

## EXPOSÉ V

### CONSTRUCTION DE SCHÉMAS QUOTIENTS

par P. GABRIEL

L'objet de cet exposé est de démontrer les théorèmes énoncés dans TDTE III <sup>(1)</sup>. Si **251**  
 $X$  et  $T$  sont deux objets d'une catégorie  $\mathcal{C}$  nous écrivons  $X(T)$  au lieu de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X)$ .  
 De même, si  $\varphi : Y \rightarrow X$  (resp.  $T$ ) est une flèche (resp. un objet) de  $\mathcal{C}$ ,  $\varphi(T)$  désigne  
 l'application  $g \mapsto \varphi \circ g$  de  $Y(T)$  dans  $X(T)$  :

$$\begin{array}{ccc} T & & \\ \downarrow g & \searrow \varphi \circ g & \\ Y & \xrightarrow{\varphi} & X, \end{array}$$

et  $T(\varphi)$  désigne l'application  $g \mapsto g \circ \varphi$  de  $T(X)$  vers  $T(Y)$  :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\varphi} & X \\ & \searrow g \circ \varphi & \downarrow g \\ & & T. \end{array}$$

Enfin, si  $P$  est un schéma, on note  $\underline{P}$  l'ensemble sous-jacent à  $P$ .

Exceptionnellement, nous ne suivons pas dans le présent exposé la convention énoncée dans IV 4.6.15 sur la notation des quotients (*loc. cit.* haut de la page 227 de l'original) car nous désirons donner ici une construction de quotients qui s'applique également à des « pré-relations d'équivalence » <sup>(2)</sup> qui ne sont pas des relations d'équivalence.

<sup>(1)</sup>N.D.E. : à savoir, les théorèmes 5.1, 5.3, 6.1, 6.2 et 7.2 de TDTE III. Les deux premiers (resp. les deux suivants) correspondent au théorème 4.1 (resp. aux théorèmes 7.1 et 8.1) de cet exposé. Le théorème 7.2 de TDTE III est démontré dans l'Exp. VI<sub>A</sub>, 3.2 et 3.3.

<sup>(2)</sup>N.D.E. : c.-à-d., à des *groupoïdes* de base  $X$ , cf. la terminologie à la fin de la section 1. Lorsque  $\mathcal{C}$  est la catégorie des schémas, le quotient  $p : X \rightarrow Y$  d'un groupoïde  $X_*$  de base  $X$  existe sous certaines hypothèses (cf. 4.1, 6.1, 7.1) ; si, de plus,  $X_*$  est une relation d'équivalence,  $p$  est, sous les mêmes hypothèses, fidèlement plat et quasi-compact, donc un épimorphisme universel, cf. *loc. cit.*

### 1. $\mathcal{C}$ -groupoïdes

a)  $\mathcal{C}$  est une catégorie où les produits et produits fibrés existent. Rappelons d'abord qu'un diagramme

$$X_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} X_0 \xrightarrow{p} Y$$

de  $\mathcal{C}$  est dit *exact* si  $pd_0 = pd_1$  et si, pour tout  $T \in \mathcal{C}$ ,  $T(p)$  est une bijection de  $T(Y)$  sur la partie de  $T(X_0)$  formée des flèches  $f : X_0 \rightarrow T$  telles que  $fd_0 = fd_1$ . On dit aussi que  $(Y, p)$  est le *conoyau* de  $(d_0, d_1)$  et on écrit

$$(Y, p) = \text{Coker}(d_0, d_1).$$

252 b) Soit par exemple  $\mathcal{C}$  la catégorie (**Esp. An**) des espaces annelés. Dans ce cas, il existe toujours un conoyau  $(Y, p)$ , dont on peut donner la description suivante : l'espace topologique sous-jacent à  $Y$  est obtenu à partir de  $X_0$  en identifiant les points  $d_0(x)$  et  $d_1(x)$  et en munissant  $Y$  de la topologie quotient. L'application canonique  $\pi : X_0 \rightarrow Y$  et  $d_0, d_1$  induisent alors une double-flèche de faisceaux d'anneaux sur  $Y$  :

$$\pi_*(\mathcal{O}_0) \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_0} \\ \xrightarrow{\delta_1} \end{array} \pi_*(d_{0*}\mathcal{O}_1) = \pi_*(d_{1*}\mathcal{O}_1),$$

où  $\mathcal{O}_i$  est le faisceau structural de  $X_i$ . On choisit pour faisceau d'anneaux sur  $Y$  le sous-faisceau de  $\pi_*(\mathcal{O}_0)$  dont les sections  $s$  sont telles que  $\delta_0(s) = \delta_1(s)$ . La flèche  $p$  est définie de façon évidente.

(3) Soit  $X_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} X_0$  un diagramme dans (**Esp. An**) et soit  $(Y, p)$  son conoyau.

On dit qu'un ouvert  $U$  de  $X_0$  est *saturé* si  $d_0^{-1}(U) = d_1^{-1}(U)$ , ce qui équivaut à dire que  $U = p^{-1}(p(U))$ . Dans ce cas, comme  $Y$  est muni de la topologie quotient,  $p(U)$  est un ouvert de  $Y$ .

**Lemme 1.1.** — Soient  $U$  un ouvert saturé de  $X$  et  $V = p(U)$ . Si l'on désigne par  $U_1$  l'ouvert  $d_0^{-1}(U) = d_1^{-1}(U)$  de  $X_1$ , et par  $\tilde{d}_0, \tilde{d}_1$ , et  $\tilde{p}$  les restrictions de  $d_0, d_1$  à  $U_1$ , et de  $p$  à  $U$ , alors  $(V, \tilde{p})$  est un conoyau dans (**Esp. An**) de : <sup>(4)</sup>

$$U_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\tilde{d}_1} \\ \xrightarrow{\tilde{d}_0} \end{array} U \xrightarrow{\tilde{p}} V.$$

<sup>(3)</sup>N.D.E. : On a ajouté les lemmes 1.1 et 1.2, utilisés à plusieurs reprises dans les sections 5 à 9.

<sup>(4)</sup>N.D.E. : Ceci n'est pas le cas dans la catégorie des schémas. Soient, par exemple,  $S = \text{Spec}(\mathbb{C})$ ,  $X_0 = \mathbb{A}_S^2 = \text{Spec}(\mathbb{C}[x_1, x_2])$ ,  $d_1 : \mathbb{G}_{m,S} \times_S \mathbb{A}_S^2 \rightarrow \mathbb{A}_S^2$  l'action de  $\mathbb{G}_{m,S}$  par homothéties sur  $\mathbb{A}_S^2$ ,  $d_0$  la projection sur le second facteur, et  $U = \mathbb{A}_S^2 - \{\mathfrak{m}\}$ , où  $\mathfrak{m}$  est le point  $(0, 0)$ . Alors, l'espace projectif  $\mathbb{P}_S^1$  est le conoyau de  $(\tilde{d}_0, \tilde{d}_1)$  dans (**Esp. An**) et dans (**Sch**), et le conoyau  $Y$  de  $(d_0, d_1)$  dans (**Esp. An**) est réunion de  $\mathbb{P}_S^1$  et du point  $y_0 = \{p(\mathfrak{m})\}$ , l'unique ouvert contenant  $y_0$  est  $Y$  et l'on a  $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) = \mathbb{C}$ . Si  $f : \mathbb{A}_S^2 \rightarrow T$  est un morphisme de  $S$ -schémas tel que  $fd_0 = fd_1$  et si  $V = \text{Spec}(A)$  est un ouvert affine de  $T$  contenant le point  $t_0 = f(y_0)$ , alors  $f^{-1}(V) = \mathbb{A}^2$  et le morphisme d'anneaux  $A \rightarrow \mathbb{C}[x_1, x_2]$  se factorise par  $\mathbb{C}$ ; ceci montre que  $S = \text{Spec}(\mathbb{C})$  est le conoyau de  $(d_0, d_1)$  dans la catégorie (**Sch**/ $S$ ).

La vérification est facile.

**Lemme 1.2.** — Soit  $X_1 \begin{matrix} \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{matrix} X_0$  un diagramme dans **(Sch)** et soit  $(Y, p)$  son conoyau dans **(Esp. An)**.

(i) Si  $Y$  est un schéma et  $p$  un morphisme de schémas, alors  $(Y, p)$  est un conoyau de  $(d_0, d_1)$  dans **(Sch)**.

(ii) Supposons que tout point de  $X_0$  possède un voisinage ouvert saturé  $U$  tel que, notant  $\tilde{d}_0$  et  $\tilde{d}_1$  les restrictions de  $d_0$  et  $d_1$  à  $d_0^{-1}(U) = d_1^{-1}(U)$ , et  $(Q, q)$  le conoyau de  $(\tilde{d}_0, \tilde{d}_1)$  dans **(Esp. An)**,  $Q$  soit un schéma et  $q$  un morphisme de schémas. Alors  $(Y, p)$  est un conoyau de  $(d_0, d_1)$  dans **(Sch)**.

(i) est démontré au § 4.c; la démonstration étant courte, répétons-la ici. Soit  $f : X_0 \rightarrow Z$  un morphisme de schémas tel que  $fd_0 = fd_1$ . Par hypothèse, il y a un morphisme d'espaces annelés  $r : Y \rightarrow Z$  et un seul tel que  $f = rp$ . Il s'agit de montrer que, pour tout  $y \in Y$ , l'homomorphisme  $\mathcal{O}_{r(y)} \rightarrow \mathcal{O}_y$  induit par  $r$  est local. Cela résulte de ce que  $p$  est surjectif, donc  $y$  de la forme  $p(x)$ , et de ce que l'homomorphisme  $\mathcal{O}_{f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_x$  induit par  $f$  est local.

(ii) résulte de (i) et du lemme précédent.

**c)** Dans cet exposé, nous étudions l'existence de  $\text{Coker}(d_0, d_1)$  lorsque la double flèche  $(d_0, d_1)$  se trouve insérée dans un contexte plus riche; de façon précise, désignons par  $X_2 = X_1 \times_{d_1, d_0} X_1$  le produit fibré du diagramme

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} & X_1 & \\ & \downarrow d_1 & \\ X_1 & \xrightarrow{d_0} & X_0 \end{array} \quad ,$$

par  $d'_0$  et  $d'_2$  les deux projections canoniques de  $X_2$  sur  $X_1$ ; on a donc par définition un carré cartésien

$$(0) \quad \begin{array}{ccc} X_2 & \xrightarrow{d'_0} & X_1 \\ d'_2 \downarrow & & \downarrow d_1 \\ X_1 & \xrightarrow{d_0} & X_0 \end{array} \quad .$$

De plus, donnons-nous une troisième flèche  $d'_1 : X_2 \rightarrow X_1$ ; nous disons que  $(d_0, d_1 : X_1 \rightrightarrows X_0, d'_1)$  est un  $\mathcal{C}$ -groupoïde si pour tout objet  $T$  de  $\mathcal{C}$ ,  $X_1(T)$  est l'ensemble des flèches d'un groupoïde  $X_*(T)$  dont l'ensemble des objets est  $X_0(T)$ , l'application source  $d_1(T)$ , l'application but  $d_0(T)$  et dont l'application composition est  $d'_1(T)$  (on identifie comme d'habitude  $(X_1 \times_{d_1, d_0} X_1)(T)$  à  $X_1(T) \times_{d_1(T), d_0(T)} X_1(T)$ ;

on rappelle aussi qu'un groupoïde est une catégorie dont toutes les flèches sont inversibles).<sup>(5)</sup>

Si  $\varphi$  est une flèche du groupoïde  $X_*(T)$ , l'application  $f \mapsto \varphi \circ f$  est une bijection de l'ensemble des flèches  $f$  dont le but coïncide avec la source de  $\varphi$  sur l'ensemble des flèches ayant même but que  $\varphi$ . On voit facilement qu'on peut traduire ce fait en disant que *le carré*

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} X_2 & \xrightarrow{d'_1} & X_1 \\ d'_0 \downarrow & & \downarrow d_0 \\ X_1 & \xrightarrow{d_0} & X_0 \end{array}$$

*est cartésien.*

De même, l'application  $g \mapsto g \circ \varphi$  est une bijection de l'ensemble des flèches  $g$  de  $X_*(T)$  qui ont pour source le but de  $\varphi$  sur l'ensemble des flèches qui ont même source que  $\varphi$ . On peut encore traduire ce fait en disant que *le carré*

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} X_2 & \xrightarrow{d'_1} & X_1 \\ d'_2 \downarrow & & \downarrow d_1 \\ X_1 & \xrightarrow{d_1} & X_0 \end{array}$$

*est cartésien.*

**254** D'autre part soit  $s : X_0 \rightarrow X_1$  l'unique flèche de  $\mathcal{C}$  telle que, pour tout  $T$ ,  $s(T) : X_0(T) \rightarrow X_1(T)$  associe à tout objet de  $X_*(T)$  la flèche identique de cet objet<sup>(6)</sup>. La flèche  $s$  satisfait aux égalités

$$(3) \quad d_1 s = \text{id}_{X_0},$$

et (3 bis)  $d_0 s = \text{id}_{X_0}.$

Enfin, l'associativité des applications de composition  $d'_1(T)$  se traduit par la commutativité du diagramme

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} X_1 \times_{d_1, d_0} X_1 \times_{d_1, d_0} X_1 & \xrightarrow{d'_1 \times X_1} & X_1 \times_{d_1, d_0} X_1 \\ X_1 \times d'_1 \downarrow & & \downarrow d'_1 \\ X_1 \times_{d_1, d_0} X_1 & \xrightarrow{d'_1} & X_1 \end{array} .$$

<sup>(5)</sup>N.D.E. : Donc, dans ce cas,  $X_2(T)$  est l'ensemble de couples  $(f_2, f_1)$  de flèches composables, c.-à-d., telles que  $d_0(f_1) = d_1(f_2)$ , et  $d'_0, d'_1$  et  $d'_2$  envoient  $(f_2, f_1)$  sur  $f_2, f_2 \circ f_1, f_1$  respectivement.

<sup>(6)</sup>N.D.E. :  $T \mapsto s(T)$  définit un élément de  $\text{Hom}(\mathbf{h}_{X_0}, \mathbf{h}_{X_1})$ , et ce dernier égale  $\text{Hom}(X_0, X_1)$ , d'après le lemme de Yoneda.

Réciproquement, les conditions (1), (2) et (4) et l'existence d'une flèche  $s$  satisfaisant à (3) impliquent que  $(X_1 \xrightarrow[d_0]{d_1} X_0, d'_1)$  est un  $\mathcal{C}$ -groupeïde. La condition (3) est bénigne ; elle assure simplement que l'application  $d_1(T) : X_1(T) \rightarrow X_0(T)$  est surjective pour tout  $T \in \mathcal{C}$ . Dans la suite de cet exposé, nous nous servons surtout des carrés cartésiens (0), (1) et (2) que nous résumons dans le diagramme

$$(0,1,2) \quad \begin{array}{ccccc} X_2 & \xrightarrow{d'_1} & X_1 & \xrightarrow{d_0} & X_0 \\ & \xrightarrow{d'_0} & & & \\ \downarrow d'_2 & & \downarrow d_1 & & \\ X_1 & \xrightarrow{d_1} & X_0 & & \end{array} .$$

Dans ce diagramme les deux carrés de gauche (i.e. les carrés (0) et (2)) sont cartésiens ; la première ligne est exacte et  $X_2$  s'identifie au produit fibré  $X_1 \times_{d_0, d_0} X_1$ .

255

Nous n'utilisons l'associativité que de façon détournée, par exemple pour assurer l'existence d'une flèche  $s$  satisfaisant à (3) et (3 bis), ou bien pour assurer l'existence d'une flèche

$$(\dagger) \quad \sigma : X_1 \rightarrow X_1 \quad \text{telle que} \quad d_0\sigma = d_1 \text{ et } d_1\sigma = d_0$$

(on choisit  $\sigma$  de telle manière que  $\sigma(T) : X_1(T) \rightarrow X_1(T)$  envoie toute flèche de  $X_*(T)$  sur la flèche inverse) <sup>(7)</sup>.

Par abus de langage il nous arrivera d'appeler  $\mathcal{C}$ -groupeïde un diagramme

$$X_2 \xrightarrow{d'_0, d'_1, d'_2} X_1 \xrightarrow{d_0, d_1} X_0$$

tel que (0), (1) et (2) soient cartésiens, que (4) soit commutatif et qu'il existe  $s$  satisfaisant à (3). L'objet  $X_2$  pourra donc être « un » produit fibré de  $(*)$  sans être « le » produit fibré de  $(*)$  <sup>(8)</sup>.

*Terminologie.* Au lieu du  $\mathcal{C}$ -groupeïde  $X_*$ , nous parlerons aussi du *groupeïde*  $X_*$  de base  $X_0$ , ou de la *prérelation d'équivalence*  $X_*$  dans  $X_0$ .

## 2. Exemples de $\mathcal{C}$ -groupeïdes

a) Soient  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$  et  $G$  un  $\mathcal{C}$ -groupe opérant à gauche sur  $X$ . Nous désignons par  $d_0 : G \times X \rightarrow X$  la flèche définissant l'opération de  $G$  sur  $X$ , par  $d_1 : G \times X \rightarrow X$  la projection du produit sur le deuxième facteur, par  $\mu : G \times G \rightarrow G$

<sup>(7)</sup>N.D.E. : Il résulte du lemme de Yoneda que  $\sigma$  est un automorphisme involutif de  $X_1$  ; ceci sera utilisé, par exemple, dans 3.e) et dans le théorème 4.1.

<sup>(8)</sup>N.D.E. : voir l'exemple 2.a) qui suit.

la flèche définissant la structure de  $\mathcal{C}$ -groupe de  $G$ , enfin par  $\text{pr}_{2,3}$  la projection de  $G \times G \times X = G \times (G \times X)$  sur le deuxième facteur. Alors

$$G \times G \times X \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{pr}_{2,3}} \\ \xrightarrow{\mu \times X} \\ \xrightarrow{G \times d_0} \end{array} G \times X \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} X$$

256 est un  $\mathcal{C}$ -groupeïde.

b) Soit  $d_0, d_1 : X_1 \rightarrow X_0$  un couple d'équivalence, c.-à-d., si  $d_0 \boxtimes d_1 : X_1 \rightarrow X_0 \times X_0$  est la flèche de composantes  $d_0$  et  $d_1$ , nous supposons que  $(d_0 \boxtimes d_1)(T)$  est, pour tout objet  $T$  de  $\mathcal{C}$ , une bijection de  $X_1(T)$  sur le graphe d'une relation d'équivalence de  $X_0(T)$ . L'ensemble  $X_1(T)$  s'identifie par conséquent à l'ensemble des couples  $(x, y)$  formés d'éléments de  $X_0(T)$  tels que  $x \sim y$ ; de même, l'ensemble  $X_2(T) = (X_1 \times_{d_1, d_0} X_1)(T)$  s'identifie à l'ensemble des triplets  $(x, y, z)$  d'éléments de  $X_0(T)$  tels que  $x \sim y$  et  $y \sim z$ . Il y a donc une et une seule flèche  $d'_1 : X_2 \rightarrow X_1$  rendant commutatifs les carrés (1) et (2) :  $d'_1(T)$  doit envoyer  $(x, y, z) \in X_2(T)$  sur  $(x, z) \in X_1(T)$ . Pour ce choix de  $d'_1$ ,  $(d_0, d_1 : X_1 \rightrightarrows X_0, d'_1)$  est un  $\mathcal{C}$ -groupeïde.

Réciproquement, considérons un  $\mathcal{C}$ -groupeïde  $X_*$  tel que  $d_0 \boxtimes d_1 : X_1 \rightarrow X_0 \times X_0$  soit un *monomorphisme*. Alors  $(d_0, d_1)$  est un couple d'équivalence et  $X_*$  peut être reconstruit à partir de  $(d_0, d_1)$  comme cela est expliqué quelques lignes plus haut. <sup>(9)</sup>

c) Si  $p : X \rightarrow Y$  est une flèche quelconque de  $\mathcal{C}$  et si  $\text{pr}_1$  et  $\text{pr}_2$  sont les deux projections de  $X \times_{p,p} X$  sur  $X$ , alors  $(\text{pr}_1, \text{pr}_2) : X \times_{p,p} X \rightrightarrows X$  est un couple d'équivalence. On dit que  $p$  est un *épimorphisme effectif* si le diagramme

$$X \times_{p,p} X \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{pr}_1} \\ \xrightarrow{\text{pr}_2} \end{array} X \xrightarrow{p} Y$$

est exact, c'est-à-dire si  $(Y, p) = \text{Coker}(\text{pr}_1, \text{pr}_2)$ .

257 Soit par exemple  $S$  un schéma noethérien et soit  $\mathcal{C}$  la catégorie des schémas fins au-dessus de  $S$ . Montrons qu'un épimorphisme de  $\mathcal{C}$  n'est pas forcément effectif : on choisit  $S$  égal à  $\text{Spec } k[T^3, T^5]$ , où  $k$  est un corps commutatif,  $Y$  égal à  $S$  et  $X$  égal à  $\text{Spec } k[T]$ . Si  $i$  est l'inclusion de  $B = k[T^3, T^5]$  dans  $A = k[T]$ ,  $p$  est choisi égal à  $\text{Spec } i$ . Dans ce cas  $X \times_{p,p} X$  s'identifie à  $\text{Spec}(A \otimes_B A)$  et  $\text{Coker}(\text{pr}_1, \text{pr}_2)$  à  $\text{Spec } B'$ , où  $B'$  est le sous-anneau de  $A$  formé des  $a$  tels que  $a \otimes_B 1 = 1 \otimes_B a$ . Or

$$T^7 \otimes_B 1 = (T^2 T^5) \otimes_B 1 = T^2 \otimes_B T^5 = T^2 \otimes_B (T^3 T^2) = T^5 \otimes_B T^2 = 1 \otimes_B T^7.$$

Donc  $T^7$  appartient à  $B'$ , n'appartient pas à  $B$  et  $\text{Spec } B'$  est distinct de  $\text{Spec } B$ , d'où le contre-exemple. <sup>(10)</sup>

<sup>(9)</sup>N.D.E. : En particulier, si  $G$  est un  $\mathcal{C}$ -groupe opérant à gauche sur un objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  et si  $X_*$  est le  $\mathcal{C}$ -groupeïde défini en a), alors  $(d_0, d_1)$  est un couple d'équivalence si et seulement si  $G$  opère librement sur  $X$ , cf. Exp. III, 3.2.1.

<sup>(10)</sup>N.D.E. : Le même argument s'applique pour  $B = k[T^3, T^4]$  et  $T^5 \otimes_B 1$ ; plus généralement, pour  $B = k[T^n, T^{n+r}]$  et l'élément  $T^{n+2r} \otimes_B 1$ , pourvu que  $n$  ne divise pas  $2r$ .

### 3. Quelques sorites sur les $\mathcal{C}$ -groupeïdes

Voici pêle-mêle quelques remarques utilisées dans la suite :

a) Soient

$$X_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{d'_0, d'_1, d'_2} \\ \xrightarrow{\quad\quad\quad} \\ \xrightarrow{\quad\quad\quad} \end{array} X_1 \xrightarrow{d_0, d_1} X_0$$

un  $\mathcal{C}$ -groupeïde et  $f_0 : Y_0 \rightarrow X_0$  une flèche de  $\mathcal{C}$ . Nous allons définir un  $\mathcal{C}$ -groupeïde de base  $Y_0$

$$Y_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{e'_0, e'_1, e'_2} \\ \xrightarrow{\quad\quad\quad} \\ \xrightarrow{\quad\quad\quad} \end{array} Y_1 \xrightarrow{e_0, e_1} Y_0$$

qu'on dira *induit par  $X_*$  et  $f_0$* . On dira aussi que  $Y_*$  est *l'image réciproque de  $X_*$  par le changement de base  $f_0$* .

Nous choisissons pour  $Y_1$  le produit fibré du diagramme

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & \overset{f_1}{\dashrightarrow} & X_1 \\ \downarrow & & \downarrow d_0 \boxtimes d_1 \\ Y_0 \times Y_0 & \xrightarrow{f_0 \times f_0} & X_0 \times X_0 \end{array} ,$$

pour  $e_0$  et  $e_1$  les flèches composées de la flèche canonique  $Y_1 \rightarrow Y_0 \times Y_0$  et des première et deuxième projections de  $Y_0 \times Y_0$ . Le morphisme  $Y_1 \rightarrow Y_0 \times Y_0$  est alors  $e_0 \boxtimes e_1$ , et l'on a  $f_0 \circ e_i = d_i \circ f_1$  pour  $i = 0, 1$ , où l'on a noté  $f_1$  la projection de  $Y_1$  sur  $X_1$ . 258

On pose  $Y_2 = Y_1 \times_{e_0, e_1} Y_1$ , cf. 1.c). On peut dire que le couple  $(e_0, e_1)$  est défini de telle façon que, pour tout  $T \in \mathcal{C}$ , et pour tout couple  $(y, x)$  d'éléments de  $Y_0(T)$ , il y ait une certaine correspondance biunivoque  $\psi \mapsto {}_y\psi_x$  entre les flèches  $\psi$  de  $X_*(T)$  de source  $f_0(x)$ , de but  $f_0(y)$  et les flèches  ${}_y\psi_x$  de  $Y_*(T)$  de source  $x$  et de but  $y$ . On détermine donc  $e'_1 : Y_2 \rightarrow Y_1$  en définissant pour tout  $T \in \mathcal{C}$  la composition des flèches de  $Y_*(T)$  à l'aide de la formule

$${}_z\psi_y \circ {}_y\varphi_x = {}_z(\psi \circ \varphi)_x.$$

Il est clair que cette définition fait de chaque  $Y_*(T)$  un groupeïde.

b) Connaissant le  $\mathcal{C}$ -groupeïde  $X_*$  et le changement de base  $f_0 : Y_0 \rightarrow X_0$ , on peut reconstruire le couple  $(e_0, e_1) : Y_1 \rightrightarrows Y_0$  d'une autre manière : <sup>(11)</sup> construisons  $Y_0 \times_{X_0} X_1$ ,  $pr_1$  et  $pr_2$  de telle façon que le carré

$$\begin{array}{ccc} Y_0 \times_{X_0} X_1 & \xrightarrow{pr_2} & X_1 \\ \downarrow pr_1 & & \downarrow d_0 \\ Y_0 & \xrightarrow{f_0} & X_0 \end{array}$$

<sup>(11)</sup>N.D.E. : ce second point de vue sera utilisé en 3.f) et dans la démonstration de 6.1.

soit cartésien. On vérifie alors sans peine par réduction au cas ensembliste qu'on a le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & \xrightarrow{e_0 \boxtimes f_1} & Y_0 \times_{X_0} X_1 \\ e_1 \downarrow & & \downarrow d_1 \circ \text{pr}_2 \\ Y_0 & \xrightarrow{f_0} & X_0 \end{array} ,$$

où  $f_1$  désigne la projection canonique de  $Y_1 = (Y_0 \times Y_0) \times_{(X_0 \times X_0)} X_1$  sur  $X_1$ .

**259**    **c)** Nous allons donner deux exemples d'image réciproque d'un  $\mathcal{C}$ -groupoïde. Prenons  $Y_0$  égal à  $X_1$ ,  $f_0$  égal à  $d_0$ . Pour tout objet  $T$  de  $\mathcal{C}$ ,  $Y_1(T)$  s'identifie alors à l'ensemble des diagrammes de la forme

$$\begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{\varphi} & d \\ f \uparrow & & \uparrow g \\ a & & c \end{array}$$

de  $X_*(T)$ . La source d'un tel diagramme est la flèche  $f$ , le but est la flèche  $g$ . Ces diagrammes se composent de façon évidente.

Posons maintenant  $Y'_0 = X_1$ ,  $f'_0 = d_1$  (nous ajoutons les primes <sup>(12)</sup> pour éviter toute confusion avec l'exemple précédent). Dans ce cas,  $Y'_1(T)$  s'identifie pour tout  $T \in \mathcal{C}$  à l'ensemble des diagrammes de la forme

$$\begin{array}{ccc} b & & d \\ f \uparrow & & \uparrow g \\ a & \xrightarrow{\psi} & c \end{array}$$

du groupoïde  $X_*(T)$ . La source d'un tel diagramme est  $f$ , le but est  $g$ ; la composition de ces diagrammes est évidente.

Ceci dit, il est clair que l'application identique de  $Y_0(T)$  et l'application

$$\begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{\varphi} & d \\ f \uparrow & & \uparrow g \\ a & & c \end{array} \quad \longmapsto \quad \begin{array}{ccc} b & & d \\ f \uparrow & & \uparrow g \\ a & \xrightarrow{g^{-1} \varphi f} & c \end{array}$$

de  $Y_1(T)$  sur  $Y'_1(T)$  définissent un isomorphisme du groupoïde  $Y_*(T)$  sur  $Y'_*(T)$ . De plus, cet isomorphisme dépend fonctoriellement de  $T$  de sorte que *les  $\mathcal{C}$ -groupoïdes  $Y_*$  et  $Y'_*$  sont isomorphes.* <sup>(13)</sup>

<sup>(12)</sup>N.D.E. : « accents » dans l'original.

<sup>(13)</sup>N.D.E. : Ceci jouera un rôle crucial dans la démonstration du lemme 6.1.



**d) Proposition 3.1.** — *Nous conservons les notations de a) et nous supposons que  $f_0$  est un épimorphisme effectif et universel. Alors,  $\text{Coker}(d_0, d_1)$  existe si et seulement si  $\text{Coker}(e_0, e_1)$  existe. <sup>(14)</sup> De plus, dans ce cas  $f_0$  induit un isomorphisme*

$$\text{Coker}(d_0, d_1) \xrightarrow{\sim} \text{Coker}(e_0, e_1).$$

Rappelons d'abord qu'un épimorphisme  $f_0 : Y_0 \rightarrow X_0$  est dit universel si, pour tout carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y' & \longrightarrow & Y_0 \\ f' \downarrow & & \downarrow f_0 \\ X' & \longrightarrow & X_0 \end{array},$$

$f'$  est un épimorphisme. Ceci étant, désignons par  $C(d_0, d_1)$  le foncteur covariant de  $\mathcal{C}$  dans les ensembles qui associe à tout  $T \in \mathcal{C}$  le noyau du couple  $T(d_0), T(d_1) : T(X_0) \rightrightarrows T(X_1)$ . Définissons de même  $C(e_0, e_1)$ . Pour tout  $T \in \mathcal{C}$ , on a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} C(d_0, d_1)(T) & \longrightarrow & T(X_0) & \begin{array}{c} \xrightarrow{T(d_1)} \\ \xleftarrow{T(d_0)} \end{array} & T(X_1) \\ \downarrow T(f) & & \downarrow T(f_0) & & \downarrow T(f_1) \\ C(e_0, e_1)(T) & \longrightarrow & T(Y_0) & \begin{array}{c} \xrightarrow{T(e_1)} \\ \xleftarrow{T(e_0)} \end{array} & T(Y_1) \end{array},$$

où  $T(f)$  est l'injection induite par l'injection  $T(f_0)$ . Si nous montrons que  $T(f)$  est une surjection pour tout  $T$ , on aura un isomorphisme fonctoriel  $f : C(d_0, d_1) \xrightarrow{\sim} C(e_0, e_1)$  de sorte que la représentabilité de l'un de ces foncteurs équivaudra à celle de l'autre; ceci prouvera notre proposition.

Pour prouver la surjectivité de  $T(f)$ , considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & Y_1 & \xrightarrow{f_1} & X_1 \\ & \nearrow \Delta & \downarrow e_0 & & \downarrow d_0 \\ Y_0 \times_{X_0} Y_0 & \xrightarrow{\text{pr}_2} & Y_0 & \xrightarrow{f_0} & X_0 \\ & \xleftarrow{\text{pr}_1} & & & \downarrow d_1 \end{array},$$

où  $\Delta$  est la section de  $Y_1 \rightarrow Y_0 \times_{X_0} Y_0$  définie par le morphisme  $s \circ f_0 \circ \text{pr}_1 : Y_0 \times_{X_0} Y_0 \rightarrow X_1$ , la flèche  $s : X_0 \rightarrow X_1$  satisfaisant aux égalités (3) et (3 bis) du paragraphe 1. 261

Si la flèche  $g : Y_0 \rightarrow T$  est telle que  $g \circ e_0 = g \circ e_1$ , on a  $g \circ e_0 \circ \Delta = g \circ e_1 \circ \Delta$ , donc  $g \circ \text{pr}_1 = g \circ \text{pr}_2$ . Comme  $f_0$  est un épimorphisme effectif,  $g$  est composé de  $f_0$

<sup>(14)</sup>N.D.E. : On a modifié l'original pour mettre en évidence l'isomorphisme ci-dessous.

et d'une flèche  $h : X_0 \rightarrow T$ , c'est-à-dire qu'on a  $g = T(f_0)(h)$ . Il reste à montrer que  $h$  appartient à  $C(d_0, d_1)(T)$ , c'est-à-dire satisfait à l'égalité  $hd_0 = hd_1$ ; or on a

$$hd_0f_1 = hf_0e_0 = ge_0 = ge_1 = hf_0e_1 = hd_1f_1,$$

d'où l'égalité cherchée grâce au fait que  $f_1$  est un épimorphisme (car  $f_0$  est un épimorphisme universel).

e) Considérons maintenant un schéma  $S$  et choisissons  $\mathcal{C}$  égal à  $(\mathbf{Sch}/S)$ . La donnée d'un  $\mathcal{C}$ -groupeïde

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{d'_2} & \\ X_2 & \xrightarrow{d'_1} & X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \\ & \xrightarrow{d'_0} & \xrightarrow{d_0} \end{array}$$

permet de définir une relation d'équivalence dans l'ensemble  $\underline{X}_0$  sous-jacent au schéma  $X_0$  : si  $x, y \in \underline{X}_0$ , on écrira  $x \sim y$  lorsqu'il existe  $z \in \underline{X}_1$  tel que  $x = d_1z$  et  $y = d_0z$ . La réflexivité et la symétrie de cette relation sont évidentes <sup>(15)</sup>; prouvons la transitivité : si  $x \sim y$  et  $y \sim z$ , il existe  $u, v \in \underline{X}_1$  tels que  $x = d_1u$ ,  $y = d_0u$ ,  $y = d_1v$ ,  $z = d_0v$ . Il s'ensuit que  $(v, u)$  appartient au produit fibré ensembliste  $\underline{X}_1 \times_{d_1, d_0} \underline{X}_1$ . Comme l'application canonique

$$\underline{X}_1 \times_{d_1, d_0} \underline{X}_1 \longrightarrow \underline{X}_1 \times_{d_1, d_0} \underline{X}_1$$

de l'ensemble sous-jacent au produit fibré dans le produit fibré des ensembles sous-jacents est surjective,  $(v, u)$  est l'image d'un certain  $w \in \underline{X}_2$ . On a alors  $x = d_1d'_1w$  et  $z = d_0d'_1w$ , d'où  $x \sim z$ .

f) Conservons les notations de a) et b),  $\mathcal{C}$  étant toujours égal à  $(\mathbf{Sch}/S)$ . Si  $x, y$  sont des points de  $\underline{Y}_0$ , nous allons voir qu'on a  $x \sim y$  si et seulement si  $f_0(x) \sim f_0(y)$  (l'image réciproque de la relation d'équivalence définie par un groupeïde est la relation d'équivalence définie par l'image réciproque du groupeïde).

En effet, supposons  $x \sim y$ . Il existe donc  $z \in \underline{Y}_1$  tel que  $x = e_1(z)$  et  $y = e_0(z)$ . Comme  $f_0 \circ e_i = d_i \circ f_1$  pour  $i = 0, 1$ , on a alors  $f_0(x) = d_1f_1(z)$  et  $f_0(y) = d_0f_1(z)$ , d'où  $f_0(x) \sim f_0(y)$ .

Réciproquement, supposons  $f_0(x) \sim f_0(y)$  et soit  $z \in \underline{X}_1$  tel que  $f_0(y) = d_1(z)$  et  $f_0(x) = d_0(z)$ . Utilisant la construction et les notations de b), il y a alors un point  $t$  de  $\underline{Y}_0 \times_{X_0} \underline{X}_1$  tel que  $\text{pr}_1(t) = x$  et  $\text{pr}_2(t) = z$ . De même, comme  $f_0(y) = d_1\text{pr}_2(t)$ , il y a un  $s \in \underline{Y}_1$  tel que  $y = e_1(s)$  et  $(e_0 \boxtimes f_1)(s) = t$ . On a alors  $e_0(s) = \text{pr}_1(e_0 \boxtimes f_1)(s) = \text{pr}_1(t) = x$ . D'où  $x \sim y$ .

<sup>(15)</sup>N.D.E. : La réflexivité résulte de l'existence de  $s : X_0 \rightarrow X_1$  qui est une section de  $d_0$  et de  $d_1$ , la symétrie résulte de l'existence de l'involution  $\sigma$  de  $X_1$  qui « échange  $d_0$  et  $d_1$  », c.-à-d., qui vérifie  $d_0\sigma = d_1$  et  $d_1\sigma = d_0$ , cf. § 1, (3), (3 bis) et (†).

#### 4. Passage au quotient par un groupoïde fini et plat (démonstration d'un cas particulier)

**Théorème 4.1.** — On considère un  $(\mathbf{Sch}/S)$ -groupoïde :

$$\begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{d'_2} & & & \\ & d'_1 & \xrightarrow{\quad} & & \\ X_2 & \xrightarrow{\quad} & X_1 & \xrightarrow{d_1} & X_0 \\ & d'_0 & \xrightarrow{\quad} & & \\ & \xrightarrow{\quad} & & & \end{array}$$

On suppose vérifiées les conditions suivantes : <sup>(16)</sup>

263

a)  $d_1$  est fini localement libre,

b) pour tout  $x \in X_0$ , l'ensemble  $d_0 d_1^{-1}(x)$  est contenu dans un ouvert affine de  $X_0$ .

<sup>(17)</sup> Alors :

(i) Il existe un conoyau  $(Y, p)$  de  $(d_0, d_1)$  dans  $(\mathbf{Sch}/S)$  ; de plus, un tel  $(Y, p)$  est un conoyau de  $(d_0, d_1)$  dans la catégorie de tous les espaces annelés.

(ii)  $p$  est entier et ouvert, et  $Y$  est affine si  $X_0$  est affine. <sup>(18)</sup>

(iii) Le morphisme  $X_1 \rightarrow X_0 \times_Y X_0$  de composantes  $d_0$  et  $d_1$  est surjectif.

(iv) Si  $(d_0, d_1)$  est un couple d'équivalence,  $X_1 \rightarrow X_0 \times_Y X_0$  est un isomorphisme <sup>(19)</sup> et  $p : X_0 \rightarrow Y$  est fini localement libre. <sup>(20)</sup> De plus,  $(Y, p)$  est un conoyau de  $(d_0, d_1)$  dans la catégorie des faisceaux pour la topologie (fppf) et, pour tout changement de base  $Y' \rightarrow Y$ ,  $Y'$  est le conoyau du groupoïde  $X_* \times_Y Y'$  déduit de  $X_*$  par le changement de base  $X_0 \times_Y Y' \rightarrow X_0$ .

En particulier, pour tout changement de base  $S' \rightarrow S$ ,  $Y' = Y \times_S S'$  est le conoyau du  $S'$ -groupoïde  $X'_* = X_* \times_S S'$ . Donc, dans ce cas, « la formation du quotient commute au changement de base ».

Il résulte évidemment de (i) que l'espace topologique sous-jacent à  $Y$  est le quotient de l'espace topologique sous-jacent à  $X_0$  par la relation d'équivalence définie par le  $(\mathbf{Sch}/S)$ -groupoïde  $X_*$ .

Nous allons d'abord prouver ce théorème lorsque  $X_0$  est *affine* et que  $d_1$  est localement libre de rang constant  $n$ . Nous verrons ensuite comment on peut se ramener à ce cas particulier.

<sup>(16)</sup>N.D.E. : Comme  $d_0 = d_1 \sigma$ , où  $\sigma$  est un automorphisme involutif de  $X_1$ , ces deux conditions sont symétriques en  $d_1$  et  $d_0$  ; de plus, on a  $d_0 d_1^{-1}(x) = d_1 d_0^{-1}(x)$ .

<sup>(17)</sup>N.D.E. : On ne peut omettre l'hypothèse b). En effet, H. Hironaka a donné un exemple d'une action du groupe fini  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sur une  $\mathbb{C}$ -variété propre  $X_0$ , telle que le quotient  $X_0/G$  soit un espace algébrique qui n'est pas un schéma ([Hi62], voir aussi [Mum65], Chap. 4, § 3).

<sup>(18)</sup>N.D.E. : On a ajouté que  $p$  est ouvert, en reprenant la démonstration analogue donnée en 6.1.

<sup>(19)</sup>N.D.E. : Noter que, dans ce cas,  $X_1 \rightarrow X_0 \times_S X_0$  est donc une immersion (EGA I, 5.3.10) ; voir aussi VI<sub>B</sub>, 9.2.1. D'autre part, pour l'existence du quotient (dans la catégorie des schémas ou celle des espaces algébriques) sous l'hypothèse plus faible que  $d_0$  et  $d_1$  soient finis (mais pas nécessairement plats), voir [An73], § 1.1, [Fe03], [Ko08] . . .

<sup>(20)</sup>N.D.E. : On a explicité les conséquences qui suivent ; voir [Ray67a], th. 1 (iii) et la démonstration donnée plus loin, à la fin de la section 5.

Dans le cas où nous nous sommes placés,  $X_0, X_1$  et  $X_2$  sont affines. Nous pouvons donc supposer qu'on a

$$X_i = \text{Spec } A_i \quad , \quad d_j = \text{Spec } \delta_j \quad \text{et} \quad d'_k = \text{Spec } \delta'_k,$$

les  $A_i$  étant des anneaux commutatifs, les  $\delta_j, \delta'_k$  des homomorphismes d'anneaux. On peut alors remplacer le diagramme  $(0, 1, 2)$  par le suivant

$$(0, 1, 2)^* \quad \begin{array}{ccccc} & & \delta'_1 & & \\ & & \longleftarrow & & \\ A_2 & \xleftarrow{\delta'_1} & A_1 & \xleftarrow{\delta_0} & A_0 \\ & \delta'_0 & \uparrow & & \\ & & \delta_1 & & \\ & & \downarrow & & \\ A_1 & \xleftarrow{\delta_1} & A_0 & & \\ & \delta_0 & & & \end{array}$$

où les deux carrés de gauche sont cocartésiens.

**264** Désignons par  $B$  le sous-anneau de  $A_0$  formé des  $a \in A_0$  tels que  $\delta_0(a) = \delta_1(a)$ .

a) Montrons que  $A_0$  est entier sur  $B$ . Si  $a$  appartient à  $A_0$ , soit

$$P_{\delta_1}(T, \delta_0(a)) = T^n - \sigma_1 T^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n$$

le polynôme caractéristique de  $\delta_0(a)$  lorsqu'on considère  $A_1$  comme algèbre sur  $A_0$  au moyen de l'homomorphisme  $\delta_1$  (cf. Bourbaki, *Alg.* VIII, § 12 et *Alg. comm.* II, § 5, exercice 9). Comme les carrés de gauche de  $(0, 1, 2)^*$  sont cocartésiens, on a

$$\begin{aligned} \delta_0(P_{\delta_1}(T, \delta_0(a))) &= P_{\delta'_2}(T, \delta'_0 \delta_0(a)) \\ \text{et} \quad \delta_1(P_{\delta_1}(T, \delta_0(a))) &= P_{\delta'_2}(T, \delta'_1 \delta_0(a)). \end{aligned}$$

Comme  $\delta'_0 \delta_0 = \delta'_1 \delta_0$ , on a

$$\delta_0(P_{\delta_1}(T, \delta_0(a))) = \delta_1(P_{\delta_1}(T, \delta_0(a)))$$

c'est-à-dire  $\delta_0(\sigma_i) = \delta_1(\sigma_i)$  pour tout  $i$ . Hamilton-Cayley nous enseigne d'autre part qu'on a

$$\delta_0(a)^n - \delta_1(\sigma_1) \delta_0(a)^{n-1} + \dots + (-1)^n \delta_1(\sigma_n) = 0.$$

Comme  $\delta_1(\sigma_i)$  est égal à  $\delta_0(\sigma_i)$ , on a aussi

$$\delta_0(a)^n - \delta_0(\sigma_1) \delta_0(a)^{n-1} + \dots + (-1)^n \delta_0(\sigma_n) = 0,$$

d'où

$$a^n - \sigma_1 a^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n = 0,$$

**265** car il existe un homomorphisme  $\tau : A_1 \rightarrow A_0$  tel que  $\tau \delta_0 = \text{id}_{A_0}$ , donc  $\delta_0$  est injectif. Il s'ensuit que  $A_0$  est entier sur  $B$ .

b) Considérons maintenant deux idéaux premiers  $x$  et  $y$  de  $A_0$ . Nous allons montrer que l'égalité  $x \cap B = y \cap B$  entraîne l'existence d'un idéal premier  $z$  de  $A_1$  tel que  $x = d_0(z)$  et  $y = d_1(z)$ .

En effet, si l'assertion n'était pas vraie,  $x$  serait distinct de  $\delta_0^{-1}(t)$  pour tout idéal premier  $t$  de  $A_1$  tel que  $\delta_1^{-1}(t) = y$ . Pour un tel  $t$  on aurait  $\delta_0^{-1}(t) \cap B = \delta_1^{-1}(t) \cap B = y \cap B = x \cap B$ , d'où il résulterait grâce à Cohen-Seidenberg (cf. Bourbaki, *Alg. comm.*

V, § 2, cor. 1 de la prop. 1) que  $x$  ne serait contenu dans aucun  $\delta_0^{-1}(t)$ . <sup>(21)</sup> Or il y a au plus  $n$  idéaux premiers  $t$  de  $A_1$  tels que  $\delta_1^{-1}(t) = y$  (cf. *loc. cit.*, prop. 3) donc, d'après le « Lemme d'évitement des idéaux premiers » (*loc. cit.*, II, § 1, prop. 3) il y aurait un  $a \in x$  qui n'appartiendrait à aucun  $\delta_0^{-1}(t)$ . Par conséquent,  $\delta_0(a)$  n'appartiendrait à aucun de ces idéaux  $t$  et donc, d'après le lemme ci-dessous, la norme  $N_{\delta_1}(\delta_0(a))$  n'appartiendrait pas à  $y$  (on calcule cette norme en considérant  $A_1$  comme algèbre sur  $A_0$  au moyen de l'homomorphisme  $\delta_1$ ; on a  $N_{\delta_1}(\delta_0(a)) = \sigma_n$  avec les notations de a)). Or, comme  $(-1)^{n-1} \sigma_n = a^n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \sigma_i a^{n-i}$ , cette norme appartient à  $B \cap x = B \cap y$ , d'où la contradiction.

**Lemme 4.1.1.** — Soit  $A \rightarrow A'$  un morphisme d'anneaux commutatifs, faisant de  $A'$  un  $A$ -module projectif de rang  $n$ . Soient  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ ,  $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_r$  les éléments de  $\text{Spec}(A')$  au-dessus de  $\mathfrak{p}$ , et  $a \in A'$ . Alors  $a$  appartient à  $\mathfrak{q}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{q}_r$  si et seulement si sa norme  $N(a)$  appartient à  $\mathfrak{p}$ .

En effet, remplaçant  $A$  et  $A'$  par les localisés  $A_{\mathfrak{p}}$  et  $A'_{\mathfrak{p}}$ , on se ramène au cas où  $(A, \mathfrak{p})$  est local, et  $A'$  semi-local, avec  $\text{Spec}(A') = \{\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_r\}$ . Dans ce cas,  $A'$  est un  $A$ -module libre de rang  $n$  (cf. Bourbaki, *Alg. comm.* II, § 3.2, cor. 2 de la prop. 5) et  $N(a)$  est le déterminant de l'endomorphisme  $\ell_a : a' \mapsto aa'$  de  $A'$ , on a donc les équivalences suivantes :

$$N(a) \notin \mathfrak{p} \iff N(a) \text{ inversible} \iff \ell_a \text{ inversible} \iff a \notin \mathfrak{q}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{q}_r.$$

c) *Démonstration de (i) :*

Posons  $Y = \text{Spec } B$  et  $p = \text{Spec } i$ , où  $i$  est l'inclusion de  $B$  dans  $A_0$ . D'après a), le morphisme  $p : X_0 \rightarrow Y$  est *surjectif*. Nous allons d'abord montrer que  $(Y, p)$  est un conoyau de  $(d_0, d_1)$  dans la catégorie de tous les espaces annelés : il résulte en effet de b) que l'ensemble sous-jacent à  $\text{Spec } B$  est obtenu à partir de l'ensemble sous-jacent à  $X_0$  en identifiant les points  $x$  et  $y$  tels qu'il existe  $z \in X_1$  avec  $d_1 z = y$ ,  $d_0 z = x$ . De plus, comme  $i$  est entier,  $p = \text{Spec } i$  est fermé de sorte que  $Y$  est muni de la topologie quotient de celle de  $X_0$ . Il en résulte que  $p$  est *ouvert*. En effet, soit  $U'$  un ouvert quelconque de  $X_0$ ; comme  $d_1$  est surjectif et fini localement libre, donc fidèlement plat et de présentation finie, et donc ouvert, alors le saturé  $U = d_1(d_0^{-1}(U'))$  de  $U'$  pour la relation d'équivalence définie par  $X_*$  est ouvert. Alors  $p(U') = p(U)$  est ouvert, puisque  $Y$  est muni de la topologie quotient.

Il résulte enfin du choix de  $B$  et du fait que  $p$ ,  $d_0$  et  $d_1$  sont affines, que la suite canonique de faisceaux d'anneaux

$$\mathcal{O}_Y \longrightarrow p_*(\mathcal{O}_{X_0}) \xrightarrow[p_*(\delta_0)]{p_*(\delta_1)} p_*(d_{0*}(\mathcal{O}_{X_1})) = p_*(d_{1*}(\mathcal{O}_{X_1}))$$

est exacte.

Il reste à montrer que  $(Y, p)$  est aussi le conoyau de  $(d_0, d_1)$  dans la catégorie des schémas (plus généralement dans celle des espaces annelés en anneaux locaux). Soit

<sup>(21)</sup>N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit ; en particulier, on a ajouté le lemme 4.1.1, tiré de [DG70], III, § 2.4, Lemme 4.3.

donc  $q : X_0 \rightarrow Z$  un morphisme de schémas tel que  $qd_0 = qd_1$ . D'après ce qui précède, il y a un morphisme d'espaces annelés  $r : Y \rightarrow Z$  et un seul tel que  $q = rp$ . Il s'agit de montrer que, pour tout  $y \in Y$ , l'homomorphisme  $\mathcal{O}_{r(y)} \rightarrow \mathcal{O}_y$  induit par  $r$  est local. Cela résulte de ce que  $p$  est surjectif, donc  $y$  de la forme  $p(x)$ , et de ce que l'homomorphisme  $\mathcal{O}_{q(x)} \rightarrow \mathcal{O}_x$  induit par  $q$  est local.

**d)** *Démonstration de (ii)* : Résulte de a) et c).

**e)** *Démonstration de (iii)* :

Rappelons qu'on désigne par  $\underline{P}$  l'ensemble sous-jacent à un schéma  $P$ , par  $\underline{d} : \underline{P} \rightarrow \underline{Q}$  l'application induite par un morphisme  $d : P \rightarrow Q$ .

**Lemme 4.1.2.** — <sup>(22)</sup> Soient  $(A, \mathfrak{m})$  un anneau local,  $k$  son corps résiduel, et  $K$  une extension du corps  $k$ . Alors, il existe une  $A$ -algèbre locale et plate  $B$  telle que  $B/\mathfrak{m}B$  soit  $k$ -isomorphe à  $K$ ; de plus, on peut choisir  $B$  finie et libre sur  $A$  si  $K$  est de degré fini sur  $k$ .

Ceci est démontré dans EGA 0<sub>III</sub>, 10.3.1, où il est de plus montré qu'on peut choisir  $B$  noethérien si  $A$  l'est. Pour la commodité du lecteur, indiquons la démonstration.

Posons  $A' = A[T]$ , où  $T$  est une indéterminée. Si  $K = k(T)$ , soient  $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}A'$  et  $B = A'_{\mathfrak{p}}$ . Alors  $B/\mathfrak{m}B \cong k[T]_{(0)} = k(T)$ , et  $B$  est plat sur  $A'$  qui est un  $A$ -module libre, donc  $B$  est plat sur  $A$ .

Si  $K = k(t) = k[t]$ , où  $t$  est algébrique sur  $k$ , posons  $B = A'/(F)$ , où  $F \in A'$  est un polynôme unitaire dont l'image dans  $k[T]$  est le polynôme minimal  $f$  de  $t$  sur  $k$ . Alors  $B$  est un  $A$ -module libre, de rang fini  $\deg(F) = \deg(f)$ . En particulier,  $B$  est entier sur  $A$ , donc tout idéal maximal de  $B$  contient  $\mathfrak{m}$ . Comme  $B/\mathfrak{m}B \cong k[T]/(f) \cong K$ , il en résulte que  $B$  est local, d'idéal maximal  $\mathfrak{m}B$ . Ceci montre déjà que si  $[K : k] < \infty$ , on peut choisir  $B$  finie et libre sur  $A$ .

Dans le cas général, soit  $(t_i)_{i \in I}$  un système de générateurs de  $K$  sur  $k$ , et munissons  $I$  d'un bon ordre (c.-à-d., un ordre total  $\leq$  tel que toute partie non vide de  $I$  possède un plus petit élément). Pour tout  $i \in I$ , notons  $k_i$  (resp.  $k_{<i}$ ) le sous-corps de  $K$  engendré par les  $t_j$ , pour  $j \leq i$  (resp.  $j < i$ ). Quitte à rajouter un élément, on peut supposer que  $I$  possède un plus grand élément  $\xi$ , de sorte que  $K = k_{\xi}$ . Considérons le sous-ensemble  $J$  de  $I$  formé des indices  $i$  tels qu'il existe un système inductif  $(A_j)_{j \leq i}$  de  $A$ -algèbres locales et plates, telles que  $A_j/\mathfrak{m}A_j \cong k_j$  et que  $A_j$  soit plate sur  $A_{\ell}$  pour tout  $\ell < j$ . Supposons  $I - J$  non vide; soit  $i$  son plus petit élément et soit  $A' = \varinjlim_{j < i} A_j$ . Puisque le produit tensoriel commute à la limite inductive,  $A'$  est plate sur  $A$  et sur chaque  $A_j$ , pour  $j < i$ , et l'on a  $A'/\mathfrak{m}A' \cong A' \otimes_A (A/\mathfrak{m}) \cong k_{<i}$ . De plus,  $A'$  est locale, d'idéal maximal  $\mathfrak{m}A'$ . En effet, si  $x = f_j(x_j)$  est non inversible, alors  $x_j$  n'est pas inversible, donc appartient à l'idéal maximal  $\mathfrak{m}A_j$  de  $A_j$ , d'où  $x \in \mathfrak{m}A'$ . Il résulte alors du cas monogène, traité plus haut, qu'il existe une  $A'$ -algèbre locale et plate  $A_i$ , telle que  $A_i/\mathfrak{m}A_i \cong k_{<i}(t_i) = k_i$ ; alors  $A_i$  est plate sur chaque  $A_j$ , pour  $j < i$ , et donc  $i \in J$ , contrairement à l'hypothèse. Cette contradiction montre que  $J = I$ , et donc  $A_{\xi}$  répond à la question. Le lemme 4.1.2 est démontré.

<sup>(22)</sup>N.D.E. : On a inséré ce lemme, utilisé à plusieurs reprises dans cet exposé et dans des exposés ultérieurs (VI<sub>A</sub>, VI<sub>B</sub>). Il figurait comme Lemme VI<sub>B</sub>, 4.5.1 dans l'édition originelle de SGAD (1965).

Démontrons maintenant 4.1 (iii). Rappelons qu'on note  $\underline{P}$  l'ensemble sous-jacent à un schéma  $P$ , et  $\underline{d} : \underline{P} \rightarrow \underline{Q}$  l'application induite par un morphisme  $d : P \rightarrow Q$ . On peut alors traduire b) en disant que l'application

$$d_0 \boxtimes d_1 : \underline{X}_1 \longrightarrow \underline{X}_0 \times_{\underline{Y}} \underline{X}_0$$

de composantes  $\underline{d}_0$  et  $\underline{d}_1$  est surjective; or cette application se factorise comme suit

$$\underline{X}_1 \xrightarrow{d_0 \boxtimes d_1} \underline{X}_0 \times_{\underline{Y}} \underline{X}_0 \xrightarrow{q} \underline{X}_0 \times_{\underline{Y}} \underline{X}_0,$$

$q$  étant l'application canonique; l'image de  $d_0 \boxtimes d_1$  contient donc tous les points  $v$  de  $\underline{X}_0 \times_{\underline{Y}} \underline{X}_0$  tels que  $\{v\} = q^{-1}(q(v))$ . Cette dernière condition <sup>(23)</sup> sera réalisée en particulier si  $v$  est rationnel au-dessus de  $\underline{Y}$ , c'est-à-dire si le corps résiduel  $\kappa(v)$  de  $v$  s'identifie au corps résiduel  $\kappa(w)$  de l'image  $w$  de  $v$  dans  $\underline{Y}$ .

267

Si  $v \in \underline{X}_0 \times_{\underline{Y}} \underline{X}_0$  n'est pas rationnel au-dessus de  $\underline{Y}$ , soit toujours  $w$  l'image de  $v$  dans  $\underline{Y}$ . D'après le lemme 4.1.2, il existe un anneau local  $C$  de radical  $\mathfrak{m}$  et un homomorphisme local et plat  $f : \mathcal{O}_w \rightarrow C$  tel que  $C/\mathfrak{m}$  soit isomorphe à  $\kappa(v)$  comme  $\kappa(w)$ -algèbre. Si on pose  $Y' = \text{Spec } C$  et si  $\pi : Y' \rightarrow Y$  est le morphisme induit par  $f$ , il est clair que la projection canonique de  $(\underline{X}_0 \times_{\underline{Y}} \underline{X}_0) \times_{\underline{Y}} Y'$  dans  $\underline{X}_0 \times_{\underline{Y}} \underline{X}_0$  envoie sur  $v$  un point  $v'$  de  $(\underline{X}_0 \times_{\underline{Y}} \underline{X}_0) \times_{\underline{Y}} Y'$  qui est rationnel au-dessus de  $Y'$ . Comme

$$(\underline{X}_0 \times_{\underline{Y}} \underline{X}_0) \times_{\underline{Y}} Y' \cong (\underline{X}_0 \times_{\underline{Y}} Y') \times_{\underline{Y}'} (\underline{X}_0 \times_{\underline{Y}} Y'),$$

et comme les hypothèses du théorème 4.1 et les résultats précédents, en particulier le point b), restent valables après le changement de base  $\pi : Y' \rightarrow Y$ , alors  $v'$  est l'image d'un élément  $u' \in \underline{X}_1 \times_{\underline{Y}} Y'$  par le morphisme déduit de  $d_0 \boxtimes d_1$  par changement de base. Si  $u$  est l'image de  $u'$  dans  $\underline{X}_1$ , on a bien  $v = (d_0 \boxtimes d_1)(u)$ .

f) *Démonstration de (iv)* : <sup>(24)</sup>

**Lemme 4.1.3.** — *Si un monomorphisme de schémas  $f : T \rightarrow Z$  est un morphisme fini, c'est une immersion fermée.*

En effet, en recouvrant  $Z$  par des ouverts affines  $Z_i$ , et en remplaçant  $f$  par les morphismes induits  $f^{-1}(Z_i) \rightarrow Z_i$ , on se ramène ( $f$  étant fini, donc affine) au cas où  $Z = \text{Spec } B$  et  $T = \text{Spec } A$ . Comme  $f$  est un monomorphisme, le morphisme diagonal  $T \rightarrow T \times_Z T$  est un isomorphisme (EGA I, 5.3.8), i.e.  $A \otimes_B A \rightarrow A$  est un isomorphisme. Par conséquent, pour tout idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $B$ , on a un isomorphisme

$$(A/\mathfrak{m}A) \otimes_k (A/\mathfrak{m}A) \cong (A/\mathfrak{m}A)$$

où l'on a posé  $k = B/\mathfrak{m}$ . Comme  $A$  est fini sur  $B$ ,  $A/\mathfrak{m}A$  est un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie  $d$ , et l'isomorphisme ci-dessus entraîne que  $d = 0$  ou  $1$ , de sorte que le morphisme  $k = B/\mathfrak{m} \rightarrow A/\mathfrak{m}A$  est surjectif. Donc, d'après le lemme de Nakayama ( $A$

<sup>(23)</sup>N.D.E. : Noter la permutation des pages dans le Lecture Notes 151, l'ordre réel est 265-266-268-269-267-270-271.

<sup>(24)</sup>N.D.E. : On a ajouté le lemme suivant, tiré de [DG70], I, § 5, Prop. 1.5 (voir aussi la démonstration de EGA IV<sub>3</sub>, 8.11.5), utilisé de façon implicite dans l'original, et de façon explicite dans [DG70], III, § 2, 4.6. Il est de plus utile dans le th. 7.1 plus loin.

étant fini sur  $B$ ), le morphisme  $B_{\mathfrak{m}} \rightarrow A_{\mathfrak{m}}$  est surjectif. Il en résulte que le morphisme de  $B$ -modules  $B \rightarrow A$  est surjectif (puisque son conoyau  $C$  vérifie  $C_{\mathfrak{m}} = 0$ , pour tout  $\mathfrak{m}$ , donc est nul). Ceci prouve le lemme.

Démontrons maintenant (iv). Par hypothèse,  $X_0 = \text{Spec } A_0$ ,  $X_1 = \text{Spec } A_1$ , et, pour  $i = 0, 1$ , le morphisme  $\delta_i : A_0 \rightarrow A_1$  fait de  $A_1$  un  $A_0$ -module de type fini ; donc, a fortiori, le morphisme  $A_0 \otimes_B A_0 \rightarrow A_1$  est fini.

On suppose de plus que  $d = d_0 \boxtimes d_1 : X_1 \rightarrow X_0 \times_Y X_0$  est un monomorphisme ; donc, d'après le lemme précédent, le morphisme  $A_0 \otimes_B A_0 \rightarrow A_1$  est surjectif.

On va montrer que c'est un *isomorphisme* (on prouvera en chemin que  $p : X_0 \rightarrow Y$  est fini et localement libre). Il suffit de montrer que, pour tout idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $B$ , l'homomorphisme  $(A_0)_{\mathfrak{p}} \otimes_{B_{\mathfrak{p}}} (A_0)_{\mathfrak{p}} \rightarrow (A_1)_{\mathfrak{p}}$  de composantes  $\delta_{0\mathfrak{p}}$  et  $\delta_{1\mathfrak{p}}$  est bijectif. Autrement dit, il est loisible de supposer  $B$  local. Il résulte alors de b) que  $(A_0)_{\mathfrak{p}}$  est semi-local ; en effet, si  $\mathfrak{m}$  est un idéal maximal de  $(A_0)_{\mathfrak{p}}$ , les autres idéaux maximaux sont de la forme  $\delta_0^{-1}(\mathfrak{n})$ , où  $\mathfrak{n}$  parcourt les idéaux premiers de  $A_1$  tels que  $\delta_1^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$  ; l'assertion résulte donc de ce qu'il y a au plus  $n = [A_1 : A_0]$  tels idéaux premiers  $\mathfrak{n}$ . Quitte à faire un changement de base fidèlement plat <sup>(25)</sup>, on peut aussi supposer que le corps résiduel de  $B$  est infini de sorte qu'on peut utiliser le lemme suivant :

**268** **Lemme 4.2.** — *Soient  $B$  un anneau local de corps résiduel infini,  $A$  un anneau semi-local et  $i : B \rightarrow A$  un homomorphisme qui envoie l'idéal maximal  $\mathfrak{n}$  de  $B$  dans le radical  $\mathfrak{r}$  de  $A$ . Soient  $M$  un  $A$ -module libre de rang  $n$  et  $N$  un  $B$ -sous-module de  $M$  qui engendre  $M$  en tant que  $A$ -module. Alors  $N$  contient une base de  $M$  sur  $A$ .*

On rappelle en effet qu'une suite  $m_1, \dots, m_n$  d'éléments de  $M$  est une  $A$ -base de  $M$  si et seulement si les images canoniques de  $m_1, \dots, m_n$  dans  $M/\mathfrak{r}M$  forment une base de  $M/\mathfrak{r}M$  sur  $A/\mathfrak{r}$ . On peut donc remplacer  $M$  par  $M/\mathfrak{r}M$ ,  $N$  par  $N/(N \cap \mathfrak{r}M)$ ,  $A$  par  $A/\mathfrak{r}$  et  $B$  par  $B/\mathfrak{m}$ . Dans ce cas le lemme est facile (si  $A$  est un produit de corps  $K_1 \times \dots \times K_r$ , on peut identifier  $M$  au module  $K_1^n \times \dots \times K_r^n$  ; si  $x_j$  est alors un élément de  $N$  dont la  $j$ -ième composante dans  $K_1^n \times \dots \times K_r^n$  n'est pas nulle, montrer qu'une certaine combinaison linéaire  $x$  des  $x_j$  à coefficients dans  $B$  a toutes ses composantes non nulles ; remplacer ensuite  $M$  par  $M/Ax$  et procéder par récurrence sur  $n$ ).

Nous appliquons le lemme précédent dans la situation suivante :  $B = B$ ,  $A = A_0$ ,  $i$  est l'inclusion de  $B$  dans  $A_0$ ,  $M = A_1$  considéré comme  $A_0$ -module au moyen de l'homomorphisme  $\delta_1$ ,  $N = \delta_0(A_0)$ . En effet, comme  $d_0 \boxtimes d_1 : X_1 \rightarrow X_0 \times_Y X_0$  est une immersion fermée, l'homomorphisme  $A_0 \otimes_B A_0 \rightarrow A_1$  de composantes  $\delta_0$  et  $\delta_1$  est surjectif ; cela signifie justement que  $\delta_0(A_0)$  engendre le  $A_0$ -module  $A_1$ .

Soient donc  $a_1, \dots, a_n$  des éléments de  $A_0$  tels que  $\delta_0(a_1), \dots, \delta_0(a_n)$  forment une base de  $A_1$  sur  $A_0$ . Si nous montrons que  $a_1, \dots, a_n$  est une base de  $A_0$  sur  $B$ , il s'ensuivra que l'homomorphisme  $A_0 \otimes_B A_0 \rightarrow A_1$  applique la base  $(1 \otimes a_i)_{1 \leq i \leq n}$  sur la base  $(\delta_0(a_i))_{1 \leq i \leq n}$ , donc est bijectif. Par conséquent, si  $\varepsilon : \mathbb{Z}^n \rightarrow A_0$  est l'homomorphisme de groupes abéliens qui envoie la base naturelle de  $\mathbb{Z}^n$  sur  $a_1, \dots, a_n$ , il suffit de prouver que l'application  $B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n \rightarrow A_0$  de composantes  $i$  et  $\varepsilon$  est bijective.

<sup>(25)</sup>N.D.E. : cf. Lemme 4.1.2.



Or le diagramme  $(0, 1, 2)^*$  considéré au début de cette preuve, induit le diagramme commutatif suivant :

269

$$\begin{array}{ccccc}
 A_2 & \xleftarrow{\delta'_1} & A_1 & \xleftarrow{\delta_0} & A_0 \\
 \uparrow u_2 & & \uparrow u_1 \cong & & \uparrow u_0 \\
 A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n & \xleftarrow[\delta_0 \otimes \mathbb{Z}^n]{\delta_1 \otimes \mathbb{Z}^n} & A_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n & \xleftarrow{i \otimes \mathbb{Z}^n} & B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n
 \end{array} ,$$

où  $u_0, u_1$  et  $u_2$  ont pour composantes respectivement  $i$  et  $\varepsilon, \delta_1$  et  $\delta_0\varepsilon, \delta'_2$  et  $\delta'_0\delta_0\varepsilon$ . Nous savons que  $u_1$  est un isomorphisme. Comme les deux carrés de gauche de  $(0, 1, 2)^*$  sont cocartésiens,  $u_2$  est bijectif. Or les deux lignes horizontales de notre diagramme sont exactes ; donc  $u_0$  est bijectif. <sup>(26)</sup> Ceci montre que  $A_0$  est un  $B$ -module localement libre de rang  $n$ , et, d'après les réductions précédentes, ceci entraîne que  $\delta_0 \otimes \delta_1 : A_0 \otimes_B A_0 \rightarrow A_1$  est un isomorphisme. Ceci achève la preuve du théorème 4.1 dans le cas particulier considéré ( $X_0$  affine et  $d_1$  localement libre de rang constant  $n$ ).

**5. Passage au quotient par un groupoïde fini et plat (cas général)**

a) Soit  $U^{(n)}$  le plus grand ouvert de  $X_0$  au-dessus duquel  $d_1$  est fini localement libre de rang  $n$ . On sait que  $X_0$  est la somme directe des  $U^{(n)}$ . Il résulte d'autre part des deux carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccc}
 X_2 & \xrightarrow{d'_0} & X_1 \\
 \downarrow d'_2 & & \downarrow d_1 \\
 X_1 & \xrightarrow{d_0} & X_0
 \end{array}
 \quad \text{et} \quad
 \begin{array}{ccc}
 X_2 & \xrightarrow{d'_1} & X_1 \\
 \downarrow d'_2 & & \downarrow d_1 \\
 X_1 & \xrightarrow{d_1} & X_0
 \end{array}$$

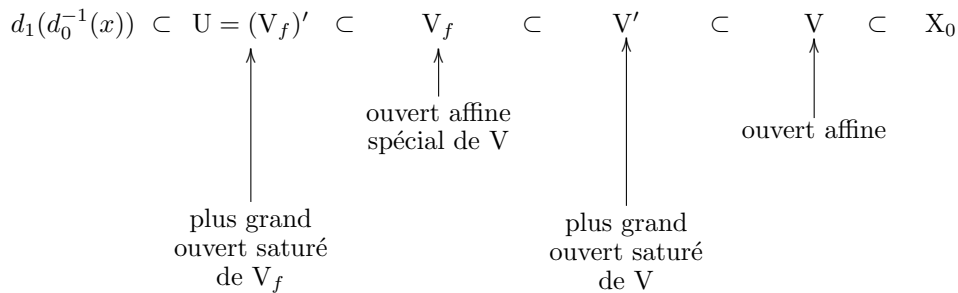
que les images réciproques de  $U^{(n)}$  par  $d_0$  et  $d_1$  coïncident toutes les deux avec le plus grand ouvert de  $X_1$  au-dessus duquel  $d'_2$  est localement libre de rang  $n$  <sup>(27)</sup> ; on a donc  $d_0^{-1}(U^{(n)}) = d_1^{-1}(U^{(n)})$  de sorte que le groupoïde  $X_*$  est la somme directe des groupoïdes  $X_*^{(n)}$  induits par  $X_*$  sur les ouverts et fermés  $U^{(n)}$ . Il suffit par conséquent, comme on le voit aisément, de prouver le théorème 4.1 pour chacun des  $X_*^{(n)}$  : on est ramené au cas où  $d_1$  est fini localement libre de rang  $n$ .

b) Nous sommes maintenant en mesure de prouver notre théorème dans le cas **général**. 270

<sup>(26)</sup>N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.

<sup>(27)</sup>N.D.E. : en effet, comme  $d_0$  (resp.  $d_1$ ) est surjectif, plat et fini, donc fidèlement plat et affine, alors  $d'_2$  est de rang  $n$  au-dessus d'un voisinage d'un point  $x$  de  $X_1$  si et seulement si  $d_1$  est de rang  $n$  au-dessus d'un voisinage de  $d_0(x)$  (resp.  $d_1(x)$ ).

D'après a) on peut supposer que  $d_1$  est localement libre de rang  $n$ . Soit alors  $(Y, p)$  un conoyau de  $(d_0, d_1)$  dans la catégorie de tous les espaces annelés. Le raisonnement de la fin du paragraphe 4.c) montre qu'il suffit pour démontrer 4.1 (i) de prouver que  $Y$  est un schéma et  $p : X_0 \rightarrow Y$  un morphisme de schémas. D'après le lemme 1.2, la question est locale sur  $Y$  : soit  $y \in Y$  et soit  $x \in X_0$  tel que  $p(x) = y$  ; si  $x$  possède un voisinage ouvert affine et saturé  $U$ ,  $p(U)$  sera un ouvert affine de  $Y$  d'après le §4 et  $p|_U$  sera un morphisme de schémas. Il suffit donc de prouver que tout  $x \in X_0$  possède un voisinage ouvert affine et saturé  $U$ . Voici comment on procède (la démonstration est tirée de SGA 1, VIII, cor. 7.6).



D'après la condition b) de 4.1, il existe un ouvert affine  $V$  de  $X_0$  contenant  $d_1(d_0^{-1}(x))$  <sup>(28)</sup> ; si  $F = X_0 - V$ ,  $d_1(d_0^{-1}(F))$  est fermé car  $d_1$  est entier et  $V' = X_0 - d_1(d_0^{-1}(F))$  est le plus grand ouvert saturé contenu dans  $V$ . Comme  $V'$  est un voisinage de l'ensemble fini  $d_1(d_0^{-1}(x))$ , il existe une section  $f$  du faisceau structural de  $V$  qui s'annule sur  $V - V'$  et est telle que  $d_1(d_0^{-1}(x))$  soit contenu dans l'ouvert  $V_f$  de  $V$  formé des points où  $f$  ne s'annule pas. Nous allons voir que le plus grand ouvert saturé  $(V_f)'$  de  $V_f$  est affine, donc répond à la question.

271 Soit en effet  $Z(f) = V' - V_f$ . Alors  $d_0^{-1}(Z(f))$  est l'ensemble des points de  $d_0^{-1}(V') = d_1^{-1}(V')$  où s'annule l'image  $d_0^*(f)$  de  $f$  par l'application induite par  $d_0$ . D'autre part, comme  $d_1$  induit un morphisme localement libre de rang  $n$  de  $d_0^{-1}(V') = d_1^{-1}(V')$  sur  $V'$ , <sup>(29)</sup> alors, d'après le lemme 4.1.1,  $d_1(d_0^{-1}(Z(f)))$  est l'ensemble des points où s'annule la norme  $N$  de  $d_0^*(f)$  pour le morphisme  $d_1$ . Il s'ensuit que  $(V_f)' = V' - d_1(d_0^{-1}(Z(f)))$  est l'ensemble des points de  $V_f$  où  $N$  ne s'annule pas ; par conséquent,  $(V_f)'$  est affine.

Ceci prouve 4.1 (i) ; les assertions (ii), (iii), et la première partie de (iv) sont alors claires. Montrons enfin les conséquences signalées à la fin du point (iv) (cf. [Ray67a], th. 1 (iii)).

Par hypothèse, le groupoïde  $X_*$  provient d'une relation d'équivalence  $i : R \rightarrow X_0 \times X_0$  ( $i$  étant donc une immersion, cf. N.D.E. (19)), et on a établi que  $R$  est effective (cf. Exp. IV, 3.3.2) et que  $p : X_0 \rightarrow Y = X_0/R$  est un morphisme surjectif et fini localement libre donc, en particulier, fidèlement plat et de présentation finie.

<sup>(28)</sup>N.D.E. : on a  $d_1(d_0^{-1}(x)) = d_0(d_1^{-1}(x))$ , cf. la N.D.E. (16) dans le théorème 4.1.

<sup>(29)</sup>N.D.E. : On a ajouté la référence au lemme 4.1.1, cf. [DG70], III, § 5.2, p. 313.

Par conséquent, notant (M) la famille des morphismes fidèlement plats localement de présentation finie, R est (M)-effective. Donc, d'après Exp. IV, 6.3.3,  $(Y, p)$  représente le faisceau quotient de  $X_0$  par R pour la topologie (fppf), et les assertions relatives au changement de base découlent de IV, 3.4.3.1.

**Remarque 5.1.** — <sup>(30)</sup> Conservons les hypothèses et les notations de 4.1, et supposons de plus S localement noethérien et  $\pi_0 : X_0 \rightarrow S$  quasi-projectif. Montrons alors que  $\pi : Y \rightarrow S$  est quasi-projectif.

Les hypothèses ci-dessus entraînent que  $Y \rightarrow S$  est de type fini, voir la démonstration de 6.1 (ii). Soit  $\mathcal{A}$  un  $\mathcal{O}_{X_0}$ -module inversible ample pour  $\pi_0$ . D'après EGA II, 6.1.12,  $p_*(\mathcal{A})$  est un  $p_*(\mathcal{O}_{X_0})$ -module inversible. Il existe donc un recouvrement  $(V_i)_{i \in I}$  de Y par des ouverts affines, tel que  $\mathcal{A}$  soit trivial au-dessus de chacun des ouverts affines saturés  $U_i = p^{-1}(V_i)$ .

Pour chaque indice  $i$ , notons  $A_{i,0} = \mathcal{O}_{X_0}(U_i)$ ,  $A_{i,1}$  l'anneau de l'ouvert affine  $d_0^{-1}(U_i) = d_1^{-1}(U_i)$  de  $X_1$ ,  $\delta_{i,0}$  (resp.  $\delta_{i,1}$ ) le morphisme  $A_{i,0} \rightarrow A_{i,1}$  induit par  $d_0$  (resp.  $d_1$ ), et  $B_i = \mathcal{O}_Y(V_i) = \{b \in A_{i,0} \mid \delta_{i,0}(b) = \delta_{i,1}(b)\}$ .

Suivant EGA II, §6.5, considérons le  $\mathcal{O}_{X_0}$ -module inversible  $N_{d_1}(d_0^*(\mathcal{A}))$ , norme relativement au morphisme fini localement libre  $d_1 : X_1 \rightarrow X_0$  du  $\mathcal{O}_{X_1}$ -module inversible  $d_0^*(\mathcal{A})$ . Si  $\mathcal{A}$  est donné, relativement au recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$ , par des fonctions de transition  $c_{ij} \in \mathcal{O}_{X_0}(U_i \cap U_j)^\times$ , alors  $N_{d_1}(d_0^*(\mathcal{A}))$  est donné par les fonctions de transition  $N_{d_1}(\delta_0(c_{ij})) \in \mathcal{O}_{X_0}(U_i \cap U_j)^\times$ ; comme, d'après le paragraphe 4.a), ces éléments appartiennent à  $\mathcal{O}_Y(V_i \cap V_j)^\times$ , ils définissent un  $\mathcal{O}_Y$ -module inversible  $\mathcal{L}$ , tel que  $p^*(\mathcal{L}) = N_{d_1}(d_0^*(\mathcal{A}))$ . Remarquons de plus que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $p^*(\mathcal{L}^n) = N_{d_1}(d_0^*(\mathcal{A}^n))$ , cf. loc. cit., (6.5.2.1).

Montrons que  $\mathcal{L}$  est ample pour le morphisme  $\pi : Y \rightarrow S$ . Pour cela, remplaçant S par un ouvert affine, on peut supposer S affine. Soient alors  $y \in Y$ ,  $x \in X_0$  tel que  $p(x) = y$ , V un ouvert affine de Y contenant  $y$ , et  $U = p^{-1}(V)$ . Comme  $\mathcal{A}$  est  $\pi_0$ -ample, il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  et une section  $s \in \Gamma(X_0, \mathcal{A}^n)$  telle que l'ouvert  $(X_0)_s$  vérifie  $x \in (X_0)_s \subset U$ . Avec les notations précédentes,  $s$  est donnée par des sections  $a_i \in A_{i,0} = \mathcal{O}_{X_0}(U_i)$  telles que  $a_i = c_{ij}a_j$  sur  $U_i \cap U_j$ , et  $(X_0)_s$  est la réunion des ouverts  $U'_i = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A_{i,0}) \mid a_i \notin \mathfrak{p}\}$ .

Pour chaque indice  $i$ , posons  $N(a_i) = N_{\delta_1}(\delta_0(a_i)) \in B_i$ . D'après 4.1 (i) et le lemme 4.1.1, on a :

$$p(U'_i) = pd_1 d_0^{-1}(U'_i) = pd_1(\{\mathfrak{q} \in \text{Spec}(A_{i,1}) \mid \delta_{i,0}(a_i) \notin \mathfrak{q}\})$$

et  $d_1(\{\mathfrak{q} \in \text{Spec}(A_{i,1}) \mid \delta_{i,0}(a_i) \notin \mathfrak{q}\}) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A_{i,0}) \mid N_{\delta_1}(\delta_{i,0}(a_i)) \notin \mathfrak{p}\}$ , d'où

$$p(U'_i) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(B_i) \mid N(a_i) \notin \mathfrak{p}\}.$$

Il en résulte que  $p((X_0)_s)$  égale  $Y_{N(s)}$ , où l'on a noté  $N(s)$  la section de  $\mathcal{L}^n$  sur Y définie par les sections  $N(a_i) \in \mathcal{O}_Y(V_i)$ . On a donc

$$(*) \quad y \in p((X_0)_s) = Y_{N(s)} \subset p(U) = V.$$

Ceci montre que  $\mathcal{L}$  est ample pour  $\pi : Y \rightarrow S$ , ce qui achève de montrer que  $\pi : Y \rightarrow S$  est quasi-projectif.

<sup>(30)</sup>N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe.

**6. Passage au quotient lorsqu'il existe une quasi-section**

Nous allons maintenant prouver un *lemme de caractère technique* qui nous servira dans la démonstration des deux théorèmes que nous avons en vue. Soient  $S$  un schéma et

$$X_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{d'_0, d'_1, d'_2} \\ \xrightarrow{\quad\quad\quad} \\ \xrightarrow{\quad\quad\quad} \end{array} X_1 \xrightarrow{d_0, d_1} X_0$$

un  $(\mathbf{Sch}/S)$ -groupeïde. Nous appellerons *quasi-section du groupeïde*  $X_*$ , tout sous-schéma  $U$  de  $X_0$  tel qu'on ait (1) et (2) :

(1) La restriction  $v$  de  $d_1$  à  $d_0^{-1}(U)$  est un *morphisme fini, localement libre et surjectif* de  $d_0^{-1}(U)$  sur  $X_0$ .

(2) Toute partie  $E$  de  $U$  formée de points deux à deux équivalents pour la relation d'équivalence définie par  $X_*$  (§ 3.e)) est contenue dans un ouvert affine de  $U$ . <sup>(31)</sup>

Si  $U$  est une quasi-section de  $X_*$ , le  $(\mathbf{Sch}/S)$ -groupeïde

$$U_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{u'_0, u'_1, u'_2} \\ \xrightarrow{\quad\quad\quad} \\ \xrightarrow{\quad\quad\quad} \end{array} U_1 \xrightarrow{u_0, u_1} U$$

**272** induit par  $X_*$  et l'inclusion de  $U$  dans  $X_0$  (cf. § 3.a)) vérifie les hypothèses du théorème 4.1. Posons en effet  $V = d_0^{-1}(U)$  et soient  $u$  et  $v$  les morphismes de source  $V$  induits respectivement par  $d_0$  et  $d_1$  :

$$X_0 \xleftarrow{v} V \xrightarrow{u} U.$$

D'après le paragraphe 3.b), on a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \longrightarrow & V \\ u_1 \downarrow & & \downarrow v \\ U & \xrightarrow{\text{inclusion}} & X_0 \end{array}$$

donc  $u_1$  est surjectif et fini localement libre d'après (1). Avec (2), la condition (1) assure donc que le groupeïde  $U_*$  vérifie les hypothèses du théorème 4.1. En particulier  $\text{Coker}(u_0, u_1)$  existe dans  $(\mathbf{Sch}/S)$ . De plus,  $d_0$  possède une section de sorte que  $u$  est un épimorphisme effectif universel (cf. III 1.12) ; il s'ensuit, d'après la proposition 3.1, que  $\text{Coker}(u_0, u_1)$  coïncide avec le conoyau  $\text{Coker}(v_0, v_1)$  du groupeïde  $V_*$  :

$$V_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{v'_2} \\ \xrightarrow{v'_1} \\ \xrightarrow{v'_0} \\ \xrightarrow{\quad\quad\quad} \end{array} V_1 \xrightarrow[v_0]{v_1} V$$

<sup>(31)</sup>N.D.E. : Si  $x, y \in E$ , il existe  $z \in X_1$  tel que  $d_1(x) = z$  et  $d_0(z) = y$ , c.-à-d.,  $z$  appartient à l'ensemble  $v^{-1}(y)$ , qui est fini d'après (1). Donc  $E$  est contenu dans l'ensemble fini  $d_0(v^{-1}(y)) = d_0 d_1^{-1}(y) \cap U$ .

image réciproque de  $U_*$  par le changement de base  $u : V \rightarrow U$ , c'est-à-dire aussi image réciproque de  $X_*$  par le changement de base :

$$V \xrightarrow{\text{inclusion}} X_1 \xrightarrow{d_0} X_0 \quad .$$

(32) D'après le paragraphe 3.c),  $V_*$  est isomorphe au groupoïde  $V'_*$ , image réciproque de  $X_*$  par le changement de base :

$$v : \quad V \xrightarrow{\text{inclusion}} X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \quad ,$$

et donc  $V'_*$  admet un conoyau dans  $(\mathbf{Sch}/S)$ . Or, étant plat, surjectif et fini,  $v : V \rightarrow X_0$  est fidèlement plat et quasi-compact, donc un épimorphisme effectif universel, d'après III 6.3.2. Par conséquent, d'après la proposition 3.1, le groupoïde  $X_*$  admet un conoyau  $\text{Coker}(d_0, d_1)$  dans  $(\mathbf{Sch}/S)$ . Nous avons donc prouvé la première assertion du point (i) du lemme suivant :

273

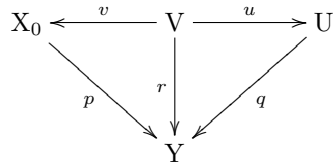
**Lemme 6.1.** — *Supposons que le  $(\mathbf{Sch}/S)$ -groupoïde  $X_*$  possède une quasi-section. Alors :*

- (i) *Il existe un conoyau  $(Y, p)$  de  $(d_0, d_1)$  dans  $(\mathbf{Sch}/S)$  ; de plus, un tel  $(Y, p)$  est un conoyau de  $(d_0, d_1)$  dans la catégorie de tous les espaces annelés.*
- (i')  *$p$  est surjectif, et est ouvert (resp. universellement fermé) si  $d_0$  l'est.*
- (ii) *Supposons  $S$  localement noethérien et  $X_0$  localement de type fini (resp. de type fini) sur  $S$ . Alors  $p$  et  $Y \rightarrow S$  sont localement de présentation finie (resp. de présentation finie).*
- (iii) *Le morphisme  $X_1 \rightarrow X_0 \times_Y X_0$  de composantes  $d_0$  et  $d_1$  est surjectif.*
- (iv) *Si  $(d_0, d_1)$  est un couple d'équivalence,  $X_1 \rightarrow X_0 \times_Y X_0$  est un isomorphisme. De plus, si  $d_0 : X_1 \rightarrow X_0$  est plat,  $p$  est fidèlement plat.*

Avant de prouver la deuxième assertion de (i), nous allons démontrer (i'), (ii) et (iii).

**a) Démonstration de (i') et (ii) :**

Nous venons de voir que  $(Y, p)$  s'identifie à  $\text{Coker}(v_0, v_1)$  et  $\text{Coker}(u_0, u_1)$ . Soient donc  $q$  et  $r$  les épimorphismes canoniques de  $U$  et  $V$  dans  $Y$  :



Par hypothèse,  $v$  est surjectif et fini localement libre, donc ouvert. D'autre part, si  $d_0 : X_1 \rightarrow X_0$  est ouvert (resp. universellement fermé), alors  $u$ , qui en est déduit par

(32)N.D.E. : On a modifié légèrement la suite ; en particulier, dans le lemme 6.1, on a déplacé en (iv) l'hypothèse additionnelle que  $d_0$  soit plat, et l'on a séparé (ii) en : (i') + (ii), et ajouté la deuxième assertion de (i').

**274** changement de base, l'est aussi. Comme, d'après le théorème 4.1,  $q$  est surjectif, entier, et ouvert, alors  $r$  est surjectif, et ouvert (resp. universellement fermé) si  $d_0$  l'est. Il en est donc de même pour  $p$ , puisque  $v$  est surjectif. Ceci prouve (i').

Supposons maintenant  $S$  localement noethérien et  $X_0$  localement de type fini au-dessus de  $S$ , de sorte que  $X_0$  est localement noethérien.

Montrons que  $Y$  est localement de présentation finie au-dessus de  $S$ . Soient  $S' = \text{Spec } R$  un ouvert affine de  $S$ ,  $Y' = \text{Spec } B$  un ouvert affine de  $Y$  se projetant dans  $S'$  et  $U' = \text{Spec } A$  l'image réciproque de  $Y'$  dans  $U$ . Comme  $R$  est noethérien, il suffit de montrer que  $B$  est une  $R$ -algèbre de type fini ; or, d'après les paragraphes 4 et 5,  $B$  est contenu dans  $A$  qui est une  $R$ -algèbre de type fini ; l'assertion résulte donc de ce que  $R$  est noethérien et  $A$  entier sur  $B$ .

Enfin, comme  $X_0 \rightarrow S$  est localement de type fini,  $p$  l'est aussi (EGA I, 6.6.6), donc  $p$  est localement de présentation finie puisque  $Y$  est localement noethérien.

Reste à montrer la dernière assertion de (ii). Supposons de plus  $X_0$  de type fini sur  $S$ . Alors, comme  $p$  est surjectif,  $Y$  est de plus quasi-compact sur  $S$ , donc de type fini sur  $S$ . Comme  $S$  est localement noethérien, alors  $X_0 \rightarrow S$  et  $Y \rightarrow S$  sont de présentation finie, et donc  $p : X_0 \rightarrow Y$  l'est aussi (EGA IV<sub>1</sub>, 1.6.2 (v)).

**b) Démonstration de (iii) :**

Comme le groupoïde  $V_*$  de base  $V$  est isomorphe à la fois à l'image réciproque de  $U_*$  par le changement de base  $u$  et à l'image réciproque de  $X_*$  par le changement de base  $v$ , on a un double carré cartésien

$$\begin{array}{ccccc}
 X_1 & \longleftarrow & V_1 & \longrightarrow & U_1 \\
 \downarrow d_0 \boxtimes d_1 & & \downarrow v_0 \boxtimes v_1 & & \downarrow u_0 \boxtimes u_1 \\
 X_0 \times_Y X_0 & \xleftarrow{v \times v} & V \times_Y V & \xrightarrow{u \times u} & U \times_Y U
 \end{array}$$

**275** Comme  $u_0 \boxtimes u_1$  est surjectif, il en va de même pour  $v_0 \boxtimes v_1$ . Comme  $v \times v$  est surjectif, il en va de même pour le morphisme composé  $V_1 \rightarrow X_0 \times_Y X_0$ , donc pour  $d_0 \boxtimes d_1$ .

**c) Démonstration de (i) :**

Il reste à prouver que  $(Y, p)$  est un conoyau de  $(d_0, d_1)$  dans la catégorie de tous les espaces annelés. Nous montrons d'abord que  $Y$  est obtenu à partir de  $X_0$  en identifiant les points  $x$  et  $y$  tels qu'il existe  $z \in X_1$  avec  $d_0(z) = x$  et  $d_1(z) = y$ . En effet  $p$  est surjectif et on a  $pd_0 = pd_1$  ; en outre, si  $p(x) = p(y)$ , il y a un point  $z'$  de  $X_0 \times_Y X_0$  dont la première projection est  $x$ , la deuxième  $y$ . Si  $z$  est un point de  $X_1$  tel que  $(d_0 \boxtimes d_1)(z) = z'$ , on a bien  $d_0(z) = x$  et  $d_1(z) = y$ .

D'autre part, si  $W$  est un ouvert saturé de  $X_0$ ,  $W \cap U$  est un ouvert saturé de  $U$  ; d'après 4.1,  $q(W \cap U)$  est un ouvert de  $Y$ . Comme  $q(W \cap U)$  n'est autre que  $p(W)$ , on voit que  $Y$  est muni de la topologie quotient de celle de  $X_0$ .

Il reste à démontrer que la suite canonique de faisceaux d'anneaux

$$\mathcal{O}_Y \rightarrow p_*(\mathcal{O}_{X_0}) \rightrightarrows p_*d_{0*}(\mathcal{O}_{X_1}) = p_*d_{1*}(\mathcal{O}_{X_1})$$

est exacte.

Soit donc  $Y'$  un ouvert de  $Y$  et posons  $U' = q^{-1}(Y')$ ,  $X'_0 = p^{-1}(Y')$ , etc. <sup>(33)</sup> Alors,  $U'$  est un ouvert de  $U$  saturé pour la relation d'équivalence définie par le groupoïde  $U_*$ , et il résulte des lemmes 1.1 et 1.2 que  $Y'$  est le conoyau, dans  $(\mathbf{Sch}/S)$  et dans  $(\mathbf{Esp. An})$ , du groupoïde induit par  $U_*$  sur  $U'$ . De même,  $X'_0$  est un ouvert de  $X_0$  saturé pour la relation d'équivalence définie par  $X_*$  et on le diagramme commutatif suivant, où les deux carrés sont cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} X'_0 & \xleftarrow{\tilde{d}_1} & V' = d_0^{-1}(U') & \xrightarrow{\tilde{d}_0} & U' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_0 & \xleftarrow{d_1} & V = d_0^{-1}(U) & \xrightarrow{d_0} & U \end{array} .$$

Alors,  $\tilde{d}_1$  est surjectif, et fini localement libre. D'autre part, soit  $x \in U'$ . Comme  $U$  est une quasi-section, l'ensemble  $E := d_0 d_1^{-1}(x) \cap U$  est fini et contenu dans un ouvert affine  $W$  de  $U$ . Alors  $E' = E \cap U'$  est un ensemble fini, contenu dans l'ouvert quasi-affine  $W \cap U'$ . Par conséquent, il existe un ouvert affine  $W'$  de  $W \cap U'$  contenant  $E'$ . Ceci montre que  $U'$  est une quasi-section du groupoïde  $X'_*$  induit par  $X_*$  sur  $X'_0$ . La première assertion de (i), appliquée à  $X'_*$  et  $U'$ , montre alors que  $Y'$  est le conoyau dans  $(\mathbf{Sch}/S)$  de  $X'_*$ .

En particulier, pour tout  $S$ -schéma  $T$ , on a la suite exacte

$$T(Y') \xrightarrow{T(p|_{X'_0})} T(X'_0) \begin{array}{c} \xrightarrow{T(d_1|_{X'_1})} \\ \xrightarrow{T(d_0|_{X'_1})} \end{array} T(X'_1).$$

Or, si  $T$  est la « droite affine »  $\mathbb{G}_{a,S}$  (I 4.3), cette suite s'identifie à la suite :

$$\Gamma(Y', \mathcal{O}_Y) \rightarrow \Gamma(p^{-1}(Y'), \mathcal{O}_{X_0}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_1} \\ \xrightarrow{\delta_0} \end{array} \Gamma(d_0^{-1}p^{-1}(Y'), \mathcal{O}_{X_1}) = \Gamma(d_1^{-1}p^{-1}(Y'), \mathcal{O}_{X_1})$$

qui est donc exacte pour tout ouvert  $Y'$ . Ceci achève la preuve de 6.1 (i).

**d) Démonstration de (iv) :**

Si  $(d_0, d_1)$  est un couple d'équivalence, il en va de même pour  $(u_0, u_1)$ . Il s'ensuit que  $u_0 \boxtimes u_1 : U_1 \rightarrow U \times_Y U$  est un isomorphisme (théorème 4.1), donc aussi  $v_0 \boxtimes v_1$  (confer les carrés cartésiens de b) ; comme  $v \times v$  est fidèlement plat et quasi-compact,  $d_0 \boxtimes d_1$  est un isomorphisme (SGA 1, VIII 5.4).

De plus, si  $d_0$  est plat,  $u$  l'est aussi. Or  $q$  est plat, d'après le théorème 4.1, donc  $r$  l'est aussi. Comme  $v$  est fidèlement plat, alors  $p$  est plat, et donc fidèlement plat puisque surjectif.

<sup>(33)</sup>N.D.E. : On a détaillé ce qui suit, en particulier le fait que  $U'$  soit une quasi-section du groupoïde induit sur  $X'_0$ .

## 7. Quotient par un groupoïde propre et plat

**Théorème 7.1.** — <sup>(34)</sup> Soient  $S$  un schéma localement noethérien et

$$\begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{d'_2} & & & \\ X_2 & \xrightarrow{d'_1} & X_1 & \xrightarrow{d_1} & X_0 \\ & \xrightarrow{d'_0} & & \xrightarrow{d_0} & \\ & \longrightarrow & & & \end{array}$$

un  $(\mathbf{Sch}/S)$ -groupoïde tel que  $d_1$  soit propre et plat, que  $X_0$  soit quasi-projectif sur  $S$  <sup>(35)</sup> et que le morphisme  $d : X_1 \rightarrow X_0 \times_S X_0$  de composantes  $d_0$  et  $d_1$  soit quasi-fini.

Alors :

(i) Il existe un conoyau  $(Y, p)$  de  $(d_0, d_1)$  dans  $(\mathbf{Sch}/S)$  ; de plus, un tel  $(Y, p)$  est un conoyau de  $(d_0, d_1)$  dans la catégorie de tous les espaces annelés.

277 (ii)  $p$  est surjectif, ouvert, propre, de présentation finie, et  $Y \rightarrow S$  est de présentation finie et séparé. <sup>(36)</sup>

(iii) Le morphisme  $X_1 \rightarrow X_0 \times_Y X_0$  de composantes  $d_0$  et  $d_1$  est surjectif.

(iv) Si  $(d_0, d_1)$  est un couple d'équivalence,  $X_1 \rightarrow X_0 \times_Y X_0$  est un isomorphisme et  $p$  est fidèlement plat. <sup>(37)</sup> De plus,  $(Y, p)$  est un conoyau de  $(d_0, d_1)$  dans la catégorie des faisceaux pour la topologie (fppf) et, pour tout changement de base  $Y' \rightarrow Y$ ,  $Y'$  est le conoyau du groupoïde  $X_* \times_Y Y'$  déduit de  $X_*$  par le changement de base  $X_0 \times_Y Y' \rightarrow X_0$ .

En particulier, pour tout changement de base  $S' \rightarrow S$ ,  $Y' = Y \times_S S'$  est le conoyau du  $S'$ -groupoïde  $X'_* = X_* \times_S S'$ . Donc, dans ce cas, « la formation du quotient commute au changement de base ».

Soit  $(Y, p)$  le conoyau de  $(d_0, d_1)$  dans la catégorie de tous les espaces annelés. Le lemme 1.2 montre que, pour prouver (i), il suffit de démontrer que tout point  $z$  de  $X_0$  possède un voisinage ouvert saturé  $U_z$  tel que, notant  $\tilde{d}_0$  et  $\tilde{d}_1$  les restrictions de  $d_0$  et  $d_1$  à  $d_0^{-1}(U_z) = d_1^{-1}(U_z)$ , et  $(Q, q)$  le conoyau de  $(\tilde{d}_0, \tilde{d}_1)$  dans  $(\mathbf{Esp. An})$ ,  $Q$  soit un schéma et  $q$  un morphisme de schémas.

D'après le lemme 6.1 (i), il suffit donc de montrer que tout point  $z$  de  $X_0$  possède un voisinage ouvert saturé  $U_z$  tel que le groupoïde induit sur  $U_z$  par  $X_*$  possède une

<sup>(34)</sup>N.D.E. : Signalons ici l'article de S. Keel et S. Mori ([KM97]), où est établi le théorème suivant. Soient  $X$  un espace algébrique de type fini sur une base localement noethérienne  $S$  et  $j : R \rightarrow X \times_S X$  un groupoïde plat dont le stabilisateur  $j^{-1}(\Delta_X)$  est fini sur  $X$  ; il existe alors un espace algébrique qui est un quotient géométrique de  $X$  par  $R$  et un quotient catégorique uniforme ; de plus, si  $j$  est séparé, ce quotient est séparé. En particulier, si un  $S$ -schéma en groupes  $G$  plat agit proprement sur  $X$ , avec stabilisateur fini (i.e. le morphisme  $G \times_S X \rightarrow X \times_S X$ ,  $(g, x) \mapsto (x, g \cdot x)$  est propre et le stabilisateur de la diagonale est fini sur  $X$ ), alors il existe un quotient géométrique  $X \rightarrow X/G$ . Dans le cas d'un  $S$ -schéma en groupes réductifs  $G$ , il s'agit d'un résultat de J. Kollár ([Ko97]).

<sup>(35)</sup>N.D.E. : Cette hypothèse sur  $X_0$  est nécessaire, cf. la N.D.E. (17) dans le Th. 4.1.

<sup>(36)</sup>N.D.E. : Dans TDTE III, Th. 6.1, il est indiqué que  $Y \rightarrow S$  est quasi-projectif si  $S$  est noethérien. Les éditeurs n'ont pas vu comment déduire ceci de l'existence locale de quasi-sections.

<sup>(37)</sup>N.D.E. : On a explicité les conséquences qui suivent ; voir [Ray67a], th. 1 (iii) et la fin de la démonstration du théorème. Signalons aussi qu'une autre démonstration du th. 7.1 dans le cas d'une relation d'équivalence, basée sur l'existence des schémas de Hilbert, est donnée dans [AK80], Th. 2.9, voir aussi [BLR90], § 8.2, Th. 12 ; il y est de plus montré, dans ce cas, que  $Y \rightarrow S$  est quasi-projectif.



quasi-section. On peut même supposer que  $z$  est fermé dans la fibre de  $z$  au-dessus de  $S$  (nous dirons que  $z$  est *fermé relativement à  $S$* )<sup>(38)</sup>. L'existence de  $U_z$  résulte alors des lemmes qui suivent :

**Lemme 7.2.** — *Soient  $T$  un schéma affine noethérien,  $X, Y$ , et  $Z$  des  $T$ -schémas de type fini,  $X$  étant quasi-projectif sur  $T$ , et*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{u} & X \\ v \downarrow & & \downarrow \\ Z & \dashrightarrow & T \end{array}$$

*un diagramme de  $(\mathbf{Sch}/T)$ . Soit d'autre part  $z$  un point de  $v(Y)$  qui est fermé relativement à  $T$  et tel que  $v$  soit plat aux points de  $v^{-1}(z)$ . Alors, il existe un sous-schéma fermé  $F$  de  $X$  tel que  $u(u^{-1}(F) \cap v^{-1}(z))$  soit fini non vide et que la restriction de  $v$  à  $u^{-1}(F)$  soit plate aux points de  $v^{-1}(z)$ .*

Soit  $T = \text{Spec } A$ . Il est loisible de supposer  $X$  de la forme  $\text{Proj } \mathcal{S}$ , où  $\mathcal{S}$  est l'algèbre symétrique d'un  $A$ -module de type fini  $E$ .

Si  $u(v^{-1}(z))$  est fini, on peut choisir  $F$  égal à  $X$ . Sinon, nous désignons par  $y_1, \dots, y_n$  les points de la fibre  $v^{-1}(z)$  associés au faisceau structural  $\mathcal{O}_{v^{-1}(z)}$  de  $v^{-1}(z)$  (les  $y_i$  sont donc tels que, si  $\mathcal{O}_i$  désigne l'anneau local de  $v^{-1}(z)$  au point  $y_i$ , l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_i$  soit formé de diviseurs de 0). Si  $t$  est l'image de  $z$  dans  $T$ ,  $u(v^{-1}(z))$  est une partie constructible infinie de la fibre de  $t$  dans  $X$ . Il existe donc un point  $x$  fermé dans cette fibre, appartenant à  $u(v^{-1}(z))$  et distinct de  $u(y_1), \dots, u(y_n)$ . Alors  $X - \{x\}$  est un voisinage ouvert de  $u(y_1), \dots, u(y_n)$ , donc contient un voisinage ouvert de la forme  $D_+(f)$ , où  $f$  est un élément homogène de degré  $d$  de  $\mathcal{S}$  (les notations sont celles de EGA II, § 2.3). 278

Par conséquent, le sous-schéma fermé  $X_1 = V_+(f)$  défini par  $f$  contient  $x$  et évite les points  $u(y_1), \dots, u(y_n)$ . Il s'ensuit évidemment que l'image réciproque  $Y_1 = u^{-1}(V_+(f))$  de ce sous-schéma est distincte de  $Y$  et rencontre  $v^{-1}(z)$ . Nous allons même montrer que la restriction  $v_1$  de  $v$  à  $Y_1$  est plate aux points de  $v^{-1}(z)$ ; si  $u(v_1^{-1}(z))$  est fini, on n'aura donc qu'à choisir  $F$  égal à  $X_1$ ; sinon, on répètera l'argument qu'on vient de développer en remplaçant  $Y$  par  $Y_1$ ,  $v$  par  $v_1$ ,  $u$  par le morphisme  $u_1$  induit dans  $Y_1$  par  $u$ ; on obtiendra de cette façon une suite décroissante  $X, X_1, \dots$  de sous-schémas fermés de  $X$ ; comme une telle suite s'arrête,  $u(u^{-1}(X_n) \cap v^{-1}(z))$  sera fini non vide pour un certain  $n$  et on choisira  $F$  égal à  $X_n$ .

Il reste donc à montrer que  $v_1$  est plat aux points de  $v^{-1}(z)$ ; soient donc  $y$  un point de  $Y_1$  au-dessus de  $z$ ,  $\mathcal{O}_y$  l'anneau local de  $y$  dans  $Y$ ,  $\overline{\mathcal{O}}_y$  l'anneau local de  $y$  dans  $v^{-1}(z)$ ,  $\mathcal{O}_{v(y)}$  l'anneau local de  $v(y)$  dans  $Z$ . Si  $g \in \mathcal{S}_1$  est tel que  $D_+(g)$  soit un voisinage de  $u(y)$  dans  $X$ , soient  $\varphi$  l'image de  $f/g^d$  dans  $\mathcal{O}_y$  et  $\overline{\varphi}$  l'image de  $f/g^d$  dans  $\overline{\mathcal{O}}_y$ . Il résulte alors de la construction de  $f$  que  $\overline{\varphi}$  ne divise pas 0 dans  $\overline{\mathcal{O}}_y$ ; comme

<sup>(38)</sup>N.D.E. : En effet, si l'on a construit un tel voisinage ouvert  $U_z$  pour tout point  $z$  fermé relativement à  $S$ , alors la réunion de ces  $U_z$  recouvre  $X_0$ , car chaque fibre au-dessus de  $S$  du fermé complémentaire est un schéma noethérien sans points fermés, donc vide.

$\mathcal{O}_y$  est plat sur  $\mathcal{O}_z$ ,  $\varphi$  ne divise pas 0 dans  $\mathcal{O}_y$  et  $\mathcal{O}_y/\mathcal{O}_y\varphi$  est plat sur  $\mathcal{O}_z$  (SGA 1, IV 5.7). Or  $\mathcal{O}_y/\mathcal{O}_y\varphi$  n'est autre que l'anneau local de  $y$  dans  $Y_1$ .

**279** **Lemme 7.3.** — *Nous conservons les notations et les hypothèses de 7.1. Tout point  $z$  de  $X_0$  qui est fermé relativement à  $S$  possède alors un voisinage ouvert saturé  $U_z$  tel que le groupoïde induit par  $X_*$  sur  $U_z$  possède une quasi-section.*

L'énoncé étant local sur  $S$ , on peut supposer  $S$  affine noethérien et appliquer le lemme précédent au diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{d_0} & X_0 \\ d_1 \downarrow & & \downarrow \\ X_0 & \dashrightarrow & S \end{array}$$

de (**Sch**<sub>/S</sub>). Soit donc  $F$  un sous-schéma fermé de  $X_0$  tel que  $d_0(d_0^{-1}(F) \cap d_1^{-1}(z))$  soit fini non vide et que la restriction de  $d_1$  à  $d_0^{-1}(F)$  soit plate aux points de  $d_1^{-1}(z)$ . Notons  $F_1$  et  $F_2$  les images réciproques de  $F$  par  $d_0$  et par  $d_0d'_0 = d_0d'_1$ , et notons  $\tilde{d}_0, \tilde{d}_1, \text{etc.}$ , les morphismes induits par  $d_0, d_1, \text{etc.}$  On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} F_2 & \xrightarrow{\tilde{d}_1} & F_1 & \xrightarrow{\tilde{d}_0} & F \\ \tilde{d}_2 \downarrow & & \tilde{d}_1 \downarrow & & \downarrow \tilde{q} \\ X_1 & \xrightarrow{d_1} & X_0 & \dashrightarrow^q & S \end{array},$$

où les deux carrés de gauche sont cartésiens et la première ligne exacte (confer (0,1,2), § 1), et où  $q$  et  $\tilde{q}$  désignent les morphismes structuraux.

Montrons d'abord qu'il n'y a qu'un nombre fini de points de  $F_1$  au-dessus de  $z$ .  
 (39) Soit en effet  $s$  l'image de  $z$  dans  $S$ ; comme  $F$  est de type fini sur  $S$ , la fibre  $\tilde{q}^{-1}(s)$  est un schéma noethérien. D'autre part, comme  $\tilde{d}_0$  est propre,  $\tilde{d}_0(\tilde{d}_1^{-1}(z))$  est un sous-schéma fermé de  $\tilde{q}^{-1}(s)$ , formé d'un nombre fini de points. Par conséquent (cf. EGA I, 6.2.2), les points de cet ensemble sont fermés dans  $\tilde{q}^{-1}(s)$  et aussi (puisque  $F$  est fermé dans  $X_0$ ) dans la fibre  $q^{-1}(s)$  de  $s$  dans  $X_0$ . Soit  $y$  un de ces points; comme la fibre  $q^{-1}(s)$  est de type fini sur  $\kappa(s)$ , elle contient des voisinages ouverts affines  $\text{Spec } B$  et  $\text{Spec } C$  de  $y$  et  $z$ , respectivement, où  $B$  et  $C$  sont des  $\kappa(s)$ -algèbres de type fini. Alors  $y$  et  $z$  correspondent à des idéaux maximaux  $\mathfrak{p} \subset B$  et  $\mathfrak{q} \subset C$ , les corps  $B/\mathfrak{p}$  et  $C/\mathfrak{q}$  sont de degré fini sur  $\kappa(s)$ , et donc  $(B/\mathfrak{p}) \otimes_{\kappa(s)} (C/\mathfrak{q})$  est une  $\kappa(s)$ -algèbre de dimension finie, dont les idéaux maximaux correspondent exactement aux points de  $X_0 \times_S X_0$  dont la deuxième (resp. première) projection est  $z$  (resp.  $y$ ). Il n'y a donc  
**280** qu'un nombre fini de points  $u$  de  $X_0 \times_S X_0$  dont la deuxième projection est  $z$  et dont la première projection appartient à  $\tilde{d}_0(\tilde{d}_1^{-1}(z))$ . Enfin, comme  $X_1 \rightarrow X_0 \times_S X_0$  est à

(39) N.D.E. : On ajouté des détails, et mis en évidence le rôle de l'hypothèse de *propreté* de  $d_0$  et  $d_1$  dans le théorème 7.1. (On pourra comparer avec l'énoncé et la démonstration du théorème 8.1, où cette hypothèse de *propreté* est omise.)

fibres finies, un tel point  $u$  provient d'un nombre fini de points de  $X_1$ , d'où l'assertion cherchée.

Le morphisme  $\tilde{d}_1$  est donc quasi-fini et plat aux points de  $F_1$  au-dessus de  $z$ . Comme  $\tilde{d}_1$  est de type fini, alors, d'après SGA 1, IV 6.10 et EGA III, 4.4.10 <sup>(40)</sup>, l'ensemble  $\Phi$  des points de  $F_1$  où  $\tilde{d}_1$  n'est pas à la fois plat et quasi-fini, est fermé dans  $F_1$ , donc dans  $X_1$  (puisque  $F_1$  est fermé dans  $X_1$ ). Comme  $d_1$  est propre,  $\tilde{d}_1(\Phi)$  est fermé, et il ne contient pas  $z$ , d'après ce qui précède. Posons  $W = \tilde{d}_1(F_1) - \tilde{d}_1(\Phi)$ . Alors, la restriction de  $\tilde{d}_1$  à  $\tilde{d}_1^{-1}(W)$  est <sup>(41)</sup> de présentation finie (vu les hypothèses noethériennes), plate, propre et quasi-finie, donc finie, localement libre, et ouverte, d'après EGA III, 4.4.2, et EGA IV<sub>2</sub>, 2.1.12 et 2.4.6. Par conséquent,  $\tilde{d}_1(F_1)$  est un *voisinage* de  $z$ , et  $W$  est le plus grand ouvert de  $X_0$  contenu dans  $\tilde{d}_1(F_1)$  au-dessus duquel  $\tilde{d}_1$  est à la fois plat et quasi-fini.

Nous allons voir dans le lemme 7.4 que les images réciproques de  $\Phi$  par  $\tilde{d}'_1$  et  $\tilde{d}'_0$  s'identifient toutes les deux à l'ensemble des points de  $F_2$  où  $\tilde{d}'_2$  n'est pas à la fois plat et quasi-fini. Il s'ensuit que  $d_0^{-1}(W) = \tilde{d}'_2(F_2) - \tilde{d}'_2(\tilde{d}'_0^{-1}\Phi)$  coïncide avec  $d_1^{-1}(W) = \tilde{d}'_2(F_2) - \tilde{d}'_2(\tilde{d}'_1^{-1}\Phi)$ , c'est-à-dire que  $W$  est saturé. Par conséquent, si on pose  $W_1 = \tilde{d}'_1^{-1}(W)$ , l'égalité  $d_0^{-1}(W) = d_1^{-1}(W)$  entraîne  $\tilde{d}'_2^{-1}d_0^{-1}(W) = \tilde{d}'_2^{-1}d_1^{-1}(W)$  c'est-à-dire  $\tilde{d}'_0^{-1}(W_1) = \tilde{d}'_1^{-1}(W_1)$ . Comme  $\tilde{d}_0$  est fidèlement plat et quasi-compact (car  $d_0$  est, comme  $d_1$ , surjectif, propre et plat), et que le carré

$$\begin{array}{ccc} F_2 & \xrightarrow{\tilde{d}'_1} & F_1 \\ \tilde{d}'_0 \downarrow & & \downarrow \tilde{d}_0 \\ F_1 & \xrightarrow{\tilde{d}_0} & F \end{array}$$

est cartésien, il s'ensuit que  $W_1$  est de la forme  $\tilde{d}'_0^{-1}(U)$ , où  $U$  est un ouvert de  $F$  (SGA 1, VIII 4.4). Cet ouvert  $U$  de  $F$  est une quasi-section pour le groupoïde de base  $W$  induit par  $X_*$ . On peut donc choisir  $U_z$  égal à  $W$ .

Il nous reste donc à énoncer le lemme 7.4 dont la démonstration est classique :

**Lemme 7.4.** — *Considérons un carré cartésien de schémas*

281

$$\begin{array}{ccc} F_2 & \xrightarrow{v} & F_1 \\ d' \downarrow & & \downarrow d \\ X_1 & \xrightarrow{u} & X_0 \end{array}$$

<sup>(40)</sup>N.D.E. : Si  $f : X \rightarrow Y$  est un morphisme *localement de type fini*, l'ensemble des  $x \in X$  isolés dans leur fibre  $f^{-1}(f(x))$  est *ouvert* dans  $X$  : dans EGA III, 4.4.10, ceci est déduit, pour  $Y$  localement noethérien, du « Main Theorem » de Zariski, d'autre part, pour  $Y$  arbitraire, cela découle du théorème de semi-continuité de Chevalley (EGA IV<sub>3</sub>, 13.1.3 et 13.1.4). Par conséquent,  $f$  est *quasi-fini* en  $x$  si et seulement si  $f$  est de *type fini* en  $x$  et  $x$  isolé dans  $f^{-1}(f(x))$ ; ceci sera utilisé plus loin, cf. la N.D.E. (42).

<sup>(41)</sup>N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

et soit  $x$  un point de  $F_2$ .

(i) Si  $u$  est plat,  $d'$  est plat en  $x$  si et seulement si  $d$  est plat en  $v(x)$ .

(ii) Si  $d$  est localement de type fini,  $d'$  est quasi-fini en  $x$  si et seulement si  $d$  est quasi-fini en  $v(x)$ .<sup>(42)</sup>

Nous avons donc prouvé qu'il existe un recouvrement de  $X_0$  par des ouverts saturés  $W$  tels que le groupoïde  $W_*$  induit par  $X_*$  sur  $W$  possède une quasi-section.<sup>(43)</sup>

D'après le lemme 6.1 et les réductions énoncées après le théorème 7.1, ceci entraîne les assertions (i) et (iii) du théorème 7.1, et le fait que  $p$  soit surjectif et ouvert, et que  $p$  et  $Y \rightarrow S$  soient localement de présentation finie. De plus, comme  $X_0 \rightarrow S$  est quasi-projectif, donc séparé et de type fini, alors  $p$  est séparé et la démonstration du point (ii) du lemme 6.1 montre que  $p$  et  $Y \rightarrow S$  sont de présentation finie.

Pour montrer que  $p$  est propre, il reste donc à montrer qu'il est universellement fermé. Comme l'assertion est locale sur  $Y$ , on peut se placer sur un ouvert saturé  $W$  tel que le groupoïde  $W_*$  induit par  $X_*$  sur  $W$  possède une quasi-section  $U$  (puisque  $X_0$  est recouvert par de tels ouverts). Reprenant les notations de 6.a), on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & v & & u \\ & & \longleftarrow & & \longrightarrow \\ W & & & V & & U \\ & & p & & q \\ & & \searrow & & \swarrow \\ & & & Z & & \end{array},$$

où  $Z$  est un ouvert de  $Y$ , toutes les flèches sont surjectives, et  $q$  est entier. De plus, par hypothèse,  $d_0 : X_1 \rightarrow X_0$  est propre, donc  $u$ , qui en est déduit par changement de base, l'est aussi. Par conséquent,  $r$  est universellement fermé, et donc  $p$  aussi, puisque  $v$  est surjectif.

Enfin,  $p$  étant surjectif et universellement fermé, et  $X_0$  quasi-projectif donc séparé, la diagonale  $\Delta_{Y/S}(Y)$  est fermée dans  $Y \times_S Y$ , étant l'image par  $p \times p$  de la diagonale  $\Delta_{X_0/S}(X_0)$ . Donc  $Y$  est séparé sur  $S$ . Ceci achève la démonstration de 7.1 (ii).

Les assertions à prouver dans 7.1 (iv) sont locales en  $Y$ ; comme  $X_0$  est recouvert par les ouverts saturés  $U_z$ , il suffit de vérifier ces assertions en remplaçant  $X$  et  $Y$  par  $U_z$  et  $V = p(U_z)$ . Comme on l'a déjà vu au début de la démonstration de 7.1, il résulte des lemmes 1.1, 1.2, et 6.1 (i), que  $(V_z, p|_{U_z})$  est le conoyau dans **(Sch)** et dans **(Esp. An)** du groupoïde induit par  $X_*$  sur  $U_z$ . Or, l'hypothèse que  $d = (d_0, d_1)$  soit un

<sup>(42)</sup>N.D.E. : Les conditions sont suffisantes, par changement de base (cf. EGA II, 6.2.4 (iii) et EGA IV<sub>2</sub>, 2.1.4). Réciproquement, posons  $y = d'(x)$  et  $z = u(y) = d(v(x))$ , et supposons  $d'$  plat en  $x$  et  $u$  (donc aussi  $v$ ) plat. Alors  $\mathcal{O}_{v(x)} \rightarrow \mathcal{O}_x$  est fidèlement plat, ainsi que  $\mathcal{O}_z \rightarrow \mathcal{O}_y \rightarrow \mathcal{O}_x$ . Par conséquent,  $\mathcal{O}_z \rightarrow \mathcal{O}_{v(x)}$  est fidèlement plat (cf. EGA IV<sub>2</sub>, 2.2.11 (iv)). Enfin, supposons  $d$  localement de type fini et  $d'$  quasi-fini en  $x$ . Alors  $v(x)$  est isolé dans sa fibre  $d^{-1}(z)$ , puisque  $x$  l'est dans sa fibre  $d'^{-1}(y) = d^{-1}(z) \otimes_{\kappa(z)} \kappa(y)$ . Donc, d'après le théorème de semi-continuité de Chevalley, il existe un voisinage ouvert de  $v(x)$  dont tout point est isolé dans sa fibre (EGA IV<sub>3</sub>, 13.1.3 et 13.1.4), de sorte que  $d$  est quasi-fini en  $v(x)$ .

<sup>(43)</sup>N.D.E. : On a modifié la suite, en tirant profit des ajouts faits dans le lemme 6.1.

monomorphisme est préservée par le changement de base  $U_z \rightarrow X_0$ . Par conséquent, les deux premières assertions de 7.1 (iv) résultent de 6.1 (iv).

Montrons enfin les conséquences signalées à la fin du point (iv) (cf. [Ray67a], th. 1 (iii)). Par hypothèse, le groupoïde  $X_*$  provient d'une relation d'équivalence  $R \rightarrow X_0 \times X_0$ , et on a établi que  $R$  est *effective* (cf. Exp. IV, 3.3.2) et que  $p : X_0 \rightarrow Y = X_0/R$  est fidèlement plat et de présentation finie. Par conséquent, notant  $(M)$  la famille des morphismes fidèlement plats localement de présentation finie,  $R$  est  $(M)$ -effective. Donc, d'après Exp. IV, 6.3.3,  $(Y, p)$  représente le faisceau quotient de  $X_0$  par  $R$  pour la topologie (fppf), et les assertions relatives au changement de base découlent de IV, 3.4.3.1.

### 8. Passage au quotient par un groupoïde plat non nécessairement propre

**Théorème 8.1.** — <sup>(44)</sup> Soient  $S$  un schéma noethérien et

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{d'_2} & \\ X_2 & \xrightarrow{d'_1} & X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \\ & \xrightarrow{d'_0} & \xrightarrow{d_0} \end{array}$$

un  $(\mathbf{Sch}/S)$ -groupoïde tel que  $d_1$  soit plat et de type fini, que  $X_0$  soit de type fini sur  $S$  et que le morphisme  $X_1 \rightarrow X_0 \times_S X_0$  de composantes  $d_0$  et  $d_1$  soit quasi-fini. 282

Il existe alors un ouvert  $W$  de  $X_0$  dense, saturé et satisfaisant aux propriétés suivantes :

(i) Si  $W_2 \xrightarrow{w'_i} W_1 \xrightarrow{w_j} W$  est le groupoïde induit par  $X_*$  sur  $W$ ,  $(w_0, w_1)$  possède un conoyau  $(V, p)$  dans  $(\mathbf{Sch}/S)$ ; de plus,  $(V, p)$  est un conoyau de  $(w_0, w_1)$  dans la catégorie de tous les espaces annelés.

(ii)  $p$  est surjectif et ouvert.

(ii')  $p$  et  $V \rightarrow S$  sont de présentation finie.

(iii) Le morphisme  $W_1 \rightarrow W \times_V W$  de composantes  $w_0$  et  $w_1$  est surjectif.

(iv) Si  $(d_0, d_1)$  est un couple d'équivalence,  $W_1 \rightarrow W \times_V W$  est un isomorphisme et  $p$  est fidèlement plat.

<sup>(44)</sup>N.D.E. : Il existe un *plus grand* ouvert  $W$  de  $X_0$  satisfaisant les conclusions du théorème. En effet, soient  $W$  un ouvert comme dans le théorème et  $W^\sharp$  un ouvert dense et saturé contenu dans  $W$ . Puisque  $p$  est ouvert,  $V^\sharp = p(W^\sharp)$  est un ouvert de  $V$ , et  $W^\sharp = p^{-1}(V^\sharp)$ , puisque  $W^\sharp$  est saturé. D'après le lemme 1.1,  $V^\sharp$  est un conoyau pour le groupoïde induit sur  $W^\sharp$ . Ainsi on peut recoller suivant leur intersection  $W^\sharp$  deux ouverts  $W$  et  $W'$  vérifiant les conclusions du théorème, et les conditions (i), (ii), (iii), (iv), ainsi que le fait que  $p$  et  $V \rightarrow S$  soient localement de présentation finie, sont préservés. La conclusion (ii') découle, comme dans la démonstration de 6.1 (ii), de l'hypothèse que  $X_0$  soit de type fini sur  $S$  noethérien.

Par ailleurs, les lemmes 1.1 et 1.2 montrent aussi que la réunion de tous les ouverts saturés  $U$  de  $X_0$  tels que l'ouvert  $p(U)$  de  $Y$  soit un schéma et que  $p|_U : U \rightarrow p(U)$  soit un morphisme de schémas, est le plus grand ouvert saturé  $\Omega$  de  $X_0$  vérifiant la condition (i) de 8.1. Le théorème 8.1 montre que  $\Omega$  contient un ouvert  $W$  dense, mais il n'est pas immédiat que  $\Omega$  vérifie les propriétés (ii) à (iv).

À ce sujet, le lecteur pourra consulter [Ray67a], [Ray67b], et l'appendice I de [An73], qui donnent des résultats plus précis, et étudient la question de la représentabilité du  $S$ -faisceau quotient (fppf)  $\widetilde{X/R}$  (où l'on a noté  $R$  le groupoïde  $X_*$  de base  $X = X_0$ ), tout ceci sous des hypothèses plus faibles

Nous allons montrer qu'on peut choisir  $W$  de telle façon que le  $(\mathbf{Sch}/S)$ -groupeïde  $W_*$  induit par  $X_*$  possède une quasi-section (confer §7). Le théorème 8.1 résultera alors du lemme 6.1.

Admettons provisoirement que, pour tout point  $z \in X_0$  fermé relativement à  $S$  (confer §7), il existe un ouvert saturé  $W_z$ , qui possède une quasi-section et rencontre toutes les composantes irréductibles de  $X_0$  passant par  $z$ . Alors l'extérieur  $X_0 - \overline{W}_z$  de  $W_z$  dans  $X_0$  est saturé (car le saturé  $d_1(d_0^{-1}(X_0 - \overline{W}_z))$  de cet extérieur est ouvert et ne rencontre pas  $W_z$ ). Si cet extérieur n'est pas vide, on peut y choisir un point  $z'$  fermé relativement à  $S$  et associer à  $z'$  un ouvert  $W_{z'}$  comme ci-dessus ; on peut d'ailleurs supposer  $W_{z'}$  contenu dans  $X_0 - \overline{W}_z$  ; alors  $W_z$  et  $W_{z'}$  sont disjoints et le groupeïde induit par  $X_*$  sur  $W_z \cup W_{z'}$  possède une quasi-section. Le processus doit s'arrêter parce que  $X_0$  n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles. Il reste donc à construire  $W_z$ .

283 Pour cela il est loisible de supposer  $S$  affine ; dans ce cas, soient  $y$  un point de  $X_1$  tel que  $d_1(y) = z$ ,  $X$  un ouvert affine de  $X_0$  contenant  $d_0(y)$ ,  $Y$  l'image réciproque de  $X$  dans  $X_1$  par  $d_0$ , enfin  $u : Y \rightarrow X$  et  $v : Y \rightarrow X_0$  les morphismes induits par  $d_0$  et  $d_1$ . Comme  $X$  est affine, donc quasi-projectif, on peut appliquer le lemme 7.2 : il y a donc un sous-schéma  $F$  de  $X_0$  tel que  $d_0^{-1}(F) \cap d_1^{-1}(z)$  soit non vide, que  $d_0(d_0^{-1}(F) \cap d_1^{-1}(z))$  soit fini et que la restriction de  $d_1$  à  $d_0^{-1}(F)$  soit plate aux points de  $v^{-1}(z)$ . Ce fait nous permet de reprendre les notations du lemme 7.3 en désignant par  $F_1$  et  $F_2$  les images réciproques de  $F$  dans  $X_1$  et  $X_2$ , etc.

$$\begin{array}{ccccc}
 F_2 & \xrightarrow{\tilde{d}_1} & F_1 & \xrightarrow{\tilde{d}_0} & F \\
 \downarrow \tilde{d}'_2 & & \downarrow \tilde{d}'_1 & & \\
 X_1 & \xrightarrow{d_1} & X_0 & & . \\
 & \xrightarrow{d_0} & & & 
 \end{array}$$

On montre alors comme en 7.3 que  $\tilde{d}'_1$  est quasi-fini aux points de  $\tilde{d}'_1^{-1}(z)$  de sorte qu'il est naturel de considérer l'ouvert  $F'_1$  de  $F_1$  formé des points où  $\tilde{d}'_1$  est à la fois plat et quasi-fini. D'après 7.4, les deux images réciproques de  $F'_1$  par  $\tilde{d}'_1$  et  $\tilde{d}'_0$  sont formées des points de  $F_2$  où  $\tilde{d}'_2$  est plat et quasi-fini, de sorte que ces deux images

---

( $S$  un schéma arbitraire,  $X$  un schéma localement de type fini sur  $S$ , et  $R$  un  $S$ -groupeïde de base  $X$  tel que  $d_0$  (et donc  $d_1$ ) soit plat et de présentation finie). Citons en particulier les résultats suivants. Si  $\widetilde{X/R}$  est représentable par un  $S$ -schéma  $Y$ , alors  $Y$  est aussi le conoyau dans la catégorie  $(\mathbf{Esp. An})$ . La réciproque est en général fautive (cf. l'exemple 0.4 de [Mum65], Chap. 0, §3, cité dans [Ray67a], Rem. 1), mais est vraie si  $d = (d_0, d_1)$  est une immersion. Sous cette hypothèse, le morphisme  $p : \Omega \rightarrow Z := \Omega/R_\Omega$  est fidèlement plat et de présentation finie ; si de plus  $S$  est localement noethérien, alors un point  $x$  de codimension 1 dans  $X$  appartient à  $\Omega$  si et seulement si le graphe du groupeïde induit sur  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$  est fermé. Pour tout ceci, voir [Ray67a], Prop. 1, [Ray67b], Prop. 1 et Théorèmes 2, 1 et 4, et [An73], Théorèmes 5 et 6 pages 66–67, et Prop. 3.3.1 page 49. (Voir aussi, dans le cas d'une action d'un groupe algébrique sur un corps  $k$  algébriquement clos, l'article [DR81].)

réciproques coïncident et que  $F'_1$  est de la forme  $\tilde{d}_0^{-1}(F')$ , où  $F'$  est un ouvert de  $F$  (SGA 1, VIII 4.4). Quitte à remplacer  $F$  par  $F'$ , on peut donc supposer que  $\tilde{d}_1$  est quasi-fini et plat. Dans ce cas, nous désignons par  $W_z$  le plus grand ouvert de  $\tilde{d}_1(F_1)$  au-dessus duquel  $\tilde{d}_1$  est fini et plat.

Cet ouvert  $W_z$  ne contient pas nécessairement  $z$ , mais il contient les points génériques des composantes irréductibles de  $X_0$  passant par  $z$  <sup>(45)</sup>. Comme  $d_0$  (resp.  $d_1$ ) est fidèlement plat et de présentation finie (donc ouvert), il résulte alors de SGA 1, VIII 5.7, que  $d_0^{-1}(W_z)$  et  $d_1^{-1}(W_z)$  coïncident tous les deux avec le plus grand ouvert de  $\tilde{d}'_2(F_2)$  au-dessus duquel  $\tilde{d}'_2$  est fini et plat. On voit par conséquent comme en 7.3 que les deux images réciproques de  $\tilde{d}_1^{-1}(W_z)$  par  $\tilde{d}'_0$  et  $\tilde{d}'_1$  coïncident, donc que  $\tilde{d}_1^{-1}(W_z)$  est de la forme  $\tilde{d}_0^{-1}(U)$  où  $U$  est un ouvert de  $F$  qui est une quasi-section pour le groupoïde induit par  $X_*$  sur  $W_z$ .

**9. Élimination des hypothèses noethériennes dans le théorème 7.1**

284

**a)** Reprenons les notations et les hypothèses du lemme 6.1 et soit  $\pi : S' \rightarrow S$  un changement de base arbitraire. Désignons par  $f' : X' \rightarrow Y'$  le morphisme de  $S'$ -schémas déduit par l'extension  $\pi$  de la base d'un morphisme de  $S$ -schémas  $f : X \rightarrow Y$ . Avec cette convention,  $p' : X'_0 \rightarrow Y'$  est surjectif ainsi que le morphisme  $X'_1 \rightarrow X'_0 \times_{Y'} X'_0$  de composantes  $d'_0$  et  $d'_1$ . L'ensemble sous-jacent à  $Y'$  s'identifie donc au quotient de l'ensemble sous-jacent à  $X'_0$  par la relation d'équivalence définie dans  $X'_0$  par le  $S'$ -groupoïde  $X'_*$ . De plus,  $q' : U' \rightarrow Y'$  est entier surjectif de sorte que la topologie de  $Y'$  est la topologie quotient de celle de  $U'$ , donc aussi de celle de  $X'_0$  (confer la preuve du § 6.c).

D'un autre côté, il est clair que  $U'$  est une quasi-section du  $S'$ -groupoïde  $X'_*$  auquel on peut donc appliquer le lemme 6.1. En particulier,  $X'_*$  possède un conoyau  $(Y_1, p_1)$  et l'espace topologique sous-jacent à  $Y_1$  s'obtient à partir de l'espace topologique sous-jacent à  $X'_0$  en identifiant les points équivalents pour la relation définie par  $X'_*$ . Il s'ensuit que le morphisme canonique  $Y_1 \rightarrow Y'$  est un homéomorphisme ; je dis même que  $Y_1 \rightarrow Y'$  est un homéomorphisme universel : en effet, si  $S''$  est au-dessus de  $S'$ , soit  $Y_2$  le conoyau de  $(d_0 \times_S S'', d_1 \times_S S'')$ . D'après ce qui précède, appliqué aux changements de base  $S'' \rightarrow S'$  et  $S'' \rightarrow S$ ,

$$Y_2 \longrightarrow Y_1 \times_{S'} S'' \quad \text{et} \quad Y_2 \longrightarrow Y \times_S S'' \simeq Y' \times_{S'} S''$$

sont des homéomorphismes de sorte qu'il en va de même pour  $Y_1 \times_{S'} S'' \rightarrow Y' \times_{S'} S''$ .

**b)** Des remarques analogues s'appliquent évidemment au cas où le groupoïde  $X_*$  possède « localement » des quasi-sections (confer la démonstration du théorème 7.1).

<sup>(46)</sup> Par exemple, on a le théorème suivant :

285

<sup>(45)</sup>N.D.E. : En effet, soit  $\eta$  un tel point générique. Les hypothèses entraînent que  $\mathcal{O}_{X_0, \eta}$  est un anneau local artinien, et  $\mathcal{O}_{F_1, \eta}$  un  $\mathcal{O}_{X_0, \eta}$ -module de type fini. Donc, d'après SGA 1, VIII 6.5, il existe un voisinage ouvert de  $\eta$  au-dessus duquel  $\tilde{d}_1$  est fini.

<sup>(46)</sup>N.D.E. : On a détaillé la suite, pour mettre en évidence le théorème 9.0 ci-dessous.

**Théorème 9.0.** — Soient  $S$  un schéma arbitraire et  $X_2 \xrightarrow{d'_j} X_1 \xrightarrow{d_i} X_0$  un  $(\mathbf{Sch}/S)$ -groupeïde tel que  $d_i : X_0$  soit de présentation finie et quasi-projectif sur  $S$ ,  $d_1$  de présentation finie, propre et plat, le morphisme  $d_0 \boxtimes d_1 : X_1 \rightarrow X_0 \times_S X_0$  quasi-fini. Alors :

(1) Tout point  $x$  de  $X_0$  a un voisinage ouvert  $W$  qui est saturé et tel que le groupeïde induit par  $X_*$  dans  $W$  possède une quasi-section.

(2) Soit  $(Y, p)$  le conoyau de  $(d_0, d_1)$  dans la catégorie de tous les espaces annelés. Alors  $Y$  est un schéma,  $p$  un morphisme de schémas, et  $(Y, p)$  est un conoyau de  $(d_0, d_1)$  dans  $(\mathbf{Sch}/S)$ .

(3)  $p$  est surjectif, ouvert et universellement fermé.

(4) Le morphisme  $d : X_1 \rightarrow X_0 \times_Y X_0$  de composantes  $d_0$  et  $d_1$  est surjectif.

(5) Si  $(d_0, d_1)$  est un couple d'équivalence, alors :

(a)  $d : X_1 \rightarrow X_0 \times_Y X_0$  est un isomorphisme et  $p$  est fidèlement plat.

(b)  $p$  et  $Y \rightarrow S$  sont de présentation finie, et  $(Y, p)$  est un conoyau de  $(d_0, d_1)$  dans la catégorie des faisceaux pour la topologie (fppf).

*Démonstration.* Pour (1), la question est locale sur  $S$  de sorte qu'on peut supposer  $S = \text{Spec } B$  affine. Il existe alors un anneau  $A$  de type fini sur  $\mathbb{Z}$ , un morphisme  $S \rightarrow T = \text{Spec } A$  et un  $(\mathbf{Sch}/T)$ -groupeïde  $Z_*$  tel que  $X_*$  s'identifie à  $Z_* \times_T S$  (cf. EGA IV<sub>3</sub>, 8.8.3, appliqué à  $S_0 = \text{Spec } \mathbb{Z}$  et  $S_i = \text{Spec } A_i$ , les  $A_i$  parcourant les sous- $\mathbb{Z}$ -algèbres de type fini de  $B$ ). De plus, on peut supposer que  $Z_*$  vérifie les conditions du théorème 7.1 (cf. EGA IV<sub>3</sub>, 8.10.5). Par conséquent,  $Z_*$  possède « localement » des quasi-sections.

Il en est donc de même pour  $X_*$ , d'après a), et les assertions (2), (3), (4) et (5) (a) découlent de 6.1, comme dans la démonstration de 7.1.

c) Montrons que  $Y \rightarrow S$  est de présentation finie. <sup>(47)</sup> Par hypothèse,  $(d_0^{X_*}, d_1^{X_*})$  est un couple d'équivalence, c.-à-d.,  $d^{X_*} : X_1 \rightarrow X_0 \times_S X_0$  est un monomorphisme. D'après EGA IV<sub>3</sub>, 8.10.5, on peut supposer, quitte à agrandir  $A$ , que  $d^{Z_*} : Z_1 \rightarrow Z_0 \times_T Z_0$  est un monomorphisme. Comme  $T = \text{Spec } A$ , avec  $A$  noethérien, il résulte alors du théorème 7.1 que le groupeïde  $Z_*$  possède un conoyau  $(Q, q)$  dans  $(\mathbf{Sch}/T)$ , que  $q$  et  $Q \rightarrow T$  sont de présentation finie, et de plus que  $q : Z_0 \rightarrow Q$  est fidèlement plat et que  $d^{Z_*}$  induit un isomorphisme  $Z_1 \xrightarrow{\sim} Z_0 \times_Q Z_0$ . Posons  $Q_S = Q \times_T S$ .

Comme  $X_i \cong Z_i \times_T S$ , on obtient donc un isomorphisme :

$$d_*^Z \times_S : X_1 \xrightarrow{\sim} X_0 \times_{Q_S} X_0.$$

Notons  $\phi$  son inverse, et soit  $\pi$  le morphisme canonique

$$X_0 \times_Y X_0 \longrightarrow X_0 \times_{Q_S} X_0.$$

<sup>(47)</sup>N.D.E. : L'original énonce que ceci découle de la proposition 9.1 qui suit. Nous n'avons pas été en mesure de reconstruire cet argument. La démonstration qui suit nous a été indiquée par O. Gabber.



Alors  $\phi \circ \pi$  est l'inverse de  $d_0 \boxtimes d_1 : X_1 \xrightarrow{\sim} X_0 \times_Y X_0$ . Il en résulte que la relation d'équivalence définie par  $X_*$ , c.-à-d., le monomorphisme

$$X_1 \xrightarrow[\sim]{d_0 \boxtimes d_1} X_0 \times_Y X_0 \hookrightarrow X_0 \times_S X_0$$

s'identifie à la relation d'équivalence  $\mathcal{R}(q_S)$  définie par le morphisme  $q_S : X_0 \rightarrow Q_S$ . Comme ce dernier est fidèlement plat et de présentation finie, donc un épimorphisme effectif universel,  $\mathcal{R}(q_S)$  a pour quotient  $Q_S$  (cf. IV 3.3.2). Par suite,  $Y \cong Q \times_T S$ , donc  $Y \rightarrow S$  et  $p$  sont de présentation finie. De plus, d'après IV 6.3.3,  $(Y, p)$  est aussi un conoyau de  $(d_0, d_1)$  dans la catégorie des faisceaux pour la topologie (fppf).

**Proposition 9.1.** — *Considérons des morphismes de schémas*

$$X_0 \xrightarrow{p} Y \xrightarrow{q} S$$

tels que  $qp$  soit de type fini (resp. de présentation finie) et  $p$  fidèlement plat de présentation finie. Alors  $q$  est de type fini (resp. de présentation finie)<sup>(\*)</sup>.

Comme  $p$  est surjectif et  $qp$  quasi-compact,  $q$  est quasi-compact. Donc on peut supposer  $S, Y$  et  $X_0$  affines d'anneaux  $A, B, C$ . On a  $B = \varinjlim B_i$ , où les  $B_i$  parcourent les sous- $A$ -algèbres de type fini de  $B$ . Comme  $C$  est de présentation finie sur  $B$ , il existe un indice  $i_0$ , une  $B_{i_0}$ -algèbre de présentation finie  $C_{i_0}$  et un isomorphisme  $C \simeq C_{i_0} \otimes_{B_{i_0}} B$ ; si on pose  $C_i = C_{i_0} \otimes_{B_{i_0}} B_i$  pour  $i \geq i_0$ , on a donc  $C \simeq C_i \otimes_{B_i} B$ .

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & C \\ \uparrow & & \uparrow \\ B_i & \longrightarrow & C_i \\ \uparrow & & \\ A & & \end{array}$$

Comme  $C$  est fidèlement plat sur  $B$ , on tire de EGA IV<sub>3</sub>, 11.2.6 et 8.10.5 (vi) l'existence d'un  $i_1 \geq i_0$  tel que  $C_{i_1}$  soit fidèlement plat sur  $B_{i_1}$ ; par conséquent  $C_i$  est fidèlement plat sur  $B_i$  pour  $i \geq i_1$ . Pour  $i \geq i_1$ , l'application canonique  $C_i \rightarrow C$  est alors injective, car déduite de  $B_i \rightarrow B$  par extension fidèlement plate de la base.

286

Si  $C$  est de type fini sur  $A$ , il s'ensuit qu'il existe un indice  $j \geq i_1$  tel que  $C_j = C$  d'où  $B_j = B$ , puisque  $C_j$  est fidèlement plat sur  $B_j$ . Par conséquent,  $B$  est de type fini sur  $A$ .

Supposons maintenant  $C$  de présentation finie sur  $A$ . D'après ce qui précède,  $B$  est de type fini sur  $A$ , donc de la forme  $\overline{B}/I$  où  $\overline{B}$  est une algèbre de polynômes sur  $A$  à un nombre fini d'indéterminées, et  $I$  un idéal de  $\overline{B}$ . Alors  $I$  est réunion de ses sous-idéaux de type fini  $I_\alpha$ ; d'où l'égalité  $B = \varinjlim B_\alpha$  avec  $B_\alpha = \overline{B}/I_\alpha$ . Procédant comme plus haut, il existe un indice  $\alpha_0$ , une  $B_{\alpha_0}$ -algèbre de présentation finie  $C_{\alpha_0}$  et un isomorphisme  $C \simeq C_{\alpha_0} \otimes_{B_{\alpha_0}} B$ . Pour  $\alpha \geq \alpha_0$ , on pose encore  $C_\alpha = C_{\alpha_0} \otimes_{B_{\alpha_0}} B_\alpha$  de telle sorte qu'on a  $C \simeq C_\alpha \otimes_{B_\alpha} B$  pour  $\alpha \geq \alpha_0$ . Toujours d'après EGA IV<sub>3</sub>, 11.2.6

<sup>(\*)</sup>Cf. EGA IV<sub>4</sub>, 17.7.5 pour un résultat plus général.

et 8.10.5 (vi), on conclut comme plus haut que  $C_\alpha$  est fidèlement plat sur  $B_\alpha$  pour  $\alpha$  assez grand. Dans ce cas, le noyau de l'application  $C_\alpha \rightarrow C$  (resp.  $C_\alpha \rightarrow C_\beta$  pour  $\beta \geq \alpha$ ) s'identifie à  $C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (I/I_\alpha)$  (resp. à  $C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (I_\beta/I_\alpha)$ ).

Comme  $C_\alpha$  et  $C$  sont de présentation finie sur  $A$  et que  $C_\alpha \rightarrow C$  est surjectif,  $C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (I/I_\alpha)$  est un idéal de type fini <sup>(48)</sup> et est réunion des idéaux  $C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (I_\beta/I_\alpha)$ . On a donc  $C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (I_\beta/I_\alpha) = C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (I/I_\alpha)$  pour  $\beta$  assez grand, d'où aussi  $I_\beta = I$  (car  $C_\alpha$  est fidèlement plat sur  $B_\alpha$ ); donc  $B$  est de présentation finie sur  $A$ .

## 10. Complément : quotients par un schéma en groupes

Les §§10.2–10.4 ci-dessous, rédigés suivant des indications de M. Raynaud, ont pour but d'appliquer les théorèmes précédents au cas d'une action d'un schéma en groupes. Pour la commodité du lecteur, on a commencé par reproduire, dans le §10.1, les énoncés 2.1 à 2.3 de l'Exp. XVI.

**10.1. Théorèmes de représentabilité des quotients.** — « Rappelons » d'abord le résultat suivant :

**Théorème 10.1.1.** — *Soient  $S$  un schéma,  $X$  et  $Y$  deux  $S$ -schémas,  $f : X \rightarrow Y$  un  $S$ -morphisme. On suppose que l'on se trouve dans l'un des deux cas suivants :*

- α) Le morphisme  $f$  est localement de présentation finie.*
- β) Le schéma  $S$  est localement noethérien et  $X$  est localement de type fini sur  $S$ .*

*Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) Il existe un  $S$ -schéma  $X'$  et une factorisation de  $f$  :*

$$f : X \xrightarrow{f'} X' \xrightarrow{f''} Y,$$

*où  $f'$  est un  $S$ -morphisme fidèlement plat et localement de présentation finie et  $f''$  est un monomorphisme.*

- (ii) La (première) projection :*

$$p_1 : X \times_Y X \longrightarrow X$$

*est un morphisme plat.*

*De plus, si les conditions précédentes sont réalisées,  $(X', f')$  est un quotient de  $X$  par la relation d'équivalence définie par  $f$  (pour la topologie (fppf)), de sorte que la factorisation  $f = f'' \circ f'$  de i) est unique à isomorphisme près.*

Le cas  $Y$  localement noethérien,  $X$  de type fini sur  $Y$ , est traité dans [Mur65], cor. 2 du th. 2. Nous allons voir que l'on peut se ramener à ce cas.

Faisons d'abord quelques remarques :

<sup>(48)</sup>N.D.E. : cf. EGA IV<sub>1</sub>, 1.4.4.

a) L'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii) est triviale. En effet, la première projection :

$$p'_1 : X \times_{X'} X \longrightarrow X$$

se factorise à travers  $X \times_Y X$  :

$$p'_1 : X \times_{X'} X \xrightarrow{u} X \times_Y X \xrightarrow{p_1} X$$

Le morphisme  $u$  est un isomorphisme, puisque  $f''$  est un monomorphisme, et  $p'_1$  est plat, puisque  $f'$  est plat, donc  $p_1$  est plat.

b) Les assertions de 10.1.1 sont locales sur  $Y$  (donc sont locales sur  $S$ ); elles sont aussi locales sur  $X$ , comme il résulte facilement du fait qu'un morphisme plat et localement de présentation finie est ouvert (EGA IV<sub>3</sub>, 11.3.1).

c) Sous les hypothèses de 10.1.1  $\alpha$ ), vu ce qui précède, nous sommes ramenés au cas où  $X$  et  $Y$  sont affines et  $f$  de présentation finie. Quitte à remplacer  $S$  par  $Y$ , on peut supposer  $X$  et  $Y$  de présentation finie sur  $S$ . On se ramène alors au cas  $S$  noethérien grâce à EGA IV<sub>3</sub>, 11.2.6.

d) Sous les hypothèses de 10.1.1  $\beta$ ), on peut supposer  $S, X, Y$  affines,  $S$  noethérien et  $X$  de type fini sur  $S$ . Considérons  $Y$  comme limite projective filtrante de schémas affines  $Y_i$  de type fini sur  $S$ . Les schémas  $X \times_{Y_i} X$  forment une famille filtrante décroissante de sous-schémas fermés de  $X \times_S X$ , dont la limite projective est  $X \times_Y X$ . Comme  $X \times_S X$  est noethérien, on a  $X \times_{Y_i} X = X \times_Y X$  pour  $i$  assez grand, de sorte que  $f_i : X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Y_i$  satisfait aux hypothèses de 10.1.1 ii) s'il en est ainsi de  $f$ . Comme la relation d'équivalence définie par  $f$  sur  $X$  coïncide avec celle définie par  $f_i$ , il est clair qu'il suffit de prouver ii)  $\Rightarrow$  i) pour  $f_i$ , ce qui nous ramène au cas où  $Y$  est de type fini sur  $S$ .

*Application aux schémas en groupes.* Soient  $S$  un schéma,  $G$  un  $S$ -schéma en groupes localement de présentation finie sur  $S$ , qui opère (à gauche) sur un  $S$ -schéma  $X$ . Si  $X \rightarrow S$  possède une section  $\xi$ , on rappelle que le stabilisateur  $\underline{\text{Stab}}_G(\xi)$  est représentable par un sous-schéma en groupes de  $G$  (cf. I, 2.3.3).

**Théorème 10.1.2.** — Soient  $S$  un schéma,  $G$  un  $S$ -schéma en groupes localement de présentation finie sur  $S$ , qui opère sur un  $S$ -schéma  $X$ .

On suppose que  $X \rightarrow S$  possède une section  $\xi$ , telle que le stabilisateur  $H$  de  $\xi$  dans  $G$  soit plat sur  $S$ . Si l'une des hypothèses ci-dessous est vérifiée :

- a)  $X$  est localement de type fini sur  $S$ ,
- b)  $S$  est localement noethérien,

alors le faisceau (fppf) quotient  $G/H$  est représentable par un  $S$ -schéma, localement de présentation finie sur  $S$ , et le  $S$ -morphisme :

$$f : G \longrightarrow X, \quad g \mapsto g \cdot \xi$$

se factorise en :

$$\begin{array}{ccc} G & & \\ \downarrow p & \searrow f & \\ G/H & \xrightarrow{i} & X, \end{array}$$

où  $p$  est la projection canonique, qui est un morphisme fidèlement plat localement de présentation finie, et  $i$  est un monomorphisme.

*Démonstration.* Le morphisme  $f$  fait de  $G$  un  $X$ -schéma. Par définition du stabilisateur de  $\xi$ , le morphisme :

$$G \times_S H \longrightarrow G \times_X G, \quad (g, h) \mapsto (g, gh)$$

est un isomorphisme. Comme  $H$  est plat sur  $S$ ,  $G \times_S H$  est plat sur  $G$ , donc la première projection  $p_1 : G \times_S G \rightarrow G$  est un morphisme plat. Par ailleurs, si  $X$  est localement de type fini sur  $S$ ,  $f$  est localement de présentation finie (EGA IV<sub>1</sub>, 1.4.3 (v)) et sinon,  $S$  est supposé localement noethérien. Il suffit alors d'appliquer 10.1.1 au morphisme  $f$ . Il reste à voir que  $G/H$  est localement de présentation finie sur  $S$ , mais cela résulte immédiatement de 9.1.

**Corollaire 10.1.3.** — Soient  $S$  un schéma,  $u : G \rightarrow H$  un morphisme de  $S$ -schémas en groupes. On suppose  $G$  localement de présentation finie sur  $S$  et que, ou bien  $H$  est localement de type fini sur  $S$ , ou bien  $S$  est localement noethérien.

Alors, si  $K = \text{Ker}(u)$  est plat sur  $S$ , le groupe quotient  $G/K$  est représentable par un  $S$ -schéma en groupes localement de présentation finie sur  $S$ , et  $u$  se factorise en :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{u} & H \\ & \searrow p & \nearrow i \\ & G/K & \end{array}$$

où  $p$  est la projection canonique et  $i$  un monomorphisme.

*Démonstration :* on applique 10.1.2 en prenant  $X = H$  et pour  $\xi$  la section unité de  $H$ .

**10.2. Stabilisateur de la diagonale.** — Soient  $S$  un schéma noethérien,  $X$  un  $S$ -schéma de type fini, et  $G$  un  $S$ -schéma en groupes plat et de type fini, agissant à gauche sur  $X$ , i.e. on a une  $S$ -action  $d_0 : G \times_S X \rightarrow X$ . Notons  $d_1 : G \times_S X \rightarrow X$  la projection sur le second facteur. Suivant le § 2.a), on dispose du groupoïde

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\text{Pf}_{2,3}} & \\ G \times_S G \times_S X & \xrightarrow{\mu \times X} & G \times_S X \xrightarrow{d_1} X \\ & \xrightarrow{G \times d_0} & \xrightarrow{d_0} \end{array}$$

dont on rappelle que le conoyau, s'il existe, est noté  $G \backslash X$ .

**Définition 10.2.1.** — On désigne par  $F \subset G \times_S X$  le *stabilisateur de la section diagonale*, i.e. le  $X$ -schéma défini par le produit cartésien

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \Delta \\ G \times_S X & \xrightarrow{(d_0, d_1)} & X \times_S X \end{array} .$$

Alors  $F$  est un sous- $X$ -schéma en groupes de  $G \times_S X$ . Comme  $G \times_S X$  est de type fini sur  $S$  noethérien, donc noethérien,  $F$  est de type fini sur  $S$  et sur  $X$  (EGA I, 6.3.5 et 6.3.6). En outre, si  $X \rightarrow S$  est *séparé*,  $F$  est un sous- $X$ -schéma en groupes *fermé* de  $G \times_S X$ .

On rappelle que l'on dit que  $G$  *opère librement* sur  $X$  si le morphisme

$$G \times_S X \xrightarrow{(d_0, d_1)} X \times_S X$$

est un monomorphisme (cf. Exp. III, 3.2.1). Il revient au même de dire que  $F$  est le schéma en groupes trivial de base  $X$ .

**10.3. Cas où  $F$  est quasi-fini sur  $X$ .** — Comme  $F$  est de type fini sur  $X$ , il est quasi-fini sur  $X$  si et seulement si les fixateurs des points géométriques de  $X$  sont finis.

**Théorème 10.3.1.** — <sup>(49)</sup> *Sous les hypothèses de 10.2, on suppose que  $F$  est quasi-fini sur  $X$ . Alors il existe un ouvert  $U$  de  $X$ , dense et  $G$ -saturé, qui vérifie les propriétés suivantes :*

- (i) *Dans  $(\mathbf{Sch}/_S)$ , le conoyau  $V = G \backslash U$  existe ; de plus, le schéma  $V$  est un quotient dans la catégorie des espaces annelés.*
- (ii)  *$p : U \rightarrow V$  est surjectif, ouvert, et de présentation finie.*
- (iii)  *$V$  est de présentation finie sur  $S$ .*
- (iv) *Le morphisme  $G \times_S U \rightarrow U \times_V U, (g, x) \mapsto (gx, x)$ , est surjectif.*
- (v) *Supposons de plus que  $G$  opère librement sur  $X$ . Alors  $U \rightarrow V$  est un  $G$ -torseur (à gauche) localement trivial pour la topologie (fppf). En particulier,  $U \rightarrow V$  est fidèlement plat.* <sup>(50)</sup>

*Démonstration.* On a supposé que le morphisme  $G \times_S X \rightarrow X \times_S X, (g, x) \mapsto (gx, x)$ , est quasi-fini. Le théorème 8.1 s'applique donc au groupoïde défini par  $(X, G)$ . Ainsi il existe un ouvert dense saturé  $U \subset X$  tel que le quotient  $G \backslash U$  existe ; il satisfait les propriétés (i), (ii), (iii).

<sup>(49)</sup>N.D.E. : Ici aussi, il existe un plus grand ouvert  $U$  de  $X$  satisfaisant les conclusions du théorème, cf. la N.D.E. (44).

<sup>(50)</sup>N.D.E. : Si l'on suppose de plus que  $G$  est un  $S$ -schéma en groupes réductifs et que l'action (libre) de  $G$  sur  $X$  est linéarisable, on sait alors que  $G \backslash X$  est représentable et que  $X \rightarrow G \backslash X$  est un  $G$ -torseur (à gauche). Ceci découle de résultats de Raynaud et Seshadri et se trouve dans l'article [CTS79] (proposition 6.11).

Pour établir (iv), on se souvient que  $G$  opère librement sur  $X$  si et seulement si  $(d_0, d_1)$  est un couple d'équivalence (III 3.2.1). Dans ce cas, le théorème 8.1 (iv) montre que le morphisme  $G \times_S U \rightarrow U \times_V U$  est un isomorphisme et que  $p$  est fidèlement plat et de présentation finie. Ainsi,  $U$  est un  $G$ -torseur de base  $V$ , localement trivial pour la topologie (fppf).

**10.4. Cas où  $F$  plat sur  $X$ .** — On note

$$d = (d_0, d_1) : G \times_S X \longrightarrow X \times_S X$$

le morphisme  $d(g, x) = (gx, x)$ . Rappelons que le graphe faisceautique  $\tilde{\Gamma}$  de la relation d'équivalence associée à  $(X, G)$  est le sous- $S$ -faisceau (fppf) de  $X \times_S X$  image de  $(d_0, d_1)$ . C'est le faisceau (fppf) associé au foncteur graphe :

$$T \mapsto \Gamma(T) = \{(x_0, x_1) \in X(T) \times X(T) \mid x_0 \in G(T)x_1\}.$$

Posons  $G_X = G \times_S X$ . Pour tout  $S$ -schéma  $T$ , on a une application surjective

$$G_X(T) \longrightarrow \Gamma(T), \quad (g, x) \mapsto (gx, x),$$

qui induit une application bijective

$$\phi(T) : G_X(T)/F(T) \xrightarrow{\sim} \Gamma(T);$$

en effet, si  $(g, x), (g', x') \in G_X(T)$  vérifient  $(gx, x) = (g'x', x')$ , alors  $x' = x$  et  $g^{-1}g'x = x$ , donc  $(g^{-1}g'x, x) \in F(T)$  et  $(g, x)$  et  $(g', x)$  ont même image dans  $G_X(T)/F_X(T)$ .

Par définition (cf. IV, 4.4.1 (ii) ou preuve de 5.2.1), le *faisceau-quotient*  $G_X/F$  est le faisceau (fppf) associé au préfaisceau

$$T \longmapsto G_X(T)/F(T) \cong \Gamma(T).$$

On a donc un isomorphisme de faisceaux  $\phi : G_X/F \rightarrow \tilde{\Gamma}$ .

**Théorème 10.4.1.** — <sup>(51)</sup> *Sous les hypothèses de 10.2, on a :*

- a)  $\tilde{\Gamma}$  est représentable si et seulement si  $F$  est plat sur  $X$ .
- b) On suppose que  $F$  est plat sur  $X$ . Alors les morphismes induits par  $d_1$  et  $d_0$  :

$$G_X/F \begin{array}{c} \xrightarrow{\bar{d}_1} \\ \xrightarrow{\bar{d}_0} \end{array} X$$

sont fidèlement plats et de présentation finie.

<sup>(51)</sup>N.D.E. : C'est le point (2) du théorème 3 de [Ray67b]. Dans cette Note est esquissée une autre démonstration du th. 10.1.1.

*Démonstration de a)* : Supposons le faisceau (fppf)  $G_X/F$  représentable par un  $X$ -schéma  $Y$ . Alors, d'après IV 6.3.3,  $p : G_X \rightarrow Y$  est fidèlement plat et localement de présentation finie, et le second carré du diagramme ci-dessous est cartésien :

$$\begin{array}{ccccc}
 F & \longrightarrow & F \times_X G_X & \longrightarrow & G_X \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p \\
 X & \xrightarrow{e_X} & G_X & \longrightarrow & Y
 \end{array}
 ,$$

le premier carré étant obtenu par changement de base par la section unité  $e_X : X \rightarrow G_X$ . Comme  $p$  est fidèlement plat et localement de présentation finie, il en est de même de  $F \rightarrow X$ .

Réciproquement, supposons  $F$  plat sur  $X$ . Posons  $X^2 = X \times_S X$ . Le morphisme  $d : G_X \rightarrow X^2$  permet de former le produit fibré :

$$\begin{array}{ccc}
 G_X \times_{X^2} G_X & \longrightarrow & G_X \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 G_X & \longrightarrow & X^2
 \end{array}
 .$$

Alors le morphisme  $G_X \times_{X^2} G_X \rightarrow X^2$  est un  $F \times_X X^2$ -torseur sur  $X^2$ , et est donc plat et de type fini (car  $F$  l'est). D'après le théorème 10.1.1, le morphisme  $d$  se factorise de façon unique :

$$G_X \xrightarrow{\psi} Y \xrightarrow{\tau} X \times_S X,$$

où  $\psi$  est fidèlement plat (de type fini) et  $\tau$  est un monomorphisme de schémas.

Par suite, le morphisme de faisceaux  $\psi : G_X \rightarrow Y$  est donc  $F$ -invariant et il vient un morphisme de faisceaux  $\bar{\psi} : G_X/F \rightarrow Y$ . Par ailleurs, vu que  $\psi$  est fidèlement plat (de type fini), le monomorphisme de faisceaux  $\tau$  se factorise par le faisceau image de  $d$ , c'est-à-dire  $\tilde{\Gamma}$ . L'isomorphisme de faisceaux  $G_X/F \cong \tilde{\Gamma}$  se factorise donc par le monomorphisme  $Y \rightarrow \tilde{\Gamma}$ . On conclut que  $Y$  représente  $G_X/F$ .

*Démonstration de b)* : On suppose  $F$  plat sur  $X$ . Alors, d'après a) et sa preuve,  $G_X/F$  est représentable, et le morphisme  $p : G_X \rightarrow G_X/F$  est fidèlement plat et de présentation finie. D'autre part, les morphismes  $d_i : G_X \rightarrow X$  ( $i = 0, 1$ ) sont fidèlement plats et de présentation finie par hypothèse. Comme  $d_i = \bar{d}_i \circ p$ , il résulte de EGA IV<sub>2</sub>, 2.2.13 (iii) et EGA IV<sub>3</sub>, 11.3.16, que  $\bar{d}_i$  est fidèlement plat et de présentation finie.

**Théorème 10.4.2.** — <sup>(52)</sup> *Sous les hypothèses de 10.2, supposons  $F$  plat sur  $X$ . Alors il existe un ouvert dense saturé  $U$  de  $X$  tel que le quotient (fppf)  $V = G \setminus U$  soit un  $S$ -schéma de type fini et que  $U \rightarrow V$  soit fidèlement plat et de présentation finie.*

<sup>(52)</sup>N.D.E. : Ici aussi, il existe un plus grand ouvert  $U$  de  $X$  satisfaisant les conclusions du théorème ; en outre, un point  $x \in X$  de codimension 1 dans  $X$  appartient à  $U$  si et seulement si le morphisme  $(G_X/F) \times_X \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \times_S \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$  est une immersion fermée, cf. la N.D.E. (44).

*Démonstration.* Le théorème 10.4.1 montre que  $G_X/F \cong \tilde{\Gamma}$  est représentable. Alors le faisceau (fppf)  $G \setminus X$  s'identifie au faisceau quotient de

$$G_X/F \begin{array}{c} \xrightarrow{\bar{d}_1} \\ \xrightarrow{\bar{d}_0} \end{array} X.$$

D'après ce qui précède,  $\bar{d}_i : G_X/F \rightarrow X$  est fidèlement plat et de présentation finie ( $i = 0, 1$ ), et le morphisme

$$G_X/F \xrightarrow{\sim} \tilde{\Gamma} \hookrightarrow X \times_S X$$

est un monomorphisme, c.-à-d.,  $(\bar{d}_0, \bar{d}_1)$  est un couple d'équivalence. Par conséquent, le théorème 8.1 s'applique. Il existe donc un ouvert  $U$  de  $X$ , dense et saturé, tel que le quotient (fppf)  $V = G \setminus U$  soit un  $S$ -schéma de type fini, et que  $U \rightarrow V$  soit fidèlement plat et de présentation finie.

Compte tenu du théorème de platitude générique (EGA IV<sub>2</sub>, 6.9.3), on obtient le

**Corollaire 10.4.3.** — *Sous les hypothèses de 10.2, supposons  $X$  réduit. Alors il existe un ouvert dense saturé  $U$  de  $X$  tel que le quotient (fppf)  $G \setminus U$  soit un  $S$ -schéma de type fini et que  $U \rightarrow G \setminus U$  soit fidèlement plat et de présentation finie.*

## Bibliographie

(53)

- [AK80] A. B. Altman, S. L. Kleiman, *Compactifying the Picard Scheme*, Adv. Math. **35** (1980), 50-112.
- [An73] S. Anantharaman, *Schémas en groupes, espaces homogènes et espaces algébriques sur une base de dimension 1*, Mém. Soc. Math. France **33** (1973), 5-79.
- [BLR90] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud, *Néron models*, Springer-Verlag, 1990.
- [CTS79] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, *Fibrés quadratiques et composantes connexes réelles*, Math. Ann. **244** (1979), 105-134.
- [DG70] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Masson & North-Holland, 1970.
- [DR81] J. Dixmier, M. Raynaud, *Sur le quotient d'une variété algébrique par un groupe algébrique*, pp. 327-344 in : *Mathematical Analysis and Applications* (L. Schwartz 65th birthday, éd. L. Nachbin), Adv. Math. Suppl. Stud., Vol. 7A, 1981.
- [Fe03] D. Ferrand, *Conducteur, descente et pincement*, Bull. Soc. Math. France **131** (2003), n°4, 553-585.
- [Hi62] H. Hironaka, *An example of a non-Kählerian complex analytic deformation of Kählerian complex structures*, Ann. of Math. **75** (1962), n°1, 190-208.

<sup>(53)</sup>N.D.E. : références additionnelles citées dans cet Exposé



- [KM97] S. Keel, S. Mori, *Quotient by groupoids*, Ann. of Math. **145** (1997), n°1, 193-213.
- [Ko97] J. Kollár, *Quotient spaces modulo algebraic groups*, Ann. of Math. **145** (1997), n°1, 33-79.
- [Ko08] J. Kollár, *Quotients by finite equivalence relations*, arXiv : 0812.3608.
- [Mum65] D. Mumford, *Geometric invariant theory*, Springer-Verlag, 1965; 2ème (resp. 3ème) éd. avec J. Fogarty (resp. et F. Kirwan), 1982 (resp. 1994).
- [Mur65] J. P. Murre, *Representation of unramified functors. Applications (according to unpublished results of A. Grothendieck)*, Sémin. Bourbaki, Vol. 9, Exp. **294** (1965), Soc. Math. France, 1995.
- [Ray67a] M. Raynaud, *Passage au quotient par une relation d'équivalence plate*, pp. 78-85 in : Proc. Conf. Local Fields (Driebergen) (éd. T. A. Springer), Springer-Verlag, 1967.
- [Ray67b] M. Raynaud, *Sur le passage au quotient par un groupoïde plat*, C. R. Acad. Sci. Paris (Sér. A) **265** (1967), 384-387.

