathbf{G} un \mathbf{S} -groupe réductif

492

(i) Soient \mathbf{P} un sous-groupe parabolique de \mathbf{G} , \mathbf{L} un sous-groupe de Levi de \mathbf{P} . Les applications canoniques (cf. 3.21) induisent des bijections

$$\mathbf{H}^1(\mathbf{S}, \mathbf{L}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^1(\mathbf{S}, \mathbf{P}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}_{\mathfrak{t}(\mathbf{P})}^1(\mathbf{S}, \mathbf{G}).$$

(ii) Soient $t, t' \in \text{Of}(\underline{\text{Dyn}}(\mathbf{G}))(\mathbf{S})$, on a (cf. 3.21)

$$\mathbf{H}_t^1(\mathbf{S}, \mathbf{G}) \cap \mathbf{H}_{t'}^1(\mathbf{S}, \mathbf{G}) = \mathbf{H}_{t \cap t'}^1(\mathbf{S}, \mathbf{G}).$$

(iii) Si P et Q sont deux sous-groupes paraboliques de G en position osculatrice, le diagramme canonique suivant est cartésien et composé d'injections :

$$\begin{array}{ccc} H^1(S, P) & \longrightarrow & H^1(S, G) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^1(S, P \cap Q) & \longrightarrow & H^1(S, Q). \end{array}$$

Démontrons (i). L'application $H^1(S, L) \rightarrow H^1(S, P)$ est bijective par 2.3 ; l'application $H^1(S, P) \rightarrow H^1_{t(P)}(S, G)$ est surjective (3.21), montrons qu'elle est injective, i.e. que l'application canonique $H^1(S, P) \rightarrow H^1(S, G)$ est injective. Soit Q un fibré principal sous P , Q_1 le fibré principal sous G associé, P' et G' les formes tordues de P et G correspondantes. Il est clair que G' est un S -groupe réductif et que P' en est un sous-groupe parabolique. L'ensemble des éléments de $H^1(S, P)$ qui ont même image que la classe de Q dans $H^1(S, G)$ s'identifie naturellement au noyau de l'application canonique $H^1(S, P') \rightarrow H^1(S, G')$, et celui-ci, par la suite exacte de cohomologie, à l'ensemble des orbites de $G'(S)$ dans $(G'/P')(S)$ (Pour ces raisonnements de cohomologie non abélienne, voir la thèse de Giraud⁽²⁸⁾). Mais $G'(S)$ opère transitivement dans $(G'/P')(S)$ par 5.2.

Démontrons (ii) : soient Q un fibré principal homogène sous G et G^Q la forme tordue de G correspondante. Par définition (3.21), il nous faut prouver que G^Q possède un sous-groupe parabolique de type $t \cap t'$ si et seulement si il possède des sous-groupes paraboliques de type t et t' , ce qui n'est autre que la conjonction de 3.8 et 5.7 (i). Enfin, (iii) résulte aussitôt de (i) et de (ii).

Énonçons maintenant une conséquence de 5.3.

Corollaire 5.11. — Soient S un schéma semi-local, G un S -groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G . Si $P \neq G$, il existe au moins trois sous-groupes paraboliques de G , distincts, de même type que P ; autrement dit $P \neq G$ entraîne $(G(S) : P(S)) \geq 3$.

En effet, soit P' un sous-groupe parabolique de G opposé à P (4.3.5 (i)). Comme $P \neq G$, on a $\text{rad}^u(P') \neq e$ (par 4.3.2 par exemple). Par 2.1, $\text{rad}^u(P')(S) \neq e$; soit donc $u \in \text{rad}^u(P')(S)$, $u \neq e$. Alors $\text{int}(u)P \neq P$, et en vertu de 5.3, il existe un P_1 , de même type que P , et opposé à P et $\text{int}(u)P$; alors P_1 , P et $\text{int}(u)P$ sont trois sous-groupes paraboliques distincts de G , de même type que P .

6. Sous-groupes paraboliques et tores déployés

494

Proposition 6.1. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G/S)$, et Q un sous-tore déployé de G . Écrivons $Q = D_S(M)$ et soit

$$\mathfrak{g} = \coprod_{\alpha \in M} \mathfrak{g}^\alpha$$

⁽²⁸⁾N.D.E. : Voir [Gi71], § III.3.

la décomposition de \mathfrak{g} sous l'action de Q . Soit M_1 une partie de M telle que $0 \in M_1$ et que $\alpha, \beta \in M_1 \Rightarrow \alpha + \beta \in M_1$.

(i) Il existe un unique sous-groupe lisse H_{M_1} de G , à fibres connexes, contenant $\underline{\text{Centr}}_G(Q)$, et dont l'algèbre de Lie soit $\coprod_{\alpha \in M_1} \mathfrak{g}^\alpha$.

(ii) On a les implications suivantes :

$$M_1 = \{0\} \implies H_{M_1} = \underline{\text{Centr}}_G(Q),$$

$$M_1 = -M_1 \implies H_{M_1} \text{ est réductif,}$$

$$M_1 \cup (-M_1) = M \implies H_{M_1} \text{ et } H_{-M_1} \text{ sont des sous-groupes paraboliques de } G, \\ \text{opposés, de sous-groupe de Levi commun } H_{M_1 \cap -M_1}.$$

Pour démontrer (i) et (ii), qui sont locaux pour la topologie (fpqc), on peut supposer que Q est contenu dans un tore maximal T de G ; on peut de plus déployer G relativement à T . L'assertion (i) résulte alors aussitôt de Exp. XXII, 5.3.5, 5.4.5 et 5.4.7; les assertions de (ii) résultent de Exp. XXII, 5.3.5, 5.10.1, 5.11.3 et de cet exposé, 1.4 et 4.3.2. 495

Corollaire 6.2. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, Q un sous-tore déployé de G . Il existe un sous-groupe parabolique de G dont $\underline{\text{Centr}}_G(Q)$ soit un sous-groupe de Levi.

En effet, écrivant $Q = D_S(M)$, on choisit une structure d'ordre total sur le groupe M , on appelle M_1 l'ensemble des éléments positifs de M ; le groupe H_{M_1} répond à la question.

Corollaire 6.3. — Si le S -groupe réductif G possède un sous-tore déployé non central, il possède un sous-groupe parabolique propre (i.e. $\neq G$).

Par 5.9 et 5.10, on tire de 6.2 :

Corollaire 6.4. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, Q un sous-tore déployé de G . Le morphisme canonique $G \rightarrow G/\underline{\text{Centr}}_G(Q)$ est une fibration localement triviale.

Si S est semi-local, l'application $G(S) \rightarrow (G/\underline{\text{Centr}}_G(Q))(S)$ est surjective, et l'application $H^1(S, \underline{\text{Centr}}_G(Q)) \rightarrow H^1(S, G)$ est injective.

6.5. — Supposons S connexe. Si T est un S -tore et si T' et T'' sont deux sous-tores déployés de T , leur produit $T' \cdot T''$ ⁽²⁹⁾ est également un sous-tore déployé de T . En effet il s'identifie au quotient de $T' \times_S T''$ par $T' \cap T''$, quotient qui est déployé par Exp. IX, 2.11. Il en résulte que T possède un plus grand sous-tore déployé; on le note $T_{\text{dép}}$. 496

Lemme 6.6. — Soient S un schéma connexe, T un S -tore isotrivial, $T_{\text{dép}}$ son plus grand sous-tore déployé. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe un homomorphisme $T \rightarrow \mathbb{G}_{m,S}$ distinct de e .

⁽²⁹⁾N.D.E. : On a adopté la notation multiplicative, i.e. on a remplacé « leur somme $T' + T''$ » par « leur produit $T' \cdot T''$ ».

(ii) $T_{\text{dép}} \neq e$.

Comme T est supposé isotrivial, il existe un groupe fini Γ , un revêtement principal galoisien connexe $S' \rightarrow S$ de groupe Γ , et un isomorphisme $T_{S'} \simeq D_{S'}(M)$; M est alors muni d'une structure de Γ -module, et on a un isomorphisme naturel $\text{Hom}_S(T, \mathbb{G}_{m,S}) = H^0(\Gamma, M)$.

D'autre part, soit V le sous-espace vectoriel de $M \otimes \mathbb{Q}$ engendré par les éléments de la forme $g(m) - m$, $g \in \Gamma$, $m \in M$. On vérifie aussitôt que $(T_{\text{dép}})_{S'}$ s'identifie à $D_{S'}(M/M \cap V)$. L'assertion (i) est donc équivalente à $H^0(\Gamma, M) \neq 0$, ou encore à $H^0(\Gamma, M \otimes \mathbb{Q}) \neq 0$, tandis que l'assertion (ii) est équivalente à $M \neq M \cap V$, ou encore à $M \otimes \mathbb{Q} \neq V$. Or on a $M \otimes \mathbb{Q} = H^0(\Gamma, M \otimes \mathbb{Q}) \oplus V$, comme on le vérifie aussitôt (considérer le projecteur $M \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H^0(\Gamma, M \otimes \mathbb{Q})$ qui envoie x sur la moyenne des transformés de x par Γ).

497 **Lemme 6.7.** — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G tel que $P \neq G$, L un sous-groupe de Levi de P , Q son radical. Il existe un homomorphisme $Q \rightarrow \mathbb{G}_{m,S}$ distinct de e .

Considérons le radical unipotent U de P ; il est invariant sous $\text{int}(P)$, donc sous $\text{int}(Q)$. Considérons le \mathcal{O}_S -module inversible $\det(\mathcal{L}ie(U))$ « puissance extérieure maximum » du \mathcal{O}_S -module localement libre $\mathcal{L}ie(U)$. La représentation adjointe définit un homomorphisme de groupes

$$f : Q \longrightarrow \underline{\text{Aut}}(\det(\mathcal{L}ie(U))) = \mathbb{G}_{m,S}.$$

Si $P \neq G$, alors $U \neq e$. Choisissons un $s \in S$ tel que $U_s \neq e$. Déployant $G_{\bar{s}}$ relativement à un tore maximal contenant $Q_{\bar{s}}$, on voit aussitôt que $f_{\bar{s}} \neq e$.

Proposition 6.8. — Soient S un schéma semi-local connexe, G un S -groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G , L un sous-groupe de Levi de P , Q son radical, $Q_{\text{dép}}$ le plus grand sous-tore déployé de Q (i.e. le plus grand sous-tore central déployé de L). Alors

$$L = \underline{\text{Centr}}_G(Q_{\text{dép}}).$$

498 Posons $L' = \underline{\text{Centr}}_G(Q_{\text{dép}})$; c'est un sous-groupe réductif de G contenant L ; de plus, $P' = P \cap L'$ est un sous-groupe parabolique de L' , de sous-groupe de Levi L (1.20). Si $L' \neq L$, alors $L' \not\subset P$ (car L est un sous-groupe réductif maximal de P , cf. 1.7), donc $P' \neq L'$.

Soient G_1 le groupe dérivé de G , et $P_1 = P' \cap G_1$. Par 1.19, P_1 est un sous-groupe parabolique du groupe semi-simple G_1 , $L_1 = L \cap G_1$ en est un sous-groupe de Levi, et

$$Q_1 = \text{rad}(L_1) = (\text{rad}(L) \cap G_1)^0 = (Q \cap G_1)^0.$$

Comme L_1 possède un tore maximal T_1 (Exp. XIV, 3.20), et que celui-ci est isotrivial (Exp. XXIV, 4.1.5), Q_1 qui est un sous-tore de T_1 est également isotrivial (Exp. IX, 2.11); comme $P_1 \neq G_1$, on peut appliquer 6.7 et 6.6 et l'on a donc $(Q_1)_{\text{dép}} \neq e$, d'où $(Q_{\text{dép}} \cap G_1)^0 \neq e$, donc $Q_{\text{dép}} \not\subset \text{rad}(L')$ (car $\text{rad}(L') \cap G_1$ est fini), ce qui est contradictoire avec la définition de L' .

Corollaire 6.9. — Soient S un schéma semi-local connexe, G un S -groupe réductif, Q un sous-tore critique de G (i.e. tel que $\text{rad}(\underline{\text{Centr}}_G(Q)) = Q$). Pour que $\underline{\text{Centr}}_G(Q)$ soit sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique de G , il faut et il suffit que $\underline{\text{Centr}}_G(Q) = \underline{\text{Centr}}_G(Q_{\text{dép}})$, c'est-à-dire que $\mathcal{L}ie(G)^Q = \mathcal{L}ie(G)^{Q_{\text{dép}}}$.

Cela résulte de 6.2 et 6.8.

Corollaire 6.10. — Soient S un schéma semi-local connexe, G un S -groupe réductif, L un sous-groupe de G . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe un sous-groupe parabolique de G dont L soit un sous-groupe de Levi.
- (ii) Il existe un sous-tore déployé de G dont L soit le centralisateur.
- (iii) Il existe un homomorphisme $\mathbb{G}_{m,S} \rightarrow G$ dont L soit le centralisateur. 499

En effet, on a (i) \Rightarrow (ii) par 6.8, et (iii) \Rightarrow (i) par 6.1 ; reste à prouver (ii) \Rightarrow (iii). Supposons donc $L = \underline{\text{Centr}}_G(Q)$, avec $Q = D_S(M)$; écrivons $\mathfrak{g} = \mathcal{L}ie(G/S)$ et

$$\mathfrak{g} = \coprod_{\alpha \in M} \mathfrak{g}^\alpha,$$

et soit R l'ensemble des $\alpha \in M - \{0\}$ tels que $\mathfrak{g}^\alpha \neq 0$.

Comme R est fini et ne contient pas 0, il existe un homomorphisme $u : M \rightarrow \mathbb{Z}$ tel que $u(\alpha) \neq 0$ pour chaque $\alpha \in R$. Par dualité, u donne un homomorphisme $\mathbb{G}_{m,S} \rightarrow Q$, donc un homomorphisme $f : \mathbb{G}_{m,S} \rightarrow G$. On a $\underline{\text{Centr}}_G(f) \supset \underline{\text{Centr}}_G(Q)$; ce sont deux sous-groupes lisses de G , à fibres connexes ; leurs algèbres de Lie coïncident (car égales toutes deux à \mathfrak{g}^0) ; ils coïncident donc, par un raisonnement habituel.

Corollaire 6.11. — Soient S un schéma semi-local connexe, G un S -groupe réductif. Les applications

$$L \mapsto \text{rad}(L)_{\text{dép}}, \quad Q \mapsto \underline{\text{Centr}}_G(Q)$$

sont des bijections réciproques l'une de l'autre, qui inversent les structures d'ordre naturelles, entre l'ensemble des sous-groupes L de G qui sont des sous-groupes de Levi de sous-groupes paraboliques de G et l'ensemble des sous-tores déployés Q de G tels que $\text{rad}(\underline{\text{Centr}}_G(Q))_{\text{dép}} = Q$.

Corollaire 6.12. — Soient S un schéma semi-local connexe, G un S -groupe réductif. 500
Considérons les assertions suivantes :

- (i) Il existe un sous-groupe parabolique de G distinct de G .
- (ii) G possède un sous-tore déployé non central.
- (ii bis) G possède un sous-tore déployé non central de dimension relative 1.
- (iii) Il existe un homomorphisme de groupes $\mathbb{G}_{a,S} \rightarrow G$ qui soit une immersion fermée.

Alors on a (i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (ii bis) \Rightarrow (iii).

La seule assertion nouvelle est (i) \Rightarrow (iii). Soit donc P un sous-groupe parabolique de G , distinct de G . Alors $U = \text{rad}^u(P) \neq e$. Considérons le dernier sous-groupe non trivial U_n de la suite de composition de U (2.1). On a un isomorphisme $U_n \simeq W(\mathcal{E}_n)$,

où \mathcal{E}_n est un \mathcal{O}_S -module localement libre, donc libre⁽³⁰⁾. Comme $\mathcal{E}_n \neq 0$, il existe un monomorphisme localement facteur direct $\mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{E}_n$, donc une immersion fermée $\mathbb{G}_{a,S} = W(\mathcal{O}_S) \hookrightarrow W(\mathcal{E}_n) \simeq U_n$, ce qui entraîne aussitôt (iii).

Remarque 6.12.1. — Lorsque S est le spectre d'un corps de caractéristique 0, il résulte du théorème de Jacobson-Morozov que (iii) \Rightarrow (ii bis). Les quatre conditions précédentes sont alors équivalentes (« critère de Godement » cf. [BT65], 8.5).^(*)

501 **Définition 6.13.** — Soient S un schéma semi-local connexe, G un S -groupe réductif. On dit que G est *anisotrope* si G ne contient aucun sous-tore déployé non réduit à e .

Corollaire 6.14. — Soit S un schéma semi-local connexe. Pour que le S -groupe réductif G soit anisotrope, il faut et il suffit qu'il ne possède aucun sous-groupe parabolique $P \neq G$, et que son radical soit anisotrope.

Utilisant maintenant 6.6, Exp. XXIV, 4.1.5, et Exp. XXII, 6.2, on en déduit :

Corollaire 6.15. — Soient S un schéma semi-local connexe, G un S -groupe réductif isotrivial (par exemple G semi-simple, ou S normal (Exp. X 5.16)). Pour que G soit anisotrope, il faut et il suffit que G ne possède aucun sous-groupe parabolique $P \neq G$, et que $\text{Hom}_{S\text{-gr.}}(G, \mathbb{G}_{m,S}) = e$.

Proposition 6.16. — Soient S un schéma semi-local connexe, G un S -groupe réductif. Les sous-tores déployés maximaux de G sont les plus grands sous-tores centraux déployés des groupes de Levi des sous-groupes paraboliques minimaux de G . Deux tels tores sont conjugués par un élément de $G(S)$.

502 Soit Q un sous-tore déployé maximal de G .⁽³²⁾ Alors, d'après 6.2, $L = \underline{\text{Centr}}_G(Q)$ est sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique P de G , et comme $Q \subset \text{rad}(\underline{\text{Centr}}_G(Q))_{\text{dép}}$, la maximalité de Q entraîne $Q = \text{rad}(\underline{\text{Centr}}_G(Q))_{\text{dép}}$. En vertu de 6.11, L est un élément minimal de l'ensemble des sous-groupes de Levi de sous-groupes paraboliques de G , donc P est un sous-groupe parabolique minimal de G par 1.20. Il résulte alors de 5.7 et 5.5 (iv) que deux sous-tores tels que Q sont conjugués par une section de $G(S)$. La conjugaison des Q et des couples (P, L) entraîne alors la première assertion de 6.16.

Corollaire 6.17. — Soient S un schéma semi-local connexe, P et P' deux sous-groupes paraboliques minimaux en position standard (4.5.1.1). Alors $P \cap P'$ contient un sous-groupe de Levi commun à P et P' .

^(*)Cela est plus généralement vrai lorsque S est le spectre d'un corps parfait (Tits).⁽³¹⁾

⁽³⁰⁾N.D.E. : puisque S est supposé semi-local et connexe.

⁽³¹⁾N.D.E. : il s'agit du corollaire 3.7 de l'article [BT71].

⁽³²⁾N.D.E. : On a détaillé la phrase qui suit.

En effet, $P \cap P'$ contient un tore maximal T de G , d'après 4.5.1 (v) ; soit L l'unique sous-groupe de Levi de P contenant T . On a

$$\text{rad}(P) \cap T = \text{rad}(P) \cap L = \text{rad}(L)$$

par 1.21, donc $\text{rad}(P) \cap T$ contient $\text{rad}(L)_{\text{dép}}$ qui est un sous-tore déployé maximal de G , donc est nécessairement égal à $T_{\text{dép}}$. On a donc $L = \underline{\text{Centr}}_G(T_{\text{dép}})$, et par symétrie L est aussi un sous-groupe de Levi de P' .

Remarque 6.18. — Il résulte de 1.21 que le sous-groupe parabolique P de G est minimal si et seulement si $\text{rad}(P)$ contient un sous-tore déployé maximal de G ; alors, d'après la démonstration de 6.17, si T est un tore maximal de P , $T_{\text{dép}}$ est un tore déployé maximal de G et de $\text{rad}(P)$ et $\underline{\text{Centr}}_G(T_{\text{dép}})$ est un sous-groupe de Levi de P . De plus, tout sous-groupe de Levi de P s'obtient de cette manière.

7. Donnée radicielle relative

503

Dans ce paragraphe, S désignera un schéma *semi-local connexe non vide*, G un S -groupe réductif, Q un sous-tore déployé maximal de G , et L le centralisateur de Q dans G , i.e. $L = \underline{\text{Centr}}_G(Q)$.

7.1. — Comme Q est le plus grand sous-tore central déployé de L , toute section de $G(S)$ qui normalise L normalise aussi Q . On a donc (cf. 7.1.1)

$$\underline{\text{Norm}}_G(L)(S) = \underline{\text{Norm}}_G(Q)(S).$$

D'autre part, on a vu en 6.4 que l'application $G(S) \rightarrow (G/L)(S)$ est surjective. Il s'ensuit qu'on a une identification canonique

$$W_G(Q)(S) = (\underline{\text{Norm}}_G(Q) / \underline{\text{Centr}}_G(Q))(S) \simeq \underline{\text{Norm}}_G(L)(S) / L(S).$$

On désignera par M le groupe $\text{Hom}_{S\text{-gr.}}(Q, \mathbb{G}_{m,S})$, de telle sorte qu'on a un isomorphisme canonique $Q \simeq D_S(M)$. On notera W le groupe d'automorphismes de M défini par $W_G(Q)(S)$. On a donc des isomorphismes

$$W \simeq W_G(Q)(S) \simeq \underline{\text{Norm}}_G(L)(S) / L(S).$$

7.1.1. — On n'a pas en général $\underline{\text{Norm}}_G(L) = \underline{\text{Norm}}_G(Q)$. Prenons par exemple pour S le spectre d'un corps k , possédant une extension quadratique k' , pour G le groupe unitaire $Q\text{-Ép}_{k'/k}(A_2)$ (cf. Exp. XXIV, 3.11.2).

Comme les sous-groupes paraboliques minimaux de G sont ses groupes de Borel, leurs sous-groupes de Levi sont des tores maximaux, et on a $(\underline{\text{Norm}}_G(L)/L)(\bar{k}) = \mathfrak{S}_3$. 504

D'autre part, comme G n'est pas déployé, les tores déployés maximaux de G sont de dimension ≤ 1 , donc isomorphes à $\mathbb{G}_{m,k}$. Comme $\underline{\text{Norm}}_G(Q)/L$ opère fidèlement dans Q , on a $(\underline{\text{Norm}}_G(Q)/Q)(\bar{k}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

7.2. — Si P est un sous-groupe parabolique de G de groupe de Levi L (il en existe par 6.2), P est nécessairement minimal (cf. 6.18). En vertu de la conjugaison des sous-groupes paraboliques minimaux de G (5.7), de celle des sous-groupes de Levi d'un sous-groupe parabolique (1.8), et des égalités $P = \underline{\text{Norm}}_G(P)$ et $\underline{\text{Norm}}_G(L) \cap P = L$ (1.6), on obtient : *l'ensemble des sous-groupes paraboliques (minimaux) de G de groupe de Levi L est principal homogène sous le groupe W .*

7.3. — L'algèbre de Lie de G se décompose sous l'action de Q en

$$\mathcal{L}ie(G) = \mathcal{L}ie(L) \oplus \coprod_{\alpha \in R} \mathcal{L}ie(G)^\alpha,$$

où R est l'ensemble des caractères non nuls de Q tels que $\mathcal{L}ie(G)^\alpha \neq 0$ (racines de G relativement à Q).

Désignons par M^* le groupe $\text{Homs}_{\text{s-gr.}}(\mathbb{G}_{m, S}, Q)$, qui est en dualité avec M et sur lequel W opère de manière naturelle par transport de structure.

505 **Théorème 7.4.** — *Avec les notations de 7.3, il existe une unique application $\alpha \mapsto \alpha^*$ de R dans M^* qui définit dans (M, M^*) une donnée radicielle (Exp. XXI, 1.1) dont le groupe de Weyl soit W .*

De plus, les sous-groupes paraboliques P de G de groupe de Levi L et les systèmes de racines positives R_+ de R se correspondent bijectivement par la relation

$$\mathcal{L}ie(P) = \mathcal{L}ie(L) \oplus \coprod_{\alpha \in R_+} \mathcal{L}ie(G)^\alpha.$$

7.4.1. — Supposons d'abord prouvée l'existence de l'application $\alpha \mapsto \alpha^*$ demandée. En vertu de Exp. XXI, 3.4.10, s_α est l'unique élément de W tel que pour tout $m \in M$, $s_\alpha(m) - m$ soit un multiple rationnel de α , ce qui montre que s_α est déterminé par α ; comme on a alors ⁽³³⁾ $\alpha^*(m)\alpha = m - s_\alpha(m)$, on voit que α^* est déterminé par α , ce qui prouve l'unicité de l'application $\alpha \mapsto \alpha^*$.

7.4.2. — Soit $\alpha \in R$ et soit L_α (resp. H_α , resp. $H_{-\alpha}$) l'unique sous-groupe lisse et à fibres connexes de G contenant L et tel que (cf. 6.1 (i))

$$\mathcal{L}ie(L_\alpha) = \mathcal{L}ie(L) \oplus \coprod_{\gamma \in Z\alpha \cap R} \mathcal{L}ie(G)^\gamma$$

resp.

$$\mathcal{L}ie(H_\alpha) = \mathcal{L}ie(L) \oplus \coprod_{\gamma \in N\alpha \cap R} \mathcal{L}ie(G)^\gamma,$$

resp.

$$\mathcal{L}ie(H_{-\alpha}) = \mathcal{L}ie(L) \oplus \coprod_{\gamma \in -N\alpha \cap R} \mathcal{L}ie(G)^\gamma;$$

506 L_α est un sous-groupe réductif de G , H_α et $H_{-\alpha}$ en sont des sous-groupes paraboliques de sous-groupe de Levi L , et H_α et $H_{-\alpha}$ sont opposés relativement à L (cf. 6.1 (ii)).

⁽³³⁾N.D.E. : On a corrigé $\alpha^*(m)$ en $\alpha^*(m)\alpha$.

Par 7.2, il existe donc $s_\alpha \in \underline{\text{Norm}}_{L_\alpha}(\mathbb{Q})(S)/L(S) \subset W$ tel que $s_\alpha(H_\alpha) = H_{-\alpha}$. On a $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ (car α (resp. $-\alpha$) est le diviseur commun des éléments de R intervenant dans H_α (resp. $H_{-\alpha}$)), et on a $s_\alpha^2 = \text{id}$ (car $s_\alpha^2(H_\alpha)$ et H_α sont tous deux opposés à $H_{-\alpha}$ relativement à L). On a donc construit un $s_\alpha \in W$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$(x) \quad s_\alpha(\alpha) = -\alpha, \quad s_\alpha^2 = \text{id}$$

$$(xx) \quad s_\alpha \text{ peut se représenter par un élément de } L_\alpha(S).$$

Remarquons d'ailleurs que s_α est construit de manière canonique à partir de α , et en particulier que

$$(xxx) \quad \text{pour tout } w \in W, \text{ on a } ws_\alpha w^{-1} = s_{w(\alpha)}.$$

7.4.3. — Nous nous proposons maintenant de prouver l'assertion :

$$(xxxx) \quad \text{pour tout } m \in M, \quad s_\alpha(m) - m \in \mathbb{Z}\alpha.$$

Comme S est connexe, cette assertion est locale pour la topologie (fpqc). On peut donc supposer que $L_\alpha = G_1$ est déployable relativement à un tore maximal T_1 de L . Soit donc (G_1, T_1, M_1, R_1) un tel déploiement. Le monomorphisme $\mathbb{Q} \rightarrow T_1$ identifie M à un quotient de M_1 , soit $p : M_1 \rightarrow M$ l'application canonique.

L'image de R_1 par p est formée éventuellement de zéro et des racines de G_1 par rapport à \mathbb{Q} (donc des éléments de R multiples entiers de α) ; on a donc $p(R_1) \subset \mathbb{Z}\alpha$. En vertu de (xx), il existe un élément de $\underline{\text{Norm}}_{G_1}(L)(S)$ qui induit s_α sur \mathbb{Q} . En vertu de Exp. XXII, 5.10.10, il existe donc une section $w \in (W_1)_S(S)$ qui induit s_α sur \mathbb{Q} (on dénote par W_1 le groupe de Weyl de la donnée radicielle (M_1, R_1, \dots)). Quitte à restreindre S , on peut donc supposer qu'il existe $w \in W_1$ induisant s_α sur \mathbb{Q} , donc vérifiant $p(w(m_1)) = s_\alpha(p(m_1))$ pour tout $m_1 \in M_1$. Mais, par définition de W_1 , w est un produit de symétries par rapport à des éléments de R_1 , donc $w(m_1) - m_1$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers des éléments de R_1 . Il s'ensuit que $s_\alpha(p(m_1)) - p(m_1)$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers des éléments de $p(R_1) \subset \mathbb{Z}\alpha$, donc un multiple entier de α , ce qu'il fallait démontrer. 507

7.4.4. — On peut donc définir un élément $\alpha^* \in M^*$ par ⁽³⁴⁾

$$\alpha^*(m)\alpha = m - s_\alpha(m).$$

En vertu de (x), on a $(\alpha^*, \alpha) = 2$; il résulte d'autre part de (xxx) que pour tout couple $(\alpha, \alpha') \in R \times R$, on a $s_\alpha(\alpha') \in R$ et $s_\alpha(\alpha'^*) = s_\alpha(\alpha')^*$, ce qui prouve (cf. Exp. XXI, 1.1) que l'application $\alpha \mapsto \alpha^*$ construite définit bien une donnée radicielle dans (M, M^*) .

7.4.5. — Soit W' le groupe de Weyl de cette donnée radicielle (groupe de transformations de M engendré par les s_α) ; on a $W' \subset W$.

Soit d'autre part \geq une relation d'ordre total sur le groupe abélien libre M ; posons 508
 $R_+ = \{\alpha \in R \mid \alpha \geq 0\}$. On sait que R_+ est un système de racines positives de R . Soit $w \in W$, représenté par un $n \in \underline{\text{Norm}}_G(L)(S) = \underline{\text{Norm}}_G(\mathbb{Q})(S)$. Posons $P = H_{R_+}$

⁽³⁴⁾N.D.E. : On a corrigé $\alpha^*(m)$ en $\alpha^*(m)\alpha$.

(notation de 6.1); en vertu de *loc. cit.*, P est un sous-groupe parabolique de G , de sous-groupe de Levi L . On a évidemment $\text{int}(n)P = H_{w(R_+)}$. Il résulte alors de 7.3 que $w(R_+) = R_+$ entraîne $w = e$. Comme le groupe W' opère transitivement sur les systèmes de racines positives de R (Exp. XXI, 3.3.7) et que le stabilisateur dans W de R_+ est l'identité, on en conclut aussitôt que $W = W'$. On en conclut également que $W = W'$ opère de façon simplement transitive à la fois sur l'ensemble des systèmes de racines positives de R et sur l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G de groupe de Levi L , ce qui entraîne la dernière assertion de 7.4. C.Q.F.D.

7.5. — Si P et P_1 sont deux sous-groupes paraboliques minimaux de G , de sous-groupes de Levi L et L_1 , et si on désigne par Q et Q_1 les tores centraux déployés maximaux de L et L_1 , alors les couples (P, Q) et (P_1, Q_1) sont conjugués : il existe $g \in G(S)$ tel que $\text{int}(g)P = P_1$ et $\text{int}(g)Q = Q_1$.

En effet, P et P_1 sont conjugués (5.7) et on peut donc supposer $P = P_1$; alors L et L_1 sont conjugués par une section de $P(S)$ (1.8). De plus, si g et g' sont deux sections de G conjuguant les couples (P, Q) et (P_1, Q_1) , alors $g'^{-1}g$ normalise P et Q , donc P et L ; mais

$$\text{Norm}_G(P) \cap \text{Norm}_G(L) = P \cap \text{Norm}_G(L) = L = \text{Centr}_G(Q).$$

509 L'isomorphisme $Q \xrightarrow{\sim} Q_1$ induit par $\text{int}(g)$ est donc indépendant de g .

Soient \mathcal{R} et \mathcal{R}_1 les données radicielles définies grâce à 7.4 dans $\text{Hom}_{S\text{-gr.}}(Q, \mathbb{G}_{m,S})$ et $\text{Hom}_{S\text{-gr.}}(Q_1, \mathbb{G}_{m,S})$ et soient R_+ et R_{1+} les systèmes de racines positives correspondant à P et P_1 . L'isomorphisme canonique $Q \xrightarrow{\sim} Q_1$ défini ci-dessus transforme (\mathcal{R}, R_+) en (\mathcal{R}_1, R_{1+}) . On en déduit aussitôt que l'on peut définir la donnée radicielle relative épinglée ⁽³⁵⁾ de G sur S , en identifiant les différents (\mathcal{R}, R_+) à l'aide du système transitif d'isomorphismes décrit ci-dessus.

À partir de maintenant, nous noterons $(\underline{M}, \underline{M}^*, \underline{R}, \underline{R}^*, \underline{R}_+) = \mathcal{R}(G/S)$ cette donnée radicielle épinglée; pour chaque couple $P \supset Q$ comme ci-dessus, on a donc un isomorphisme canonique $\underline{M} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{S\text{-gr.}}(Q, \mathbb{G}_{m,S})$ transformant \underline{R} (resp. \underline{R}_+) en l'ensemble des racines de G (resp. de P) relativement à Q , et $W(\mathcal{R})$ en $W_G(Q)(S)$.

7.6. — Soit toujours Q un tore déployé maximal de G , P un sous-groupe parabolique (minimal) de G de groupe de Levi $\text{Centr}_G(Q)$, (M, M^*, R, R^*, R_+) la donnée radicielle épinglée correspondante (7.4), et Δ l'ensemble des racines simples de R_+ . Pour tout $A \subset \Delta$, soit $R_A \subset R$ l'ensemble

$$R_A = R_+ \cup (\mathbb{Z}A \cap R_-)$$

510 formé des racines positives et des racines négatives combinaisons linéaires des éléments de A . C'est un ensemble clos (Exp. XXI, 3.1.4) de racines, et tout ensemble clos contenant R_+ se met de façon unique sous cette forme (Exp. XXI, 3.3.10). Par 6.1, il

⁽³⁵⁾N.D.E. : Rappelons (Exp. XXIII 1.5) qu'une donnée radicielle épinglée est une donnée radicielle munie du choix d'un système de racines positives (ou de racines simples).

existe un unique sous-groupe P_A de G , lisse et à fibres connexes, contenant $\underline{\text{Centr}}_G(Q)$ et tel que

$$\mathcal{L}ie(P_A) = \mathcal{L}ie(G)^0 \oplus \coprod_{\alpha \in R_A} \mathcal{L}ie(G)^\alpha.$$

Il résulte alors aussitôt de 6.1, de la conjugaison des paraboliqes minimaux, et du fait que l'ensemble des racines d'un sous-groupe parabolique de G contenant Q est clos (qui se déduit aussitôt de 1.4 par déploiement) que :

Proposition 7.7. — (i) *L'application $A \mapsto P_A$ est une bijection de l'ensemble des parties de Δ sur l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G contenant P . Cette bijection conserve les relations d'ordre naturelles d'inclusion.*

(ii) *Tout sous-groupe parabolique de G est conjugué par une section de $G(S)$ à un unique P_A .*

7.8. — Soit $P \supset Q$ comme ci-dessus. Considérons la donnée radicielle relative (7.5) de G sur S et l'isomorphisme canonique

$$f : (M, M^*, R, R^*, R_+) \xrightarrow{\sim} (\underline{M}, \underline{M}^*, \underline{R}, \underline{R}^*, \underline{R}_+).$$

L'ensemble Δ des racines simples de R_+ est transformé en l'ensemble $\underline{\Delta}$ des racines simples de \underline{R}_+ , donc toute partie A de Δ en une partie $f(A) \subset \underline{\Delta}$.

Définition 7.9.0. — ⁽³⁶⁾ Soit H un sous-groupe parabolique de G quelconque. Par 7.7 511 (ii), il est conjugué à un unique P_A . Notons $\mathfrak{t}_r(H) = f(A) \subset \underline{\Delta}$. On vérifie aussitôt à l'aide des théorèmes de conjugaison que $\mathfrak{t}_r(H)$ est indépendant du choix du couple $P \supset Q$. On dit que c'est le *type relatif* de H .

Proposition 7.9. — (i) *L'application $H \mapsto \mathfrak{t}_r(H)$ induit une bijection entre l'ensemble des classes de conjugaison (par $G(S)$) des sous-groupes paraboliques de G , et l'ensemble des parties de $\underline{\Delta}$.*

(ii) *Soient H un sous-groupe parabolique de G , P un sous-groupe parabolique minimal contenu dans H , Q le tore déployé central maximal d'un sous-groupe de Levi de P , Δ l'ensemble des racines simples de P relativement à Q et $f : \Delta \xrightarrow{\sim} \underline{\Delta}$ l'isomorphisme canonique. Alors, pour tout $\alpha \in \Delta$, on a l'équivalence :*

$$f(\alpha) \in \mathfrak{t}_r(H) \iff \mathcal{L}ie(H)^{-\alpha} \neq 0$$

et l'on a $H = P_A$, où $A = f^{-1}(\mathfrak{t}_r(H))$.

(iii) *Si H et H' sont deux sous-groupes paraboliques de G contenant P , alors (voir 3.8.1 (ii) et 5.5 (i) pour d'autres conditions équivalentes) :*

$$\mathfrak{t}_r(H) \subset \mathfrak{t}_r(H') \iff \mathfrak{t}(H) \subset \mathfrak{t}(H')$$

7.10. — On peut étudier les positions relatives de deux sous-groupes paraboliques minimaux ; les résultats sont les suivants (on renvoie à 4.5.2 pour la notation $\mathfrak{t}_2(P, P_1)$) : 512

⁽³⁶⁾N.D.E. : On a ajouté la numérotation 7.9.0 pour mettre en évidence la définition du « type relatif ».

(1) Si P, P_1, P', P'_1 sont quatre sous-groupes paraboliques minimaux de G , alors $\mathfrak{t}_2(P, P_1) = \mathfrak{t}_2(P', P'_1)$ (i.e. (P, P_1) et (P', P'_1) sont conjugués localement pour (fpqc)) si et seulement si il existe $g \in G(S)$ tel que $\text{int}(g)P = P'$ et $\text{int}(g)P_1 = P'_1$.

(2) Fixons-nous en particulier un sous-groupe parabolique minimal P de sous-groupe de Levi L et soit T un tore maximal de L . Considérons le schéma $\underline{\text{Par}}_{t_{\min}}(G; P)$ des sous-groupes paraboliques minimaux de G en position standard relativement à P . On a un morphisme (cf. 4.5.5)

$$f : \underline{\text{Par}}_{t_{\min}}(G; P) \longrightarrow W_P(T) \backslash W_G(T) / W_P(T)$$

dont les fibres sont « les orbites de P dans $\underline{\text{Par}}_{t_{\min}}(G; P)$ ». En vertu de (1), f induit donc un monomorphisme

$$P(S) \backslash \underline{\text{Par}}_{t_{\min}}(G; P)(S) \hookrightarrow (W_P(T) \backslash W_G(T) / W_P(T))(S).$$

L'image de ce morphisme s'identifie à W ; c'est le *théorème de Bruhat* : chaque orbite de $P(S)$ dans $\underline{\text{Par}}_{t_{\min}}(G; P)(S)$ contient un et un seul sous-groupe parabolique de G de groupe de Levi L (c'est-à-dire de la forme $\text{int}(n)P$, où $n \in \underline{\text{Norm}}_G(L)$).

(3) En d'autres termes, soit $E(S)$ l'ensemble des $g \in G(S)$ tels que $\text{int}(g)P$ et P soient en position mutuelle standard. Alors $E(S)$ possède une partition en doubles classes modulo $P(S)$ indexée par W :

$$E(S) = P(S) W P(S)$$

513 (notation évidente). Posant $U = \text{rad}^u(P)(S)$, on peut aussi écrire

$$E(S) = U(S) \cdot \underline{\text{Norm}}_G(L)(S) \cdot U(S),$$

mettant ainsi en évidence une partition de $E(S)$ en doubles classes modulo $U(S)$, indexée par $\underline{\text{Norm}}_G(L)(S)$.

(4) Si S est le spectre d'un corps, alors $E(S) = G(S)$, et on retrouve [BT65], 5.15.

Contre-exemples 7.11. — Soient $S = \text{Spec}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$, $G = \text{SL}_{2,S}$. Soit B le sous-groupe de Borel habituel formé des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $c = 0$. Soit $g = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in G(S)$, posons $B' = \text{int}(g)B$. Alors $B(S) = B'(S)$, et $B \cap B'$ ne contient pas de tore maximal⁽³⁷⁾. Cela montre d'une part que deux sous-groupes paraboliques minimaux distincts peuvent avoir le même groupe de sections, d'autre part qu'il n'existe pas en général de critère permettant de reconnaître si deux sous-groupes paraboliques minimaux P et P' sont en position standard, à l'aide uniquement des groupes $P(S)$ et $P'(S)$. En particulier, la partie $E(S)$ de $G(S)$ ne semble pas pouvoir être définie à l'aide uniquement de la situation $\{G(S), P(S), \underline{\text{Norm}}_G(L)(S)\}$ (dans le cas précédent, cette partie est définie par $c \neq 2$ ⁽³⁸⁾).

⁽³⁷⁾N.D.E. : En effet, B' est le sous-groupe de G défini par l'équation $c = 2(a+b)$; alors $B \cap B'$ n'est pas plat sur S , donc ne contient pas de tore maximal, d'après 4.5.1.

⁽³⁸⁾N.D.E. : Plus généralement, pour tout S -schéma S' , $E(S')$ est défini par la condition : « c est nul ou bien inversible ».

7.12. — On se propose maintenant d'étudier la variation de $\mathcal{R}(G/S)$ avec S . Soit donc S' un S -schéma, également semi-local connexe et non vide. Soit Q un tore déployé maximal de G ; alors $Q_{S'}$ est un tore déployé de $G_{S'}$, soit Q' un tore déployé maximal de $G_{S'}$ contenant $Q_{S'}$. Posons 514

$$\begin{aligned} M &= \text{Hom}_{S\text{-gr.}}(Q, \mathbb{G}_{m,S}) \simeq \text{Hom}_{S'\text{-gr.}}(Q_{S'}, \mathbb{G}_{m,S'}) \\ M' &= \text{Hom}_{S'\text{-gr.}}(Q', \mathbb{G}_{m,S'}). \end{aligned}$$

Le monomorphisme $Q_{S'} \rightarrow Q'$ induit un épimorphisme $u : M' \rightarrow M$. Notons

$$L = \underline{\text{Centr}}_G(Q), \quad L' = \underline{\text{Centr}}_{G_{S'}}(Q'),$$

on a $L' \subset L_{S'}$.

Si H est un sous-groupe de G contenant L , alors $H_{S'}$ contient L' , et on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}ie(H) &= \mathcal{L}ie(L) \oplus \prod_{\alpha \in R_H} \mathcal{L}ie(H)^\alpha \\ \mathcal{L}ie(H_{S'}) &= \mathcal{L}ie(L') \oplus \prod_{\alpha' \in R_{H_{S'}}} \mathcal{L}ie(H_{S'})^{\alpha'}, \end{aligned}$$

où R_H (resp. $R'_{H_{S'}}$) désigne l'ensemble des racines de H (resp. $H_{S'}$) relativement à Q (resp. Q'). On en tire immédiatement que

$$R_H \subset u(R'_{H_{S'}}) \subset R_H \cup \{0\}.$$

Prenant $H = G$, on voit d'abord que $R \subset u(R') \subset R \cup \{0\}$; prenant ensuite pour H un sous-groupe parabolique minimal P de sous-groupe de Levi L , on voit que $R'_{H_{S'}}$ contient un système de racines positives de R' , donc (7.4) qu'il existe un sous-groupe parabolique minimal P' de $G_{S'}$ de sous-groupe de Levi L' contenu dans $P_{S'}$. On a donc construit un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} Q_{S'} & \subset & L_{S'} & \subset & P_{S'} \\ & & \cup & & \cup \\ Q' & \subset & L' & \subset & P'. \end{array}$$

Si R_+ (resp. Δ) est le système de racines positives (resp. simples) de R défini par P et si on définit de même R'_+ et Δ' , on vérifie facilement que 515

$$R_+ \subset u(R'_+) \subset R_+ \cup \{0\}, \quad \Delta \subset u(\Delta') \subset \Delta \cup \{0\}.$$

Soient maintenant $w \in W \simeq \underline{\text{Norm}}_G(Q)(S)/\underline{\text{Centr}}_G(Q)(S)$, et $n \in \underline{\text{Norm}}_G(Q)(S)$ un représentant de w . On a $\text{int}(n)Q = Q$ donc $\text{int}(n)L = L$, donc $\text{int}(n)L_{S'} = L_{S'}$. Alors Q' et $\text{int}(n)Q'$ sont deux tores déployés maximaux de $L_{S'}$ donc sont conjugués par une section $x \in L(S')$, et on a $\text{int}(nx)Q' = Q'$, donc $nx \in \underline{\text{Norm}}_{G_{S'}}(Q')(S')$. Soit w' l'image de $n' = nx$ dans $W' \simeq \underline{\text{Norm}}_{G_{S'}}(Q')(S')/\underline{\text{Centr}}_{G_{S'}}(Q')(S')$. Il est clair que l'opération de w' sur M' est compatible avec la projection $u : M' \rightarrow M$ et que l'opération induite sur M coïncide avec celle définie par w .

Utilisant maintenant la définition des données radicielles relatives et les théorèmes de conjugaison, on démontre sans peine :

Théorème 7.13. — Soient S et S' deux schémas semi-locaux connexes non vides, $S' \rightarrow S$ un morphisme de S -schémas, G un S -groupe réductif,

$$\mathcal{R}(G/S) = (\underline{M}, \underline{M}^*, \underline{R}, \underline{R}^*, \underline{R}_+), \quad \mathcal{R}(G_{S'}/S') = (\underline{M}', \underline{M}'^*, \underline{R}', \underline{R}'^*, \underline{R}'_+)$$

les données radicielles épinglées relatives. Il existe un homomorphisme canonique

$$\underline{u} : \underline{M}' \longrightarrow \underline{M}$$

516 vérifiant les conditions suivantes :

(i) \underline{u} est surjectif.

(ii) Pour tout $w \in W$, il existe un élément w' de W' compatible avec \underline{u} et qui induise w sur \underline{M} .

(iii) Pour toute partie X de \underline{M} , notons $X^\wedge = X \cap (\underline{M} - \{0\})$. Alors

$$\underline{u}(\underline{R}'_+)^{\wedge} = \underline{R}_+, \quad \underline{u}(\underline{\Delta}')^{\wedge} = \underline{\Delta}.$$

(iv) Pour tout sous-groupe parabolique H , considérons $\mathfrak{t}_r(H) \subset \underline{\Delta}$ et $\mathfrak{t}_r(H_{S'}) \subset \underline{\Delta}'$. Alors

$$\mathfrak{t}_r(H_{S'}) = \underline{u}^{-1}(\mathfrak{t}_r(H) \cup \{0\}) \cap \underline{\Delta}' = \{\alpha' \in \underline{\Delta}' \mid \underline{u}(\alpha') \in \mathfrak{t}_r(H) \text{ ou } \underline{u}(\alpha') = 0\}.$$

Remarque 7.14. — Si G est déployable sur S , ses tores déployés maximaux sont des tores maximaux, et les notions relatives introduites ici coïncident alors avec les notations absolues déjà introduites. Le théorème précédent donne donc une description de la donnée radicielle relative $\mathcal{R}(G/S)$ et du type relatif \mathfrak{t}_r , à l'aide de la donnée radicielle absolue et du type absolu du groupe $G_{S'}$, S' étant choisi de telle manière que $G_{S'}$ soit déployable (cf. Exp. XXIV, 4.4.1). Renvoyons à [BT65], 6.12 et sq. pour cette description.

517 **7.15.** — Soient S un schéma local hensélien, s_0 son point fermé, S_0 le spectre du corps résiduel de s_0 , identifié à un sous-schéma fermé de S ; pour tout objet X au-dessus de S , notons X_0 l'objet au-dessus de S_0 déduit de X par changement de base. Soit enfin G un S -groupe réductif. Pour tout sous-groupe parabolique P de G , P_0 est un sous-groupe parabolique de G_0 ; inversement, pour tout sous-groupe parabolique \overline{P} de G_0 , il existe un sous-groupe parabolique P de G tel que $P_0 = \overline{P}$ (cela résulte du lemme de Hensel et de ce que $\underline{\text{Par}}(G)$ est un S -schéma lisse); en particulier (cf. 5.7), un sous-groupe parabolique P de G est minimal si et seulement si P_0 est minimal. Un tel sous-groupe P de G étant choisi, un raisonnement analogue montre que les sous-tores déployés maximaux de P_0 sont de la forme T_0 , où T est un sous-tore déployé maximal de P . Il s'ensuit sans difficultés que les données radicielles relatives de G sur S et de G_0 sur S_0 sont canoniquement isomorphes, de sorte que la théorie des sous-groupes paraboliques de G se ramène à celle des sous-groupes paraboliques de G_0 .

Remarquons d'ailleurs que tout S_0 -groupe réductif est de la forme G_0 (Exp. XXIV, Prop. 1.21), ce qui permet inversement de ramener l'étude des sous-groupes paraboliques d'un S_0 -groupe réductif à l'étude correspondante sur S .

Bibliographie

- [BT65] A. Borel, J. Tits, *Groupes réductifs*, Publ. Math. I.H.É.S. **27** (1965), 55-150.
(39)
- [BT71] A. Borel, J. Tits, *Éléments unipotents et sous-groupes paraboliques de groupes réductifs*. I, Invent. Math. **12** (1971), 95-104.
- [Ch05] C. Chevalley, *Classification des groupes algébriques semi-simples* (avec la collaboration de P. Cartier, A. Grothendieck, M. Lazard), Collected Works, vol. 3, Springer, 2005.
- [DG70] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Masson & North-Holland, 1970.
- [Gi71] J. Giraud, *Cohomologie non abélienne*, Springer-Verlag, 1971.

⁽³⁹⁾N.D.E. : On a ajouté à cette référence, figurant dans l'original, les références qui suivent.