EXPOSÉ $\mathrm{VI_B}$

GÉNÉRALITÉS SUR LES SCHÉMAS EN GROUPES

par J.-E. Bertin

[0] Cet exposé, qui ne correspond à aucun exposé oral du séminaire, est destiné à **319**
regrouper un certain nombre de résultats techniques couramment utilisés concernant les schémas en groupes. [*]

1. Morphismes de groupes localement de type fini sur un corps

1.1. — Soient A un anneau local artinien, G et H deux A-groupes [2] et $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ un morphisme de A-groupes. Alors u induit un morphisme de groupes $u(\mathrm{A}) : \mathrm{G}(\mathrm{A}) \to \mathrm{H}(\mathrm{A})$. [3] Comme H(A) opère sur H par translation à droite, $u(\mathrm{A})$ définit par restriction une opération de G(A) sur H. Cette opération est compatible avec le morphisme u et l'opération de G(A) sur G définie par translation à droite. Comme G(A) opère transitivement sur les points strictement rationnels de G (voir $\mathrm{VI_A}$ 0.4 pour la définition), on voit que ces points « se comportent tous de la même manière à l'égard de u » ; de là sourdent les propriétés suivantes :

Proposition 1.2. — *Soit* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme* quasi-compact *entre* A*-groupes* localement de type fini *sur* A. *Alors l'ensemble* $u(\mathrm{G})$ *est* fermé *dans* H *et on a* $\dim \mathrm{G} = \dim u(\mathrm{G}) + \dim \operatorname{Ker} u$. [4]

Comme u commute avec les morphismes d'inversion de G et H, l'image $u(\mathrm{G})$ est **320**
invariante par le morphisme d'inversion de H ; il en est donc de même de $\overline{u(\mathrm{G})}$, son adhérence dans H. Soit d'autre part L l'ensemble des points de $\mathrm{H} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{H}$ dont les

[*] Cet exposé a été assez sérieusement remanié depuis son édition multigraphiée, notamment les §§ 10 et 11 ont été entièrement rerédigés. [1]

[0] N.D.E. : Version du 13/10/2024
[1] N.D.E. : et aussi le § 5, cf. les N.D.E. (34) et (46).
[2] N.D.E. : Rappelons la convention adoptée au début de $\mathrm{VI_A}$: un A-groupe est un A-*schéma en groupes* (et un tel schéma est *séparé*, cf. $\mathrm{VI_A}$, 0.3).
[3] N.D.E. : On a remplacé « homomorphisme » par « morphisme ».
[4] N.D.E. : Cet énoncé figure aussi en $\mathrm{VI_A}$, 2.5.2.

deux projections appartiennent à $u(\mathrm{G})$; il est clair que L est l'image du morphisme $u\times_{\mathrm{A}} u : \mathrm{G}\times_{\mathrm{A}}\mathrm{G} \to \mathrm{H}\times_{\mathrm{A}}\mathrm{H}$; donc le morphisme de multiplication de H envoie L dans $u(\mathrm{G})$, autrement dit $u(\mathrm{G})\cdot u(\mathrm{G}) = u(\mathrm{G})$. D'autre part le lemme 1.2.1 ci-dessous montre que $\overline{\mathrm{L}}$, adhérence de L dans $\mathrm{H}\times_{\mathrm{A}}\mathrm{H}$, est l'ensemble des points de $\mathrm{H}\times_{\mathrm{A}}\mathrm{H}$ dont les deux projections appartiennent à $\overline{u(\mathrm{G})}$; donc $\overline{u(\mathrm{G})}\cdot\overline{u(\mathrm{G})} = \overline{u(\mathrm{G})}$ de sorte que le sous-schéma réduit de H qui a pour espace sous-jacent $\overline{u(\mathrm{G})}$ est muni naturellement d'une structure de groupe dans la catégorie $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\text{réd}}$, où k est le corps résiduel de A (cf. $\mathrm{VI_A}$ 0.2).

Montrons la première assertion de 1.2 : quitte à remplacer A par la clôture algébrique de son corps résiduel k, nous pouvons supposer que A est un corps k algébriquement clos (cf. EGA IV_2, 2.3.12). Quitte à remplacer u par $u_{\text{réd}} : \mathrm{G}_{\text{réd}} \to \mathrm{H}_{\text{réd}}$, on peut supposer G et H réduits ; dans ce cas, ainsi que nous venons de le voir, $\overline{u(\mathrm{G})}$ est l'espace sous-jacent à un sous-schéma en groupes réduit de G ; nous pouvons donc supposer u dominant. Alors $\mathrm{G}(k)$ opère transitivement dans l'ensemble des composantes connexes de H et il suffit de montrer que $u(\mathrm{G})\cap\mathrm{H}^0$ est fermé : on est ramené au cas où H est connexe, donc irréductible et de type fini ($\mathrm{VI_A}$ 2.4). Alors u est de type fini puisque quasi-compact et localement de type fini ; comme H est noethérien, $u(\mathrm{G})$ est constructible (EGA IV_1, 1.8.5), donc contient un ouvert V de H (EGA 0_{III}, 9.2.2), et alors, d'après $\mathrm{VI_A}$ 0.5, on a $\mathrm{H} = \mathrm{V}\cdot\mathrm{V} \subset u(\mathrm{G})\cdot u(\mathrm{G}) = u(\mathrm{G})$.

Montrons la seconde assertion. Rappelons tout d'abord que le foncteur $\operatorname{Ker} u$ (cf. I,
321 2.3.6.1) est représentable par $u^{-1}(e)$, où e désigne l'élément neutre de H. Lorsque u est localement de type fini, $\operatorname{Ker} u$ est donc localement de type fini sur A. On se ramène comme précédemment, grâce cette fois-ci à EGA IV_2, 4.1.4, au cas où A est un corps algébriquement clos k. On peut de plus supposer G et H irréductibles et de type fini et u dominant : en effet, k étant algébriquement clos, il est clair que les composantes connexes de G, sur l'ensemble desquelles $\mathrm{G}(k)$ opère transitivement, ont toutes même dimension, et que si u^0 est la restriction de u à G^0, alors $(\operatorname{Ker} u)^0 \subset \operatorname{Ker} u^0$, et $\dim\operatorname{Ker} u^0 = \dim\operatorname{Ker} u$. On voit de même qu'alors u est de type fini sur k. Si η désigne le point générique de H, on a $\dim u^{-1}(\eta) = \dim\mathrm{G} - \dim\mathrm{H}$ (EGA IV_3, 10.6.1 (ii)). D'après EGA IV_3, 9.2.3 et 9.2.6, l'ensemble des $y \in \mathrm{H}$ tels que $\dim u^{-1}(y) = \dim u^{-1}(\eta)$ contient un ouvert non vide V. Puisque u est dominant, $\mathrm{U} = u^{-1}(\mathrm{V})$ est alors un ouvert non vide de G, et contient un point fermé x de G, puisque G est un schéma de Jacobson (EGA IV_3, 10.4.7). Alors la translation à droite r_x est un isomorphisme de $\operatorname{Ker} u$ sur $u^{-1}(u(x))$, si bien que :

$$\dim\operatorname{Ker} u = \dim u^{-1}(u(x)) = \dim u^{-1}(\eta) = \dim\mathrm{G} - \dim\mathrm{H}.$$

Lemme 1.2.1. — *Soient* $f : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ *et* $g : \mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}$ *deux morphismes* quasi-compacts et dominants *de schémas sur un anneau local artinien* A *; alors* $f\times_{\mathrm{A}} g : \mathrm{X}'\times_{\mathrm{A}}\mathrm{Y}' \to \mathrm{X}\times_{\mathrm{A}}\mathrm{Y}$ *est* dominant (*et* quasi-compact).

En effet, on a $f\times_{\mathrm{A}} g = (\mathrm{id}_{\mathrm{X}}\times_{\mathrm{A}} g)\circ(f\times_{\mathrm{A}}\mathrm{id}_{\mathrm{Y}'})$. Il suffit donc de montrer que $f\times_{\mathrm{A}}\mathrm{id}_{\mathrm{Y}'}$ et $\mathrm{id}_{\mathrm{X}}\times_{\mathrm{A}} g$ sont dominants. On peut pour cela remplacer A par son corps résiduel k. Dans ce cas, X et Y' sont plats sur $\mathrm{A} = k$, et comme $f\times_{\mathrm{A}}\mathrm{id}_{\mathrm{Y}'}$ (resp. $\mathrm{id}_{\mathrm{X}}\times_{\mathrm{A}} g$) est déduit de f (resp. g) par le changement de base plat $\mathrm{Y}' \to \mathrm{A}$ (resp. $\mathrm{X} \to \mathrm{A}$), il est dominant (et quasi-compact), d'après EGA IV_2, 2.3.7.

Contre-exemple 1.2.2. — Soient k un corps de caractéristique 0, G le k-groupe constant $\mathbb{Z}$ et H le k-groupe additif $\mathbb{G}_{a,k}$. Soit $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ un morphisme de k-groupes. Si $u \neq 0$, $u(\mathrm{G})$ n'est pas fermé dans H. 322

Proposition 1.3. — [(5)] *Soient* A *un anneau local artinien,* k *son corps résiduel,* G *un* A*-groupe* localement de type fini et plat*,* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de* A*-groupes. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *u est* plat (*resp.* quasi-fini*, resp.* non ramifié*, resp.* lisse*, resp.* étale) *en un point de* G. [(6)]

(ii) *u est* plat (*resp.* quasi-fini*, resp.* non ramifié*, resp.* lisse*,* étale)*.*

Démonstration. Il suffit de montrer que (i) entraîne (ii). D'abord, on a le lemme suivant :

Lemme 1.3.0. — *Soient* $\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{C}$ *des morphismes d'anneaux commutatifs et* $\mathfrak{n}$ *un idéal* nilpotent *de* A*. On suppose que* $\mathrm{C}/\mathfrak{n}\mathrm{C}$ *est une* $(\mathrm{B}/\mathfrak{n}\mathrm{B})$*-algèbre* de type fini.

(i) *Alors* C *est une* B*-algèbre* de type fini.

(ii) *De plus, si* C *est* plat *sur* A *et si* $\mathrm{C}/\mathfrak{n}\mathrm{C}$ *est une* $(\mathrm{B}/\mathfrak{n}\mathrm{B})$*-algèbre* de présentation finie*, alors* C *est une* B*-algèbre* de présentation finie*.*

En effet, soient $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de C dont les images engendrent $\mathrm{C}/\mathfrak{n}\mathrm{C}$ comme $(\mathrm{B}/\mathfrak{n})$-algèbre. D'après le lemme de Nakayama nilpotent, les x_i engendrent C comme B-algèbre. Ceci prouve (i). Soit ϕ le morphisme surjectif $\mathrm{B}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n] \to \mathrm{C}$ ainsi obtenu, et soit $\mathrm{I} = \mathrm{Ker}(\phi)$.

Supposons maintenant que C soit plat sur A et que $\mathrm{C}/\mathfrak{n}\mathrm{C}$ soit de présentation finie sur $\mathrm{B}/\mathfrak{n}\mathrm{B}$. Alors, d'une part, $\mathrm{I}/\mathfrak{n}\mathrm{I}$ s'identifie au noyau de $\overline{\phi} = \phi \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{A}/\mathfrak{n})$. D'autre part, d'après EGA IV_1, 1.4.4, le noyau de $\overline{\phi}$ est un idéal de type fini. Soient alors $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_s$ des éléments de I dont les images engendrent $\mathrm{I}/\mathfrak{n}\mathrm{I}$ comme idéal ; d'après le lemme de Nakayama nilpotent, ils engendrent I. Ceci prouve (ii).

Revenons à la démonstration de 1.3. Soit x un point arbitraire de G. Comme G est plat sur A, alors d'après le critère de platitude par fibres, sous la forme de EGA IV_3, 11.3.10.2, u sera plat en x si $u \otimes_{\mathrm{A}} k$ l'est. De même, d'après le lemme précédent, on

(5) N.D.E. : Dans l'original, 1.3, 1.3.1 et 1.3.1.1 sont énoncés pour A un *corps*. Pour être complet, on a traité le cas d'un anneau local artinien et, pour ce faire, on a ajouté le lemme 1.3.0.

(6) N.D.E. : Rappelons qu'un morphisme de schémas $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est dit de type fini (resp. de présentation finie, resp. quasi-fini) *en* x, s'il existe des ouverts affines : V contenant $f(x)$, et U contenant x, tels que $f(\mathrm{U}) \subset \mathrm{V}$ et que $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U})$ soit une $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{V})$-algèbre de type fini (resp. de présentation finie, resp. et si de plus la fibre $f^{-1}(f(x'))$ est finie, pour tout $x' \in \mathrm{U}$ (voir aussi la N.D.E. (40) de l'Exp. V)). On dit que f est localement quasi-fini (resp. de type fini, de présentation finie) s'il l'est en tout point x. D'autre part, on dit que f est lisse (resp. non-ramifié, resp. étale) *en* x s'il existe un voisinage ouvert U de x tel que le morphisme $f|_{\mathrm{U}} : \mathrm{U} \to \mathrm{Y}$ soit lisse (resp. non-ramifié, resp. étale). Au vu de ces définitions, il est clair que l'ensemble des points où f est de présentation finie, resp. de type fini, quasi-fini, lisse, non-ramifié, étale, est un *ouvert* de X. De plus, comme le lieu de platitude d'un morphisme localement de présentation finie est ouvert (EGA IV_3, 11.3.1), alors l'ensemble des points de X où f est *de présentation finie et plat* est aussi ouvert dans X. Tout ceci sera utilisé à de nombreuses reprises dans la suite.

voit que u sera de type fini (resp. de présentation finie) en x si $u \otimes_{\mathrm{A}} k$ l'est. Comme les autres propriétés se vérifient alors sur les fibres (cf. EGA IV_4 17.4.1, 17.5.1 et 17.6.1 pour non ramifié, lisse et étale), on est ramené au cas où $\mathrm{A} = k$.

Soit maintenant x un point de G où l'une des conditions de 1.3 (i) est vérifiée. Comme les propriétés envisagées sont préservées par descente (fpqc) (cf. EGA IV, 2.5.1, 2.7.1 et 17.7.1), on se ramène, en remplaçant k par une clôture algébrique de $\kappa(x)$, au cas où k est algébriquement clos et $x \in \mathrm{G}(k)$.

Comme G est un schéma de Jacobson (cf. EGA IV_3, 10.4.7) et comme l'ensemble W des points de G où u est plat (resp. quasi-fini, non ramifié, lisse, ou étale), est stable par générisation [(7)] (resp. ouvert), il suffit de montrer que tout point y de $\mathrm{G}(k)$ appartient à W. Or, pour un tel point y, la translation $r_y \circ r_x^{-1}$ envoie x sur y, donc u possède en y la propriété voulue, i.e. $y \in \mathrm{W}$.

Corollaire 1.3.1. — *Soient* A *un anneau local artinien, k son corps résiduel,* G *un* A-*groupe* plat. *Les assertions suivantes sont équivalentes :* [(8)]

(i) G *est* localement quasi-fini (*resp.* non ramifié, *resp.* lisse, *resp.* étale) *sur* A en un point.

(ii) G *est* localement quasi-fini (*resp.* non ramifié, *resp.* lisse *resp.* étale) *sur* A.

[(9)] En effet, si G vérifie l'une des conditions de (i) en un point x, il existe un voisinage ouvert U de x qui est de type fini sur A. Par conséquent, il suffit d'appliquer 1.3 au cas où H est le A-groupe unité, compte-tenu du lemme suivant :

323 ***Lemme 1.3.1.1.*** — *Soient* A *un anneau local artinien et* G *un* A-*groupe. S'il existe un* ouvert non vide *de* G de type fini *sur* A, *alors* G *est* localement de type fini *sur* A.

D'après le lemme 1.3.0, on peut supposer A égal à son corps résiduel k. De plus, par descente (fpqc), on peut supposer k algébriquement clos (cf. EGA IV_2, 2.7.1). Soit V l'ouvert de G formé des points où G est de type fini sur k ; par hypothèse, $\mathrm{V} \neq \varnothing$. Comme G est un schéma de Jacobson, alors V contient un point fermé x et, pour montrer que $\mathrm{V} = \mathrm{G}$, il suffit de montrer que tout point fermé y de G appartient à V. Or, pour un tel point y, la translation $r_y \circ r_x^{-1}$ envoie x sur y, d'où $y \in \mathrm{V}$.

Corollaire 1.3.2. — *Soient* A *un anneau local artinien,* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme entre* A-*groupes* localement de type fini. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) u *est* universellement ouvert,

(ii) u *est* ouvert,

(iii) u *est* ouvert en un point de G,

(iv) *le morphisme* $u^0 : \mathrm{G}^0 \to \mathrm{H}^0$ *déduit de* u *est* dominant,

---

[(7)] N.D.E. : L'original indiquait que $\mathrm{W}_{\mathrm{plat}}$ est ouvert, ce qui ne semble pas *a priori* évident ...

[(8)] N.D.E. : Notons qu'il *ne suffit pas* de supposer que G soit plat sur A en un point : par exemple, supposant $\mathrm{A} \neq k$, soient H le A-groupe constant $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\mathrm{A}}$ et G le sous-A-groupe fermé de H dont la composante non neutre est réduite ; alors le morphisme structural $\mathrm{G} \to \operatorname{Spec} \mathrm{A}$ est un isomorphisme local au point unité e, mais n'est pas plat au point $g \neq e$.

[(9)] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit, et l'on a simplifié la démonstration du lemme 1.3.1.1, en invoquant EGA IV, 2.7.1 au lieu de *loc. cit.*, 17.7.5.

(iv′) u^0 *est* surjectif,

(v) *il existe une composante connexe* C *de* G *telle que, si* D *désigne la composante connexe de* H *contenant* $u(\mathrm{C})$*, le morphisme* $u' : \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ *déduit de* u *soit* dominant.

Les implications (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) et (iv′) ⇒ (iv) ⇒ (v) sont claires. Comme G^0 est de type fini sur A ($\mathrm{VI_A}$ 2.4), donc noethérien, alors u^0 est quasi-compact donc $u^0(\mathrm{G}^0)$ est fermé dans H^0, d'après 1.2, donc (iv) ⇒ (iv′). D'autre part, puisque G^0 (resp. C) est ouvert dans G ($\mathrm{VI_A}$ 2.3) et que H^0 (resp. D) est irréductible ($\mathrm{VI_A}$ 2.4.1), on voit que (ii) entraîne (iv) (resp. que (iii) entraîne (v)). Reste donc à montrer que 324
(v) implique (i).

L'ouvert C (resp. D) de G (resp. H) sera muni de sa structure de schéma induit, et u' désignera le morphisme $\mathrm{C} \to \mathrm{D}$ déduit de u. Soit k le corps résiduel de A. [10] Comme le changement de base $\operatorname{Spec} k \to \operatorname{Spec} \mathrm{A}$ est un homéomorphisme universel, on peut supposer $\mathrm{A} = k$. Par hypothèse, u' est dominant et, puisque C est de type fini sur k ($\mathrm{VI_A}$ 2.4.1) donc noethérien, u' est quasi-compact. D'après EGA IV_2, 2.3.7, $u' \otimes_k \overline{k}$ est encore quasi-compact et dominant, où $\overline{k}$ désigne une clôture algébrique de k. Alors, puisque $\mathrm{C} \otimes_k \overline{k}$ est réunion de composantes connexes de $\mathrm{G} \otimes_k \overline{k}$, le morphisme $u \otimes_k \overline{k} : \mathrm{G} \otimes_k \overline{k} \to \mathrm{H} \otimes_k \overline{k}$ vérifie l'assertion (v). Nous sommes ainsi ramenés au cas où $\mathrm{A} = k$ est un corps algébriquement clos, compte tenu de EGA IV_2, 2.6.4.

Dans ce cas, nous pouvons de plus remplacer u par $u_{\text{réd}}$, et nous sommes ramenés au cas où H est réduit. Soient alors ξ (resp. η) le point générique de C (resp. D). Puisque u' est quasi-compact et dominant, $u'(\xi) = \eta$ (cf. EGA IV_1, 1.1.5). D'autre part, comme H est réduit, l'anneau local $\mathscr{O}_{\mathrm{H},\eta}$ est un corps, et donc u' est plat au point ξ. [11] Donc, d'après 1.3, u est plat ; de plus, puisque u est localement de type fini et que H est localement noethérien, u est localement de présentation finie. Donc, d'après EGA IV_2, 2.4.6, u est universellement ouvert.

Proposition 1.4. **—** *Soient* A *un anneau local artinien, et* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme* quasi-compact *entre* A*-groupes* localement de type fini. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) u *est* propre*,*

(ii) *il existe* $h \in \mathrm{H}$ *tel que la fibre* $u^{-1}(h)$ *soit* non vide et propre sur $\kappa(h)$*,*

(iii) $\operatorname{Ker} u$ *est* propre sur A.

Il est clair que (i) entraîne (iii), et que (iii) entraîne (ii). D'autre part, il résulte des hypothèses que u est de type fini et, puisque G est séparé ($\mathrm{VI_A}$ 0.3), u l'est aussi (EGA 325
I, 5.5.1). Il reste donc à montrer que l'assertion (ii) entraîne que u est universellement fermé, si bien que nous pouvons supposer A égal à son corps résiduel k. [12] Soient k' une clôture algébrique de $\kappa(h)$, $u' : \mathrm{G}' \to \mathrm{H}'$ le morphisme déduit de u par changement de base, h' un point de H' au-dessus de h ; alors la fibre $u'^{-1}(h') = u^{-1}(h) \times_{\kappa(h)} k'$

[10] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

[11] N.D.E. : L'original invoquait le théorème de platitude générique (EGA IV_2, 6.9.1), qui n'est pas nécessaire ici.

[12] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

est non-vide et propre, et il suffit de montrer que u' est propre (EGA IV$_2$, 2.6.4). On peut donc supposer que k est algébriquement clos et $h \in \mathrm{H}(k)$.

Nous avons vu (1.2) qu'alors $u(\mathrm{G})$ est l'ensemble sous-jacent à un sous-schéma en groupes réduit fermé de H ; toute immersion fermée étant propre (EGA II, 5.4.2), nous pouvons supposer que u est surjectif, et que H est réduit. Puisque u est surjectif, le groupe $\mathrm{G}(k)$ opère transitivement sur l'ensemble des points fermés de H ; quel que soit le point fermé y de H, $u^{-1}(y)$ est donc propre sur $\kappa(y)$. D'après EGA IV$_3$, 9.6.1, l'ensemble des $y \in \mathrm{H}$ tels que $u^{-1}(y)$ ne soit pas propre sur $\kappa(y)$ est localement constructible ; puisqu'il ne contient aucun point fermé, il est vide (cf. EGA IV$_3$, 10.3.1 et 10.4.7).

[13] Considérons alors le point générique η de H^0 ; d'après ce qui précède, la fibre $u^{-1}(\eta) = \mathrm{G} \times_{\mathrm{H}} \operatorname{Spec} \kappa(\eta)$ est propre sur $\kappa(\eta)$. D'autre part, puisque H est réduit, $\kappa(\eta)$ égale $\mathscr{O}_{\mathrm{H},\eta}$. Comme $\mathscr{O}_{\mathrm{H},\eta}$ est la limitive inductive des anneaux $\mathscr{O}_{\mathrm{H}}(\mathrm{V})$, pour V parcourant les ouverts non vides de H^0, il résulte de EGA IV$_3$, 8.1.2 a) et 8.10.5 (xii), qu'il existe un ouvert non vide V de H^0 tel que la restriction de u au-dessus de l'ouvert V soit propre. Il est clair alors que les $g \cdot \mathrm{V}$, pour $g \in \mathrm{G}(k)$, forment un recouvrement ouvert de H tel que, pour tout $g \in \mathrm{G}(k)$, la restriction de u au-dessus de l'ouvert $g \cdot \mathrm{V}$ soit propre ; on en déduit que u est propre (cf. EGA II, 5.4.1).

Corollaire 1.4.1. — *Soient* A *un anneau local artinien, et* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme entre* A*-groupes* localement de type fini*. Les assertion suivantes sont équivalentes :*

(i) *u est* localement quasi-fini*,*

(ii) *u est* quasi-fini en un point*,*

(iii) $\operatorname{Ker} u$ est discret*,*

(iv) *la restriction de u à chaque composante connexe de* G *est* finie*.*

326 *Enfin, si u est* quasi-compact*, ces assertions sont équivalentes à la suivante :*

(v) *u est* fini*.*

Il est clair que (iv) entraîne (iii), que (iii) entraîne (ii) (EGA I, 6.4.4), et que dans le cas où u est quasi-compact, les assertions (iv) et (v) sont équivalentes. On a déjà vu en 1.3 que les assertions (i) et (ii) sont équivalentes.

Montrons enfin que (i) entraîne (iv). Soit C une composante connexe de G ; puisque C est de type fini sur A (VI$_{\mathrm{A}}$ 2.4.1) et que G et H sont séparés (VI$_{\mathrm{A}}$ 0.2), alors, d'après EGA I, 5.5.1 et 6.3.4, la restriction u' de u à C est séparée et de type fini. [14] Comme les fibres de u' sont discrètes, il en résulte que u' est quasi-fini (cf. EGA II, 6.2.2). Comme tout morphisme quasi-fini et propre est fini (cf. EGA III$_1$, 4.4.2), il suffit donc de montrer que u' est universellement fermé.

Pour cela, nous pouvons supposer que A est égal à son corps résiduel k. Alors, par descente (fpqc) (cf. EGA IV$_2$, 2.6.4), il suffit de montrer que $u' \otimes_k \overline{k}$ est universellement fermé, où $\overline{k}$ désigne une clôture algébrique de k. De plus, comme C est de type fini sur k, alors $\mathrm{C} \otimes_k \overline{k}$ est la somme d'un nombre fini de composantes connexes $\mathrm{C}'_1, \dots, \mathrm{C}'_n$

[13] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.
[14] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

de $\mathrm{G} \otimes_k \overline{k}$, et il suffit de montrer l'assertion pour chaque C'_i. On est ainsi ramené au cas où k est algébriquement clos.

Soit alors g un point fermé de C, si $u^0 : \mathrm{G}^0 \to \mathrm{H}$ est la restriction de u à G^0, on a $u' = r_{u(g)} \circ u^0 \circ r_{g^{-1}}$, où r_g désigne la translation à droite par g, et donc pour montrer que u' est propre, il suffit de montrer que u^0 l'est. Par hypothèse, u est localement quasi-fini, donc la fibre $\mathrm{Ker}\, u$ est discrète (et non vide) ; nous avons vu que u^0 est de type fini, donc la fibre $\mathrm{Ker}\, u^0$ est finie (cf. EGA II, 6.2.2), donc propre, et non vide ; donc u^0 est propre d'après 1.4.

Corollaire 1.4.2. — *Soient* A *un anneau local artinien, et* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme* quasi-compact *entre* A*-groupes* localement de type fini. *Les assertions suivantes sont équivalentes :* [15]

(i) *u est une* immersion fermée*,*

(ii) *u est un* monomorphisme*,*

(iii) $\mathrm{Ker}\, u$ *est* trivial*, i.e. isomorphe au k-groupe unité.* 327

En particulier, tout sous-schéma en groupes [16] de H est fermé.

Il est clair que (i) entraîne (ii), et si l'on considère les foncteurs que représentent respectivement G et H, il est immédiat que les conditions (ii) et (iii) sont équivalentes. Enfin, si $\mathrm{Ker}\, u$ est le k-groupe unité, $\mathrm{Ker}\, u$ est une fibre propre et non vide, donc u est un monomorphisme propre, d'après 1.4, et de présentation finie puisque H est localement noethérien (EGA IV_1, 1.6.1), donc est une immersion fermée (EGA IV_3, 8.11.5).

La dernière assertion résulte de ce que, puisque H est localement noethérien, toute immersion $\mathrm{G} \to \mathrm{H}$ est quasi-compacte (EGA I, 6.6.4).

Contre-exemple 1.4.3. — Soient k un corps de caractéristique 0, G le k-groupe constant $\mathbb{Z}$ et H le k-groupe $\mathbb{G}_{a,k}$. Soit $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ un morphisme de k-groupes. Si $u \neq 0$, $\mathrm{Ker}\, u = 0$, mais u n'est pas une immersion fermée (cf. 1.2.2).

Nous utiliserons plus loin les deux résultats suivants qui auraient dû figurer dans l'Exposé $\mathrm{VI_A}$:

Lemme 1.5. — *Soient k un corps et* G *un k-groupe* localement de type fini. *Alors :*

(i) *Toutes les composantes irréductibles de* G *sont de* même dimension.

(ii) *Quel que soit $g \in \mathrm{G}$, on a* $\dim_g \mathrm{G} = \dim \mathrm{G}$.

[15] N.D.E. : L'hypothèse que G et H soient localement de type fini peut être enlevée, car d'après [**Per76**, 4.2.4] : tout monomorphisme quasi-compact $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ entre schémas en groupes sur un corps k est une immersion fermée ; voir aussi [**DG70**, III.3.7.2 b)] pour le cas où G et H sont affines (auquel cas tout morphisme $\mathrm{G} \to \mathrm{H}$ est affine (EGA II, 1.6.2 (v)), donc quasi-compact).

[16] N.D.E. : Dans ce cas particulier, voir aussi $\mathrm{VI_A}$, 0.5.2, valable sans hypothèses de finitude.

[17] On a déjà démontré l'assertion (i) en $\mathrm{VI_A}$, 2.4.1, et l'assertion (ii) en découle. En effet, soient g un point de G et C la composante connexe de G contenant g. Par définition (EGA 0_{IV}, 14.1.2), $\dim_g \mathrm{G}$ est la borne inférieure des entiers $\dim \mathrm{U}$, pour U parcourant les voisinages ouverts de g ; on a donc $\dim_g \mathrm{G} = \dim \mathrm{U}_0$ pour un certain U_0, que l'on peut supposer contenu dans C (puisque $\dim \mathrm{V} \leqslant \dim \mathrm{U}$ si $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$). Alors, comme C est irréductible et de type fini sur k ($\mathrm{VI_A}$, 2.4.1), on a $\dim \mathrm{U}_0 = \dim \mathrm{C} = \deg.\ \mathrm{tr}_k\, \kappa(\xi)$, où ξ est le point générique de C, d'après EGA IV_2, 5.2.1. On a donc $\dim_g \mathrm{G} = \dim \mathrm{C} = \dim \mathrm{G}$.

328 ***Proposition 1.6.*** — [18] *Soient* S *un schéma de* caractéristique zéro *et* G *un* S-*schéma en groupes,* localement de présentation finie sur S en tout point de la section unité $\varepsilon(\mathrm{S})$. *Pour que* G *soit* lisse sur S en tout point de la section unité*, il faut et il suffit que le* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module* $\omega_{\mathrm{G/S}} = \varepsilon^*(\Omega^1_{\mathrm{G/S}})$ (*appelé module conormal à la section unité de* G), *soit* localement libre.

Rappelons qu'un schéma S est dit de *caractéristique zéro* si pour tout point fermé x de S, le corps $\kappa(x)$ est de caractéristique zéro.

Rappelons aussi (II 4.11) que, si π désigne le morphisme structural $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$, on a $\Omega^1_{\mathrm{G/S}} = \pi^*(\omega_{\mathrm{G/S}})$, si bien qu'il revient au même de dire que le $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module $\omega_{\mathrm{G/S}}$ est localement libre, ou que le $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}$-module $\Omega^1_{\mathrm{G/S}}$ est localement libre.

S'il existe un voisinage ouvert U de $\varepsilon(\mathrm{S})$ qui soit lisse sur S, alors, d'après EGA IV_4, 17.2.3, $\Omega^1_{\mathrm{U/S}}$ est localement libre de type fini, ainsi que $\omega_{\mathrm{G/S}} = \varepsilon^*(\Omega^1_{\mathrm{U/S}})$.

Réciproquement, si $\omega_{\mathrm{G/S}}$ est localement libre, il en est de même de $\Omega^1_{\mathrm{G/S}} = \pi^*(\omega_{\mathrm{G/S}})$. Comme S est de caractéristique 0, le critère jacobien (EGA IV_4, 16.12.2) entraîne donc que G est différentiellement lisse sur S. Alors, il résulte de EGA IV_4, 17.12.5, que G est lisse sur S en tout point de la section unité.

Corollaire 1.6.1 **(**Cartier**).** — *Étant donné un corps k de* caractéristique zéro*, tout k-groupe* localement de type fini *sur k est* lisse *sur k.*

En effet, il est alors clair que le k-module $\omega_{\mathrm{G}/k}$ est localement libre, donc, d'après 1.6, G est lisse sur k au point unité e, et donc lisse sur k, d'après 1.3.1.

2. « Propriétés ouvertes » des groupes et des morphismes de groupes localement de présentation finie

2.0. — Dans tout ce qui suit, S désignera un schéma quelconque ; un S-schéma en groupes sera appelé un S-*groupe*. Étant donné un S-groupe G, nous noterons ε la section unité, $c : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ le morphisme d'inversion et μ le morphisme de multiplication

[17] N.D.E. : L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) est un fait général (cf. EGA 0_{IV}, 14.1.6), et (i) $\Rightarrow$ (ii) découle du fait que si X est un schéma irréductible de type fini sur un corps, on a $\dim \mathrm{X} = \dim \mathrm{U}$ pour tout ouvert non vide U de X ; le point essentiel ici est donc d'établir l'assertion (i), ce qu'on a déjà fait dans un ajout à $\mathrm{VI_A}$, 2.4.1. On a modifié en conséquence l'énoncé et la démonstration du lemme.

[18] N.D.E. : Dans l'énoncé, on a remplacé « le long de la section unité » par « en tout point de la section unité » ; d'autre part, à la fin de la démonstration, on a explicité les résultats de EGA IV_4 cités en référence.

$\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{G}$. Pour tout S-schéma X, nous noterons π ou π_{X} le morphisme structural $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$.

Étant donnée une propriété $\mathscr{P}(u)$ pour un morphisme de S-schémas $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, **329**
nous dirons que $\mathscr{P}(u)$ est *stable par changement de base* si, chaque fois que u vérifie $\mathscr{P}(u)$, il en est de même du morphisme $u_{(\mathrm{Y}')}$, quel que soit le S-morphisme $\mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}$. On dit que $\mathscr{P}(u)$ est de *nature locale pour la topologie* $\mathcal{T}$ (cf. Exp. IV, §§ 4 et 6) si $\mathscr{P}(u)$ vérifie les deux conditions suivantes :

a) $\mathscr{P}(u)$ est stable par changement de base,

b) chaque fois qu'il existe une famille de S-morphismes $\mathrm{Y}_i \to \mathrm{Y}$ couvrante pour la topologie $\mathcal{T}$ et telle que chacun des morphismes $u_{(\mathrm{Y}_i)}$ vérifie $\mathscr{P}(u)$, alors u vérifie $\mathscr{P}(u)$.

Proposition 2.1. — *Soit* $\mathscr{P}(u)$ *une propriété pour un morphisme de* S*-schémas, de nature locale pour la topologie* (fpqc). *Soit* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de* S*-groupes. Supposons* G plat et universellement ouvert *sur* S.

Soit W le plus grand ouvert de H *au-dessus duquel* u *vérifie la propriété* $\mathscr{P}(u)$ *et soit* $\mathrm{V} = u^{-1}(\mathrm{W})$. *Alors* $\mathrm{U} = \pi_{\mathrm{G}}(\mathrm{V})$ *est un ouvert de* S *et* V *est un* sous-schéma en groupes ouvert *de* $\mathrm{G}|_{\mathrm{U}}$.

L'existence d'un plus grand ouvert W de H au-dessus duquel u vérifie $\mathscr{P}(u)$ résulte de ce que $\mathscr{P}(u)$ est de nature locale pour la topologie de Zariski. Puisque π_{G} est universellement ouvert, $\pi_{\mathrm{G}}(\mathrm{V})$ est un ouvert U de S. Il suffit de montrer que V est un sous-schéma en groupes de $\mathrm{G}|_{\mathrm{U}}$. Nous pouvons donc supposer que $\mathrm{U} = \mathrm{S}$.

Posons alors $\mathrm{G}' = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$, $\mathrm{H}' = \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$, $\mathrm{V}' = \mathrm{V} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$, $\mathrm{W}' = \mathrm{W} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$ et $u' = u_{(\mathrm{V})}$; soit W'_1 le plus grand ouvert de H′ au-dessus duquel u' vérifie $\mathscr{P}(u)$; puisque V est plat et universellement ouvert sur S, il en est de même de H′ sur H, et le lemme 2.1.1 ci-dessous montre que $\mathrm{W}'_1 = \mathrm{W}'$. Considérons alors l'automorphisme de V-schémas a **330**
(resp. b) de G′ (resp. H′), translation à droite par le symétrique de la section diagonale δ (resp. par le symétrique de $u(\delta)$), défini par

$$a(g, v) = (g \cdot v^{-1}, v), \qquad (\text{resp. } (h, v) = (h \cdot u(v^{-1}), v)),$$

quels que soient le morphisme $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$, $g \in \mathrm{G}(\mathrm{T})$, $v \in \mathrm{V}(\mathrm{T})$ et $h \in \mathrm{H}(\mathrm{T})$. Il est clair que $u' \circ a = b \circ u'$, ce qui montre que W′ est stable par b, donc que V′ est stable par a, si bien que V est un sous-schéma en groupes de G.

Lemme 2.1.1. — *Soit* $\mathscr{P}(u)$ *une propriété pour un* S*-morphisme* u*, de nature locale pour la topologie* (fpqc). *Considérons un carré cartésien de morphismes de* S*-schémas :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & \mathrm{Y}' \arrow[d, "g"] \\ \mathrm{X} \arrow[r, "f"] & \mathrm{Y} \end{tikzcd} \quad ,$$

où g *est* plat et ouvert. *Soit* W (*resp.* W'_1) *le plus grand ouvert de* Y (*resp.* Y′) *au-dessus duquel* f (*resp.* $f' = f_{(\mathrm{Y}')}$) *vérifie* $\mathscr{P}(u)$. *Alors* $\mathrm{W}'_1 = \mathrm{W} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}'$.

Posons $W' = W \times_Y Y'$; puisque $\mathscr{P}(u)$ est stable par changement de base, on a $W' \subset W'_1$. Comme g est ouvert, $W_1 = g(W'_1)$ est un ouvert de Y. Posons $V_1 = f^{-1}(W_1)$ et $V'_1 = V_1 \times_{W_1} W'_1$; il est clair que $V'_1 = f'^{-1}(W'_1)$. Puisque g est plat et ouvert, le morphisme $W'_1 \to W_1 = g(W'_1)$ déduit de g est fidèlement plat et ouvert, donc couvrant pour la topologie (fpqc) (cf. IV 6.3.1 (iv)). Puisque le morphisme $V'_1 \to W'_1$ déduit de f' vérifie $\mathscr{P}(u)$, il en est de même du morphisme $V_1 \to W_1$ déduit de f, donc $W_1 \subset W$, et $W'_1 \subset g^{-1}(W_1) \subset g^{-1}(W) = W'$; donc $W' = W'_1$.

Remarque 2.1.2. — Un grand nombre de propriétés pour un morphisme sont de nature locale pour la topologie (fpqc) ; citons celles d'être plat, (universellement) ouvert, (localement) de type fini, de présentation finie, quasi-fini (cf. EGA IV_2, 2.5.1, 2.6.1 et 2.7.1), lisse, étale, non-ramifié (EGA IV_4, 17.7.3).

La démonstration de 2.1 n'utilise en fait que des *changements de base par des morphismes plats* ; la proposition s'appliquera donc à une propriété vérifiant la condition b) de 2.0 relativement à la topologie (fpqc), et stable par changements de base par
331 des morphismes plats (exemple : celle d'être quasi-compact et dominant).

Bien entendu, on peut énoncer une proposition analogue concernant les propriétés de nature locale pour une topologie $\mathcal{T}$ plus fine que la topologie de Zariski, la condition à vérifier sur G étant alors que π_G soit universellement ouvert et couvrant pour la topologie $\mathcal{T}$.

En particulier, si G est plat et localement de présentation finie sur S, on a un énoncé analogue pour les propriétés stables par changements de base par des morphismes plats et localement de présentation finie, et vérifiant la condition b) de 2.0 relativement à la topologie (fpqc) (par exemple, celles d'être régulier, réduit, de Cohen-Macaulay, etc. (EGA IV_2, 6.8)).

Proposition 2.2. — *Soient* G *et* H *deux* S*-groupes et* $u : G \to H$ *un morphisme de* S*-groupes. Alors :* [19]

(i) *Supposons* G *ou* H plat *sur* S*, et* G *ou* H localement de présentation finie *sur* S*, et soit* V le plus grand ouvert *de* G *tel que la restriction de* u *à* V *soit* plate et localement de présentation finie (*resp.* lisse*, resp.* étale)*. Alors* $U = \pi_V(V)$ *est un ouvert de* S*, et* V *est un* sous-schéma en groupes ouvert *de* $G|_U$.

(ii) *Supposons* G *ou* H universellement ouvert *sur* S*, et soit* V le plus grand ouvert *de* G *tel que la restriction de* u *à* V *soit* universellement ouverte*. Alors* $U = \pi_V(V)$ *est un ouvert de* S*, et* V *est un* sous-schéma en groupes ouvert *de* $G|_U$.

Montrons d'abord (i). Montrons que la restriction π_V de π_G à V est plate et localement de présentation finie :

332 a) Si π_G est plat (resp. localement de présentation finie), il en est de même de π_V.

(19) N.D.E. : Dans le cas (i), l'ouvert V est formé de *tous* les points de G en lesquels u est lisse, resp. étale, resp. de présentation finie et plat, cf. la N.D.E. (6). Par contre, dans le cas (ii), V est le plus grand ouvert contenu dans l'ensemble E des points de G en lesquels u est universellement ouvert, mais E n'est pas nécessairement ouvert, comme le montre l'exemple suivant (EGA IV_3, 14.1.3 (i)) : soient k un corps, $H = S = \operatorname{Spec} A$, où $A = k[x]$, et G le S-groupe $\operatorname{Spec} A[y]/(xy)$; alors E égale la section unité de G, qui n'est pas ouverte.

b) Si π_{H} est plat (resp. localement de présentation finie), il en est de même de π_{V}, comme composé de la restriction de u à V et de π_{H}.

Donc, dans les quatre cas envisagés dans l'énoncé, π_{V} est plat et localement de présentation finie, donc universellement ouvert (EGA IV_2, 2.4.6). Posons $\mathrm{U} = \pi_{\mathrm{V}}(\mathrm{V})$; U est donc un ouvert de S. Il suffit alors de montrer que V est un sous-schéma en groupes ouvert de $\mathrm{G}|_{\mathrm{U}}$; nous pouvons donc supposer que U = S.

Posons alors $\mathrm{G}' = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$, $\mathrm{H}' = \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$, $\mathrm{V}' = \mathrm{V} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$ et $u' = u_{(\mathrm{V})}$. Alors, V étant plat et localement de présentation finie sur S, il en est de même de H′ sur H. D'après EGA IV_4, 17.7.4, V′ est alors le plus grand ouvert de G′ tel que la restriction de u' à V′ soit plate et localement de présentation finie (resp. lisse, resp. étale). Les automorphismes a et b étant définis comme dans la démonstration de 2.1, il est alors clair que V′ est stable par a, donc que V est un sous-schéma en groupes de G.

Montrons (ii). La restriction π_{V} de π_{G} à V est un morphisme universellement ouvert, soit parce qu'il en est ainsi de π_{G}, soit comme composé de la restriction de u à V et de π_{H} dans le cas où π_{H} est universellement ouvert. Posons $\mathrm{U} = \pi_{\mathrm{V}}(\mathrm{V})$; U est alors un ouvert de S. Il suffit de montrer que V est un sous-schéma en groupes ouvert de $\mathrm{G}|_{\mathrm{U}}$. Nous pouvons donc supposer que U = S.

Posons comme précédemment $\mathrm{G}' = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$, $\mathrm{H}' = \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$, $\mathrm{V}' = \mathrm{V} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$ et $u' = u_{(\mathrm{V})}$. Alors $\pi_{\mathrm{V}} : \mathrm{V} \to \mathrm{S}$ est surjectif et universellement ouvert, il en est de même de $\mathrm{G}' \to \mathrm{G}$, si bien que V′ est le plus grand ouvert de G′ tel que la restriction de 333
u' à V′ soit universellement ouverte, en vertu de (EGA IV_3, 14.3.4 (i) et (ii)). Les automorphismes a et b étant définis comme précédemment, il est alors clair que V′ est stable par a, donc que V est un sous-schéma en groupes de G.

Corollaire 2.3. — *Soient* G *un* S*-groupe et* V le plus grand ouvert *de* G *qui soit* plat et localement de présentation finie (*resp.* lisse, étale, universellement ouvert) *sur* S. *Alors* $\mathrm{U} = \pi_{\mathrm{V}}(\mathrm{V})$ *est un ouvert de* S, *et* V *est un* sous-schéma en groupes ouvert *de* $\mathrm{G}|_{\mathrm{U}}$.

Il suffit d'appliquer 2.2 au cas où H est le S-groupe unité et où u est l'unique morphisme de S-groupes $\mathrm{G} \to \mathrm{H}$, car alors π_{H} est un isomorphisme et $\pi_{\mathrm{G}} = \pi_{\mathrm{H}} \circ u$.

Corollaire 2.4. — *Soit* G *un* S*-groupe ; s'il existe un* voisinage X de la section unité *ayant une* (*ou plusieurs*) *des propriétés suivantes :*

> X *est* plat et localement de présentation finie (*resp.* lisse, étale, universellement ouvert) *sur* S,

alors il existe un sous-schéma en groupes ouvert *de* G *ayant les mêmes propriétés.*

Il suffit d'appliquer 2.3 en remarquant qu'ici avec les notations de 2.2, on a $\varepsilon(\mathrm{S}) \subset \mathrm{V}$, donc U = S.

Proposition 2.5. — [20] *Soit* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de* S*-groupes.*

[20] N.D.E. : On a détaillé l'énoncé et la démonstration, et dans (i) on a affaibli l'hypothèse sur H, en remplaçant « de présentation finie » par « de type fini ».

(i) *Supposons que* G (*resp.* H) *soit* de présentation finie et plat (*resp.* de type fini) *sur* S aux points de sa section unité. *Alors, les ensembles :*

$$\mathrm{U}_{\mathrm{plat}} \supset \mathrm{U}_{\mathrm{lisse}} \supset \mathrm{U}_{\text{ét.}},$$

formés des points $s \in \mathrm{S}$ *tels que* u_s *soit* plat (*resp.* lisse, étale), *sont* ouverts *dans* S.

334 *Si de plus* G (*resp.* H) *est* localement de présentation finie et plat (*resp.* localement de type fini) *sur* S, *alors l'ensemble* $\mathrm{V}_{\mathrm{plat}}$ (*resp.* $\mathrm{V}_{\mathrm{lisse}}$, $\mathrm{V}_{\text{ét.}}$) *des points de* G *où* u *est* plat (*resp.* lisse, *resp.* étale) *est l'image inverse par* π_{G} *de* $\mathrm{U}_{\mathrm{plat}}$ (*resp.* $\mathrm{U}_{\mathrm{lisse}}$, $\mathrm{U}_{\text{ét.}}$).

(ii) *Supposons que, pour tout* $s \in \mathrm{S}$, G_s *soit* localement de type fini sur $\kappa(s)$ (*condition vérifiée si* G *est de type fini sur* S *aux points de la section unité* (1.3.1.1)), *et que* u *soit* localement de type fini (*resp.* localement de présentation finie) aux points de la section unité *de* G. *Alors, les ensembles :*

$$\mathrm{U}_{\mathrm{l.q.f.}} \supset \mathrm{U}_{\mathrm{n.r.}}$$

formés des $s \in \mathrm{S}$ *tels que* u_s *soit* localement quasi-fini (*resp.* non ramifié) *sont* ouverts *dans* S.

Si de plus u *est* localement de type fini (*resp.* localement de présentation finie), *alors l'ensemble* $\mathrm{V}_{\mathrm{l.q.f}}$ (*resp.* $\mathrm{V}_{\mathrm{n.r.}}$) *des points de* G *où* u *est* quasi-fini (*resp.* non ramifié) *est l'image inverse par* π_{G} *de* $\mathrm{U}_{\mathrm{l.q.f}}$ (*resp.* $\mathrm{U}_{\mathrm{n.r.}}$).

Montrons (i). Notons d'abord (1.3.1.1) que, pour tout $s \in \mathrm{S}$, G_s est localement de type fini sur $\kappa(s)$. Soit Y l'ouvert de H formé des points où π_{H} est de type fini, et soit X_1 l'ouvert de $u^{-1}(\mathrm{Y})$ formé des points où π_{G} est de présentation finie. D'après EGA IV_3, 11.3.1, l'ensemble X des points de X_1 où π_{G} est de présentation finie et *plat* est ouvert dans X_1, donc dans G.

Soit $u_{\mathrm{X}} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ le morphisme déduit de u. Puisque Y (resp. X) contient la section unité de H (resp. G), la restriction π_{X} de π_{G} à X est surjective, et le morphisme $\mathrm{S} \to \mathrm{X}$ déduit de ε_{G} est une S-section de X.

Considérons les ensembles : $\mathrm{W}_{\mathrm{plat}} \supset \mathrm{W}_{\mathrm{lisse}} \supset \mathrm{W}_{\text{ét.}}$, formés des points de X où u_{X} est plat (resp. lisse, resp. étale). Il est clair que $\mathrm{W}_{\mathrm{lisse}}$ et $\mathrm{W}_{\text{ét.}}$ sont ouverts dans X, cf. la N.D.E. (6). D'autre part, comme π_{Y} est localement de type fini et $\pi_{\mathrm{X}} = \pi_{\mathrm{Y}} \circ u_{\mathrm{X}}$ localement de présentation finie, alors, d'après EGA IV_1, 1.4.3 (v), u_{X} est localement de présentation finie. Par conséquent, le lieu de platitude W_{X} de u_{X} est ouvert dans X (EGA IV_3, 11.3.1).

Soit $x \in \mathrm{X}$ et posons $s = \pi_{\mathrm{X}}(x)$; alors d'après EGA IV_2, 11.3.10, (combiné avec EGA IV_4, 17.5.1, resp. 17.6.1), x appartient à $\mathrm{W}_{\mathrm{plat}}$ (resp. $\mathrm{W}_{\mathrm{lisse}}$, $\mathrm{W}_{\text{ét.}}$) si et seulement si u_s est plat (resp. lisse, étale) au point x, ou, ce qui revient au même d'après 1.3, si et seulement si u_s est plat (resp. lisse, étale).

Par conséquent, pour « $\flat$ = plat, lisse ou étale », on a $\mathrm{U}_\flat = \varepsilon_{\mathrm{G}}^{-1}(\mathrm{W}_\flat)$ et $\mathrm{W}_\flat =$
335 $\pi_{\mathrm{X}}^{-1}(\mathrm{U}_\flat)$. Comme $\mathrm{W}_\flat$ est ouvert dans X, donc dans G, la première égalité montre que $\mathrm{U}_\flat$ est ouvert dans S.

La seconde assertion de (i) résulte de ce qu'on vient de voir, car alors $\mathrm{Y} = \mathrm{H}$, $\mathrm{X} = \mathrm{G}$, et $\mathrm{V}_\flat = \mathrm{W}_\flat = \pi_{\mathrm{G}}^{-1}(\mathrm{U}_\flat)$.

Montrons l'assertion (ii). Soient $V_{\text{l.t.f.}} \supset V_{\text{l.q.f}}$ les ouverts de G formés des points en lesquels u est de type fini (resp. quasi-fini). Posons $X = V_{\text{l.t.f.}}$ et notons u_X la restriction de u à X. Par hypothèse, X contient $\varepsilon(S)$. Soit $x \in X$ et posons $s = \pi_X(x)$.

Si u est quasi-fini en x alors, par changement de base, u_s est quasi-fini en x, et donc, comme G_s est supposé localement de type fini, u_s est localement quasi-fini, d'après 1.3.1.

Réciproquement, si u_s est localement quasi-fini, alors $u_X^{-1}(u_X(x)) \subset u_s^{-1}(u_s(x))$ est un ensemble fini. Comme $u_X : X \to H$ est localement de type fini, il résulte du théorème de semi-continuité de Chevalley (EGA IV_3, 13.1.3) qu'il existe un voisinage ouvert W de x dans X tel que la fibre $u_X^{-1}(u_X(x'))$ soit discrète, pour tout $x' \in W$. Donc, d'après EGA II, 6.2.2 (et EGA III_2, Err_{III} 20), u_X est quasi-fini en x.

Par conséquent, on a $U_{\text{l.q.f.}} = \varepsilon_G^{-1}(V_{\text{l.q.f.}})$ et $V_{\text{l.q.f.}} = \pi_X^{-1}(U_{\text{l.q.f.}})$, et la première égalité montre que $U_{\text{l.q.f.}}$ est ouvert dans S.

Si de plus G est localement de type fini sur S, alors $X = G$, et donc $V_{\text{l.q.f}}$ est l'image inverse par π_G de $U_{\text{l.q.f.}}$. Ceci prouve la première moitié de (ii).

Considérons maintenant les ouverts $V_{\text{l.p.f.}} \supset V_{\text{n.r.}}$, formés des points où u est de présentation finie (resp. non ramifié), et supposons que $Z = V_{\text{l.p.f.}}$ contienne la section unité de G. Soit $z \in Z$; posons $s = \pi_Z(z)$ et $h = u_Z(z)$.

Si u est non-ramifié en z alors, par changement de base, u_s est non-ramifié en z, et donc, comme G_s est supposé localement de type fini, u_s est non-ramifié, d'après 1.3.1.

Réciproquement, si u_s est non ramifié au point z, alors la fibre $u_s^{-1}(h) = u^{-1}(h)$ est non ramifiée sur $\kappa(h)$ au point z. Comme Z est un ouvert de G, alors la fibre $u_Z^{-1}(h) = u_s^{-1}(h) \cap Z$ est non ramifiée sur $\kappa(h)$ au point z. Comme u_Z est localement de présentation finie, ceci entraîne, d'après EGA IV_4, 17.4.1, que u_Z est non ramifié au point z.

On a donc $U_{\text{n.r.}} = \varepsilon_G^{-1}(V_{\text{n.r.}})$ et $V_{\text{n.r.}} = \pi_Z^{-1}(U_{\text{n.r.}})$, et la première égalité montre que $U_{\text{n.r.}}$ est ouvert dans S.

Si de plus G est localement de présentation finie sur S, alors $Z = G$, et donc $V_{\text{n.r.}}$ est l'image inverse par π_G de $U_{\text{n.r.}}$. Ceci achève la preuve de l'assertion (ii).

Corollaire 2.6. — *Soit* $u : G \to H$ *un morphisme de* S*-groupes qui soit un morphisme* radiciel (*ce qui est le cas si* u *est un* monomorphisme (EGA I, 3.5.4)). *On suppose* G (*resp.* H) localement de présentation finie et plat (*resp.* localement de type fini) *sur* S. *Alors l'ensemble* U *des* $s \in S$ *tels que* u_s *soit une immersion ouverte est* ouvert *dans* S, *et la restriction de* u *au-dessus de* U *est une* immersion ouverte.

D'après 2.5 (i), l'ensemble U' des points $s \in S$ tels que u_s soit étale est ouvert dans S. Puisque u est radiciel, il en est de même de u_s, quel que soit $s \in S$, donc d'après EGA IV_4, 17.9.1, on a $U = U'$, ce qui montre que U est ouvert. Enfin, d'après 2.5 (i), la restriction de u au-dessus de U est étale ; puisque u est radiciel, cette restriction est une immersion ouverte (EGA IV_4, 17.9.1).

Proposition 2.7. — *Soit* G *un* S*-groupe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est* non ramifié *sur* S aux points de la section unité,

(ii) *la section unité est une* immersion ouverte*,*

336 (iii) G *est* de présentation finie *sur* S aux points de la section unité*, et quel que soit* $s \in \mathrm{S}$, G_s *est* non ramifié *sur* $\kappa(s)$*.*

Si, de plus, on suppose G localement de présentation finie *sur* S*, alors chacune des trois conditions précédentes est équivalente à la suivante :*

(iv) G *est* non ramifié *sur* S*.*

L'équivalence des assertions (i) et (ii) résulte du lemme plus général 2.7.1 ci-dessous. Remarquons (1.3.1.1) que l'une ou l'autre des conditions (i) ou (iii) entraîne que, quel que soit $s \in \mathrm{S}$, G_s est localement de type fini sur $\kappa(s)$. Alors (EGA IV_4, 17.4.1), l'assertion (i) équivaut au fait que, quel que soit $s \in \mathrm{S}$, G_s est non ramifié sur $\kappa(s)$ au point e_s, unité de G_s, ou encore (1.3.1), au fait que G_s est non ramifié sur $\kappa(s)$, donc les assertions (i) et (iii) sont équivalentes. Enfin, si G est localement de présentation finie sur S, les assertions (iii) et (iv) sont équivalentes (EGA IV_4, 17.4.1).

Lemme 2.7.1. — *Soit* G *un* S*-schéma muni d'une section* ε*. Pour que* G *soit* non ramifié sur S aux points de cette section*, il faut et il suffit que* ε *soit une* immersion ouverte*.*

La condition est nécessaire, d'après EGA IV_4, 17.4.1 $a) \Rightarrow b'')$. Réciproquement, si ε est une immersion ouverte, alors la restriction à $\varepsilon(\mathrm{S})$ du morphisme structural $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$ est un isomorphisme, donc G est non ramifié sur S aux points de $\varepsilon(\mathrm{S})$.

Corollaire 2.8. — *Soit* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de* S*-groupes. Supposons que, pour tout* $s \in \mathrm{S}$, G_s *soit* localement de type fini *sur* $\kappa(s)$*.* [21]

337 a) *Si* u *est* localement de type fini*, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) u *est* localement quasi-fini*,*

(ii) *quel que soit* $s \in \mathrm{S}$, $u_s : \mathrm{G}_s \to \mathrm{H}_s$ *est* localement quasi-fini*,*

(iii) $\mathrm{Ker}\, u$ *est* localement quasi-fini *sur* S*,*

(iv) *les fibres de* $\mathrm{Ker}\, u$ *sont* discrètes*.*

b) *Si* u *est* localement de présentation finie*, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(v) u *est* non ramifié*,*

(vi) *quel que soit* $s \in \mathrm{S}$, $u_s : \mathrm{G}_s \to \mathrm{H}_s$ *est* non ramifié*,*

(vii) $\mathrm{Ker}\, u$ *est* non ramifié

(viii) *la section unité* $\mathrm{S} \to \mathrm{Ker}\, u$ *est une* immersion ouverte*.*

Les équivalences (i) $\Leftrightarrow$ (ii) et (v) $\Leftrightarrow$ (vi) résultent de 2.5 (ii), et le rappel 2.8.1 ci-dessous montre que (i) $\Rightarrow$ (iii) et (v) $\Rightarrow$ (vii).

[21] N.D.E. : On a modifié la présentation, en séparant les assertions relatives au cas « quasi-fini » de celles relatives au cas « non ramifié ».

Pour tout $s \in \mathrm{S}$, notons e_s l'élément unité de H_s. Alors (iii) (resp. (vii)) entraîne que, pour tout $s \in \mathrm{S}$,

$$(\operatorname{Ker} u)_s = \operatorname{Ker} u_s = u_s^{-1}(e_s)$$

est localement quasi-fini (resp. non ramifié) sur $\kappa(s) = \kappa(e_s)$, donc que u_s est quasi-fini (resp. non ramifié) au point unité de G_s, donc, d'après 1.3, que u_s est localement quasi-fini (resp. non ramifié). Donc (iii) $\Rightarrow$ (ii) et (vii) $\Rightarrow$ (vi). Enfin, (ii) $\Leftrightarrow$ (iv) d'après 1.4.1, et (vii) $\Leftrightarrow$ (viii) d'après 2.7.

***Rappel 2.8.1.* —** Rappelons (cf. I 2.3.6.1) qu'étant donné un morphisme $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ de S-groupes, on appelle *noyau de* u, et on note $\operatorname{Ker} u$, le sous-foncteur en groupes de G défini en posant, quel que soit le morphisme $f : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$

$$(\operatorname{Ker} u)(\mathrm{T}) = \{a \in \mathrm{G}(\mathrm{T}) \mid u \circ a = \varepsilon_{\mathrm{H}} \circ f\}.$$

D'après *loc. cit.* (ou EGA I, 4.4.1), ce foncteur est représentable par le S-groupe $\mathrm{G} \times_{\mathrm{H}} \mathrm{S} = u^{-1}(\varepsilon_{\mathrm{H}}(\mathrm{S}))$, noté simplement $\operatorname{Ker} u$. En particulier, le morphisme structural $\operatorname{Ker} u \to \mathrm{S}$ se déduit de u par changement de base.

***Lemme 2.9.* —** *Soit* $\pi : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *un morphisme admettant une* S*-section* ε.

(i) *Si* π *est injectif, il est entier* (*). 338

(ii) *Si* π *est* localement de type fini*, et si, pour tout* $s \in \mathrm{S}$, π_s *est un* isomorphisme*, alors* π *est un* isomorphisme (**).

Remarquons tout d'abord que, d'après le lemme 2.9.1 ci-dessous, π, étant un homéomorphisme, est un morphisme affine.

Si π est injectif, ε est surjectif. Puisque ε est une immersion surjective, $\varepsilon(\mathrm{S})$ est isomorphe au sous-schéma fermé de X défini par un nilidéal $\mathcal{I}$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$. Puisque ε est une S-section du morphisme π, on a une décomposition en somme directe : $\mathscr{O}_{\mathrm{X}} = \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \oplus \mathcal{I}$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules. Puisque $\mathcal{I}$ est un nilidéal de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$, $\mathcal{I}$ est évidemment entier sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, donc $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ est entier sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, et π est entier.

Supposons maintenant que π soit localement de type fini. Comme $\pi \circ \varepsilon = \mathrm{id}_{\mathrm{S}}$, alors ε est localement de présentation finie (cf. EGA IV_1, 1.4.3 (v)), donc $\mathcal{I}$ est un idéal *de type fini* de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ (EGA IV_1, 1.4.1). Quel que soit $s \in \mathrm{S}$, on a $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_s} = \kappa(s) \oplus \mathcal{I} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \kappa(s)$. Par hypothèse, ε_s est un isomorphisme, donc $\mathcal{I} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \kappa(s) = 0$, pour tout $s \in \mathrm{S}$, donc a fortiori $\mathcal{I} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}}} \kappa(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{X}$, ce qui entraîne, d'après le lemme de Nakayama, que $\mathcal{I} = 0$, donc que π est un isomorphisme.

***Lemme 2.9.1.* —** *Soit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme de schémas qui soit un* homéomorphisme *; alors* f *est un morphisme* affine (***).

Il suffit de montrer que tout point $y \in \mathrm{Y}$ possède un voisinage ouvert W tel que 339
la restriction de f au-dessus de W soit un morphisme affine. Soit donc $y \in \mathrm{Y}$, et

(*) C'est aussi un cas particulier de EGA IV_4, 18.12.11, car π est évidemment un homéomorphisme universel.

(**) C'est aussi une conséquence immédiate de EGA IV_4, 18.12.6.

(***) cf. EGA IV_4, 18.12.7.1 pour un résultat un peu plus général, se prouvant par la même démonstration.

soit V un voisinage ouvert affine de y dans Y. Soit $V' = f^{-1}(V)$. Alors V' est un voisinage ouvert de $x = f^{-1}(y)$ dans X. Il existe un voisinage ouvert affine W' de x dans X contenu dans V'. Posons alors $W = f(W')$. Alors W est un voisinage ouvert de y dans Y contenu dans le schéma affine V, donc W est séparé. Puisque W' est un schéma affine, la restriction de f au-dessus de W est alors un morphisme affine (EGA II, 1.2.3).

***Corollaire 2.10.* —** *Soit* G *un* S*-groupe* localement de type fini. *Supposons que, quel soit* $s \in S$, G_s *soit le* $\kappa(s)$*-groupe unité, alors* G *est le* S*-groupe unité.*

Plus généralement :

***Corollaire 2.11.* —** *Soit* $f : X \to Y$ *un* S*-morphisme* localement de type fini. *Pour que* f *soit un* monomorphisme*, il faut et il suffit que pour tout* $s \in S$*,* f_s *soit un* monomorphisme.

Il est clair que la condition est nécessaire ; montrons qu'elle est suffisante. Si, pour tout $s \in S$, f_s est un monomorphisme, a fortiori pour tout $y \in Y$, f_y est un monomorphisme ; nous pouvons donc supposer que $Y = S$.

D'après EGA I, 5.3.8, pour montrer que f est un monomorphisme, il suffit de montrer que $\Delta_f : X \to X \times_S X$ est un isomorphisme, ou, ce qui revient au même, que la première projection $p : X \times_S X \to X$ est un isomorphisme. Mais, si f_s est un monomorphisme, il résulte de même de EGA I, 5.3.8, que la première projection $X_s \times_{\kappa(s)} X_s \to X_s$ (qui s'identifie à p_s) est un isomorphisme. Or p possède la S-section
340 Δ_f, donc le lemme 2.9 affirme que si pour tout $s \in S$, p_s est un isomorphisme, alors il en est de même de p.

***Corollaire 2.12.* —** *Soit* G *un* S*-schéma possèdant une* S*-section* ε *et tel que le morphisme structural* $\pi : G \to S$ *soit* fermé. *Soit* $s \in S$ *tel que* π *soit* de présentation finie au point $\varepsilon(s)$*, et que* $\varepsilon_s : \mathrm{Spec}(\kappa(s)) \to G_s$ *soit un* isomorphisme (*ou, ce qui revient au même, que* $\pi_s : G_s \to \mathrm{Spec}\,\kappa(s)$ *soit un isomorphisme*). *Alors il existe un voisinage ouvert* U *de* s *dans* S *tel que* $\varepsilon|_U : U \to G \times_S U$ *soit un* isomorphisme.

Soit V l'ensemble des points de G où π est non ramifié ; on sait que V est ouvert (cf. N.D.E. (6)) et contient $\varepsilon(s)$. Donc $W = \varepsilon^{-1}(V)$ est un ouvert de S contenant s, et tel que pour tout $t \in W$, π soit non ramifié en $\varepsilon(t)$. Comme π est fermé, il en est de même de $\pi_{|W}$, donc nous pouvons supposer que $W = S$.

Alors, d'après 2.7.1, $X = G - \varepsilon(S)$ est une partie fermée de G ne rencontrant pas G_s donc, puisque π est fermé, $F = \pi(X)$ est une partie fermée de S ne rencontrant pas s ; posons $U = S - F$; alors U est un ouvert de S tel que $\varepsilon|_U$ soit un isomorphisme de U sur $G|_U$.

3. Composante neutre d'un groupe localement de présentation finie

3.0. — Étant donnée une partie A (resp. B) d'un S-schéma X (resp. Y), par abus de notation, $A \times_S B$ désignera la partie de $X \times_S Y$ formée des points dont la première projection appartient à A et la deuxième à B.

Étant donnée une partie A d'un S-groupe G, nous dirons que A est *stable pour la loi de groupe de* G si on a : $c(\mathrm{A}) \subset \mathrm{A}$ et $\mu(\mathrm{A} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{A}) \subset \mathrm{A}$.

Définition 3.1. — Soit G un S-foncteur en groupes vérifiant la condition suivante : 341

(+) quel que soit $s \in \mathrm{S}$, le foncteur $\mathrm{G}_s = \mathrm{G} \otimes_{\mathrm{S}} \kappa(s)$ est représentable.

On notera alors $\underline{\mathrm{G}_s^0}$ la composante connexe de l'élément neutre du $\kappa(s)$-groupe G_s [22]. On définit un sous-S-foncteur en groupes de G, appelé *composante neutre de* G, noté G^0, en posant quel que soit le morphisme $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$:

$$\mathrm{G}^0(\mathrm{T}) = \{u \in \mathrm{G}(\mathrm{T}) \mid \forall\, s \in \mathrm{S}, \quad u_s(\mathrm{T}_s) \subset \underline{\mathrm{G}_s^0}\}.$$

On a ainsi défini le foncteur $\mathrm{G} \mapsto \mathrm{G}^0$ de $(\widehat{\mathbf{Sch}}_{/\mathrm{S}})$-gr. dans $(\widehat{\mathbf{Sch}}_{/\mathrm{S}})$-gr.

Remarque 3.2. — (i) Soit G un S-foncteur en groupes vérifiant la condition (+), alors $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}^0/\mathrm{S}) = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$, en vertu de l'exposé II. [23] En effet, pour tout S-schéma T, notons I_T le T-schéma des nombres duaux sur T et $\tau : \mathrm{T} \to \mathrm{I}_\mathrm{T}$ la section zéro (cf. II, 2.1). Par définition, on a

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})(\mathrm{T}) = \{u \in \mathrm{G}(\mathrm{I}_\mathrm{T}) \mid u \circ \tau = e\},$$

où $e : \mathrm{T} \to \mathrm{G}$ désigne la composée de $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ et de la section unité $\mathrm{S} \to \mathrm{G}$, et de même

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}^0/\mathrm{S})(\mathrm{T}) &= \{u \in \mathrm{G}^0(\mathrm{I}_\mathrm{T}) \mid u \circ \tau = e\}\\ &= \{u \in \mathrm{G}(\mathrm{I}_\mathrm{T}) \mid u \circ \tau = e \quad \text{et} \quad u_s((\mathrm{I}_\mathrm{T})_s) \subset \underline{\mathrm{G}_s^0}, \quad \forall\, s \in \mathrm{S}\}.\end{aligned}$$

Or, pour tout $s \in \mathrm{S}$, T_s et $(\mathrm{I}_\mathrm{T})_s = \mathrm{I}_{\mathrm{T}_s}$ ont même ensemble sous-jacent, donc si $u \in \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})(\mathrm{T})$, on a $u_s(\mathrm{I}_{\mathrm{T}_s}) = e_s$, où e_s désigne le point unité de G_s, d'où $u \in \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}^0/\mathrm{S})(\mathrm{T})$. Donc l'inclusion $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}^0/\mathrm{S})(\mathrm{T}) \subset \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})(\mathrm{T})$ est une égalité pour tout T, d'où $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}^0/\mathrm{S}) = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$.

(ii) Soient G et G′ deux S-foncteurs en groupes vérifiant (+), alors :

a) si $\mathrm{G} \subset \mathrm{G}'$, alors $\mathrm{G}^0 \subset \mathrm{G}'^0$,

b) si $\mathrm{G} \subset \mathrm{G}'$ et $\mathrm{G}'^0 \subset \mathrm{G}$, alors $\mathrm{G}^0 = \mathrm{G}'^0$,

c) si pour tout $s \in \mathrm{S}$, G_s est *localement de type fini* sur $\kappa(s)$, alors G^0 satisfait la propriété (+), d'après $\mathrm{VI_A}$.2.3, et l'on a $(\mathrm{G}^0)^0 = \mathrm{G}^0$.

Proposition 3.3. — *Soit* G *un* S-*foncteur en groupes vérifiant la condition* (+) *et soit* S′ *un* S-*schéma. Alors* $(\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}')^0 = \mathrm{G}^0 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$, *autrement dit le foncteur* $\mathrm{G} \mapsto \mathrm{G}^0$

[22] N.D.E. : C'est une notation légèrement abusive, mais qui est compatible avec les notations de $\mathrm{VI_A}$, 2.3 lorsque cette composante connexe est l'espace topologique sous-jacent à un sous-schéma en groupes *ouvert* G^0 de G, cf. $\mathrm{VI_A}$, 2.2.bis.

[23] N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.

commute aux changements de base, i.e. le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(\widehat{\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}}})\text{-gr.} \arrow[r, "\mathrm{G}\mapsto\mathrm{G}^0"] \arrow[d] & (\widehat{\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}}})\text{-gr.} \arrow[d] \\
(\widehat{\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}'}})\text{-gr.} \arrow[r] & (\widehat{\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}'}})\text{-gr.}
\end{tikzcd}$$

342 Il suffit en effet de vérifier que, pour tout $s' \in \mathrm{S}'$, dont on désigne par s l'image dans S, $((\mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{S}')\otimes_{\mathrm{S}'}\kappa(s'))^0 = (\mathrm{G}_s\otimes_{\kappa(s)}\kappa(s'))^0$ égale $\mathrm{G}_s^0\otimes_{\kappa(s)}\kappa(s')$; or cela résulte de $\mathrm{VI_A}$, 2.1.2. Notons, pour un usage ultérieur en 4.2, que l'on n'a pas utilisé la structure de groupe de G_s, mais seulement le fait que G_s^0 possède un point rationnel, à savoir $\varepsilon(s)$, donc est géométriquement connexe (voir aussi EGA IV_2, 4.5.14).

***Cas particulier 3.4.* —** Soit G un S-schéma en groupes ; notons $\underline{\mathrm{G}^0}$ le sous-ensemble de G réunion des $\underline{\mathrm{G}_s^0}$ lorsque s parcourt S. Alors $\underline{\mathrm{G}^0}$ est une partie de G stable pour la loi de groupe de G (cf. 3.0), et quel que soit le morphisme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ on a :

$$\mathrm{G}^0(\mathrm{S}') = \{u \in \mathrm{G}(\mathrm{S}') \mid u(\underline{\mathrm{S}'}) \subset \underline{\mathrm{G}^0}\}.$$

Lorsque $\underline{\mathrm{G}^0}$ est une partie ouverte de G, il est clair que G^0 est représentable par le sous-schéma de G induit sur l'ouvert $\underline{\mathrm{G}^0}$.

***Proposition 3.5.* —** *Soient* S *un schéma* quasi-compact et quasi-séparé*, et* G *un* S-*groupe à* fibres localement de type fini*. Il existe alors un* ouvert quasi-compact U *de* G *contenant* $\underline{\mathrm{G}^0}$.

La section unité ε étant une immersion, $\varepsilon(\mathrm{S})$ est un sous-espace quasi-compact de G, donc il existe un ouvert quasi-compact V de G qui contient $\varepsilon(\mathrm{S})$. Puisque S est quasi-séparé, et que V est quasi-compact, V est quasi-compact sur S (EGA IV_1, 1.2.4), donc $\mathrm{V}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{V}$ est quasi-compact sur S, donc quasi-compact. Alors $\mathrm{V}\cdot\mathrm{V} = \mu(\mathrm{V}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{V})$ est quasi-compact. Posons $\mathrm{V}_s = \mathrm{V}\cap\mathrm{G}_s$ et $\mathrm{V}_s^0 = \mathrm{V}\cap\mathrm{G}_s^0$. Alors V_s^0 est un ouvert de G_s^0, dense dans G_s^0 puisque G_s^0 est irréductible ($\mathrm{VI_A}$ 2.4), donc $\mathrm{V}_s^0\cdot\mathrm{V}_s^0 = \mathrm{G}_s^0$ ($\mathrm{VI_A}$ 0.5), ce qui montre que $\mathrm{V}_s\cdot\mathrm{V}_s \supset \mathrm{G}_s^0$, donc que $\mathrm{V}\cdot\mathrm{V}\supset\underline{\mathrm{G}^0}$. Enfin, puisque $\mathrm{V}\cdot\mathrm{V}$ est quasi-compact, il existe un ouvert quasi-compact U de G contenant $\mathrm{V}\cdot\mathrm{V}$ et a fortiori $\underline{\mathrm{G}^0}$.

***Corollaire 3.6.* —** *Soit* G *un* S-*groupe à* fibres localement de type fini et connexes*. Alors* G *est* quasi-compact sur S*.*

343 Notre assertion étant locale sur S (EGA I, 6.6.1), on est ramené au cas où S est affine. D'après 3.5, il existe alors un ouvert quasi-compact U de G contenant $\underline{\mathrm{G}^0} = \mathrm{G}$, donc G est quasi-compact, donc quasi-compact sur le schéma affine S (EGA I, 6.6.4 (v)).

Proposition 3.7. — [24] *Soit* G *un* S-*groupe* localement de présentation finie*, alors :*

(i) $\underline{\mathrm{G}^0}$ *est* ind-constructible *dans* G.

(ii) *Si de plus* G *est* quasi-séparé sur S*, et* S quasi-compact et quasi-séparé*, alors* $\underline{\mathrm{G}^0}$ *est* constructible.

(iii) *Par conséquent, si* G *est* quasi-séparé sur S*,* $\underline{\mathrm{G}^0}$ *est* localement constructible.

Montrons d'abord la première assertion. Puisque $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ est localement de présentation finie, étant donné $s \in \mathrm{S}$, il existe un ouvert U de G contenant $\varepsilon(s)$ et un ouvert V de S contenant s tels que $\pi(\mathrm{U}) \subset \mathrm{V}$ et que le morphisme $\pi' : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ déduit de π soit de présentation finie. Alors $\mathrm{T} = \varepsilon^{-1}(\mathrm{U})$ est un ouvert de S et si l'on note $\mathrm{W} = \pi'^{-1}(\mathrm{T})$ et $\pi'' = \pi'|_{\mathrm{W}}$, alors $\pi'' : \mathrm{W} \to \mathrm{T}$ est de présentation finie, et admet comme section le morphisme $\varepsilon'' : \mathrm{T} \to \mathrm{W}$ déduit de ε.

Pour tout $t \in \mathrm{T}$, comme G^0_t est irréductible ($\mathrm{VI_A}$ 2.4), $\mathrm{W} \cap \mathrm{G}^0_t$ est dense dans G^0_t, donc irréductible, donc connexe : c'est donc la composante connexe de $\pi''^{-1}(t)$ contenant $\varepsilon''(t)$. Il résulte alors de EGA IV_3, 9.7.12, que la réunion W^0 des $\mathrm{W} \cap \mathrm{G}^0_t$, pour $t \in \mathrm{T}$, est localement constructible dans W. D'autre part, il résulte de $\mathrm{VI_A}$ 0.5, que $\underline{\mathrm{G}^0} \cap \pi^{-1}(\mathrm{T}) = \mathrm{W}^0 \cdot \mathrm{W}^0$, i.e. $\underline{\mathrm{G}^0} \cap \pi^{-1}(\mathrm{T})$ est l'image de $\mathrm{W}^0 \times_{\mathrm{T}} \mathrm{W}^0$ par le morphisme $\mu'' : \mathrm{W} \times_{\mathrm{T}} \mathrm{W} \to \pi^{-1}(\mathrm{T})$ déduit de μ. [25] Comme $\mathrm{W} \times_{\mathrm{T}} \mathrm{W}$ (resp. $\pi^{-1}(\mathrm{T})$) est de présentation finie (resp. localement de présentation finie) sur T, alors μ'' est localement de présentation finie et quasi-séparé, d'après EGA IV_1, 1.4.3 et 1.2.2 ; si de plus $\pi^{-1}(\mathrm{T})$ est quasi-séparé sur T, alors μ'' est quasi-compact (*loc. cit.* 1.2.4), donc de présentation finie. Comme $\mathrm{W}^0 \times_{\mathrm{T}} \mathrm{W}^0$ est localement constructible dans $\mathrm{W} \times_{\mathrm{T}} \mathrm{W}$ (puisque W^0 l'est dans W), il résulte du théorème de constructibilité de Chevalley (*loc. cit.*, 1.8.4 et 1.9.5 (viii)) que $\underline{\mathrm{G}^0} \cap \pi^{-1}(\mathrm{T})$ est ind-constructible dans $\pi^{-1}(\mathrm{T})$, et est localement constructible dans $\pi^{-1}(\mathrm{T})$ si G (et donc $\pi^{-1}(\mathrm{T})$) est quasi-séparé sur T. Ceci prouve les assertions (i) et (iii).

Supposons maintenant G quasi-séparé sur S, et S quasi-compact et quasi-séparé. **344**
Alors, d'après 3.5, il existe un ouvert quasi-compact U de G contenant $\underline{\mathrm{G}^0}$. Puisque G est quasi-séparé sur S, G est quasi-séparé, donc l'ouvert U est rétrocompact (EGA IV_1, 1.2.7), et il suffit de montrer que $\underline{\mathrm{G}^0}$ est constructible dans U (EGA 0_{III}, 9.1.8).

---

[24] N.D.E. : Rappelons les définitions et résultats suivants (cf. EGA 0_{III}, § 9.1 et EGA IV_1, §§ 1.8 et 1.9). Soit X un espace topologique.

(i) Un ouvert U de X est dit *rétrocompact* si l'inclusion $\mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{X}$ est quasi-compacte, i.e. si $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$ est quasi-compact pour tout ouvert quasi-compact $\mathrm{V} \subset \mathrm{X}$.

(ii) Une partie C de X est dite *constructible* si c'est une réunion finie de parties de la forme $\mathrm{U} - \mathrm{V}$, où U et V sont des ouverts rétrocompacts dans X.

(iii) Une partie L de X est dite *localement constructible* si pour tout $x \in \mathrm{X}$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que $\mathrm{L} \cap \mathrm{U}$ soit constructible dans U. (N. B. Si X est quasi-compact et quasi-séparé, L est alors constructible.)

(iv) Une partie I de X est dite *ind-constructible* si pour tout $x \in \mathrm{X}$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que $\mathrm{I} \cap \mathrm{U}$ soit réunion de parties localement constructibles dans U.

Soit maintenant $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de schémas. D'après le théorème de constructibilité de Chevalley (cf. EGA IV_1, 1.8.4 et 1.9.5 (viii)), si f est de présentation finie (resp. localement de présentation finie), alors l'image par f de toute partie localement constructible est localement constructible (resp. ind-constructible).

[25] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

De plus, U étant quasi-compact, donc quasi-compact sur S (EGA IV_1, 1.2.4), et quasi-séparé sur S, la restriction de π à U est de présentation finie, donc d'après EGA IV_3, 9.7.12, $\underline{\mathrm{G}^0}$ est localement constructible dans U, donc constructible dans U, puisque U est quasi-compact et quasi-séparé (EGA IV_1, 1.8.1). Ceci prouve (ii), et il en résulte que pour tout ouvert T quasi-compact et quasi-séparé de S (par exemple, pour tout ouvert affine de S), $\underline{\mathrm{G}^0} \cap \pi^{-1}(\mathrm{T})$ est constructible.

Corollaire 3.8. — *Soient* S_0 *un schéma* quasi-compact et quasi-séparé, I *un ensemble préordonné filtrant croissant,* $(\mathscr{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *un système inductif de* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}$*-algèbres commutatives et* quasi-cohérentes, $\mathscr{A} = \varinjlim \mathscr{A}_i$, $\mathrm{S}_i = \operatorname{Spec} \mathscr{A}_i$ *pour* $i \in \mathrm{I}$, *et* $\mathrm{S} = \operatorname{Spec} \mathscr{A}$ (cf. EGA II, 1.3.1).

Soit G *un* S_0*-schéma en groupes* localement de présentation finie. *Alors l'application canonique* $\varinjlim \mathrm{G}^0(\mathrm{S}_i) \to \mathrm{G}^0(\mathrm{S})$ *est* bijective.

Puisque G est localement de présentation finie sur S, l'application canonique $\varinjlim \mathrm{G}(\mathrm{S}_i) \to \mathrm{G}(\mathrm{S})$ est bijective, d'après EGA IV_2, 8.14.2 c). Il s'ensuit immédiatement que l'application canonique $\varinjlim \mathrm{G}^0(\mathrm{S}_i) \to \mathrm{G}^0(\mathrm{S})$ est injective. Montrons qu'elle est surjective. Soit $g \in \mathrm{G}^0(\mathrm{S}) \subset \mathrm{G}(\mathrm{S})$. Il existe $i \in \mathrm{I}$ tel que g se factorise au moyen de $g_i \in \mathrm{G}(\mathrm{S}_i)$ à travers $\mathrm{S} \to \mathrm{S}_i$; par hypothèse, $g^{-1}(\underline{\mathrm{G}^0}) = \mathrm{S}$. Mais, d'après 3.7, $\underline{\mathrm{G}^0}$ est ind-constructible dans G, donc $g_i^{-1}(\underline{\mathrm{G}^0})$ l'est dans S_i. Il résulte alors de EGA IV_2, 8.3.4, qu'il existe un indice $j \geqslant i$ tel que $g_j^{-1}(\underline{\mathrm{G}^0}) = \mathrm{S}_j$, où g_j est l'application déduite de g_i par le changement de base $\mathrm{S}_j \to \mathrm{S}_i$. Cela montre que $g_j \in \mathrm{G}^0(\mathrm{S}_j)$, donc que g
345 provient d'un élément de $\varinjlim \mathrm{G}^0(\mathrm{S}_i)$.

Proposition 3.9. — *Soit* G *un* S*-groupe* localement de présentation finie. *Supposons que* G^0 *soit* représentable *; alors le morphisme canonique* $i : \mathrm{G}^0 \to \mathrm{G}$ *est une* immersion ouverte *; de plus,* G^0 *est* quasi-compact *sur* S.

Puisque G^0 est un sous-foncteur du foncteur G, le morphisme i est un monomorphisme, donc est radiciel. D'après la définition du foncteur G^0, on vérifie immédiatement sur la définition (EGA IV_4, 17.1.1) que i est un morphisme formellement étale (en remarquant que $\underline{\mathrm{G}^0}$ est l'image de i dans G). Enfin, il résulte de la caractérisation (EGA IV_3, 8.14.2 c)) des S-schémas localement de présentation finie à l'aide du foncteur qu'ils représentent, et de 3.8, que, puisque G est localement de présentation finie sur S, il en est de même de G^0. Donc i est localement de présentation finie (cf. EGA IV_1, 1.4.3) ; c'est donc un morphisme radiciel et étale ; donc une immersion ouverte (EGA IV_4, 17.9.1).

Enfin, la dernière assertion résulte de 3.6.

Théorème 3.10. — *Soit* G *un* S*-groupe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est* lisse *sur* S aux points de la section unité.

(ii) G *est* plat et localement de présentation finie *sur* S aux points de la section unité, *et pour tout* $s \in \mathrm{S}$, G_s *est* lisse *sur* $\kappa(s)$.

(iii) *Il existe un sous-schéma en groupes ouvert* G' *de* G, lisse *sur* S.

(iv) G^0 *est* représentable *par un sous-schéma ouvert de* G, lisse *sur* S.

Il est clair que (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) et, d'après 1.3.1 et 2.4, (i) entraîne (ii) et (iii). De plus, (ii) $\Rightarrow$ (i) d'après EGA IV_4, 17.5.1.

Montrons enfin que (iii) entraîne (iv). Le lemme 3.10.1 ci-dessous montre que G' contient $\underline{\mathrm{G}^0}$, et que $\underline{\mathrm{G}'^0} = \underline{\mathrm{G}^0}$. Il suffit donc de montrer que $\underline{\mathrm{G}^0}$ est ouvert dans G, car 346
on a déjà vu (3.4) qu'alors G^0 sera représentable par le sous-schéma en groupes lisse induit par G' sur l'ouvert $\underline{\mathrm{G}'^0} = \underline{\mathrm{G}^0}$. On peut donc supposer que $\mathrm{G}' = \mathrm{G}$.

Pour montrer que $\underline{\mathrm{G}^0}$ est ouvert, il suffit de montrer que tout $s \in \mathrm{S}$ possède un voisinage T dans S tel que $\underline{\mathrm{G}^0} \cap \pi^{-1}(\mathrm{T})$ soit ouvert dans $\pi^{-1}(\mathrm{T})$. Soit $s \in \mathrm{S}$. Puisque $\mathrm{G} = \mathrm{G}'$, alors π est localement de présentation finie, donc on peut construire, comme dans la démonstration de 3.7, un ouvert T de S contenant s, et un ouvert W de G contenant $\varepsilon(s)$, tels que le morphisme $\pi'' : \mathrm{W} \to \mathrm{T}$ déduit de π soit de présentation finie et admette comme section le morphisme $\varepsilon'' : \mathrm{T} \to \mathrm{W}$ déduit de ε. Pour tout $t \in \mathrm{T}$, $\mathrm{W} \cap \mathrm{G}^0_t$ est alors la composante connexe de $\pi''^{-1}(t)$ contenant $\varepsilon''(t)$. Puisque π est lisse, il en est de même de π'' qui est donc lisse et de présentation finie. Alors, d'après EGA IV_3, 15.6.5, la réunion W^0 des $\mathrm{W} \cap \mathrm{G}^0_t$ pour $t \in \mathrm{T}$ est *ouverte* dans W.

D'autre part, d'après $\mathrm{VI_A}$ 0.5, on a $\mathrm{W}^0 \cdot \mathrm{W}^0 = \underline{\mathrm{G}^0} \cap \pi^{-1}(\mathrm{T})$, et il faut montrer que ceci est ouvert dans $\pi^{-1}(\mathrm{T})$. Nous pouvons donc supposer désormais que $\mathrm{T} = \mathrm{S}$; il reste à montrer que $\mathrm{W}^0 \cdot \mathrm{W}^0$ est ouvert dans G. Puisque π est universellement ouvert, il en est de même de μ ($\mathrm{VI_A}$ 0.1). Donc, puisque W^0 est ouvert dans G, il en est de même de $\mathrm{W}^0 \cdot \mathrm{W}^0 = \mu(\mathrm{W}^0 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{W}^0)$.

Ce résultat sera amélioré en 4.4.

Lemme 3.10.1. — *Soit* G *un* S*-groupe à* fibres localement de type fini. *Alors tout sous-schéma en groupes ouvert* H *de* G *contient* $\underline{\mathrm{G}^0}$*, et vérifie :* $\underline{\mathrm{G}^0} = \underline{\mathrm{H}^0}$.

Soit $s \in \mathrm{S}$; posons $\mathrm{G}'_s = \mathrm{H}_s \cap \mathrm{G}^0_s$; alors G'_s est un ouvert de G^0_s, qui est dense dans G^0_s puisque G^0_s est irréductible ($\mathrm{VI_A}$ 2.4), donc $\mathrm{G}'_s \cdot \mathrm{G}'_s = \mathrm{G}^0_s$ ($\mathrm{VI_A}$ 0.5), ce qui montre que $\mathrm{G}^0_s = \mathrm{G}'_s \cdot \mathrm{G}'_s \subset \mathrm{H}_s \cdot \mathrm{H}_s = \mathrm{H}_s$. On a donc $\mathrm{G}^0_s = \mathrm{H}^0_s$ pour tout s, d'où $\underline{\mathrm{G}^0} \subset \mathrm{H}$ et $\underline{\mathrm{G}^0} = \underline{\mathrm{H}^0}$.

Proposition 3.11. — *Soit* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme entre* S*-groupes* localement de pré- 347
sentation finie. *Si* u *est* plat*, l'application* $u^0 : \underline{\mathrm{G}^0} \to \underline{\mathrm{H}^0}$ *déduite de* u *est* surjective *; la réciproque est vraie si* G *est* plat *sur* S *et si* H *est à* fibres réduites. [26]

Supposons u plat ; alors pour tout $s \in \mathrm{S}$, u_s est plat et localement de présentation finie, donc ouvert (EGA IV_2, 2.4.6), donc le morphisme $u^0_s : \mathrm{G}^0_s \to \mathrm{H}^0_s$ est surjectif, d'après 1.3.2. [27] Donc l'application $u^0 : \underline{\mathrm{G}^0} \to \underline{\mathrm{H}^0}$ est surjective.

Réciproquement, supposons l'application $u^0 : \underline{\mathrm{G}^0} \to \underline{\mathrm{H}^0}$ surjective, G plat sur S et H à fibres réduites. Alors, pour tout $s \in \mathrm{S}$, le morphisme $u^0_s : \mathrm{G}^0_s \to \mathrm{H}^0_s$ est surjectif, donc plat en tout point au-dessus du point générique η de H^0_s (puisque $\mathscr{O}_{\mathrm{H}^0_s,\eta}$ est un

(26) N.D.E. : comparer avec $\mathrm{VI_A}$, 5.6.
(27) N.D.E. : On a raccourci l'original, en référant ici à 1.3.2. D'autre part, on a simplifié ci-dessous l'original, en supprimant une référence au théorème de platitude générique (EGA IV_2, 6.9.1), qui n'est pas nécessaire ici.

corps), donc u_s est plat d'après 1.3. Donc u est plat, d'après le « critère de platitude par fibres » (EGA IV_3, 11.3.11).

4. Dimension des fibres des groupes localement de présentation finie

Proposition 4.1. — *Soit* G *un* S*-schéma* localement de type fini*, muni d'une* S-section ε*, et tel que pour tout* $s \in \mathrm{S}$*, on ait* $\dim \mathrm{G}_s = \dim_{\varepsilon(s)} \mathrm{G}_s$ *(ce qui est le cas si* G *est un* S*-groupe* (1.5)*).*

(i) *La fonction* $s \mapsto \dim \mathrm{G}_s$ *est* semi-continue supérieurement *dans* S.

(ii) *Si, de plus,* G *est* localement de présentation finie *sur* S*, cette fonction est* localement constructible.

Soit $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ le morphisme structural. Le théorème de semi-continuité de Chevalley (EGA IV_3, 13.1.3) affirme que la fonction $x \mapsto \dim_x \pi^{-1}(\pi(x))$ est semi-continue
348 supérieurement dans G. Or, pour tout $s \in \mathrm{S}$, on a

$$\dim \mathrm{G}_s = \dim \pi^{-1}(s) = \dim_{\varepsilon(s)} \pi^{-1}(\pi(\varepsilon(s)))\,;$$

et puisque la fonction $s \mapsto \varepsilon(s)$ est continue dans S, la fonction composée $s \mapsto \dim \mathrm{G}_s$ est semi-continue supérieurement dans S.

Supposons G localement de présentation finie sur S. Pour montrer que la fonction $s \mapsto \dim \mathrm{G}_s$ est localement constructible, on voit en raisonnant comme précédemment qu'il suffit de montrer que la fonction $x \mapsto \dim_x \pi^{-1}(\pi(x))$ est localement constructible dans G, ce qui résulte de EGA IV_3, 9.9.1.

Proposition 4.2. — *Soit* $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ *un* S*-schéma* localement de présentation finie*, muni d'une* S-section ε *et vérifiant les deux conditions suivantes (qui sont vérifiées si* G *est un* S*-groupe, d'après* 1.5 *et* $\mathrm{VI_A}$ 2.4.1) :

a) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$ *et tout* $x \in \mathrm{G}_s$*, on a* $\dim \mathrm{G}_s = \dim_x \mathrm{G}_s$ *(ou, ce qui revient au même* (1.5)*, pour tout* $s \in \mathrm{S}$*, toutes les composantes irréductibles de* G_s *ont même dimension).*

b) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$*, si on note* G_s^0 *la composante connexe de* G_s *contenant* $\varepsilon(s)$*,* G_s^0 *est* géométriquement irréductible.

Soit $s \in \mathrm{S}$*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est* universellement ouvert *sur* S aux points de G_s^0.

(i bis) G *est* universellement ouvert *sur* S en tout point d'un voisinage de $\varepsilon(s)$ dans G_s^0. [28]

(ii) *La fonction* $t \mapsto \dim \mathrm{G}_t$ *est* constante dans un voisinage de s *dans* S.

(iii) $\underline{\mathrm{G}^0}$ *est* « universellement ouvert sur S aux points de G_s^0 »*, c.-à-d., étant donnés* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$*,* $s' \in \mathrm{S}'_s$*,* $g \in \mathrm{G}^0_{s'}$ *et* V *un voisinage ouvert de* g *dans* $\mathrm{G}' = \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$*, alors* $\pi(\mathrm{V} \cap \underline{\mathrm{G}'^0})$ *est un voisinage ouvert de* s' *dans* S'. [29]

[28] N.D.E. : On trouve dans l'original : « en les points de $\varepsilon(s)$ » ; il n'est pas suffisant de supposer que G soit universellement ouvert sur S en $\varepsilon(s)$, comme le montre l'exemple donné dans la N.D.E. (19). On a corrigé la preuve en conséquence.

[29] N.D.E. : On a ajouté la condition (iii), signalée par O. Gabber ; elle sera utile plus loin (5.7).

Évidemment (i) $\Rightarrow$ (i bis). D'après EGA IV_3, 14.3.3.1 (ii), l'ensemble des points de G_s^0 où π_{G} est universellement ouvert est *fermé* dans G_s^0. Donc, comme G_s^0 est irréductible, on a (i bis) $\Rightarrow$ (i).

Montrons que (i) entraîne (ii). Soit T l'ensemble des $t \in \mathrm{S}$ tels que $\dim \mathrm{G}_t = \dim \mathrm{G}_s$. D'après 4.1, T est localement constructible donc, d'après EGA IV_1, 1.10.1, pour montrer que T est un voisinage de s, il suffit de montrer que toute générisation s' de s appartient à T. 349

Soient x le point générique de G_s^0 et U un ouvert de G contenant x. Comme π_{G} est universellement ouvert en ξ, alors, d'après EGA IV_3, 14.3.13, pour toute générisation s' de s, on a : $\dim(\mathrm{U} \cap \mathrm{G}_{s'}) \geqslant \dim_x(\mathrm{U} \cap \mathrm{G}_s)$. Compte-tenu de notre hypothèse a), ceci entraîne $\dim \mathrm{G}_{s'} \geqslant \dim \mathrm{G}_s$. Or, la fonction $s \mapsto \dim \mathrm{G}_s$ étant semi-continue supérieurement, d'après 4.1, on a aussi $\dim \mathrm{G}_{s'} \leqslant \dim \mathrm{G}_s$, d'où $s' \in \mathrm{T}$. Ceci prouve que (i) $\Rightarrow$ (ii).

Il est clair que (iii) $\Rightarrow$ (i) ; montrons que (ii) $\Rightarrow$ (iii). Comme la dimension des fibres est inchangée par extension du corps de base et comme la formation de $\underline{\mathrm{G}}^0$ commute au changement de base (cf. la démonstration de 3.3), on peut supposer que $\mathrm{S}' = \mathrm{S}$ et $s' = s$. De plus, comme tout ouvert V de G rencontrant G_s^0 contient le point générique η de G_s^0, on peut supposer que $g = \eta$.

On peut de plus supposer S affine. Soit U un voisinage ouvert affine de $\varepsilon(s)$, il est alors de présentation finie sur S. Remplaçant S par $\varepsilon^{-1}(\mathrm{U})$ puis U par $\mathrm{U} \cap \pi^{-1}(\mathrm{S})$, on se ramène au cas où $\pi : \mathrm{U} \to \mathrm{S}$ est de présentation finie et admet $\varepsilon : \mathrm{S} \to \mathrm{U}$ pour section. Alors, d'après EGA IV_3, 9.7.12, $\underline{\mathrm{G}}^0 \cap \mathrm{U}$ est constructible dans U. Alors, remplaçant V par un ouvert affine contenu dans $\mathrm{V} \cap \mathrm{U}$, on obtient que $\underline{\mathrm{G}}^0 \cap \mathrm{V}$ est constructible dans V. Comme $\pi : \mathrm{V} \to \mathrm{S}$ est de présentation finie, alors $\pi(\underline{\mathrm{G}}^0 \cap \mathrm{V})$ est localement constructible dans S, d'après le théorème de constructibilité de Chevalley (cf. EGA IV_1, 1.8.4).

Donc, d'après *loc. cit.*, 1.10.1, pour montrer que $\pi(\underline{\mathrm{G}}^0 \cap \mathrm{V})$ est un voisinage ouvert de s, il suffit de montrer que pour toute générisation t de s, il existe une générisation ξ de η appartenant à $\underline{\mathrm{G}}^0$ (et donc à $\underline{\mathrm{G}}^0 \cap \mathrm{V}$). Or le point générique ξ de G_t^0 est une générisation de η. En effet, $\varepsilon(s)$ appartient à l'adhérence X de $\{\xi\}$ dans G donc, d'après le théorème de semi-continuité de Chevalley (cf. EGA IV_3, 13.1.3), on a $\dim_{\varepsilon(s)} \mathrm{X}_s \geqslant \dim_\xi \mathrm{X}_t$; d'autre part, l'hypothèse (ii) entraîne que $\dim_\xi \mathrm{G}_t^0 = \dim_{\varepsilon(s)} \mathrm{G}_s$. Il en résulte qu'une des composante irréductibles de X_s contenant $\varepsilon(s)$ est égale à G_s^0, d'où $\eta \in \overline{\{\xi\}}$. Ceci prouve que (ii) $\Rightarrow$ (iii), ce qui démontre la proposition.

[30] On peut aussi démontrer l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) comme suit. Puisque π est localement de présentation finie, il existe un ouvert U de G contenant $\varepsilon(s)$ et un ouvert V de S contenant s tels que $\pi(\mathrm{U}) \subset \mathrm{V}$ et que le morphisme $\pi' : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ déduit de π soit de présentation finie. Posons alors $\mathrm{T} = \varepsilon^{-1}(\mathrm{U})$ et $\mathrm{W} = \pi'^{-1}(\mathrm{T}) = \mathrm{U} \cap \pi^{-1}(\mathrm{T})$. Alors le morphisme $\pi'' : \mathrm{W} \to \mathrm{T}$ déduit de π' est de présentation finie et admet comme section le morphisme $\varepsilon'' : \mathrm{T} \to \mathrm{W}$ déduit de ε. De plus, pour tout $t \in \mathrm{T}$, G_t^0 étant

[30] N.D.E. : Ce qui précède nous a été communiqué par O. Gabber ; on a également conservé la démonstration de l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) donnée dans l'original.

irréductible, $\mathrm{W} \cap \mathrm{G}_t^0$ est dense dans G_t^0, donc irréductible, donc connexe : c'est donc la composante connexe de $\pi''^{-1}(t)$ contenant $\varepsilon''(t)$.

Comme $\mathrm{W} \cap \mathrm{G}_t^0$ est un ouvert dense de G_t^0, on a, d'après 1.5 et EGA IV_2, 5.2.1, $\dim(\mathrm{W} \cap \mathrm{G}_t^0) = \dim \mathrm{G}_t^0 = \dim \mathrm{G}_t$, donc la fonction $t \mapsto \dim \mathrm{W} \cap \mathrm{G}_t^0$ est constante dans un voisinage de s dans T. Montrons enfin que, quel que soit $t \in \mathrm{T}$, $\mathrm{W} \cap \mathrm{G}_t^0$ est géométriquement irréductible. Soit K une extension de $\kappa(t)$, alors $(\mathrm{W} \cap \mathrm{G}_t^0) \otimes_{\kappa(t)} \mathrm{K} = (\mathrm{W} \otimes_{\kappa(t)} \mathrm{K}) \cap (\mathrm{G}_t^0 \otimes_{\kappa(t)} \mathrm{K})$ est un ouvert non vide de $\mathrm{G}_t^0 \otimes_{\kappa(t)} \mathrm{K}$, donc est irréductible puisque $\mathrm{G}_t^0 \otimes_{\kappa(t)} \mathrm{K}$ l'est.

Nous sommes alors dans les conditions d'application de EGA IV_3, 15.6.6 (ii), qui affirme que π'' (donc π) est universellement ouvert aux points de $\mathrm{W} \cap \mathrm{G}_s^0$. Mais, d'après EGA IV_3, 14.3.3.1 (ii), le sous-ensemble de G_s formé des points où π est universellement ouvert est fermé dans G_s ; puisqu'il contient $\mathrm{W} \cap \mathrm{G}_s^0$, il contient donc son adhérence G_s^0.

350 ***Corollaire 4.3.*** — *Soit* G *un* S-*groupe* plat et localement de présentation finie. *Alors la fonction* $s \mapsto \dim \mathrm{G}_s$ *est* localement constante *sur* S.

Cela résulte immédiatement de 4.2, car tout morphisme plat et localement de présentation finie est universellement ouvert (EGA IV_2, 2.4.6).

Corollaire 4.4. — *Soit* G *un* S-*groupe* localement de présentation finie *sur* S aux points de la section unité. *Considérons les conditions :*

(i) G *est* lisse *sur* S aux points de la section unité (cf. 3.10).

(ii) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$, G_s *est* lisse *sur* $\kappa(s)$, *et la fonction* $s \mapsto \dim \mathrm{G}_s$ *est* localement constante *sur* S.

(iii) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$, G_s *est* lisse *sur* $\kappa(s)$, *et il existe un* voisinage V de la section unité *tel que* $\pi_{\mathrm{V}} : \mathrm{V} \to \mathrm{S}$ *soit* universellement ouvert.

(iv) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$, G_s^0 *est* lisse *sur* $\kappa(s)$, *et* G^0 *est* représentable *par un sous-schéma en groupes ouvert de* G, universellement ouvert *sur* S.

Alors on a les implications suivantes : (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv).

Si on suppose de plus S réduit, *alors les conditions* (i) *à* (iv) *sont équivalentes, et impliquent que* G^0 *est* lisse *sur* S. [31]

Montrons que (i) entraîne (ii). Pour tout $x \in \mathrm{G}$, on a $\dim_x \pi^{-1}(\pi(x)) = \dim \pi^{-1}(\pi(x))$, d'après 1.5. Par conséquent, d'après EGA IV_4, 17.10.2, la fonction

$$x \mapsto \dim_x \pi^{-1}(\pi(x)) = \dim \pi^{-1}(\pi(x))$$

est continue au voisinage de la section unité ; donc la fonction $s \mapsto \dim \mathrm{G}_s$ est continue dans S, donc localement constante dans S. D'autre part, pour tout $s \in \mathrm{S}$, G_s est lisse sur $\kappa(s)$, d'après 1.3.1.

[31] N.D.E. : On ne peut se dispenser ici de l'hypothèse que S soit réduit : si k est un corps, $\mathrm{S} = \operatorname{Spec} \mathrm{A}$, où $\mathrm{A} = k[\delta]$ avec $\delta^2 = 0$, et G le sous-groupe fermé $\operatorname{Spec} \mathrm{A}[\mathrm{X}]/(\delta \mathrm{X})$ de $\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}$ (qui à toute A-algèbre R associe le sous-groupe des $r \in \mathrm{R}$ tels que $\delta r = 0$), alors G est un S-groupe vérifiant (ii)–(iv), mais il n'est pas plat, donc pas lisse, sur S.

Montrons que (ii) entraîne (iv). Il suffit de montrer que $\underline{\mathrm{G}^0}$ est *ouvert* dans G, car alors, d'après 3.4, G^0 sera représentable par le sous-schéma en groupes induit sur $\underline{\mathrm{G}^0}$, et les propriétés de G^0 citées dans l'énoncé résulteront de 2.4 et 4.2. Étant donné 351
$s \in \mathrm{S}$, construisons comme dans la démonstration de 3.10, W, T, π'', ε'' et W^0. Alors, d'après EGA IV_3, 15.6.7, W^0 est *ouvert* dans W. D'autre part, sous l'hypothèse 4.4 (ii), il résulte de 4.2 que π est universellement ouvert en tout point de W^0, donc ($\mathrm{VI_A}$ 0.1) μ est universellement ouvert en tout point de $\mathrm{W}^0 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{W}^0$, ce qui montre que $\mathrm{W}^0 \cdot \mathrm{W}^0$ est ouvert, et on termine comme dans la démonstration du théorème 3.10.

Il est clair que (iv) $\Rightarrow$ (iii), et (iii) $\Rightarrow$ (ii) résulte de 4.2 appliqué à V.

Enfin, supposons (ii)–(iv) vérifiés et montrons que G^0 est lisse sur S si S est réduit. (32) Pour cela, on peut supposer $\mathrm{G} = \mathrm{G}^0$. Alors G est de présentation finie sur S en vertu de 5.5 ci-dessous. Ainsi, π_{G} est de présentation finie, à fibres géométriquement intègres, de dimension localement constante sur S. Alors, d'après EGA IV_3, 15.6.7, le morphisme $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_{\mathrm{réd}} \to \mathrm{S}_{\mathrm{réd}}$ déduit de π_{G} est plat, donc π_{G} est *plat* si S est réduit. Dans ce cas, $\mathrm{G} = \mathrm{G}^0$ est lisse sur S, d'après le théorème 3.10.

5. Séparation des groupes et espaces homogènes

Proposition 5.1. — *Pour qu'un* S-*groupe* G *soit* séparé, *il faut et il suffit que la section unité de* G *soit une* immersion fermée.

La condition est nécessaire (EGA I, 5.4.6) ; elle est suffisante en vertu du diagramme cartésien suivant (cf. $\mathrm{VI_A}$ 0.3) :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \arrow[r, "\mu\circ(\mathrm{id_G} \times c)"] & \mathrm{G} \\ \mathrm{G} \arrow[u, "\Delta_{\mathrm{G/S}}"] \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{S} \arrow[u, "\varepsilon"'] \end{tikzcd} \quad .$$

Proposition 5.2. — *Si* S *est discret, tout* S-*groupe est séparé.*

En effet, S est alors égal à $\coprod_{s\in\mathrm{S}} \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$, et, d'après EGA I, 5.5.5, il suffit de montrer que pour tout $s \in \mathrm{S}$, $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$ est séparé, ce qui résulte de $\mathrm{VI_A}$ 0.3, 352
puisque $\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$ est un anneau local de dimension 0. (33)

Théorème 5.3. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S-*schéma en groupes* localement de présentation finie *sur* S *et* universellement ouvert *sur* S au voisinage de la section unité, X *un* S-*schéma sur lequel* G *opère de façon que le morphisme :*

$$\Phi : \mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{X}, \qquad (g, x) \mapsto (gx, x)$$

soit surjectif. *On suppose de plus que, pour tout* $s \in \mathrm{S}$ *:*

(32) N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

(33) N.D.E. : On a remplacé « artinien » par « de dimension 0 » (et l'on a mentionné cette généralisation dans $\mathrm{VI_A}$ 0.3).

(i) *il existe un sous-schéma ouvert* U *de* X, séparé *sur* S, *tel que* U_s *soit* dense *dans* X_s,

(ii) *la fibre* X_s *est* localement de type fini *sur* $\kappa(s)$. [34]

Alors X *est* séparé *sur* S.

Corollaire 5.4. — *Soient* S, G, X *comme dans les hypothèses préliminaires de* 5.3. *Supposons de plus* X à fibres localement de type fini et connexes. *Alors :*

(i) X *est* séparé sur S.

(ii) *S'il existe un ouvert* V *de* X, *quasi-compact sur* S *et rencontrant chaque fibre* X_s *non-vide* [35], *alors* X *est* quasi-compact *sur* S.

Démonstration. (i) En effet, soit $s \in S$ tel que $X_s \neq \varnothing$. Comme le morphisme $\Phi_s : G_s \times_{\kappa(s)} X_s \to X_s \times_{\kappa(s)} X_s$ déduit de Φ par changement de base, est surjectif, et comme X_s est connexe, alors X_s est irréductible, d'après VI_A, 2.5.4. Donc, si U est un ouvert affine de X tel que U_s soit non vide, U_s est dense dans X_s, et le théorème s'applique.

Pour prouver (ii), on peut supposer S affine. Alors V est quasi-compact et, d'après 3.5, il existe un ouvert quasi-compact U de G contenant $\underline{G}^0$. Soit $s \in S$ tel que $X_s \neq \varnothing$. Alors X_s est irréductible (VI_A, 2.6.6) et donc, puisque U_s contient G^0_s, le morphisme $U_s \times_{\kappa(s)} V_s \to X_s$, $(g, x) \mapsto gx$ est surjectif (VI_A, 2.6.4). Par conséquent le morphisme $U \times_S V \to X$ est surjectif et donc X est quasi-compact (puisque U et V le sont) ; comme on a supposé S affine, donc séparé, il en résulte que X est quasi-compact sur S (cf. EGA I, 6.6.4 (v)).

Remarque 5.4.1. — [36] On verra au cours de la démonstration que la conclusion du théorème 5.3 est vraie si l'on fait seulement l'hypothèse : (i′) il existe un sous-schéma ouvert U de X, *séparé* sur S, tel que U_s soit *dense dans toute composante irréductible* de X_s. (Celle-ci est conséquence de (i) si X_s a localement un nombre fini de composantes irréductibles, ce qui est le cas sous l'hypothèse (ii).) D'autre part, on verra plus loin que 5.4 est également vrai sous l'hypothèse que chaque fibre X_s soit quasi-séparée et connexe.

---

[34] N.D.E. : On a corrigé l'original en supposant G universellement ouvert sur S *au voisinage* de la section unité et en ajoutant l'hypothèse (ii) ; voir plus loin des exemples du à O. Gabber, qui montrent que les énoncés 5.3 et 5.4 de l'original sont faux sans hypothèses additionnelles. D'autre part, signalons que le th. 5.3 est une version remaniée du th. 5.3A ci-dessous, qui figure dans l'édition 1965 de SGAD, et est dû à M. Raynaud, cf. les Notes $(*)$ dans l'Exp. X, 8.5 et 8.8.

Théorème 5.3A (Raynaud). — *Soient* G *un* S-*groupe localement de présentation finie, universellement ouvert sur* S, *et à fibres connexes. Alors* G *est* séparé *sur* S.
Plus généralement, tout S-*schéma* X *localement de présentation finie sur* S, *muni d'une action de* G *telle que le morphisme* $\Phi : G \times_S X \to X \times_S X$, $(g, x) \mapsto (gx, x)$ *soit surjectif, est* séparé *sur* S.

[35] N.D.E. : Sans cette hypothèse, on a le contre-exemple suivant, signalé par O. Gabber : soient $G = S$ un schéma local de point fermé s, tel que $S^* = S - \{s\}$ ne soit pas quasi-compact, et X la réunion disjointe de $\{s\}$ et de S^*.

[36] N.D.E. : On a ajouté cette remarque, cf. la N.D.E. (34).

Corollaire 5.5. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-schéma en groupes,* localement de présentation finie*,* à fibres connexes*,* et universellement ouvert *sur* S*. Alors* G *est* séparé et de présentation finie *sur* S. [37]

En effet, d'après 3.6 et 5.4, G est quasi-compact et séparé sur S, et comme G est localement de présentation finie sur S, il est donc de présentation finie sur S.

5.6. — *Démonstration du théorème* 5.3. Avant d'établir 5.3, prouvons quelques lemmes.

Lemme 5.6.0. — [38] (i) *Soient* $A \subset B$ *des anneaux intègres, avec* B entier *sur* A*, et soit* $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$ *tel que* A *soit* unibranche *au point* $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$*. Alors le morphisme* $\pi : \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ *est* ouvert *au point* $\mathfrak{q}$*.*

(ii) *Soient* X, Y *deux préschémas* irréductibles*,* $f : X \to Y$ *un morphisme* dominant*,* x *un point de* X *tel que* f *soit* quasi-fini *en* x *et que* $y = f(x)$ *soit un point* unibranche *de* Y*. Alors* f *est* ouvert *au point* x*. En particulier, si* $Y = \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{Y,y})$ *est un préschéma* local *de point fermé* y*, alors* $f(U) = Y$ *pour tout voisinage* U *de* x*.*

(i) Soient K (resp. L) le corps des fractions de A (resp. B), A' le normalisé de A, et B' le sous-anneau de L engendré par A' et B. Alors B' est entier sur A'. Posons $Y = \operatorname{Spec}(A)$, $X = \operatorname{Spec}(B)$, $Y' = \operatorname{Spec}(A')$, $X' = \operatorname{Spec}(B')$, de sorte qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d] & Y' \arrow[d, "\phi"] \\ X \arrow[r, "\pi"] & Y \end{tikzcd}$$

dans lequel tous les morphismes sont entiers et surjectifs.

Comme A est unibranche en $\mathfrak{p}$, Y' possède un *unique* point $\mathfrak{p}'$ au-dessus de $\mathfrak{p}$; par conséquent, si U est un voisinage ouvert de $\mathfrak{p}'$ dans Y', alors $\phi(Y' - U)$ est un fermé ne contenant pas $\mathfrak{p}$, de sorte que l'ouvert complémentaire est contenu dans $\phi(U)$. Ceci montre que $\phi : Y' \to Y$ est ouvert en $\mathfrak{p}'$, et il suffit donc de montrer que π' est ouvert. On est ainsi ramené au cas où $A = A'$ est normal.

Soit N une extension quasi-galoisienne de K contenant L, soit $\widetilde{X} = \operatorname{Spec}(\widetilde{B})$, où $\widetilde{B}$ est la clôture intégrale de B dans N, et soit $G = \operatorname{Aut}(N/K)$. Comme $\widetilde{X} \to X$ est surjectif, il suffit de montrer que $\widetilde{\pi} : \widetilde{X} \to Y$ est ouvert. Soient U un ouvert de $\widetilde{X}$ et $U' = \bigcup_{g \in G} gU'$. Comme G agit transitivement sur les fibres de $\widetilde{X} \to Y$ (cf. [**BAC**], Chap. V, § 2.3, Prop. 6), alors $\widetilde{\pi}(U)$ égale $\widetilde{\pi}(U')$, et ce dernier est égal à l'ouvert complémentaire du fermé $\widetilde{\pi}(\widetilde{X} - U')$. Ceci prouve (i).

[37] N.D.E. : Signalons ici le résultat suivant ([**Ray70a**], VI 2.5) : si S est *normal*, G lisse à fibres connexes, et si X est un G-espace homogène (fppf) (i.e. les morphismes $X \to S$ et $G \times_S X \to X \times_S X$ sont couvrants pour la topologie (fppf)), localement de type fini sur S, alors X est localement *quasi-projectif* sur S. En particulier, G est quasi-projectif sur S. Voir aussi la N.D.E. (35) dans VI_A.

[38] N.D.E. : On a ajouté ce lemme, communiqué par O. Gabber, qui améliore EGA IV_3, 14.4.1.2 et corrige la démonstration de *loc. cit.*, 14.4.1.3 sans en modifier les hypothèses (comparer avec l'erratum (Err_{IV}, 38) dans EGA IV_4).

(ii) On peut supposer Y et X réduits. D'après le « théorème principal de Zariski » (cf. EGA IV_3, 8.12.9), il existe des voisinages ouverts affines U de x, et $\mathrm{V} = \mathrm{Spec(A)}$ de y, tels que $f(\mathrm{U}) \subset \mathrm{V}$, et une factorisation :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U} \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{V}' \arrow[d, "u"] \\ & \mathrm{V} \end{tikzcd},$$

où j est une immersion ouverte et u est fini. Remplaçant V' par l'adhérence de $j(\mathrm{U})$, on peut supposer V' irréductible, donc $\mathrm{V}' = \mathrm{Spec(B)}$, où B est une A-algèbre intègre, finie sur A. De plus, comme f est dominant, u l'est aussi, de sorte que le morphisme $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est injectif. Comme, par hypothèse, A est unibranche au point y, il résulte de (i) que u est ouvert au point $j(x)$, et donc $f = u \circ j$ est ouvert au point x. Ceci prouve la première assertion de (ii). La seconde en découle, car si Y est un préschéma local de point fermé y, tout ouvert contenant y égale Y. (Dans le cas où $\mathrm{Y} = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{Y},y})$, on peut aussi utiliser, au lieu de EGA IV_3, 8.12.9, la forme locale du théorème principal de Zariski, qu'on trouve par exemple dans [**Pes66**], ou [**Ray70b**], Ch. IV, Th. 1.)

Lemme 5.6.1.0. — [39] *Soient* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *un morphisme* localement de présentation finie, $s \in \mathrm{S}$, *et* $x \in \mathrm{X}_s$. *Soit* $n = \dim_x(\mathrm{X}_s)$ *et soit* q *le morphisme structural* $\mathbb{A}^n_{\mathrm{S}} \to \mathrm{S}$.

Supposons donné un morphisme $u : \mathrm{X} \to \mathbb{A}^n_{\mathrm{S}}$ quasi-fini *tel que* $f = q \circ u$, *et supposons* f universellement ouvert *au point générique* z *d'une composante irréductible* $\mathfrak{z}$ *de* X_s, *contenant* x *et de dimension* n. *Alors* u *est* universellement ouvert *au point* $x \in \mathrm{X}$.

Remarquons d'abord que : (†) *les hypothèses sont préservées par tout changement de base* $\pi : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *couvrant* s (i.e. tel que $\pi^{-1}(s) \neq \varnothing$). En effet, soit $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ un tel morphisme, soit

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}' \arrow[r, "u'"] \arrow[dr, "f'"'] & \mathbb{A}^n_{\mathrm{S}'} \arrow[d, "q'"] \\ & \mathrm{S}' \end{tikzcd}$$

le diagramme obtenu par changement de base, et soient s' un point de S' au-dessus de s et x' un point de $\mathrm{X}'_{s'}$ au-dessus de x. Comme $\mathrm{X}'_{s'} = \mathrm{X}_s \otimes_{\kappa(s)} \kappa(s')$ alors, par relèvement des générisations et invariance de la dimension par extension de corps (EGA IV_2, 2.3.4 (i) et 4.1.4), x' est contenu dans une composante irréductible $\mathfrak{z}'$ de $\mathrm{X}'_{s'}$ dont le point générique z' est au-dessus de z, et l'on a $n \leqslant \dim \mathfrak{z}' \leqslant \dim_{x'} \mathrm{X}'_{s'} \leqslant n$, d'où $\dim \mathfrak{z}' = n = \dim_{x'} \mathrm{X}'_{s'}$. Comme f est universellement ouvert en x, alors f' est universellement ouvert en x'.

Posons $\mathrm{Y} = \mathbb{A}^n_{\mathrm{S}}$. D'après EGA IV_3, 14.3.3.1 (i), pour prouver que u est universellement ouvert en x, il suffit de prouver que, pour tout entier $r \geqslant 0$ et tout point x' de

[39] N.D.E. : On a explicité ce lemme, utilisé dans la démonstration du lemme 5.6.1

$X' = X[T_1, \ldots, T_r]$ au-dessus de x, le morphisme $u' : X' \to Y' = \mathbb{A}^n_S[T_1, \ldots, T_r]$ est ouvert au point x'. Or, notant $S' = S[T_1, \ldots, T_r]$ et q' la projection $Y' \cong \mathbb{A}^n_{S'} \to S'$, on est dans la situation obtenue par le changement de base $S' \to S$. Donc, d'après ce qui précède, on est ramené à montrer que u est ouvert au point x.

Posons $y = u(x)$. Comme u est localement de présentation finie (puisque f et q le sont, cf. EGA IV_1, 1.4.3) alors, d'après EGA IV_1, 1.10.3, il suffit de montrer que $u(\operatorname{Spec} \mathscr{O}_{X,x}) = \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{Y,y})$. Pour cela, on peut supposer S affine et intègre. Soit alors $\pi : S' \to S$ sa normalisation, notons $u' : X' \to Y'$ le morphisme déduit de u par changement de base. Comme le morphisme $\pi_Y : Y' \to Y$ est entier et surjectif, on a

$$\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{Y,y}) = \bigcup_{y'} \pi_Y(\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{Y',y'})),$$

la réunion étant prise sur tous les points de Y' au-dessus de y ; il suffit donc de montrer que, pour chaque tel y', et tout $x' \in X'_{y'}$ au-dessus de x, on a $u'(\operatorname{Spec} \mathscr{O}_{X',x'}) = \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{Y',y'}$. Comme les hypothèses sont préservées par le le changement de base $\pi : S' \to S$, on est ainsi ramené au cas de S', i.e. on peut supposer que S est un schéma intègre et normal.

Maintenant, les hypothèses sur f entraînent, d'après EGA IV_3, 14.3.13, qu'il existe une composante irréductible Z de X contenant z (et donc x), dominant S et telle que

$$\dim_z(Z_s) = n = \dim(Z_\eta),$$

où η est le point générique de S. Soit ξ le point générique de Z. Comme u donc aussi $u_\eta : Z_\eta \to \mathbb{A}^n_\eta$ est quasi-fini, alors l'adhérence dans $\mathbb{A}^n_\eta$ du point $u_\eta(\xi) = u(\xi)$ est de dimension n, donc $u(\xi)$ est le point générique de $\mathbb{A}^n_\eta$, qui est aussi le point générique de $Y = \mathbb{A}^n_S$. Par conséquent, notant g la restriction de u à Z, le morphisme $g : Z \to Y$ est quasi-fini et dominant. Comme Y est normale il résulte du lemme 5.6.0 que g est ouvert, de sorte que u est ouvert en tout point de Z, en particulier au point x. Par conséquent, on a $u(\operatorname{Spec} \mathscr{O}_{X,x}) = \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{Y,y}$, et ceci achève la démonstration du lemme 5.6.1.0.

Le lemme suivant remplace avantageusement EGA IV_3, 14.5.10 [(40)], en ce qu'il est indépendant d'hypothèses noethériennes.

Lemme 5.6.1. — *Soient* S *un schéma,* $f : X \to S$ *un* S*-schéma* localement de présen- 353
tation finie*,* s *un point de* S*,* x *un point* fermé *de* X_s*. On suppose que* f *est* universellement ouvert *au point générique* z *d'une composante irréductible* $\mathfrak{z}$ *de* X_s*, contenant* x *et telle que* $\dim_x(X_s) = \dim \mathfrak{z}$*. Alors, il existe un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & S \\ S'' \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "\phi"] \arrow[r, "\pi"] & S' \arrow[u, "w"'] \end{tikzcd} \quad ,$$

[(40)]N.D.E. : On a corrigé l'original, qui indiquait 19.5.10.

où S' *est un schéma* affine*,* w *un morphisme* étale*,* π *un morphisme* fini surjectif*,* de présentation finie*, et* $\phi^{-1}(s)$ *est formé d'un seul point* s''*, tel que* $h(s'') = x$ *et* $\kappa(s'') = \kappa(x)$*.* [41]

Démonstration. D'abord, on peut supposer $S = \operatorname{Spec} A$ et $X = \operatorname{Spec} B$, où B est une A-algèbre de présentation finie. Soient $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ les idéaux premiers de A et B correspondant à s et x, respectivement, de sorte que $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{q}$. Posons $n = \dim_x X_s$, et soient $t_1, \ldots, t_n$ des éléments de B dont les images dans $\mathscr{O}_{X_s,x} = B_\mathfrak{q}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{q}$ forment un système de paramètres. Alors, $\mathscr{O}_{X_s,x}/(t_1, \ldots, t_n)$ est de dimension finie sur $\kappa(x)$ et donc aussi sur $\kappa(s)$, puisque x est un point fermé du $\kappa(s)$-schéma algébrique X_s. Par conséquent, le S-morphisme

$$u : X \longrightarrow \mathbb{A}^n_S = \operatorname{Spec}(A[T_1, \ldots, T_n]),$$

défini par $T_i \mapsto t_i$, est de présentation finie, x est isolé dans sa fibre $u^{-1}(u(x))$, et l'on a $u(x) = \tau_0(s)$, où $\tau_0 : S \to \mathbb{A}^n_S$ désigne la « section nulle » de $\mathbb{A}^n_S \to S$, correspondant au morphisme de A-algèbres $A[T_1, \ldots, T_n] \to A$ qui envoie chaque T_i sur 0. Comme l'ensemble des points de X qui sont isolés dans leur fibre au-dessus de $\mathbb{A}^n_S$ est ouvert (EGA IV_3, 13.1.4), on peut supposer, quitte à rétrécir X, que u est *quasi-fini* et que $u^{-1}(u(x)) = \{x\}$. D'après le lemme 5.6.1.0, u est universellement ouvert au point x.

Soit $B_0 = B/(t_1, \ldots, t_n)$ et soient $X_0 = X \times_{\mathbb{A}^n_S} \tau_0(S) = \operatorname{Spec} B_0$ et $u_0 : X_0 \to S$ le morphisme déduit de u par le changement de base $\tau_0 : S \hookrightarrow \mathbb{A}^n_S$. Alors u_0 est quasi-fini et de présentation finie, universellement ouvert au point x, et x est l'unique point de X_0 au-dessus de s.

Soit A' le hensélisé de l'anneau local $A_\mathfrak{p} = \mathscr{O}_{S,s}$, et soient $S' = \operatorname{Spec}(A')$, $B'_0 = B_0 \otimes_A A'$, et $X'_0 = X_0 \times_S S' = \operatorname{Spec}(B'_0)$. Alors le point fermé s' de S' est l'unique point de S' au-dessus de s, on a $\kappa(s') = \kappa(s)$, et X'_0 possède un unique point x' au-dessus de s' ; on a $\kappa(x') = \kappa(x)$ et x' est aussi l'unique point de X'_0 au-dessus de s et de x. Comme A' est hensélien alors, d'après EGA IV_4, 18.5.11, X'_0 est somme disjointe de deux parties ouvertes et fermées :

$$(*) \qquad X'_0 = V \sqcup W, \qquad \text{où} \quad V = \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{X'_0,x'});$$

et l'anneau local $\mathscr{O}_{X'_0,x'}$ est *fini* et *de présentation finie* sur A'. La restriction π de u'_0 à V est donc finie et de présentation finie. De plus, puisque $u'_0 : X'_0 \to S'$ est ouvert en x', on a $u'_0(V) = \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{S',s}) = S'$, de sorte que π est *surjectif*.

Ceci prouve le résultat voulu lorsque $S = S'$. Dans le cas général, A' est limite inductive filtrante de sous-algèbres A_i étales sur A, et telles que $S_i = \operatorname{Spec}(A_i)$ possède un unique point s_i au-dessus de s (et l'on a $\kappa(s_i) = \kappa(s)$). Alors, $B'_0 = \varinjlim B_i$, où $B_i = B_0 \otimes_A A_i$. Posons $X_i = \operatorname{Spec}(B_i) = X_0 \times_S S_i$ et $C = \mathscr{O}_{X'_0,x'}$. D'après $(*)$ plus haut, on a $C \cong B'_0/fB'_0$, pour un certain idempotent $f \in B'_0$, et il existe un indice i et $f_i \in B_i$ tel que f soit l'image de f_i dans B'_0. Posons $C_i = B_i/f_iB_i$ et $V_i = \operatorname{Spec}(C_i)$.

[41] N.D.E. : Par conséquent, h induit une section σ de $X \times_S S'' \to S''$ telle que $\sigma(s'')$ soit au-dessus de x ; comparer avec EGA IV_3, 14.5.10.

Alors $C = C_i \otimes_{A_i} A'$, d'où $V = V_i \times_{S_i} S'$, et C_i est une A_i-algèbre de présentation finie (puisqu'il en est ainsi de B_i). Par conséquent, les morphismes :

$$\begin{tikzcd} X'_0 \arrow[dr, "u'_0"] & \\ V \arrow[u, "h'"] \arrow[r, "\pi"] & S' \end{tikzcd}$$

proviennent par le changement de base $S' \to S_i$ de morphismes de présentation finie :

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[dr, "u_i"] & \\ V_i \arrow[u, "h_i"] \arrow[r, "\pi_i"] & S_i. \end{tikzcd}$$

Pour tout $j \geqslant i$, soit $V_j = V_i \times_{S_i} S_j$ et soit $\pi_j : V_j \to S_j$ le morphisme (de présentation finie) déduit de π_i par changement de base. Comme $\pi : V \to S'$ est fini et surjectif, alors, d'après EGA IV$_2$, 8.10.5, il existe un indice j tel que $\pi_j : V_j \to S_j$ soit fini et surjectif. Alors, $w : S_j \to S$ est étale affine, S_j a un unique point s_j au-dessus de s, et V_j a un unique point x_j au-dessus de s_j (puisque x' est l'unique point de $V = V_j \times_{S_j} S'$ au-dessus de s') :

$$\begin{tikzcd} X_j \arrow[r] \arrow[dr, "u_j"] & X_0 \arrow[r] \arrow[dr, "u_0"] & X \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "u"] & \\ V_j \arrow[u, "h_j"] \arrow[r, "\pi_j"] & S_j \arrow[r, "w"] & S \arrow[r, "\tau_0"] & \mathbb{A}^n_S. \end{tikzcd}$$

Donc x_j est l'unique point de V_j au-dessus de s, son image par le morphisme $V_j \to X_j \to X$ est x, et l'on a $\kappa(x_j) = \kappa(x)$. 354

Lemme 5.6.2.0. — [42] *Soient k un corps et* G *un k-schéma* de type fini *non vide.*

(i) *Soient* K *une extension de k et* W *un ouvert dense de* G_K*. Notons π la projection* $G_K \to G$*, alors*

$$U = \{g \in G \mid W \textit{ contient chaque point maximal de } \pi^{-1}(g)\}$$

est un ouvert dense de G. (N. B. *Si g est un point fermé de* G *appartenant à* U*, on a donc* $\pi^{-1}(g) \subset W$.)

(ii) *Supposons de plus* G géométriquement irréductible. *Soient $\mu : G \times X \to Y$ un morphisme de k-schémas, x un point de* X*, et Ω un ouvert de* Y *tel que* $\mu_x^{-1}(\Omega_{\kappa(x)}) \neq \varnothing$*, où μ_x désigne le morphisme* $G_{\kappa(x)} \to Y_{\kappa(x)}$*, $g \mapsto \mu(g, x)$. Alors :*

$$U = \{g \in G \mid \mu \textit{ envoie tout point maximal de } g \times x \textit{ dans } \Omega\}$$

[42] N.D.E. : On a ajouté ce lemme, communiqué par O. Gabber. Il permet de simplifier la démonstration de 5.6.2, et de démontrer le théorème 5.3, ainsi que 5.4, sous une forme plus générale, voir 5.7 et 5.8 plus bas.

est un ouvert dense de G*, et pour tout point fermé* g *de* G *appartenant à* U*, on a* $\mu(g \times x) \subset \Omega$ *et donc* $\mu(g', x) \in \Omega_{\kappa(x)}$ *(resp.* $\mu(g, x') \in \Omega_{\kappa(g)}$*), pour tout point* $g' \in \mathrm{G}_{\kappa(x)}$ *au-dessus de* g *(resp.* $x' \in \mathrm{X}_{\kappa(g)}$ *au-dessus de* x*).*

(iii) *Supposons que* $\mathrm{G} = \mathrm{H}^0$*, où* H *est un* k*-schéma en groupes localement de type fini, opérant sur un* k*-schéma* X *non vide, de façon que le morphisme* $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$*,* $(h, x) \mapsto (hx, x)$ *soit surjectif. Soit* U *un ouvert de* X*. Alors :*

(a) $\mathrm{G} \cdot \mathrm{U}$ *est un ouvert de* X*, égal à la réunion des composantes irréductibles de* X *dont le point générique appartient à* U*.*

(b) *Supposons* U dense dans chaque composante irréductible de X. *Alors, pour tout sous-ensemble fini* A *de* X*, il existe un point fermé* $g \in \mathrm{G}$ *tel que* $g \cdot \mathrm{A}' \subset \mathrm{U}_{\kappa(g)}$*, où* A′ *est l'image inverse de* A *dans* $\mathrm{X}_{\kappa(g)}$*. En particulier, le morphisme* $\mathrm{G} \times \mathrm{U} \to \mathrm{X}$ *est surjectif.*

Démonstration. (i) Soit $\overline{k}$ une clôture séparable de k et soit L une extension de k contenant une copie de $\overline{k}$ et de K. Notons π_{L} (resp. ϕ) la projection $\mathrm{G}_{\mathrm{L}} \to \mathrm{G}$ (resp. $\mathrm{G}_{\mathrm{L}} \to \mathrm{G}_{\mathrm{K}}$). Comme, pour tout $g \in \mathrm{G}$, ϕ envoie les points maximaux de $\pi_{\mathrm{L}}^{-1}(g)$ de façon surjective sur ceux de $\pi^{-1}(g)$, on voit que $\mathrm{U} = \{g \in \mathrm{G} \mid \mathrm{W}_{\mathrm{L}}$ contient chaque point maximal de $\pi_{\mathrm{L}}^{-1}(g)\}$. Donc, remplaçant K par L, on se ramène au cas où K contient $\overline{k}$.

Comme la projection $p : \mathrm{G}_{\mathrm{K}} \to \mathrm{G}_{\overline{k}}$ est surjective et ouverte, $\mathrm{V} = p(\mathrm{W})$ est un ouvert dense de $\mathrm{G}_{\overline{k}}$, et comme $p^{-1}(g) = \mathrm{Spec}(\kappa(g) \otimes_{\overline{k}} \mathrm{K})$ est irréductible pour tout $g \in \mathrm{G}_{\overline{k}}$ (cf. EGA IV_2, 4.3.3), alors pour tout $g \in \mathrm{V}$, le point générique de $p^{-1}(g)$ appartient à W. D'autre part, soit $\mathscr{G} = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$; comme la projection $q : \mathrm{G}_{\overline{k}} \to \mathrm{G}$ est surjective et que $\mathscr{G}$ agit transitivement sur les fibres de q, alors $\mathrm{U} = q(\mathrm{V}')$, où V′ est l'intersection des $\mathscr{G}$-conjugués de V.

Or, soit Z le fermé $\mathrm{G}_{\overline{k}} - \mathrm{V}$, muni de la structure de sous-schéma fermé réduit. Comme $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ et donc Z sont de présentation finie sur $\overline{k}$, alors Z provient par changement de base d'un sous-schéma fermé réduit Z_1 de $\mathrm{G} \otimes_k k_1$, pour une certaine extension galoisienne finie k_1 de k, donc les $\mathscr{G}$-conjugués de Z sont en nombre fini, de sorte que leur réunion est encore un fermé rare F de $\mathrm{G}_{\overline{k}}$, et $\mathrm{V}' = \mathrm{G}_{\overline{k}} - \mathrm{F}$ est un ouvert dense de $\mathrm{G}_{\overline{k}}$. Donc, comme la projection $q : \mathrm{G}_{\overline{k}} \to \mathrm{G}$ est surjective et ouverte, alors $\mathrm{U} = q(\mathrm{V}')$ est un ouvert dense de G. De plus, pour tout point fermé g de G, la fibre $\pi^{-1}(g)$ est formée d'un nombre fini de points fermés de G_{K}, donc si $g \in \mathrm{U}$ alors $\pi^{-1}(g) \subset \mathrm{W}$. Ceci prouve (i), et (ii) en découle.

D'autre part, on a démontré (iii)(a) dans VI_{A}, 2.6.4. Enfin, si U est dense dans chaque composante irréductible de X, alors $\mathrm{X} = \mathrm{G} \cdot \mathrm{U}$, donc pour tout $x \in \mathrm{X}$, $\mu_x^{-1}(\mathrm{U}_{\kappa(x)})$ est un ouvert non vide de $\mathrm{G}_{\kappa(x)}$, et alors (iii)(b) découle de (ii).

Corollaire 5.6.2. — *Soient* S, G, X *comme dans les hypothèses préliminaires de* 5.3*, et soient* U *un ouvert de* X*,* $s \in \mathrm{S}$*, et* A *une partie finie de* X_s*. On suppose* U_s *dense dans* X_s *et* X_s *localement de type fini sur* $\kappa(s)$*.* [43]

[43] N.D.E. : On a ajouté l'hypothèse sur X_s et l'on a simplifié (et corrigé) la démonstration, en tenant compte de l'ajout 5.6.2.0. D'autre part, la démonstration montre que la conclusion est valide si l'on suppose seulement que U_s est dense dans chaque composante irréductible de X_s.

Alors il existe un morphisme $f : S'' \to S$*, composé d'un morphisme fini surjectif* $S'' \to S'$ *et d'un morphisme étale* $S' \to S$*, et un morphisme* $h : S'' \to G$*, tels que l'image inverse* A'' *de* A *dans* $X \times_S S''$ *(i.e. dans* $X_s \times_{\operatorname{Spec}\kappa(s)} S''_s$*) soit contenue dans* $\ell_h^{-1}(U_{S''})$*, où* ℓ_h *désigne la translation de* $X_{S''} = X \times_S S''$ *définie par l'élément* $h \in G(S'')$.

Démonstration. Comme X_s est localement de type fini sur $\kappa(s)$ les composantes connexes de X_s sont ouvertes, et irréductibles (cf. $\mathrm{VI_A}$, 2.5.4), donc U_s est dense dans chaque composante irréductible de X_s.

Donc, d'après le lemme 5.6.2.0, il existe un point fermé $g \in G_s^0$ tel que $g \cdot a' \in U_s \otimes_{\kappa(s)} \kappa(g)$ pour tout $a' \in X_{\kappa(g)}$ au-dessus d'un point de A. 355

D'après le lemme 5.6.1, il existe un morphisme $f : S'' \to S$, composé d'un morphisme fini surjectif $S'' \to S'$ et d'un morphisme étale $S' \to S$, et un morphisme $h : S'' \to G$, tels que $f^{-1}(s)$ soit formé d'un seul point s_0, et que $h(s_0) = g$ et $\kappa(s_0) = \kappa(g)$. Alors, notant A'' l'image inverse de A dans $X_s \times_{\operatorname{Spec}\kappa(s)} S''_s = X_s \otimes_{\kappa(s)} \kappa(s_0) = X_s \otimes_{\kappa(s)} \kappa(g)$, la translation ℓ_h de $X_{S''}$ envoie A'' dans $U_s \otimes_{\kappa(s)} \kappa(s_0)$.

***Lemme 5.6.3.* —** *Soit* X *un* S*-schéma. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) X *est* séparé sur S.

(ii) *Pour tout* S*-schéma* T*, toute section* $\sigma : T \to X_T$ *est une* immersion fermée.

(iii) *Pour tout* S*-schéma* réduit T*, deux* S*-morphismes* f_1 *et* f_2 *:* $T \to X$ *qui coïncident sur un ouvert dense* U *de* T *sont égaux.*

(iv) *Pour tout* $s \in S$ *et tout couple de points* x_1*,* x_2 *de* X_s*, il existe un morphisme* $\phi : S'' \to S' \to S$ *et un sous-schéma ouvert* V *de* $X_{S''}$, séparé *sur* S''*, tels que :*

a) $S' \to S$ *est* ouvert, $S'' \to S'$ fermé surjectif, *et* $\phi^{-1}(s) \neq \varnothing$.

b) *L'image inverse de* $\{x_1, x_2\}$ *dans* $X_{S''}$ *est contenue dans* V.

(iv′) *Pour tout* $s \in S$*, tout couple de points* $x_1, x_2 \in X_s$ *est contenu dans un ouvert* V *de* X*, séparé sur* S. [44]

L'implication (ii) ⇒ (i) est claire (prendre T = X et σ = la section diagonale), ainsi que (i) ⇒ (iv′) ⇒ (iv). D'autre part, on a (i) ⇒ (ii) d'après EGA I, 5.4.6.

(iii) ⇒ (ii). Soit $\sigma : T \to X_T$ une section de $p : X_T \to T$. D'après EGA I, 5.3.13, σ est une immersion, i.e. un isomorphisme de T sur un sous-schéma localement fermé E de X_T. Pour montrer que E est fermé, on peut supposer T et E réduits. Soit $\overline{E}$ le sous-schéma fermé réduit de X_T ayant l'adhérence de E pour espace sous-jacent, de sorte que E est un sous-schéma ouvert dense de $\overline{E}$. Alors l'immersion $i : \overline{E} \hookrightarrow X_T$ et $\sigma \circ p \circ i$ coïncident sur E, donc sur $\overline{E}$ d'après l'hypothèse (iii). Donc tout point de $\overline{E}$ appartient à $\sigma(T) = E$, d'où $\overline{E} = E$.

[44] N.D.E. : On a simplifié la formulation de la condition (iv) et ajouté la condition (iv′). D'autre part, on a ajouté la démonstration de l'implication (i) ⇒ (iii), utilisée dans la preuve de (iv) ⇒ (iii). Remarquons par ailleurs que si $T = \operatorname{Spec} k[\varepsilon, x]/(\varepsilon^2, \varepsilon x)$ (k un corps), $X = T_{\text{réd}} = \operatorname{Spec} k[x]$, alors les morphismes $\phi_\lambda : T \to X$ définis par $x \mapsto x + \lambda\varepsilon$ ($\lambda \in k$) coïncident sur l'ouvert dense $\operatorname{Spec} B_x$ mais ne sont pas égaux.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Supposons X séparé sur S et soient T un S-schéma réduit, f_1, f_2 deux S-morphismes $\mathrm{T} \to \mathrm{X}$ qui coïncident sur un ouvert dense U de T, et g le morphisme $\mathrm{T} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ de composantes f_1 et f_2. Comme $\mathrm{D} = \Delta_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathrm{X})$ est fermé, son image inverse par g est un fermé de T contenant U, donc égal à T, et puisque T est réduit, g se factorise par D (cf. EGA I, 5.2.2) ; par conséquent $f_1 = p_1 \circ g$ égale $p_2 \circ g = f_2$.

(iv) $\Rightarrow$ (iii). Soient T un S-schéma *réduit* et f_1, f_2 deux S-morphismes $\mathrm{T} \to \mathrm{X}$ qui coïncident sur un ouvert dense U. Comme T est réduit, pour voir que $f_1 = f_2$, il suffit de voir que $f_1 = f_2$ ensemblistement. En effet, supposons ceci établi, et soient $t \in \mathrm{T}$, V un ouvert affine de X contenant $f_1(t) = f_2(t)$, et W le voisinage ouvert de t égal à l'image inverse de V par l'application continue sous-jacente à f_1 et f_2 ; alors les morphismes $f_i|_{\mathrm{W}} : \mathrm{W} \to \mathrm{V}$ coïncident sur l'ouvert dense $\mathrm{U} \cap \mathrm{W}$ de W. Comme V est séparé et W réduit, ceci entraîne que $f_1|_{\mathrm{W}} = f_2|_{\mathrm{W}}$, d'où $f_1 = f_2$.

Soient donc $t \in \mathrm{T}$ et s son image dans S, montrons que les points $x_1 = f_1(t)$ et $x_2 = f_2(t)$ de X_s sont égaux. Soient $\phi : \mathrm{S}'' \to \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et V un ouvert de $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}''$ comme dans (iv) ; posons $\mathrm{T}' = \mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ et $\mathrm{T}'' = \mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}''$ et notons $g : \mathrm{T}'' \to \mathrm{T}$ et $f_i'' : \mathrm{T}'' \to \mathrm{X}_{\mathrm{S}''}$ $(i = 1, 2)$ les morphismes obtenus par changement de base.

Comme U est dense dans T et que $\mathrm{T}' \to \mathrm{T}$ est ouvert, l'image réciproque U' de U dans T' est dense dans T'. Soit U'' l'image réciproque de U' dans T'' et soit F le sous-schéma réduit de T'' ayant $\overline{\mathrm{U}''}$ pour espace sous-jacent. Comme $\mathrm{T}'' \to \mathrm{T}'$ est surjectif et fermé, l'image de F contient U' et est fermée, donc égale T'. Par
356 conséquent, $\mathrm{F} \cap g^{-1}(t)$ contient un point u.

Pour $i = 1, 2$, notons h_i la restriction à F de f_i''. Alors, $h_i(u)$ est un point de $\mathrm{X}_{\mathrm{S}''}$ au-dessus de $f_i(t) = x_i$ donc appartient à V, puisque V contient l'image inverse de $\{x_1, x_2\}$ dans $\mathrm{X}_{\mathrm{S}''}$.

Alors, $\mathrm{W} = h_1^{-1}(\mathrm{V}) \cap h_2^{-1}(\mathrm{V})$ est un ouvert de F, contenant u, et les S''-morphismes $h_i|_{\mathrm{W}} : \mathrm{W} \to \mathrm{V}$ coïncident sur l'ouvert dense $\mathrm{U}'' \cap \mathrm{W}$ de W. Comme V est séparé sur S'', on a $h_1|_{\mathrm{W}} = h_2|_{\mathrm{W}}$, d'où $h_1(u) = h_2(u)$, et donc $f_1(t) = f_2(t)$. Ceci prouve (iv) $\Rightarrow$ (iii).

Le théorème 5.3 résulte alors de 5.6.2 et de l'implication (iv) $\Rightarrow$ (i) de 5.6.3.

Contre-exemple 5.6.4. — Tout S-groupe G n'est pas séparé. Soit S un schéma ayant un point fermé non isolé s ; soit G le schéma obtenu en recollant deux exemplaires de S le long de l'ouvert $\mathrm{S} - \{s\}$, on voit aisément que G n'est pas séparé sur S, et qu'il est muni d'une structure naturelle de S-groupe, dont toutes les fibres sont neutres, sauf la fibre G_s qui est isomorphe au groupe à deux éléments $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. [45]

Théorème 5.7. — [46] *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe* localement de présentation finie *sur* S *tel que la fonction* $s \mapsto \dim \mathrm{G}_s$ *soit* localement constante *sur* S*,* X *un*

[45] N.D.E. : On a reproduit cet exemple en VI_{A} 0.3, N.D.E. (5).

[46] N.D.E. : D'une part, on a supprimé le corollaire 5.6.5, qui était une répétition de 5.5. D'autre part, l'original énonçait en remarque 5.7 le corollaire 5.7.1 ci-dessous, renvoyant pour la démonstration à 4.7, numéro qui n'existe pas dans le Lect. Notes 151 (mais qui figurait dans l'édition 1965 de SGAD, dont les n$^{\text{os}}$ 4.5 et 4.6 sont devenus 5.6.1 et 5.6.2) ; on a ajouté le théorème 5.7, communiqué par O. Gabber, qui précise l'énoncé précité de SGAD.

S-*schéma sur lequel* G *opère, et* U *un ouvert de* X*,* séparé *sur* S*. Alors* $\underline{\mathrm{G}^0}\cdot\mathrm{U}$ *est un* ouvert *de* X*,* séparé *sur* S.

Démonstration. Notons $\mu : \mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{X}\to\mathrm{X}$ l'opération de G sur X ; c'est la composée de l'automorphisme $(g,x)\mapsto(g,gx)$ de $\mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{X}$ et de la projection sur X. Comme $\mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{U}$ est un ouvert de $\mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{X}$, il résulte de 4.2 (iii) que $\mathrm{V}=\underline{\mathrm{G}^0}\cdot\mathrm{U}$ est ouvert dans X.

Alors, en procédant comme dans la démonstration de 5.6.2, on déduit de l'implication (iv) $\Rightarrow$ (i) de 5.6.3 que V est séparé sur S. 357

Corollaire 5.7.1. — *Soient* S *et* G *comme en* 5.7 *et soient* σ,τ *deux* S-*sections de* G^0 (*i.e.* $\sigma,\tau\in\mathrm{G}^0(\mathrm{S})$)*. Alors le sous-schéma* $\mathrm{S}(\sigma,\tau)\subset\mathrm{S}$ *des coïncidences de* σ *et* τ (*i.e. l'image inverse de la diagonale de* $\mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{G}$ *par le morphisme* (σ,τ)) *est* fermé.

En effet, pour tout $s\in\mathrm{S}$, soit U un ouvert affine de G contenant $\varepsilon(s)$, alors $\mathrm{V}=\varepsilon^{-1}(\mathrm{U})$ est un voisinage ouvert de s dans S, et comme $\mathrm{G}^0\mathrm{U}$ est séparé, alors $\mathrm{S}(\sigma,\tau)\cap\mathrm{V}$ est fermé dans V.

Remarque 5.7.2. — Gabber nous signale qu'on peut montrer que si S est local hensélien, de point fermé s, alors l'intersection des ouverts $\mathrm{G}^0\mathrm{U}$, où U parcourt les voisinages ouverts affines de $\varepsilon(s)$, est un sous-schéma en groupes ouvert de G, séparé sur S.

5.8. Compléments. — [47] Commençons par rappeler la proposition $\mathrm{VI_A}$ 2.6.6 :

Proposition 5.8.1. — *Soient* k *un corps,* G *un* k*-groupe localement de type fini opérant sur un* k*-schéma* X *de façon que le morphisme* $\mathrm{G}\times\mathrm{X}\to\mathrm{X}\times\mathrm{X}$*,* $(g,x)\mapsto(gx,x)$ *soit surjectif. On suppose* X quasi-séparé*. Alors les composantes connexes de* X *sont irréductibles.*

Corollaire 5.8.2. — *Soient* $\mathrm{S},\mathrm{G},\mathrm{X}$ *comme dans les hypothèses préliminaires de* 5.3*. Supposons de plus que chaque fibre* X_s *soit* quasi-séparé et connexe*. Alors* X *est* séparé et quasi-compact *sur* S.

En effet, d'après la proposition précédente, chaque fibre X_s est irréductible, et la suite de la démonstration est identique à celle de 5.4.

Exemple 5.8.3. — Fixons un corps k algébriquement clos. Rappelons d'abord que tout espace topologique X « localement booléen » (i.e. possédant une base d'ouverts compacts), muni du faisceau des fonctions localement constantes à valeurs dans k, est un k-schéma (cf. [**DG70**], I § 1, 2.12). On dira alors que X est un k-schéma localement booléen.

Remarquons d'autre part que tout espace topologique E admettant une base d'ouverts séparés (et de même tout schéma X) admet un ouvert dense séparé. En effet, comme toute réunion croissante d'ouverts séparés est un ouvert séparé (pour un schéma X ceci résulte de 5.6.3), il existe un tel ouvert U qui soit maximal. Mais alors U est dense, car s'il existait un ouvert non vide V tel que $\mathrm{U}\cap\mathrm{V}=\varnothing$, alors V contiendrait

[47] N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe de compléments et de contre-exemples, tous communiqués par O. Gabber.

un ouvert séparé $W \neq \varnothing$, et $U \cup W$ serait encore séparé, contredisant la maximalité de U.

Maintenant, soit C l'espace de Cantor, qu'on peut voir comme l'espace sous-jacent au groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit. Pour tout point p de C, soit $C(p)$ une autre copie de C, et soit X l'espace obtenu en recollant chaque $C(p)$ à C le long de $C - \{p\}$, alors X est un k-schéma localement booléen non séparé, et C est un ouvert dense de X.

Soit G le groupe des automorphismes du k-schéma X (i.e. des homéomorphismes de X). Alors G agit de façon transitive sur X. En effet, X est la réunion de C et, pour chaque point $p \in C$, d'un second point p', qui peut être caractérisé comme l'unique point x de $X - \{p\}$ tel que $(C - \{p\}) \cup \{x\}$ soit séparé. Il en résulte que tout automorphisme ϕ de C se prolonge en un automorphisme ϕ_X de X tel que $\phi_X(p') = \phi_X(p)'$ pour tout p. D'autre part, l'application $\theta_p : X \to X$ qui échange p et p' et qui fixe les autres points, est un automorphisme de X. Enfin, le groupe des automorphismes de C agit transitivement sur C : par exemple, en utilisant la structure de groupe de C, il suffit de considérer les translations.

Donc le k-groupe discret G (donc localement de type fini), opère sur le k-schéma X de façon que le morphisme $G \times X \to X \times X$, $(g, x) \mapsto (gx, x)$ soit surjectif, mais X n'est pas séparé (bien que C soit un ouvert dense séparé).

Exemple 5.8.4. — On conserve les notations de l'exemple précédent. En utilisant la description de C comme ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on voit que C privé d'un point p est homéomorphe à une réunion disjointe dénombrable de copies de C. En effet, utilisant par exemple la structure de groupe de C, on se ramène par translation au cas où p est l'élément 0, i.e. la suite nulle ; alors $C - \{0\}$ est la réunion disjointe des sous-espaces $C_i = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid u_i = 1 \text{ et } u_j = 0 \text{ pour } j < i\}$, pour $i \in \mathbb{N}$, chacun homéomorphe à C. Pour tout sous-ensemble fini non vide F de C, on en déduit, en procédant par récurrence sur $|F|$, que $C - F$ est homéomorphe à une réunion disjointe dénombrable de copies de C, donc à C privé d'un point.

Pour chaque F de cardinal 2, soit $C(F)$ une autre copie de C, notons q_F le point 0 de $C(F)$ et choisissons un homéomorphisme $\phi_F : C(F) - \{q_F\} \xrightarrow{\sim} C - F$; soit alors X' l'espace obtenu en recollant chaque $C(F)$ à C au moyen de ϕ_F. Alors X' est un k-schéma localement booléen, non séparé. De plus, il résulte de la construction que toute fonction localement constante $f : X' \to k$ est constante. En effet, si $x, y \in C$ et $F = \{x, y\}$, chaque voisinage de q_F rencontre tout voisinage de x ou y, donc si $f : X \to k$ est localement constante, on a $f(x) = f(q_F) = f(y)$, et si $F' = \{z, t\}$, avec $z, t \in C$, on a de même $f(q_{F'}) = f(z) = f(q_{\{z,x\}}) = f(x)$. Par conséquent, X' est *connexe.*

De plus, tout point $x \in X'$ possède un voisinage pointé homéomorphe à $(C, 0)$. Plus précisément, fixons pour chaque F un homéomorphisme d'espaces topologiques pointés $h_F : (C, 0) \xrightarrow{\sim} (C(F), q_F)$ et notons T le groupe des translations de C. Alors, si $x = q_F$ on dispose de l'homéomorphisme q_F, et si $x \in C$, la translation $t_x \in T$ est un homéomorphisme $(C, 0) \xrightarrow{\sim} (C, x)$ (et c'est l'unique élément de T ayant cette propriété).

Notons L le groupe libre engendré par les h_{F} et soit $\mathrm{G} = \mathrm{T} * \mathrm{L}$ le « produit libre » (= coproduit) de T et L. Pour tout $h \in \{h_{\mathrm{F}}\}_{|\mathrm{F}|=2} \cup \mathrm{T}$, soit $\sigma(h)$ le générateur de G correspondant à h et soit $\mathrm{S}(h)$ (resp. $\mathrm{B}(h)$) la source (resp. le but) de h. Il est commode de poser aussi $\sigma(h_{\mathrm{F}}^{-1}) = \sigma(h_{\mathrm{F}})^{-1}$ et $\mathrm{S}(h_{\mathrm{F}}^{-1}) = \mathrm{B}(h_{\mathrm{F}})$ (resp. $\mathrm{B}(h_{\mathrm{F}}^{-1}) = \mathrm{S}(h_{\mathrm{F}})$), et de noter E l'ensemble formé de T, et des h_{F} et h_{F}^{-1}.

Sur l'espace produit $\mathrm{P} = \mathrm{G}\times\mathrm{X}'$ (où G est muni de la topologie discrète), considérons la relation d'équivalence engendrée par les relations :

$$\big(g\sigma(h), x\big) \sim \big(g, h(x)\big) \qquad \text{lorsque} \qquad x \in \mathrm{S}(h)$$

pour tout $h \in \mathrm{E}$, et soit Z l'espace quotient. Alors Z est obtenu à partir de la réunion disjointe $\coprod_{g\in\mathrm{G}}\{g\} \times \mathrm{X}'$ par recollement d'ouverts et donc, pour tout ouvert Ω de P, son saturé $\widetilde{\Omega}$ est ouvert (cf. [**BTop**], I § 5.1, Exemple 2). Explicitement, comme tout ouvert de P est la réunion de ses intersections avec les « tranches » $\{g\} \times \mathrm{X}'$, il suffit de considérer un ouvert de la forme $\{1\} \times \mathrm{W}$, où W est un ouvert de X′. Dans ce cas, le saturé est la réunion de $\{1\} \times \mathrm{W}$, et de

$$\{\sigma(h_1)\} \times h_1^{-1}(\mathrm{W} \cap \mathrm{B}(h_1)), \qquad \{\sigma(h_1)\sigma(h_2)\} \times h_2^{-1}\big(h_1^{-1}(\mathrm{W} \cap \mathrm{B}(h_1)) \cap \mathrm{B}(h_2)\big),$$

etc., pour toutes les suites finies $h_1, \dots, h_n$ d'éléments de E, donc est ouvert. Donc la projection $\pi : \mathrm{P} \to \mathrm{Z}$ est ouverte

Notons de plus que le mot $\sigma(h_1)\cdots\sigma(h_n)$ est un mot réduit de G, sauf si l'un des h_i est l'élément neutre de T ou si deux h_i consécutifs appartiennent à T, ou si (h_i, h_{i+1}) égale $(h_{\mathrm{F}}, h_{\mathrm{F}}^{-1})$ ou $(h_{\mathrm{F}}^{-1}, h_{\mathrm{F}})$. Donc, si $x \in \mathrm{X}'$ et si un élément $\beta = (\sigma(h_1)\cdots\sigma(h_n), h_n^{-1}\cdots h_1^{-1}(x))$ appartient à $\{1\} \times \mathrm{X}'$, alors on peut supposer que chaque h_i est une translation t_i, et dans ce cas l'égalité $\sigma(t_1\cdots t_n) = 1$ entraîne que $t_1\cdots t_n = 1$, et donc $\beta = (1, x)$. Comme la relation d'équivalence est compatible avec l'action de G (agissant sur $\mathrm{P} = \mathrm{G} \times \mathrm{X}'$ par translations à gauche sur le premier facteur), on en déduit que pour tout $g \in \mathrm{G}$, la restriction de π à $\{g\} \times \mathrm{X}'$ est *injective.*

Soit alors $z \in \mathrm{Z}$ arbitraire et soit $(g, x) \in \mathrm{P}$ un représentant de z. D'après ce qui précède, $\mathrm{U} = \pi(\{g\} \times \mathrm{X}')$ est un voisinage ouvert de z, et l'application continue $\{g\} \times \mathrm{X}' \to \mathrm{U}$ induite par π est ouverte et bijective, donc un homéomorphisme. Ceci montre que Z est localement isomorphe à X′ (donc aussi à C), donc est encore un k-schéma localement booléen.

Enfin, G agit transitivement sur Z. En effet, comme tout $z \in \mathrm{Z}$ est G-conjugué à un élément de la forme $\pi\big((1, x)\big)$, il suffit de voir que tout élément $(1, x) \in \mathrm{P}$ est équivalent à un élément $(\sigma(h), 0)$; or si $x \in \mathrm{C}$ on peut prendre pour h la translation t_x, et si $x = q_{\mathrm{F}}$ on peut prendre $h = h_{\mathrm{F}}$. Donc Z est un k-schéma localement booléen muni d'une action transitive du groupe discret G, mais Z n'est pas séparé.

6. Sous-foncteurs et sous-schémas en groupes (*)

Définition 6.1. — (i) Soient X un S-foncteur (c'est-à-dire un foncteur de $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})^{\circ}$ dans $(\mathbf{Ens})$), G un S-foncteur en groupes, u et v deux S-*morphismes* de X dans G. On appelle *transporteur de u dans v* et on note $\underline{\mathrm{Transp}}(u, v)$ le sous S-foncteur de G défini comme suit :

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Transp}}(u,v)(\mathrm{S}') &= \{g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}') \mid (\mathrm{int}\, g) \circ u_{\mathrm{S}'} = v_{\mathrm{S}'}\} \\ &= \{g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}') \mid g_{\mathrm{S}''} u_{\mathrm{S}''}(x) g_{\mathrm{S}''}^{-1} = v_{\mathrm{S}''}(x), \quad \forall\, x \in \mathrm{X}(\mathrm{S}''),\ \mathrm{S}'' \to \mathrm{S}'\}.\end{aligned}$$

En particulier, $\underline{\mathrm{Transp}}(u,u)$ est un sous-S-foncteur *en groupes* de G ; on l'appelle *centralisateur de* u et on le note $\underline{\mathrm{Centr}}(u)$.

(ii) Soient G un S-foncteur en groupes, X et Y deux *sous*-S-*foncteurs* de G ; on appelle *transporteur de* X *dans* Y (resp. *transporteur strict de* X *dans* Y) et on note $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ (resp. $\underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$) les sous-S-foncteurs de G définis comme suit :

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})(\mathrm{S}') &= \{g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}') \mid (\mathrm{int}\, g)(\mathrm{X}_{\mathrm{S}'}) \subset \mathrm{Y}_{\mathrm{S}'}\} \\ &= \{g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}') \mid g_{\mathrm{S}''}\mathrm{X}(\mathrm{S}'') g_{\mathrm{S}''}^{-1} \subset \mathrm{Y}(\mathrm{S}''), \quad \forall\, \mathrm{S}'' \to \mathrm{S}'\}\end{aligned}$$

$$\text{resp.}\quad \begin{aligned}\underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})(\mathrm{S}') &= \{g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}') \mid (\mathrm{int}\, g)(\mathrm{X}_{\mathrm{S}'}) = \mathrm{Y}_{\mathrm{S}'}\} \\ &= \{g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}') \mid g_{\mathrm{S}''}\mathrm{X}(\mathrm{S}'') g_{\mathrm{S}''}^{-1} = \mathrm{Y}(\mathrm{S}''), \quad \forall\, \mathrm{S}'' \to \mathrm{S}'\}.\end{aligned}$$

Notons qu'on a

$$\underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \cap c(\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y},\mathrm{X})),$$

où c désigne le morphisme d'inversion de G. [49]

(iii) Soient G un S-foncteur en groupes, H un sous-S-foncteur de G, i le S-morphisme canonique $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$; on appelle *centralisateur* et *normalisateur* de H dans G les
358 sous-S-foncteurs en groupes de G suivants :

$$\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Centr}}(i) = \underline{\mathrm{Transp}}(i,i) \qquad , \qquad \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H},\mathrm{H}).$$

Enfin, on appelle *centre de* G le S-foncteur en groupes $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{id}_{\mathrm{G}}) = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{G}$; on le notera $\underline{\mathrm{Centr}}\,\mathrm{G}$.

Remarque 6.1.1. — [50] Il résulte des définitions que les foncteurs $\underline{\mathrm{Transp}}(u,v)$ et $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ (et donc aussi $\underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$) *commutent au changement de base* :

(*)Sur ce même thème, voir également les résultats de XI 6, dont la place naturelle serait dans le présent exposé $\mathrm{VI_B}$. On y trouvera en particulier des critères de représentabilité pour certains sous-foncteurs en groupes d'un schéma en groupes donné. [48] N.D.E. : On a inséré ces résultats dans ce qui suit (n$^{\mathrm{os}}$ 6.5.2 à 6.5.5).

[49] N.D.E. : Si $u : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ et $v : \mathrm{Y} \to \mathrm{G}$ sont deux morphismes *arbitraires* de S-foncteurs, soit $u(\mathrm{X})$ le foncteur-image de u, défini par $u(\mathrm{X})(\mathrm{S}') = u(\mathrm{S}')(\mathrm{X}(\mathrm{S}')) \subset \mathrm{G}(\mathrm{S}')$, c'est un sous-foncteur de G, de même que le foncteur-image $v(\mathrm{Y})$; on peut alors considérer le *transporteur de l'image de* u *dans l'image de* v, $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(u(\mathrm{X}), v(\mathrm{Y}))$. On voit ainsi que, dans la définition (ii), il n'est pas nécessaire de se restreindre à des *sous-foncteurs*, i.e. au cas où u et v sont des monomorphismes. Cette restriction imposait parfois dans l'original des répétitions dans les hypothèses, telles que : « Soient $u, v : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ des morphismes de S-foncteurs, $w : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ et $w' : \mathrm{K} \to \mathrm{G}$ des monomorphismes, alors $\underline{\mathrm{Transp}}(u,v)$, $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(w) = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H}$ et $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H},\mathrm{K})$ vérifient ... », qui peuvent être évitées en considérant $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(u(\mathrm{X}), v(\mathrm{Y}))$. On a fait de telles modifications dans 6.2 et, plus loin, dans 10.11.

[50] N.D.E. : On a ajouté cette remarque, utilisée implicitement dans la proposition 6.2.

pour tout $S' \to S$, si G', X', Y', u', v' sont déduits de G, X, Y, u, v par changement de base, on a :

$$\underline{\mathrm{Transp}}(u,v)_{S'} = \underline{\mathrm{Transp}}(u',v') \qquad \text{et} \qquad \underline{\mathrm{Transp}}(X,Y)_{S'} = \underline{\mathrm{Transp}}(X',Y').$$

Proposition 6.2. — [51] *Soit* G *un* S*-groupe. Considérons pour un sous-foncteur* T *du foncteur* G*, la propriété suivante :*

$(+_{\mathrm{f}})$ pour tout $s \in S$, T_s est représentable par un sous-schéma *fermé* de G_s.

Soient $u, w : X \to G$ *et* $v : Y \to G$ *des morphismes de* S*-schémas. Alors :*

(i) $\underline{\mathrm{Transp}}(u,w)$ *et* $\underline{\mathrm{Centr}}(u) = \underline{\mathrm{Transp}}(u,u)$ *vérifient la condition* $(+_{\mathrm{f}})$.

(ii) $\underline{\mathrm{Transp}}_G(u(X), v(Y))$ *et* $\underline{\mathrm{Norm}}_G\, v(Y)$ *vérifient la condition* $(+_{\mathrm{f}})$ *si, pour tout* $s \in S$, v_s *est une* immersion fermée*.*

(iii) $\underline{\mathrm{Transpstr}}_G(X,Y)$ *vérifie la condition* $(+_{\mathrm{f}})$ *si, pour tout* $s \in S$, u_s *et* v_s *sont des* immersions fermées*.*

Ceci découle de la remarque 6.1.1 et du corollaire 6.2.5 ci-dessous. [52]

Définition 6.2.1. — Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas. On dit que f est *essentiellement libre*, ou encore que X *est essentiellement libre sur* S, si on peut trouver un recouvrement de S par des ouverts affines S_i, pour tout i un S_i-schéma S'_i affine et fidèlement plat sur S_i, et un recouvrement $(X'_{ij})_j$ de $X'_i = X \times_S S'_i$ par des ouverts affines X'_{ij}, tels que pour tout (i, j), l'anneau de X'_{ij} soit un module *projectif* [53] sur l'anneau de S'_i.

Proposition 6.2.2. — a) *Si* X *est essentiellement libre sur* S*, il est* plat *sur* S*, la réciproque étant vraie si* S *est artinien.*

b) *Si* S *est le spectre d'un corps, tout* S*-schéma est essentiellement libre sur* S*.*

c) *Si* X *est essentiellement libre sur* S*, alors* $X' = X \times_S S'$ *est essentiellement libre sur* S'*, pour tout* $S' \to S$*. La réciproque est vraie si* $S' \to S$ *est fidèlement plat et quasi-compact.*

---

[51] N.D.E. : On a modifié l'énoncé, comme indiqué dans la N.D.E. (49).

[52] N.D.E. : L'original faisait référence aux résultats de l'Exp. VIII, § 6. Pour la commodité du lecteur, on a reproduit ces résultats (à l'exception de VIII, 6.3 et 6.8) dans les nos 6.2.1 à 6.2.5 ci-dessous. D'ailleurs, ceci était suggéré par A. Grothendieck dans une Note au début de VIII.6 : « *Le présent numéro est indépendant de la théorie des groupes diagonalisables ; sa place naturelle serait dans* VI_B. ».

[53] N.D.E. : D'une part, on a remplacé le mot « libre » par « projectif », comme indiqué dans VIII, Remarque 6.8. D'autre part, la notion de S-schéma essentiellement libre est intimement liée à la notion géométrique de S-schéma *plat et pur*, introduite et étudiée par M. Raynaud et L. Gruson ([**RG71**]), cf. l'ajout 6.9 plus bas.

La démonstration est immédiate, en utilisant pour la réciproque dans a) le fait qu'un module plat sur un anneau local artinien est libre. [54]

L'introduction de la définition 6.2.1 est justifiée par le

Théorème 6.2.3. — *Soient* S *un schéma,* Z *un* S*-schéma* essentiellement libre*,* Y *un sous-schéma* fermé *de* Z*. Considérons le foncteur* $\mathrm{F} = \prod_{\mathrm{Z/S}} \mathrm{Y/Z} : (\mathbf{Sch})^{\circ}_{/\mathrm{S}} \to (\mathbf{Ens})$ *défini par la condition suivante :* $\mathrm{F(S')} = \varnothing$ *lorsque* $\mathrm{Y_{S'}} \neq \mathrm{Z_{S'}}$*,* $\mathrm{F(S')}$ *est réduit à un élément dans le cas contraire.* [55]

(i) *Ce foncteur est* représentable *par un* sous-schéma fermé T de S.

(ii) *Si de plus* $\mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ *est* de présentation finie*, il en est de même de* $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$.

Notons d'abord que le foncteur envisagé est un faisceau pour la topologie (fpqc) : comme $\mathrm{F(S')} = \varnothing$ ou $\{\mathrm{pt}\}$ pour tout S′, ceci se ramène à vérifier que si (S_i) est un recouvrement ouvert de S (resp. $\mathrm{S'} \to \mathrm{S}$ un morphisme fidèlement et quasi-compact), et si chaque $\mathrm{Y_{S_i}} \to \mathrm{Z_{S_i}}$ (resp. si $\mathrm{Y'_S} \to \mathrm{Z_{S'}}$) est un isomorphisme, il en est de même de $\mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$; or ceci est clair (resp. résulte de SGA 1, VIII 5.4 ou EGA IV_2, 2.7.1).

De plus, d'après SGA 1, VIII 1.9, les morphismes fidèlement plats et quasi-compacts sont de *descente effective* pour la catégorie fibrée des flèches d'immersion fermée. Ceci nous permet de nous borner avec les notations de 6.2.1 au cas où $\mathrm{S} = \mathrm{S}'_i$.

Soit alors (Z_j) un recouvrement de Z par des ouverts affines tels que $\mathscr{O}(\mathrm{Z}_j)$ soit un module projectif sur $\mathrm{A} = \mathscr{O}(\mathrm{S})$, et soient $\mathrm{Y}_j = \mathrm{Y} \cap \mathrm{Z}_j$ et $\mathrm{F}_j : (\mathbf{Sch})^{\circ}_{/\mathrm{S}} \to (\mathbf{Ens})$ le foncteur défini en termes de $(\mathrm{Z}_j, \mathrm{Y}_j)$ comme F en termes de (Z, Y). C'est un sous-foncteur du foncteur final, et on a évidemment $\mathrm{F} = \bigcap_j \mathrm{F}_j$, ce qui nous ramène à prouver que chaque F_j est représentable par un sous-schéma fermé T_j de S (car alors F sera représentable par le sous-schéma fermé T intersection des T_j). On peut donc supposer Z également affine, $\mathrm{Z} = \mathrm{Spec(B)}$, où B est un A-module projectif. Soit L un A-module libre de base $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, dont B est facteur direct en tant que A-module, et soient $\varphi_\lambda : \mathrm{L} \to \mathrm{A}$ les formes « coordonnées » par rapport à cette base. Soit E un ensemble de générateurs de l'idéal J de B définissant le sous-schéma Y de Z, et soit I l'idéal dans A engendré par les coordonnées $\varphi_\lambda(x)$, pour $x \in \mathrm{E}$. Pour toute A-algèbre C, on voit alors que le morphisme $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C} \to (\mathrm{B/J}) \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C}$ est un isomorphisme si et seulement si l'image de $x \otimes 1$ dans $\mathrm{L} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C}$ est nulle, pour tout $x \in \mathrm{E}$, ce qui équivaut à dire que le noyau de $\mathrm{A} \to \mathrm{C}$ contient l'idéal I. Ceci montre que $\mathrm{T} = \mathscr{V}(\mathrm{I}) = \mathrm{Spec(A/I)}$ satisfait à la condition voulue, ce qui prouve (i).

De plus, si $\mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ est de présentation finie, on peut prendre E fini, et alors I est un idéal de type fini de A, i.e. l'immersion fermée $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ est de présentation finie.

[54] N.D.E. : En effet, soient $(\mathrm{A}, \mathfrak{m})$ un anneau local artinien, k son corps résiduel, M un A-module arbitraire, $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ des éléments de M dont les images forment une base de $\mathrm{M}/\mathfrak{m}\mathrm{M}$ sur k. Soient F le A-module libre de base $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$, et $\phi : \mathrm{F} \to \mathrm{M}$ le A-morphisme défini par $\phi(e_i) = x_i$. Alors $\mathrm{Q} = \mathrm{Coker}\,\phi$ vérifie $\mathrm{Q} = \mathfrak{m}\mathrm{Q}$, d'où, puisque $\mathfrak{m}$ est nilpotent, $\mathrm{Q} = 0$. Supposons de plus M *plat* sur A ; alors $\mathrm{K} = \mathrm{Ker}\,\phi$ vérifie $\mathrm{K} \otimes_{\mathrm{A}} k = 0$, i.e. $\mathrm{K} = \mathfrak{m}\mathrm{K}$, d'où $\mathrm{K} = 0$.

[55] N.D.E. : cf. Exp. II § 1, où ce foncteur est noté $\prod_{\mathrm{Z/S}} \mathrm{Y}$; pour tout $\mathrm{S'} \to \mathrm{S}$, $\mathrm{F(S')} = \Gamma(\mathrm{Y_{S'}/Z_{S'}})$, qui ici égale $\{\mathrm{id}_{\mathrm{Z_{S'}}}\}$ si $\mathrm{Y'_S} = \mathrm{Z_{S'}}$, et est vide sinon. D'autre part, on a ajouté l'assertion (ii), utilisée dans la démonstration de 6.5.3.

***Exemples 6.2.4.* —** Donnons des exemples importants de foncteurs qui se ramènent à des foncteurs $\prod_{Z/S} Y/Z$ du type envisagé dans 6.2.3 et pour lesquels il est utile par la suite d'avoir des critères de représentabilité. On désigne par S un schéma, par X, Y, Z etc. des schémas sur S.

a) Donnons-nous un S-morphisme

$$q : X \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_S(Y, Z), \tag{x}$$

(« X opère sur Y, à valeurs dans Z »), i.e. un morphisme :

$$r : X \underset{S}{\times} Y \longrightarrow Z. \tag{xx}$$

Considérons un sous-schéma Z' de Z, d'où un monomorphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}_S(Y, Z') \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_S(Y, Z)$$

qui fait du premier foncteur un sous-foncteur du second, soit X' l'image inverse de ce sous-foncteur par le morphisme q, c'est le sous-foncteur de X tel que $X'(T)$ soit l'ensemble des $x \in X(T)$ tels que $q(x) : Y_T \to Z_T$ se factorise par Z'_T. Ce foncteur X' peut se décrire de la façon suivante : on pose $P = X \times_S Y$, soit P' l'image inverse de Z' par $r : P \to Z$, alors on a un isomorphisme évident

$$X' \simeq \prod_{P/X} P'/P. \tag{xxx}$$

On obtient donc : *si* Y *est essentiellement libre sur* S *et* Z' *fermé dans* Z, *le sous-foncteur* X' *de* X *est représentable par un sous-schéma fermé de* X.[56] *Si de plus* $Z' \to Z$ *est de présentation finie, il en est de même de* $X' \to X$.

b) Donnons-nous deux façons de faire opérer X sur Y à valeurs dans Z, i.e. deux morphismes

$$q_1, q_2 : X \rightrightarrows \underline{\mathrm{Hom}}_S(Y, Z),$$

et posons $X' = \mathrm{Ker}(q_1, q_2)$: c'est le sous-foncteur de X tel que $X'(T)$ soit l'ensemble des $x \in X(T)$ tels que les deux morphismes $q_1(x)$, $q_2(x) : Y_T \rightrightarrows Z_T$ soient égaux. Or la donnée de q_1, q_2 équivaut à la donnée d'un morphisme

$$q : X \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_S(Y, Z \underset{S}{\times} Z),$$

ou encore, d'un morphisme $r : X \times_S Y \to Z \times_S Z$; posons alors $U = Z \times_S Z$, soit U' le sous-schéma diagonal de $Z \times_S Z$, alors X' n'est autre que l'image inverse du sous-foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_S(Y, U')$ de $\underline{\mathrm{Hom}}_S(Y, U)$ par q, donc peut se mettre sous la forme (xxx), avec $P = X \times_S Y$, et P' = image inverse de la diagonale par r, i.e. noyau de $X \times_S Y \underset{r_2}{\overset{r_1}{\rightrightarrows}} Z$. On est donc sous les conditions de (a).

On voit par suite que : *si* Y *est essentiellement libre sur* S *et* Z *séparé sur* S, *alors le sous-foncteur* X' *de* X *est représentable par un sous-schéma fermé de* X.[56] *Si de plus* $Z \to S$ *est localement de type fini, alors* $X' \to X$ *est de présentation finie.*

(56) N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

c) Donnons-nous un morphisme

$$q : \mathrm{X} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Y}),$$

i.e. « X opère sur Y ». Soit X' le « noyau » de ce morphisme, i.e. le sous-foncteur X' de X tel que $\mathrm{X}'(\mathrm{T})$ soit l'ensemble des $x \in \mathrm{X}(\mathrm{T})$ tels que $q(x) : \mathrm{Y}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{Y}_{\mathrm{T}}$ soit l'identité. Ce foncteur est justiciable de b), comme on voit en introduisant un deuxième homomorphisme

$$q' : \mathrm{X} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Y})$$

« en faisant opérer X trivialement sur Y ». Donc : *si* Y *est essentiellement libre et séparé sur* S*, le sous-foncteur* X' *noyau de* q *est représentable par un sous-schéma fermé de* X. [56] *Si de plus* $\mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ *est localement de type fini, alors* $\mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ *est de présentation finie.*

d) Sous les conditions de c), considérons le sous-foncteur Y' de Y « des invariants sous X », donc $\mathrm{Y}'(\mathrm{T})$ est l'ensemble des $y \in \mathrm{Y}(\mathrm{T})$ tels que le morphisme correspondant $\overline{q}(y) : \mathrm{X}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{Y}_{\mathrm{T}}$ soit « le T-morphisme constant de valeur y ». Introduisant q' comme dans c), et les homomorphismes correspondants à q et q' :

$$\overline{q}, \overline{q'} : \ \mathrm{Y} \rightrightarrows \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}),$$

on voit que Y' est précisément $\mathrm{Ker}(\overline{q}, \overline{q'})$, et est donc justiciable encore de b) (avec les rôles de X, Y renversés et $\mathrm{Z} = \mathrm{Y}$).

Par suite, *si* X *est essentiellement libre sur* S, Y *séparé sur* S*, alors le sous-foncteur* Y' *de* Y *des invariants sous* X *est représentable par un sous-schéma fermé de* Y. [56] *Si de plus* $\mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ *est localement de type fini, alors* $\mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}$ *est de présentation finie.*

e) Des constructions du type explicité dans les exemples précédents sont surtout fréquentes en théorie des groupes. Ainsi, lorsque G est un S-schéma en groupes opérant sur le S-schéma X :

$$q : \mathrm{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}),$$

le noyau de q (« le sous-groupe de G opérant trivialement ») est un sous-schéma fermé de G pourvu que X soit essentiellement libre et séparé sur S (exemple c)), et le sous-objet X^{G} des invariants est un sous-schéma fermé de X, pourvu que G soit essentiellement libre sur S, et X séparé sur S (exemple d)).

Soient Y, Z des sous-schémas de X ; considérons le sous-foncteur $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ de G (« *transporteur de* Y *en* Z »), dont les points à valeurs dans un T sur S sont les $g \in \mathrm{G}(\mathrm{T})$ tels que l'automorphisme correspondant de X_{T} satisfasse $g(\mathrm{Y}_{\mathrm{T}}) \subset \mathrm{Z}_{\mathrm{T}}$, i.e. induise un morphisme $\mathrm{Y}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{X}_{\mathrm{T}}$ se factorisant en $\mathrm{Y}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{Z}_{\mathrm{T}}$. Donc : *si* Y *est essentiellement libre sur* S*, et* Z *fermé dans* X*, alors* $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ *est un sous-schéma fermé de* G (exemple a)).

On peut aussi considérer le *transporteur strict de* Y *en* Z*,* [57] dont les points à valeurs dans un T sur S sont les $g \in \mathrm{G}(\mathrm{T})$ tels que $g(\mathrm{Y}_{\mathrm{T}}) = \mathrm{Z}_{\mathrm{T}}$, qui n'est autre que $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z}) \cap \sigma(\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Z}, \mathrm{Y}))$, où σ est le morphisme d'inversion de G. Par suite,

[57] N.D.E. : noté $\underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$.

si Y *et* Z *sont essentiellement libres sur* S *et fermés dans* X, *le transporteur strict de* Y *en* Z *est un sous-schéma fermé de* G.

Un cas important est celui où X = G, G opérant sur lui-même par automorphismes intérieurs. Si H est un sous-schéma de G, le transporteur strict de H en H est aussi appelé le *normalisateur* de H dans G, et noté $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}$ H. Donc : *si* H *est un sous-schéma en groupes fermé de* G, *essentiellement libre sur* S, *alors* $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}$ H *est représentable par un sous-schéma en groupes fermé de* G.

Soit enfin Z un sous-schéma de G, alors son *centralisateur* $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Z})$ dans G est le sous-foncteur en groupes de G défini par le procédé de d), quand on considère que « Z opère sur G » par les opérations induites par celles de G ; donc *si* Z *est essentiellement libre sur* S *et* G *est séparé sur* S, $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Z})$ *est un sous-schéma en groupes fermé de* G. En particulier, *si* G *est essentiellement libre et séparé sur* S, *alors le* centre C *de* G, *qui n'est autre que* $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{G})$, *est un sous-schéma en groupes fermé de* G.

Lorsque S est le spectre d'un corps, 6.2.2 b) montre que dans les exemples a) à e) ci-dessus, les conditions « essentiellement libre » sont automatiquement satisfaites, il ne reste que des conditions de séparation. Se rappelant qu'un schéma en groupes sur un corps est nécessairement séparé (VI_{A}, 0.3), on trouve par exemple :

Corollaire 6.2.5. — *Soit* G *un schéma en groupes sur un corps* k *et soient* Y, Y' *deux sous-schémas de* G. *Alors :*

(i) *Le centralisateur de* Y *dans* G *est un sous-schéma en groupes fermé de* G *; c'est en particulier le cas pour le* centre $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{G})$ *de* G.

(i′) *Plus généralement, si* $u,\ v : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *sont des morphismes de schémas,* $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(u, v)$ *est représentable par un sous-schéma fermé de* G.

(ii) *Si* Y *est* fermé, *le transporteur* $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y}', \mathrm{Y})$ *est un sous-schéma fermé de* G. *Si* Y′ *est également* fermé, *on a la même conclusion pour* $\underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y}', \mathrm{Y})$.

(iii) *Pour* tout *sous-schéma* en groupes [58] H *de* G, $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ *est un sous-schéma en groupes fermé de* G.

Corollaire 6.2.6. — [59] *Soient* k *un corps,* G *un* k*-groupe algébrique connexe. Alors* $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{G})$ *est représentable par un sous-schéma en groupes fermé* Z *de* G, *et* G/Z *est un* k*-groupe algébrique* affine.

Démonstration. Bien entendu, la première assertion est contenue dans 6.2.5 (i), mais on va voir qu'elle découle aussi de la démonstration de la seconde assertion. En effet, G opère par la représentation adjointe sur les k-espaces vectoriels de dimension finie $\mathrm{V}_n = \mathscr{O}_{\mathrm{G},e}/\mathfrak{m}_e^{n+1}$ (où $\mathfrak{m}_e$ est l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{\mathrm{G},e}$), notons K_n le noyau du morphisme $\rho_n : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathrm{V}_n)$. D'après VI_{A} 5.4.1, ρ_n induit une immersion fermée $\mathrm{G}/\mathrm{K}_n \hookrightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{V}_n)$, donc chaque G/K_n est affine. Comme G est noethérien, l'intersection K des K_n est égale à l'un des K_n, donc G/K est affine.

(58) N.D.E. : En effet, sur un corps k, tout sous-schéma en groupes de G est *fermé*, cf. VI_{A}, 0.5.2. D'autre part, 6.2.5 achève l'insertion des résultats tirés de VIII § 6.

(59) N.D.E. : On a inséré ici ce corollaire (cf. Exp. XII, 6.1), qui sera utile plus loin. Par ailleurs, on revient en 6.3 au texte originel de VI_{B}.

D'autre part, notant Z le centre de G, il est clair que $Z \subset K$. Montrons que $Z = K$. Notons $\widehat{\mathscr{O}}_{G,e}$ le complété de $\mathscr{O}_{G,e}$ pour la topologie $\mathfrak{m}_e$-adique et $\widehat{S}$ son spectre (resp. $S = \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{G,e}$). Comme $\widehat{S} \to S$ est fidèlement plat et comme les deux morphismes :

$$K \times_k S \longrightarrow S, \qquad (g, x) \mapsto gxg^{-1} \quad \text{resp.} \quad (g, x) \mapsto x$$

coïncident après changement de base $\widehat{S} \to S$, ils coïncident, i.e. K agit trivialement sur $\mathscr{O}_{G,e}$. Or, d'après 6.2.4 e), le sous-objet G^K des invariants de G sous K (qui n'est autre que $\underline{\mathrm{Centr}}_G(K)$) est un sous-schéma fermé de G, donc défini par un idéal quasi-cohérent $\mathscr{I}$ de $\mathscr{O}_G$. Comme G^K majore $S = \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{G,e}$ et comme $\mathscr{I}$ est de type fini (puisque G est noethérien), il existe un voisinage ouvert U de e tel que $\mathscr{I}|_U = 0$. Alors le sous-groupe $G^K = \underline{\mathrm{Centr}}_G(K)$ contient U donc aussi $U \cdot U$, qui égale G puisque G est irréductible ($\mathrm{VI_A}$ 0.5). Donc $\underline{\mathrm{Centr}}_G(K) = G$, d'où $K \subset Z$ et donc $Z = K$.

Remarque 6.3. — Soient k un corps algébriquement clos, G un k-groupe et H un
359 sous-schéma en groupes de G ; supposons G et H de type fini sur k et réduits ; alors $\underline{\mathrm{Norm}}_G\, H$ (resp. $\underline{\mathrm{Centr}}_G\, H$) est représentable par un sous-schéma en groupes de G, *dont le sous-schéma réduit associé* n'est autre que le normalisateur (resp. le centralisateur) de H dans G au sens de *Bible*.

Proposition 6.4. — *Soient* G *un* S-*groupe, et* $u : X \to G$ *un monomorphisme de* S-*schémas. Posons* $T = \underline{\mathrm{Transp}}_G(X, X)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) T *est un sous-foncteur* en groupes *de* G.

(ii) $T = \underline{\mathrm{Transpstr}}_G(X, X) = \underline{\mathrm{Norm}}_G\, X$.

Ces conditions sont vérifiées dans chacun des deux cas suivants :

a) X *est* de présentation finie *sur* S.

b) T *est* représentable *par un schéma* de présentation finie *sur* S.

L'équivalence des conditions (i) et (ii) résulte de ce que, quel que soit le morphisme $S' \to S$, quels que soient $t, t' \in T(S')$, on a $tt' \in T(S')$, et de ce que $\underline{\mathrm{Transpstr}}_G(X, X) = T \cap c(T)$ (cf. 6.1 (ii)).

Plaçons-nous dans le cas a). Soit $t \in T(S)$, alors $\mathrm{int}(t)$ est un monomorphisme de X dans X, donc un S-automorphisme de X (EGA IV_4, 17.9.6), si bien que t appartient à $\underline{\mathrm{Transpstr}}_G(X, X)$, d'où a).

Dans le cas b), il est clair que $\mu(T \times_S T) \subset T$, et l'assertion résulte du lemme suivant :

Lemme 6.4.2. — [60] *Soit* G *un* S-*schéma* de présentation finie, *muni d'une loi associative* (au sens de EGA 0_{III} 8.2.5). *Supposons que pour tout* S-*schéma* S′ *et tout* $g \in G(S')$, *les translations à droite et à gauche par* g *dans l'ensemble* G(S′) *soient* injectives *et que* $G(S) \neq \varnothing$. *Alors* G *est un* S-groupe.

[60] N.D.E. : On a conservé la numérotation de l'original : il n'y a pas de n°6.4.1.

Il suffit de montrer que, quel que soit le S-schéma S', l'ensemble $G(S')$ est un groupe ; or, de l'hypothèse résulte aussitôt que les translations à droite et à gauche par tout élément $g \in G(S')$ dans $G_{S'}$ sont des S-monomorphismes de $G_{S'}$ dans $G_{S'}$. 360
Ce sont donc des S-*automorphismes*, puisque G est de présentation finie sur S (EGA IV_4, 17.9.6), si bien que les translations à droite et à gauche par g dans l'ensemble $G(S')$ sont bijectives, et on est ramené au lemme suivant :

Lemme 6.4.3. — *Soit* G *un ensemble non vide muni d'une loi associative telle que les translations à droite et à gauche soient bijectives. Alors* G *est un groupe.*

La démonstration est laissée au lecteur.

Définition 6.5. — Soient G un S-groupe, H un S-foncteur, et $u : H \to G$ un *monomorphisme.*

(i) On appelle *centralisateur connexe de* H *dans* G et on note $\underline{\mathrm{Centr}}^0_G H$ la composante neutre du foncteur $\underline{\mathrm{Centr}}_G H$ (cf. 3.1 et 6.1 (iii)).

(i′) Pour tout morphisme $u : X \to G$, on définit de même le foncteur $\underline{\mathrm{Centr}}^0(u)$ (cf. 6.2 (iv)).

(ii) Lorsque pour tout $s \in S$, u_s est une immersion fermée, on appelle *normalisateur connexe de* H *dans* G, et on note $\underline{\mathrm{Norm}}^0_G H$ la composante neutre du foncteur $\underline{\mathrm{Norm}}_G H$.

N. B. D'après 1.4.2, l'hypothèse de (ii) est vérifiée lorsque H un S-*schéma en groupes*, que G et H sont *localement de type fini* sur S et que u est un morphisme de S-groupes *quasi-compact.*

Proposition 6.5.1. — *Soit* G *un* S-*groupe* localement de présentation finie *et* quasi-séparé *sur* S, H *un* S-*groupe* lisse à fibres connexes *et* $u : H \to G$ *un* monomorphisme. *Soit* N *le normalisateur de* H *dans* G (cf. 6.1). *D'après* 6.5.5 *ci-dessous,* N *est* représentable *par un sous-schéma en groupes* fermé *de* G *et* de présentation finie *sur* G. *Ceci étant, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le morphisme canonique* $H \to N$ *est une* immersion ouverte.

(ii) $N^0 = H$ (cf. 3.10).

(iii) *Pour tout* $s \in S$, *on a* $H_s = (N_s)^0$. 361

La condition (i) entraîne (ii) d'après le lemme 3.10.1, puisque $H^0 = H$. D'autre part, il est clair que (ii) entraîne (iii), car $H_s = (N^0)_s = (N_s)^0$.

Montrons enfin que (iii) entraîne (i). Puisque $H_s = (N^0)_s$, quel que soit $s \in S$, alors $H_s \to N_s$ est une immersion ouverte. De plus, H et N sont localement de présentation finie sur S, et H est plat sur S, donc (EGA IV_4, 17.9.5), $H \to N$ est une immersion ouverte.

[61] Pour la commodité du lecteur, on a inclus ci-dessous les résultats 6.8 à 6.11 de l'Exp. XI.

[61] N.D.E. : On a inséré ici les n^{os} 6.5.2 à 6.5.5, tirés de l'Exp. XI, 6.8 à 6.11. Ceci était d'ailleurs suggéré par A. Grothendieck dans une Note au début de XI 6 : « *Le présent numéro n'utilise pas les résultats des n^{os}* 3, 4, 5 (de XI) ; *sa place naturelle serait dans* VI_B. ».

Théorème 6.5.2. — *Soit* X *un schéma* lisse *sur* S*, à fibres* géométriquement irréductibles. [62]

(i) *Pour tout sous-schéma* fermé Y *de* X*, le foncteur* $\prod_{X/S} Y/X$ *est* représentable *par un sous-schéma* fermé T *de* S.

(ii) *De plus, si* $Y \to X$ *est de présentation finie, il en est de même de* $T \to S$.

Comme $f : X \to S$ est fidèlement plat localement de présentation finie, il est couvrant pour la topologie (fpqc). Comme d'autre part $T = \prod_{X/S} Y/X$ est évidemment un sous-*faisceau* de S pour la topologie (fpqc), il s'ensuit que la question de la représentabilité de T par un sous-schéma fermé de S est de nature locale sur S pour la topologie (fpqc), [63] et il en est de même de la question de décider si T est de présentation finie sur S (cf. EGA IV_2, 2.7.1). Quitte à faire alors le changement de base $S' \to S$, avec $S' = X$, on est ramené au cas où X admet une section ε sur S. On peut de plus supposer S affine et a fortiori quasi-compact. On a alors :

Corollaire 6.5.3. — *Sous les conditions de* 6.5.2*, supposons que* S *soit* quasi-compact*, que* $X \to S$ admette une section ε*, et que* $Y \to X$ *soit* de présentation finie*. Alors il existe un entier* $n \geqslant 0$ *tel que l'on ait*

$$\prod_{X/S} Y/X = \prod_{X_n/S} Y_n/X_n\,,$$

où X_n *est le n-ième voisinage infinitésimal de l'immersion* $\varepsilon : S \to X$*, et* $Y_n = Y \cap X_n$.

Lorsque Y est de présentation finie sur X, ce corollaire implique bien 6.5.2, car X étant lisse sur S, X_n est fini et localement libre sur S, donc a fortiori « essentiellement libre » sur S (cf. 6.2.1), donc $\prod_{X_n/S} Y_n/X_n$ est représentable par un sous-schéma fermé T de S, de présentation finie sur S, d'après 6.2.3.

Prouvons d'abord 6.5.3 (et donc 6.5.2) lorsque S est *noethérien.* Soit $T_n = \prod_{X_n/S} Y_n/X_n$, alors les T_n forment une suite décroissante de sous-schémas fermés de S, et S étant noethérien, cette suite est stationnaire. Soit $R = \bigcap_{n\geqslant 0} \prod_{X_n/S} Y_n/X_n$ leur valeur commune pour n grand, on a évidemment $T \subset R$, et il suffit d'établir que l'on a $R \subset T$. Quitte à faire le changement de base $R \to S$, on est ramené au cas où $R = S$, i.e. $Y_n = X_n$ pour tout n, i.e. $Y \supset X_n$ pour tout n, et il faut alors prouver que $T = S$, i.e. $Y = X$.

Or $Y \supset X_n$ pour tout n implique (grâce au fait que X est localement noethérien) que Y est, au voisinage de chaque point de $\varepsilon(S)$, un sous-schéma ouvert induit de X, [64] donc il existe un ouvert induit U de X, contenant $\varepsilon(S)$, tel que $U \subset Y$. En vertu de EGA IV_3, 11.10.10, les fibres de X/S étant intègres, U est schématiquement dense dans X, donc (Y étant un sous-schéma fermé majorant U) on a $Y = X$. Cela prouve 6.5.3 donc 6.5.2 lorsque S est noethérien.

[62] N.D.E. : D'une part, on a corrigé l'original, en remplaçant « connexes » par « irréductibles » (cf. la démonstration). D'autre part, d'après [**RG71**] I, 3.3.4 (iii) et 4.1.1, il suffit de supposer que X est plat sur S, à fibres géométriquement irréductibles et sans composantes immergées.

[63] N.D.E. : Voir par exemple l'ajout 1.7 dans l'Exp. VIII.

[64] N.D.E. : voir, par exemple, la démonstration de 6.2.6.

Le cas général procède par réduction au cas précédent. Pour tout $s \in \mathrm{S}$, il existe un voisinage ouvert affine U de s et un voisinage ouvert affine V de $\varepsilon(s)$ tel que $f(\mathrm{V}) \subset \mathrm{U}$. Alors $f(\mathrm{V})$ est un voisinage ouvert de s contenu dans U, et si S' est un voisinage ouvert affine de s contenu dans $\varepsilon^{-1}(\mathrm{V}) \cap f(\mathrm{V})$, et $\mathrm{X}' = \mathrm{V} \cap f^{-1}(\mathrm{S}')$, alors X' et S' sont des ouverts affines de X resp. S, et X'/S' admet une section. À cause de la nature locale de 6.5.2 et 6.5.3 on peut supposer $\mathrm{S} = \mathrm{S}'$. Alors X' est un ouvert affine de X contenant $\varepsilon(\mathrm{S})$. Comme chaque fibre X_s est supposée irréductible, X'_s est schématiquement dense dans X_s et donc, d'après EGA IV_3, 11.10.10, X' est schématiquement dense dans X, et de même, pour tout changement de base $\mathrm{S}_1 \to \mathrm{S}$, $\mathrm{X}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_1$ est schématiquement dense dans $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_1$.

Il en résulte que $\prod_{\mathrm{X}/\mathrm{S}} \mathrm{Y}/\mathrm{X} = \prod_{\mathrm{X}'/\mathrm{S}} \mathrm{Y}'/\mathrm{X}'$, où $\mathrm{Y}' = \mathrm{Y} \cap \mathrm{X}'$. Cela nous ramène au cas où $\mathrm{X} = \mathrm{X}'$, donc on peut supposer S et X *affines*. De plus, si $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}(\mathrm{B})$ et si J est l'idéal de B qui définit Y, alors J est limite inductive de ses sous-idéaux de type fini, donc Y est intersection de sous-schémas fermés Y_i de X qui sont de présentation finie sur X, et par suite $\prod_{\mathrm{X}/\mathrm{S}} \mathrm{Y}/\mathrm{X} = \bigcap_i \prod_{\mathrm{X}/\mathrm{S}} \mathrm{Y}_i/\mathrm{X}$, ce qui nous ramène, pour prouver 6.5.2, au cas où Y est de présentation finie sur X, avec S et X affines.

Mais alors X et Y sur S proviennent par changement de base $\mathrm{S} \to \mathrm{S}_0$ d'une situation analogue X_0 et Y_0 sur S_0, avec S_0 noethérien, ce qui nous ramène au cas où S et noethérien, qui a déjà été traité. Cela achève la démonstration de 6.5.2 et 6.5.3.

Corollaire 6.5.4. — *Soient* X *un* S*-schéma en groupes lisse de présentation finie, à fibres connexes,* Y *un schéma en groupes de présentation finie sur* S*,* $i : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ *un monomorphisme de* S*-schémas en groupes.*

(i) *Alors* $\prod_{\mathrm{X}/\mathrm{S}} \mathrm{Y}/\mathrm{X}$ *est représentable par un sous-schéma fermé de présentation finie de* S.

(ii) *Si de plus* S *est quasi-compact, on a pour n assez grand :*

$$\prod_{\mathrm{X}/\mathrm{S}} \mathrm{Y}/\mathrm{X} = \prod_{\mathrm{X}_n/\mathrm{S}} \mathrm{Y}_n/\mathrm{X}_n\,,$$

où X_n *désigne le n-ième voisinage infinitésimal de la section unité* $\varepsilon : \mathrm{S} \to \mathrm{X}$*, et* $\mathrm{Y}_n = \mathrm{X}_n \cap \mathrm{Y}$.

La démonstration est essentiellement celle de 6.5.3. [65] D'une part, i est localement de présentation finie (cf. EGA IV_1, 1.4.3). D'autre part, les sections unité de Y et de X induisent des immersions bijectives $\mathrm{S} \to \mathrm{Y}_n$ et $\mathrm{S} \to \mathrm{X}_n$, donc des isomorphismes de $\mathrm{S}_{\mathrm{réd}}$ avec $(\mathrm{Y}_n)_{\mathrm{réd}}$ et $(\mathrm{X}_n)_{\mathrm{réd}}$. Par conséquent, i_n est quasi-compact donc de type fini, et l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} (\mathrm{Y}_n)_{\mathrm{réd}} \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\sigma"'] & \mathrm{Y}_n \arrow[d, "i_n"] \\ & \mathrm{X}_n \end{tikzcd}$$

[65] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit, ajoutant des références à EGA IV.

où σ, τ sont des immersions fermées et τ est surjectif. Comme i_n est séparé (étant un monomorphisme), il en résulte que i_n est propre (cf. EGA II, 5.4.3). Donc i_n est un monomorphisme propre de présentation finie, donc une immersion fermée (cf. EGA IV_3, 8.11.5). Par suite, en vertu de 6.2.3 déjà utilisé, $\prod_{\mathrm{X}_n/\mathrm{S}} \mathrm{Y}_n/\mathrm{X}_n$ est représentable par un sous-schéma fermé T_n de S de présentation finie sur S, et il reste donc à prouver la dernière assertion de 6.5.4 dans le cas où on suppose de plus S affine.

On se réduit immédiatement encore au cas où S est noethérien, et on est ramené à prouver qu'alors on a $\mathrm{R} = \mathrm{T}$ (avec les notations de la démonstration de 6.5.3), ou encore que $\mathrm{Y} \supset \mathrm{X}_n$ pour tout n implique $\mathrm{Y} = \mathrm{X}$. Or l'hypothèse implique que $i : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ est étale en les points de la section unité de Y sur S, donc Y est lisse sur S en les points de la section unité, d'où il résulte que l'ouvert U des points de Y en lesquels Y est lisse sur S est un sous-groupe ouvert induit de Y (cf. 2.3). Alors $\tau : \mathrm{U} \to \mathrm{X}$ est un monomorphisme étale en vertu de 2.5, donc une immersion ouverte, or les fibres de X étant connexes et tout sous-groupe ouvert d'un groupe algébrique étant aussi fermé, il s'ensuit que τ est une immersion ouverte surjective i.e. un isomorphisme. Donc $\mathrm{U} = \mathrm{X}$ et a fortiori $\mathrm{Y} = \mathrm{X}$, ce qui achève la démonstration de 6.5.4.

Procédant comme dans 6.2.4 e), on conclut de 6.5.4 :

Corollaire 6.5.5. — *Soient* G *un* S-*schéma en groupes* localement de type fini et quasi-séparé *sur* S*,* H *un schéma en groupes* lisse de présentation finie sur S à fibres connexes*,* $i : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un monomorphisme de* S*-groupes. Alors :*

a) $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ *et* $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ *sont représentables par des sous-schémas fermés de* G*, de présentation finie sur* G.

a′) *De même, pour tout monomorphisme* $j : \mathrm{K} \to \mathrm{G}$ de présentation finie *de* S-*schémas en groupes,* $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}, \mathrm{K})$ *est représentable par un sous-schéma fermé de* G*, de présentation finie sur* G.

b) *Si* G *est quasi-compact, il existe un entier* $n \geqslant 0$ *tel que* (*si* H_n *désigne le* n*-ième voisinage infinitésimal de la section unité de* H) *on ait :*

$$\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}_n) \qquad \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}_n)$$
$$\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}, \mathrm{K}) = \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}_n, \mathrm{K}) = \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}_n, \mathrm{K}_n).$$

Démonstration. [66] Notons d'abord que l'hypothèse faite sur G entraîne que le monomorphisme $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$ est de présentation finie (EGA IV_1, 1.2.4 et 1.4.3) ainsi que l'immersion diagonale $\Delta_{\mathrm{G}/\mathrm{S}} : \mathrm{G} \to \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$ (*loc. cit.* 1.4.3.1). Le cas de $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ se ramène donc au cas du transporteur, en faisant $\mathrm{H} = \mathrm{K}$. Tenant compte de 6.2.4 e), on va appliquer 6.5.4 au schéma en groupes $\mathrm{X} = \mathrm{H}_{\mathrm{G}} = \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$ au-dessus du schéma de base G, et au sous-schéma en groupes Y suivant.

Dans le cas de $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}, \mathrm{K})$, on prend pour Y l'image inverse de K_{G} par le morphisme de G-groupes $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$, $(h, g) \mapsto (ghg^{-1}, g)$. Dans le cas de

[66] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit. D'autre part, ceci achève l'insertion de XI, 6.8 à 6.11, i.e. on revient en 6.6 ci-dessous au texte originel de VI_{B}.

$\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$, on prend pour Y l'image inverse du sous-groupe diagonal $\Delta_{\mathrm{G/S}}(\mathrm{G})_{\mathrm{G}}$ de $(\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G})_{\mathrm{G}}$ par le morphisme de G-groupes :

$$\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}, \qquad (h, g) \mapsto (h, ghg^{-1}, g).$$

Définition 6.6. — Soient G un S-foncteur en groupes, H un sous-S-foncteur en groupes ; on dit que H est *invariant* (resp. *central*, resp. *caractéristique*) dans G si $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H} = \mathrm{G}$ (resp. si $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H} = \mathrm{G}$, resp. si, quels que soient le S-schéma T et l'automorphisme $a \in \mathrm{Aut}_{\text{T-gr.}}(\mathrm{G_T})$ on a : $a(\mathrm{H_T}) \subset \mathrm{H_T}$), autrement dit, si, quel que soit le S-schéma T, le sous-groupe H(T) de G(T) est invariant dans G(T) (resp. central dans G(T), resp. invariant par tout automorphisme de $\mathrm{G_T}$).

N. B. Si H est central (resp. caractéristique), il est invariant.

Remarque 6.7. — Soient G et H deux S-groupes et $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ un *monomorphisme*. Pour que H soit invariant (resp. central) dans G, il faut et il suffit que le morphisme

$$\mu \circ \big(c \circ \mathrm{pr}_2,\ \mu \circ (u \times \mathrm{id_G})\big) : \mathrm{H} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}$$

(défini par $(h, g) \mapsto g^{-1}hg$ quels que soient $g \in \mathrm{G(S')}$ et $h \in \mathrm{H(S')}$), se factorise à travers u (resp. soit égal à $u \circ \mathrm{pr}_1$), et pour que H soit caractéristique dans G, il faut et il suffit que pour tout S-schéma T et tout T-automorphisme de groupe a de $\mathrm{G_T}$, $a \circ u(\mathrm{T})$ se factorise à travers $u(\mathrm{T})$.

Exemple 6.8. — Soit G un S-foncteur en groupes. Alors $\underline{\mathrm{Centr}}\,\mathrm{G}$ est caractéristique et central. Si, pour tout $s \in \mathrm{S}$, G_s est *représentable*, alors G^0 est caractéristique. Cela 362
résulte des définitions et de 3.3.

6.9. — [67] Dans [**RG71**], I 3.3.3, les auteurs introduisent la notion géométrique de S-schéma *pur*, qui est locale sur S pour la topologie étale ; on renvoie à *loc. cit.* pour la définition précise. Signalons simplement les points suivants :

a) (*loc. cit.*, Th. 3.3.5) Si B est une A-algèbre plate de présentation finie, alors B est un A-module projectif si et seulement si Spec(B) est pur sur Spec(A).

b) Par conséquent, si $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$ est localement de présentation finie, plat et pur, alors X est essentiellement libre sur S.

c) (*loc. cit.*, 3.3.4 (iii)) Si $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$ est localement de type fini, plat, à fibres géométriquement irréductibles et sans composantes immergées, alors X est pur sur S.

Comme tout schéma en groupes localement de type fini sur un corps est de Cohen-Macaulay (cf. $\mathrm{VI_A}$, 1.1.1), donc sans composantes immergées, on obtient en particulier :

d) Tout S-schéma en groupes G localement de présentation finie, plat et à fibres connexes est pur sur S, donc essentiellement libre sur S.

On peut alors reprendre tous les énoncés de 6.2.4 e) en tenant compte des résultats (b) et (d) ci-dessus.

[67] N.D.E. : On a ajouté cette sous-section.

7. Sous-groupes engendrés ; groupe des commutateurs

Dans ce numéro, k désigne un corps fixé.

Proposition 7.1. — *Soient* G *un k-groupe,* $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille de k-schémas* géométriquement réduits [68] *; pour tout $i \in \mathrm{I}$, soit $f_i : \mathrm{X}_i \to \mathrm{G}$ un k-morphisme.*

(i) *Il existe un plus petit sous-k-schéma en groupes fermé de* G *majorant chacun des f_i, noté $\Gamma_{\mathrm{G}}((f_i)_{i\in\mathrm{I}})$. C'est un k-schéma* géométriquement réduit*, donc* lisse *dans le cas où* G *est supposé* localement de type fini *sur k* (1.3.1)*.*

(ii) *Posons $\mathrm{X} = \coprod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{X}_i$, et soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ le morphisme dont la restriction à X_i est f_i, pour tout $i \in \mathrm{I}$. Posons $\mathrm{X}^1 = \mathrm{X} \coprod \mathrm{X}$, soit $f^1 : \mathrm{X}^1 \to \mathrm{G}$ le morphisme dont les restrictions à* X *sont respectivement f et $c \circ f$. Pour tout $n > 1$, posons*

$$\mathrm{X}^n = \mathrm{X}^1 \underset{k}{\times} \mathrm{X}^{n-1} \qquad et \qquad f^n = \mu \circ (f^1 \underset{k}{\times} f^{n-1}) : \mathrm{X}^n \longrightarrow \mathrm{G}.$$

Alors $\Gamma_{\mathrm{G}}((f_i)_{i\in\mathrm{I}})$ est le sous-schéma réduit *de* G *ayant pour espace sous-jacent l'adhérence de la réunion des $f^n(\mathrm{X}^n)$, pour $n \geqslant 1$.*

(iii) *Pour tout k-schéma* S*, $\Gamma_{\mathrm{G}}((f_i)_{i\in\mathrm{I}})_{\mathrm{S}}$ est le* plus petit sous-schéma en groupes fermé *de G_{S} majorant chacun des $f_{i,\mathrm{S}} : \mathrm{X}_{\mathrm{S}} \to \mathrm{G}_{\mathrm{S}}$.*

(iii′) *De plus, $\Gamma_{\mathrm{G}}((f_i)_{i\in\mathrm{I}})_{\mathrm{S}}$ est le* plus petit sous-schéma en groupes *de G_{S} majorant chacun des $f_{i,\mathrm{S}}$.* [69]

Remarquons tout d'abord que, pour démontrer (i), (iii) et (iii′), en définissant X et f comme dans (ii), on est ramené au cas où I est réduit à un élément.

Soit H le sous-schéma réduit de G d'ensemble sous-jacent $\overline{\bigcup_{n\geqslant 1} f^n(\mathrm{X}^n)}$. Alors la famille de morphismes $f^n : \mathrm{X}^n \to \mathrm{H}$ est schématiquement dominante (cf. EGA IV_3, 11.10.4), donc tout sous-schéma fermé de G qui majore les f^n majore aussi H. De plus, d'après *loc. cit.*, 11.10.7, H est *géométriquement réduit.* Donc pour montrer (i)
363 et (ii), il suffit de montrer que H est un sous-schéma *en groupes* de G, donc que la restriction de c à H et la restriction de μ à $\mathrm{H} \times_k \mathrm{H}$ se factorisent à travers l'injection $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$.

Puisque H est géométriquement réduit, $\mathrm{H} \times_k \mathrm{H}$ est réduit, et il suffit de vérifier que $c(\mathrm{H}) \subset \mathrm{H}$ et que $\mu(\mathrm{H} \times_k \mathrm{H}) \subset \mathrm{H}$ (ensemblistement). Mais d'après EGA IV_3, 11.10.6, la réunion des $f^n_{(\mathrm{H})}(\mathrm{X}^n \times_k \mathrm{H})$ est schématiquement dense dans $\mathrm{H} \times_k \mathrm{H}$. De même, quel que soit $n \geqslant 1$, la réunion des $f^m_{(\mathrm{X}^n)}(\mathrm{X}^n \times_k \mathrm{X}^m)$, pour $m \geqslant 1$, est schématiquement dense dans $\mathrm{X}^n \times_k \mathrm{H}$. Donc il suffit de montrer que $\mu(f^n_{(\mathrm{H})}(f^m_{(\mathrm{X}^n)}(\mathrm{X}^n \times_k \mathrm{X}^m))) \subset \mathrm{H}$ et que $c(f^n(\mathrm{X}^n)) \subset \mathrm{H}$. Or

$$\mu(f^n_{(\mathrm{H})}(f^m_{(\mathrm{X}^n)}(\mathrm{X}^n \underset{k}{\times} \mathrm{X}^m))) = \mu((f^n \underset{k}{\times} f^m)(\mathrm{X}^n \underset{k}{\times} \mathrm{X}^m)) = f^{n+m}(\mathrm{X}^{n+m}) \subset \mathrm{H};$$

et, puisque $c(f^1(\mathrm{X}^1)) \subset f^1(\mathrm{X}^1)$, on a, quel que soit n, $c(f^n(\mathrm{X}^n)) \subset f^n(\mathrm{X}^n) \subset \mathrm{H}$. Ceci démontre (i) et (ii).

---

[68] N.D.E. : On a remplacé, ici et dans la suite, la terminologie peu usitée « *séparable* » par la terminologie usuelle « *géométriquement réduit* », cf. EGA IV_2, 4.6.2.

[69] N.D.E. : L'original énonçait (iii′) sous l'hypothèses additionnelle que G soit localement de type fini sur k, mais celle-ci peut-être omise, d'après VI_{A}, 0.5.2.

Montrons maintenant (iii). Soit G' un sous-schéma en groupes *fermé* de G_S majorant f_S ; il s'agit de montrer que G' majore H_S, ou, ce qui revient au même, que $H_S = H_S \times_{G_S} G'$. Posons $H'_S = H_S \times_{G_S} G' = G' \cap H_S$. Puisque G' et H_S majorent tous deux les f^n_S, il en est de même de H'_S. Or (EGA IV_3, 11.10.6), puisque la famille des $f^n : X^n \to H$ est schématiquement dominante, il en est de même de la famille des $f^n_S : X^n_S \to H_S$, si bien que H'_S, qui majore chacun des f^n_S, est égal à H_S d'après EGA IV_3, 11.10.1 c). Ceci prouve (iii).

Montrons enfin que H_S est le plus petit sous-schéma en groupes (non nécessairement fermé) de G_S majorant f_S.

Soit G' un sous-schéma en groupes de G_S majorant f_S. Il s'agit de même de montrer que, si on pose $H'_S = H_S \times_{G_S} G'$, on a $H'_S = H_S$. Il suffit pour cela de montrer que H'_S est fermé dans H_S et d'appliquer (iii). Il suffit donc de montrer que H_S et H'_S ont même ensemble sous-jacent, a fortiori il suffit de montrer que, pour tout $s \in S$, H_s égale

$$H'_s := H'_S \underset{S}{\times} \kappa(s) = H_s \underset{G_s}{\times} G'_s.$$

Or, d'après VI_A, 0.5.2, le sous-$\kappa(s)$-schéma en groupes G'_s est *fermé* dans G_s. Donc H'_s est fermé dans H_s, et alors le raisonnement précédent, appliqué à H'_s, à H_s et aux f^n_s, montre que $H'_s = H_s$.

Corollaire 7.1.1. — [70] *Soit* G *un k-groupe localement de type fini et soient* A, B *deux sous-k-groupes de* G*,* lisses et de type fini*, et* i_A (*resp.* i_B) *l'inclusion de* A (*resp.* B) *dans* G*. On suppose que* B normalise A*, alors* $A \cdot B = \Gamma_G(i_A, i_B)$.

En effet, soit $H = A \rtimes B$ le produit semi-direct de A et B (cf. I, 2.3.5), c'est un k-groupe lisse et de type fini. Alors, le morphisme de groupes $u : H \to G$, $(a, b) \mapsto ab$, est quasi-compact donc, d'après 1.2, $u(H) = A \cdot B$ est un sous-schéma fermé réduit de G, qui est un groupe dans la catégorie $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\text{réd}}$. Or, d'après EGA IV_3, 11.10.7, $A \cdot B = \overline{u(H)}$ est géométriquement réduit (puisque H l'est), donc c'est un sous-groupe fermé de G. Comme on a évidemment $A \cdot B \subset \Gamma_G(i_A, i_B)$, le corollaire en découle.

Définitions et remarques 7.2. — [71] (i) Étant donné un k-groupe G, une famille $(X_i)_{i \in I}$ de k-schémas géométriquement réduits, et pour chaque $i \in I$, un k-morphisme $f_i : X_i \to G$, on appelle *sous-schéma en groupes fermé de* G *engendré par la famille* $(f_i)_{i \in I}$, et nous noterons dans ce numéro $\Gamma_G((f_i)_{i \in I})$, le plus petit sous-schéma en groupes fermé de G majorant chacun des f_i. Si X est un sous-schéma de G, géométriquement réduit sur k, et si f est l'immersion $X \hookrightarrow G$, on écrira $\Gamma_G(X)$ au lieu de $\Gamma_G(f)$. 364

(i′) Avec les notations de 7.1 (ii), il nous arrivera de poser $\Gamma'_G(f) = \bigcup_{n \geqslant 1} f^n(X^n)$. Notons que $\Gamma'_G(f)$ est une partie de G stable pour la loi de groupe (au sens de 3.0).

(ii) Il est clair que si X_1 et X_2 sont deux k-schémas géométriquement réduits et $f_1 : X_1 \to G$ et $f_2 : X_2 \to G$ deux k-morphismes tels que les ensembles $\overline{f_1(X_1)}$ et $\overline{f_2(X_2)}$ soient égaux, alors $\Gamma_G(f_1) = \Gamma_G(f_2)$.

[70] N.D.E. : On a ajouté ce corollaire, pour signaler ce cas particulier de 7.1.

[71] N.D.E. : On a mis en (i′) le point (viii) de l'original, et l'on a mis en évidence les points (vi) et (vii) sous la forme du corollaire 7.2.1 et de la définition 7.2.2 ci-dessous.

(iii) Soit E une partie de G telle que le sous-schéma réduit $\overline{\mathrm{E}}$ de G soit géométriquement réduit. On appelle *sous-schéma en groupes fermé de* G *engendré par* E, et on note $\Gamma_{\mathrm{G}}(\mathrm{E})$ le sous-schéma en groupes $\Gamma_{\mathrm{G}}(i)$, où i est l'injection du sous-schéma réduit $\overline{\mathrm{E}}$ de G dans G.

(iv) Comme tout sous-schéma en groupes de G est fermé, d'après $\mathrm{VI_A}$, 0.5.2, [72] on parlera de « *sous-schéma en groupes engendré* » au lieu de « *sous-schéma en groupes fermé engendré* ».

(v) Soit X un k-schéma géométriquement réduit et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ un k-morphisme. Supposons que $f(\mathrm{X})$ *contienne l'élément unité* e de G. Posons $\mathrm{X}'^{1} = \mathrm{X} \times_k \mathrm{X}$ et $f'^{1} = \mu \circ (f \times_k (c \circ f))$, et pour $n > 1$,

$$\mathrm{X}'^{n} = \mathrm{X}'^{1} \underset{k}{\times} \mathrm{X}'^{n-1} \qquad \text{et} \qquad f'^{n} = \mu \circ (f'^{1} \underset{k}{\times} f'^{n-1}).$$

Alors $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ est le sous-schéma réduit de G dont l'espace sous-jacent est l'adhérence de la réunion des $f'^{n}(\mathrm{X}'^{n})$, pour $n \geqslant 1$.

En effet, rappelant la notation de 7.1 (ii) : $\mathrm{X}^1 = \mathrm{X} \sqcup \mathrm{X}$ et $\mathrm{X}^n = \mathrm{X}^1 \times_k \mathrm{X}^{n-1}$, pour $n \geqslant 2$, on a les inclusions suivantes, où la première résulte de l'hypothèse $e \in f(\mathrm{X})$:

$$f^n(\mathrm{X}^n) \subset f'^{n}(\mathrm{X}'^{n}) \subset f^{2n}(\mathrm{X}^{2n}), \qquad \text{pour tout } n \geqslant 1.$$

Ceci montre de plus que, pour qu'il existe un entier n tel que $f^n(\mathrm{X}^n) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$, il faut et il suffit qu'il existe un entier m tel que $f'^{m}(\mathrm{X}'^{m}) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$.

365 On déduit de la remarque 7.2 (v) le

Corollaire 7.2.1. — *Soient* X *un k-schéma* géométriquement réduit et géométriquement connexe, *et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ un k-morphisme tel que* $f(\mathrm{X})$ contienne l'élément neutre *de* G. *Alors, le k-groupe* $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ *est* connexe, *donc* irréductible.

En effet, chacun des X'^{n} est alors connexe, donc la réunion des $f'^{n}(\mathrm{X}'^{n})$ (qui contiennent tous l'élément neutre), est connexe, et il en est de même de son adhérence $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$. Donc $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ est irréductible, d'après $\mathrm{VI_A}$, 2.4 (lorsque G, donc aussi $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$, est localement de type fini sur k) et 2.6.5 (iii) (dans le cas général).

Définition 7.2.2. — Soit G un k-groupe.

a) Soient A et B deux sous-k-schémas en groupes *géométriquement réduits* de G. On appelle *sous-schéma en groupes des commutateurs de* A *et* B dans G et on note $(\mathrm{A}, \mathrm{B})_{\mathrm{G}}$ ou simplement (A, B), le sous-schéma en groupes fermé de G engendré par le morphisme $\nu : \mathrm{A} \times_k \mathrm{B} \to \mathrm{G}$ défini par : $(a, b) \mapsto aba^{-1}b^{-1}$, pour tout k-schéma S et $a \in \mathrm{A}(\mathrm{S})$, $b \in \mathrm{B}(\mathrm{S})$.

b) Supposons G *géométriquement réduit* sur k. On appelle *groupe dérivé* de G, et on note $\mathfrak{D}(\mathrm{G})$ [73], le groupe (G, G).

N. B. Pour que G soit commutatif, il faut et il suffit que $\mathfrak{D}(\mathrm{G})$ soit le k-groupe unité.

[72] N.D.E. : On a supprimé ici l'hypothèse que G soit localement de type fini sur k.

[73] N.D.E. : On a changé la notation Der(G) de l'original, afin d'éviter tout risque de confusion avec un espace de dérivations.

Rappels 7.3.0. — [74] Rappelons que si $\phi : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ est un morphisme de S-schémas, le *préfaisceau image* $\phi(\mathrm{Y})$ est le S-foncteur qui à tout S' au-dessus de S associe le sous-ensemble $\phi(\mathrm{Y}(\mathrm{S}'))$ de $\mathrm{Z}(\mathrm{S}')$. Remarquons que si T est un sous-schéma de Z et si l'inclusion de préfaisceaux $\phi(\mathrm{Y}) \hookrightarrow \mathrm{Z}$ se factorise par T, i.e. si $\phi \circ h \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$ pour tout S-morphisme $h : \mathrm{S}' \to \mathrm{Y}$, on a ensemblistement $\phi(\mathrm{Y}) \subset \mathrm{T}$ (prendre $h = \mathrm{id}_{\mathrm{Y}}$), et *la réciproque est vraie si* Y *est réduit*, car dans ce cas ϕ se factorise par T.

Rappelons aussi que, d'après 6.2, si H est un sous-k-schéma en groupes fermé de G, alors $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H}$ et $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H}$ sont représentables par des sous-k-schémas en groupes fermés de G.

Corollaire 7.3. — *Soient* G *un k-groupe,* X *un k-schéma* géométriquement réduit*,* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *un k-morphisme.*

(i) *Soient* S *un k-schéma et u un endomorphisme du* S*-groupe* G_{S}*.*

(a) *Si l'on a* $u(f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}_{\mathrm{S}})) \subset \Gamma_{\mathrm{G}}(f)_{\mathrm{S}}$ (*ensemblistement*)*, alors le morphisme* $u : \Gamma_{\mathrm{G}}(f)_{\mathrm{S}} \to \mathrm{G}_{\mathrm{S}}$ *se factorise à travers* $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)_{\mathrm{S}}$*.*

(b) *Si u est un* automorphisme *du* S*-groupe* G_{S} *et si l'on a* $u(f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}_{\mathrm{S}})) = f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}_{\mathrm{S}})$ (*ensemblistement*)*, alors u induit un automorphisme de* $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)_{\mathrm{S}}$*. En particulier, si un élément* $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ *vérifie* $\mathrm{int}(g)(f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}_{\mathrm{S}})) = f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}_{\mathrm{S}})$ (*ensemblistement*)*, alors* $g \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}}}(\Gamma_{\mathrm{G}}(f)_{\mathrm{S}})(\mathrm{S})$*.*

(c) *Si* $u \circ f_{\mathrm{S}} = f_{\mathrm{S}}$*, alors la restriction de u au sous-groupe* $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)_{\mathrm{S}}$ *de* G_{S} *est l'identité. En particulier, si un élément* $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ *vérifie* $\mathrm{int}(g)(f_{\mathrm{S}}) = f_{\mathrm{S}}$*, alors* $g \in \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}}}(\Gamma_{\mathrm{G}}(f)_{\mathrm{S}})(\mathrm{S})$*.*

(ii) *Soit* H *un sous-schéma en groupes de* G*, alors* H *centralise* (*resp. normalise*) $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ *si et seulement si, pour tout* $\mathrm{S} \to \mathrm{Spec}\,k$ *et* $h \in \mathrm{H}(\mathrm{S})$*, on a :* $\mathrm{int}(h) \circ f_{\mathrm{S}} = f_{\mathrm{S}}$ (*resp.* $\mathrm{int}(h)(f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}_{\mathrm{S}})) \subset \Gamma_{\mathrm{G}}(f)_{\mathrm{S}}$)*, i.e. si pour tout* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *et* $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$*, les éléments* $h_{\mathrm{S}'}$ *et* $f(x)$ *de* $\mathrm{G}(\mathrm{S}')$ *commutent* (*resp.* $h_{\mathrm{S}'} f(x) h_{\mathrm{S}'}^{-1} \in \Gamma_{\mathrm{G}}(f)(\mathrm{S}')$)*.*

(iii) *En particulier, soient* Y *un second k-schéma* géométriquement réduit *et* $\phi : \mathrm{Y} \to \mathrm{G}$ *un k-morphisme. Supposons que, quel que soit le k-schéma* S'*, pour tout* $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$ *et* $y \in \mathrm{Y}(\mathrm{S}')$*, les éléments* $\phi(y)$ *et* $f(x)$ *de* $\mathrm{G}(\mathrm{S}')$ *commutent* (*resp.* $\mathrm{int}(\phi(y))(f(x)) \in \Gamma_{\mathrm{G}}(f)(\mathrm{S}')$)*.* 366

Alors, $\Gamma_{\mathrm{G}}(\phi)$ *est un sous-k-groupe de* $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$*, resp.* $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\,\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$*.*

(iv) *Si g est un k-point de* G*, alors le k-groupe* $\Gamma_{\mathrm{G}}(\{g\})$ *est* commutatif.

(v) *Soient* A *et* B *deux sous-schémas en groupes de* G géométriquement réduits *sur k. Si* A *et* B *sont* invariants (*resp.* caractéristiques)*, il en est de même de* (A, B).

Démonstration. (i) Prouvons (a). Posons $\Gamma_{\mathrm{S}} = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)_{\mathrm{S}}$. Alors $u^{-1}(\Gamma_{\mathrm{S}})$ est un sous-S-schéma en groupes fermé de G_{S} donc, d'après 7.1 (iii), il suffit de montrer que f_{S} se factorise à travers $u^{-1}(\Gamma_{\mathrm{S}})$. Or, comme $u(f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}_{\mathrm{S}})) \subset \Gamma_{\mathrm{S}}$ et comme X_{S} est réduit, alors $u \circ f_{\mathrm{S}}$ se factorise à travers Γ_{S}, donc f_{S} se factorise à travers $u^{-1}(\Gamma_{\mathrm{S}})$. Ceci prouve (a).

[74] N.D.E. : On a ajouté ces rappels, et l'on a modifié en conséquence, et détaillé, l'énoncé de 7.3.

Alors, la première assertion de (b) est une conséquence de (a), appliqué à u et u^{-1} (et en fait il suffit de supposer que $u(f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}_{\mathrm{S}})) \subset \Gamma_{\mathrm{S}}$ et $u^{-1}(f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}_{\mathrm{S}})) \subset \Gamma_{\mathrm{S}}$), et la seconde assertion en est le cas particulier où $u = \mathrm{int}(g)$.

Prouvons (c). Considérons le morphisme de S-groupes $\mathrm{G}_{\mathrm{S}} \to \mathrm{G}_{\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}_{\mathrm{S}}$, $g \mapsto (u(g), g)$ et notons H l'image inverse de la diagonale, c'est un sous-schéma en groupes de G_{S}. Puisque G est séparé sur k (VI_{A} 0.3), G_{S} est séparé sur S, donc H est fermé dans G_{S}. Comme, par hypothèse, H majore f_{S}, il contient $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)_{\mathrm{S}}$, d'après 7.1 (iii). Ceci prouve la première assertion de (c), et la seconde en est le cas particulier où $u = \mathrm{int}(g)$.

Prouvons (ii). Posons $\Gamma = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ et notons i l'inclusion $\Gamma \hookrightarrow \mathrm{G}$. Alors H est contenu dans $\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\Gamma)$ si et seulement si, pour tout k-schéma S et $h \in \mathrm{H(S)}$, on a $\mathrm{int}(h)(\Gamma_{\mathrm{S}}) \subset \Gamma_{\mathrm{S}}$ (cette condition appliquée à h et h^{-1} entraînant que $\mathrm{int}(h)(\Gamma_{\mathrm{S}}) = \Gamma_{\mathrm{S}}$) ; et d'après (i)(a) ceci est le cas si et seulement si $\mathrm{int}(h)(f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}_{\mathrm{S}})) \subset \Gamma_{\mathrm{S}}$.

De même, H est contenu dans $\mathrm{C} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\Gamma)$ si et seulement si, pour tout k-schéma S et $h \in \mathrm{H(S)}$, on a $\mathrm{int}(h) \circ i_{\mathrm{S}} = i_{\mathrm{S}}$, et d'après (i)(c) ceci est le cas si et seulement si $\mathrm{int}(h)(f_{\mathrm{S}}) = f_{\mathrm{S}}$. Ceci prouve (ii).

Prouvons (iii). Compte-tenu de (ii), l'hypothèse entraîne que ϕ se factorise par C (resp. N) ; comme ce dernier est un sous-groupe fermé de G, d'après 6.2, il contient donc $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$, d'après 7.1 (i).

367 L'assertion (iv) découle de (iii), lorsqu'on prend pour f et ϕ l'immersion fermée $\mathrm{Spec}\, k \hookrightarrow \mathrm{G}$ définie par g : dans ce cas, pour tout k-schéma S, X(S) et Y(S) n'ont qu'un point, qui est envoyé par f (resp. ϕ) sur g.

Montrons enfin (v). Soit ν le morphisme $\mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$, $(g, h) \mapsto ghg^{-1}h^{-1}$ et soit ν' sa restriction à $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$; par définition (7.2.2), $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \Gamma_{\mathrm{G}}(\nu')$. Soient S un k-schéma, et u un automorphisme intérieur (resp. un automorphisme de S-groupe) de G_{S}. On a $u \circ \nu_{\mathrm{S}} = \nu_{\mathrm{S}} \circ (u \times u)$. D'autre part, l'hypothèse entraîne que u induit un automorphisme u_1 de A_{S} (resp. u_2 de B_{S}), donc

$$u\big(\nu'_{\mathrm{S}}(\mathrm{A}_{\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{B}_{\mathrm{S}})\big) = \nu'_{\mathrm{S}}\big(u_1(\mathrm{A}_{\mathrm{S}}) \times_{\mathrm{S}} u_2(\mathrm{B}_{\mathrm{S}})\big) = \nu'_{\mathrm{S}}(\mathrm{A}_{\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{B}_{\mathrm{S}}).$$

Donc, d'après (i)(b), u induit un automorphisme de $(\mathrm{A}, \mathrm{B})_{\mathrm{S}}$. Ceci prouve (v).

Proposition 7.4. — *Soient* G *un k-groupe* localement de type fini*,* X *un k-schéma* de type fini, géométriquement réduit et géométriquement connexe*, et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ un k-morphisme tel que* $f(\mathrm{X})$ contienne l'élément neutre e *de* G*. Alors, avec les notations de* 7.1 (ii)*, il existe un entier* N *tel qu'on ait* (*ensemblistement*) *:*

$$f^{\mathrm{N}}(\mathrm{X}^{\mathrm{N}}) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f).$$

D'après 7.1 (iii) et EGA IV_2, 2.6.1, nous pouvons supposer k algébriquement clos. D'après le corollaire 7.2.1, nous pouvons supposer que $\mathrm{G} = \mathrm{G}^0$; enfin, il suffit de montrer qu'il existe un entier N tel que l'on ait : $f'^{\mathrm{N}}(\mathrm{X}'^{\mathrm{N}}) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$, avec les notations de 7.2 (v).

Premier cas. Supposons X *irréductible*. Alors les $\overline{f'^{n}(\mathrm{X}'^{n})}$ forment une suite croissante de fermés irréductibles dans l'espace G, qui est noethérien, puisque $\mathrm{G} = \mathrm{G}^0$ est de type fini sur k ($\mathrm{VI_A}$ 2.4). Donc cette suite est stationnaire, et il existe un entier m tel que $\overline{f'^m(\mathrm{X}'^m)} = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$.

De plus, puisque X et G sont de type fini sur k, les morphismes f'^n sont de type fini sur k. Par conséquent, $f'^m(\mathrm{X}'^m)$ est constructible dans G (EGA IV_1, 1.8.5), donc contient un ouvert U de son adhérence $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ (EGA 0_{IV}, 9.2.3). Alors, d'après $\mathrm{VI_A}$ 0.5, on a :

$$\Gamma_{\mathrm{G}}(f) \subset \mathrm{U}\cdot\mathrm{U} \subset f'^{2m}(\mathrm{X}'^{2m}) \subset \Gamma_{\mathrm{G}}(f),$$

d'où $f'^{2m}(\mathrm{X}'^{2m}) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$.

Deuxième cas. Supposons que X ait *exactement deux* composantes irréductibles A_1 368
et A_2. Alors, puisque X est connexe, et k algébriquement clos, il existe $a \in (\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2)(k)$. Donc les quatre parties irréductibles $\mathrm{A}_i \times_k \mathrm{A}_j$ $(i, j = 1, 2)$ recouvrent $\mathrm{X} \times_k \mathrm{X}$, et l'image de chacune d'entre elles par le morphisme $f'^1 = \mu \circ (f \times_k (c \circ f))$ contient e. Si f'^1_{ij} désigne la restriction de f'^1 au sous-schéma réduit $\mathrm{A}_i \times_k \mathrm{A}_j$, posons

$$\mathrm{Y} = (\mathrm{A}_1 \underset{k}{\times} \mathrm{A}_1) \underset{k}{\times} (\mathrm{A}_1 \underset{k}{\times} \mathrm{A}_2) \underset{k}{\times} (\mathrm{A}_2 \underset{k}{\times} \mathrm{A}_2) \underset{k}{\times} (\mathrm{A}_2 \underset{k}{\times} \mathrm{A}_1) \qquad \text{et}$$

$$g = \mu \circ \Big(\big(\mu \circ (f'^1_{11} \underset{k}{\times} f'^1_{12})\big) \underset{k}{\times} \big(\mu \circ (f'^1_{22} \underset{k}{\times} f'^1_{21})\big) \Big).$$

Alors Y est irréductible, réduit et de type fini, donc on vient de voir qu'il existe un entier m tel que $g'^m(\mathrm{Y}'^m) = \Gamma_{\mathrm{G}}(g)$. Or, pour tout $n \geqslant 1$, on a $f'^n(\mathrm{X}'^n) \subset g'^n(\mathrm{Y}^n) \subset f'^{4n}(\mathrm{X}'^{4n})$, d'où $\Gamma_{\mathrm{G}}(f) = \Gamma_{\mathrm{G}}(g)$ et $f'^{4m}(\mathrm{X}'^{4m}) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$.

Cas général. Raisonnons par récurrence sur le nombre des composantes irréductibles de X (ce nombre est fini puisque X, étant de type fini sur k, est noethérien). Supposons la proposition démontrée dans le cas où X a au plus $r-1$ composantes irréductibles, et supposons qu'il en ait r, à savoir $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_r$. Alors e appartient à l'image de l'un des A_i ; supposons par exemple que $e \in f(\mathrm{A}_1)$. Posons alors $\mathrm{Y} = \Gamma_{\mathrm{G}}(f_r)$, où f_r désigne la restriction de f au sous-schéma réduit $\mathrm{X}_r = \mathrm{A}_1 \cup \dots \cup \mathrm{A}_{r-1}$ (nous supposons la numérotation des A_i choisie de façon que ce schéma soit connexe, ce qui est toujours possible). Alors Y est un sous-groupe de G, fermé, réduit, et irréductible, d'après le corollaire 7.2.1.

Posons $\mathrm{Z} = \overline{f(\mathrm{A}_r)}$, et soient $\mathrm{T} = \mathrm{Y} \cup \mathrm{Z}$, muni de la structure de sous-schéma fermé réduit, et i l'injection de T dans G. Il est clair (7.2 (ii)) que $\Gamma_{\mathrm{G}}(i) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ et que T est connexe (car puisque X est connexe, $\mathrm{A}_1 \cup \dots \cup \mathrm{A}_{r-1}$ et A_r ont en commun un point a, et Y et Z ont en commun le point $f(a)$). De plus, $e \in \mathrm{T}$, et T a au plus deux composantes irréductibles, puisque Y et Z sont irréductibles. D'après l'hypothèse de 369
récurrence, il existe un entier m tel qu'on ait : $f'^m_r(\mathrm{X}'^m_r) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f_r) = \mathrm{Y}$. Comme $\mathrm{X} = \mathrm{X}_r \cup \mathrm{A}_r$ et comme $\mathrm{Z} = \overline{f(\mathrm{A}_r)}$ est contenu dans $\overline{f'^m(\mathrm{X}'^m)}$ (puisque $e \in f(\mathrm{A}_1)$), on a donc :

$$f(\mathrm{X}) \subset \mathrm{Y} \cup \mathrm{Z} \subset \overline{f'^m(\mathrm{X}'^m)}.$$

D'autre part, puisque T a au plus deux composantes irréductibles, on a déjà vu qu'il existe un entier p tel que $i'^p(\mathrm{T}'^p) = \Gamma_{\mathrm{G}}(i) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$. Or, $\mathrm{T} \subset \overline{f'^m(\mathrm{X}'^m)}$, donc $\overline{f'^{mp}(\mathrm{X}'^{mp})} = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$, et on montre, comme dans le premier cas, que cette dernière égalité entraîne $f'^{2mp}(\mathrm{X}'^{2mp}) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$.

Lemme 7.5. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-schéma en groupes,* X *un* S*-préschéma,* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *un* S*-morphisme. On suppose que* X *et* G *sont* localement de présentation finie *sur* S*, et que pour tout* $s \in \mathrm{S}$ *et tout* point maximal g *de* G_s*, il existe un point* x *de* X *tel que* $f(x) = g$ *et que* f *soit* plat en x*. Alors le morphisme* $\mu \circ (f \times_{\mathrm{S}} f) : \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *est* couvrant *pour la topologie* (fppf).

(75) D'après EGA IV_3, 11.3.1, l'ensemble V des points de X en lesquels f est plat est *ouvert* et $f|_{\mathrm{V}}$ est un morphisme *ouvert*, donc $\mathrm{U} = f(\mathrm{V})$ est un ouvert de G ; de plus, d'après l'hypothèse, $\mathrm{U} \cap \mathrm{G}_s$ est dense dans G_s, pour tout $s \in \mathrm{S}$. Notons ϕ la restriction à $\mathrm{V} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$ de $\mu \circ (f \times_{\mathrm{S}} f)$.

Il suffit de montrer que ϕ est couvrant pour la topologie (fppf), et pour cela il suffit de montrer que ϕ est fidèlement plat et de présentation finie (cf. IV, 6.3.1 (iv)). Or ϕ est égal au composé $\mathrm{V} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V} \xrightarrow{f|_{\mathrm{V}} \times f|_{\mathrm{V}}} \mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{U} \xrightarrow{\mu} \mathrm{G}$, où le premier morphisme est fidèlement plat et localement de présentation finie, puisque $f|_{\mathrm{V}}$ l'est. Il suffira donc de prouver qu'il en est de même de la restriction de μ à $\mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{U}$.

Or, $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$ étant localement de présentation finie et plat, il en est de même de $\mu : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ (qui est isomorphe au morphisme déduit de $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$ par le changement de base $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$, cf. VI_{A} 0.1), donc aussi du morphisme induit $\mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{U} \to \mathrm{G}$. Pour prouver que ce dernier est surjectif, il suffit de regarder fibre par fibre, où cela résulte de VI_{A} 0.5, puisque $\mathrm{U} \cap \mathrm{G}_s$ est un ouvert dense de G_s, pour tout $s \in \mathrm{S}$.

Remarque 7.6.0. — (76) Soient S un schéma, H un S-groupe, et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{H}$ un morphisme de S-schémas. Le *sous-préfaisceau en groupes* de H *engendré par l'image de* f, qu'on notera $\langle \mathrm{Im}\, f \rangle$, est le sous-$k$-foncteur en groupes de H qui à tout S-schéma S' associe le sous-groupe de $\mathrm{H}(\mathrm{S}')$ engendré par $f(\mathrm{X}(\mathrm{S}'))$. Comme chaque élément de ce sous-groupe s'écrit comme un produit fini $f(x_1)^{\varepsilon_1} \cdots f(x_n)^{\varepsilon_n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, $x_i \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$ et $\varepsilon_i = \pm 1$, on voit donc que si l'on note $\mathrm{X}^1 = \mathrm{X} \coprod \mathrm{X}$ et qu'on définit les morphismes $f^n : \mathrm{X}^n \to \mathrm{H}$ comme en 7.1, alors $\langle \mathrm{Im}\, f \rangle$ n'est autre que le *préfaisceau image* du morphisme

$$f^\infty : \mathrm{X}^\infty \longrightarrow \mathrm{H},$$

où $\mathrm{X}^\infty = \coprod_{n \geqslant 1} \mathrm{X}^n$ et $f^\infty : \mathrm{X}^\infty \to \mathrm{H}$ est le S-morphisme dont la restriction à chaque X^n est f^n.

Proposition 7.6. — (77) *Soient* S *un schéma,* X *un* S*-schéma* plat et localement de présentation finie *sur* S, H *un* S*-groupe,* localement de présentation finie sur S et à fibres réduites*, soit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de* S*-schémas, et soit* $f^\infty : \mathrm{X}^\infty \to \mathrm{H}$ *le*
370 S*-morphisme introduit plus haut. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) H *représente le* S-faisceau (fppf) *associé au préfaisceau* $\langle \mathrm{Im}\, f \rangle$.

(ii) f^∞ *est* couvrant *pour la topologie* (fppf).

(75) N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

(76) N.D.E. : On a ajouté cette définition, qui dans l'original était contenue dans l'énoncé de la proposition 7.6.

(77) N.D.E. : L'original énonçait ce résultat sous les hypothèses du cas particulier, mais la forme plus générale était utilisée implicitement dans la démonstration de 10.12 ; on a récrit l'énoncé en conséquence.

(iii) f^∞ *est* surjectif, *i.e.* $\mathrm{H} = \bigcup_{n\geqslant 1} f^n(\mathrm{X}^n)$.

Si de plus H *est* quasi-compact, *ces conditions équivalent aussi à la suivante :*

(iv) *Il existe un entier* n *tel que* $f^n : \mathrm{X}^n \to \mathrm{H}$ *soit* couvrant *pour la topologie* (fppf) (*et a fortiori surjectif*).

Ceci s'applique en particulier dans le cas où X *est un* k*-schéma localement de type fini et géométriquement réduit,* G *un* k*-groupe localement de type fini,* $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *un morphisme de* k*-schémas,* $\mathrm{H} = \Gamma_{\mathrm{G}}(\phi)$ *et où* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{H}$ *est le morphisme induit par* ϕ.

Démonstration. Le faisceau considéré dans (i) est le faisceau image de X^∞ par f^∞ donc, d'après IV 4.4.3, dire que H représente ce faisceau équivaut à dire que f^∞ est couvrant, et ceci implique que f^∞ soit surjectif. Réciproquement, supposons f^∞ surjectif et montrons qu'il est alors couvrant pour la topologie (fppf).

Soient $s \in \mathrm{S}$, η un point maximal de la fibre H_s, et $x \in \mathrm{X}^\infty_s$ tel que $f^\infty(x) = \eta$ (un tel x existe, puisque f^∞ est surjectif). Comme la fibre H_s est réduite, $\mathscr{O}_{\mathrm{H}_s,\eta}$ est un corps, donc f^∞_s est plat au point x. Comme X^∞ et H sont localement de présentation finie sur S, et X^∞ plat sur S, il résulte du critère de platitude par fibres (EGA IV_3, 11.3.10) que f^∞ est plat au point x. Donc, d'après le lemme 7.5, le morphisme

$$\mu \circ (f^\infty \underset{\mathrm{S}}{\times} f^\infty) : \mathrm{X}^\infty \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{X}^\infty \longrightarrow \mathrm{H}$$

est couvrant pour la topologie (fppf). Or, puisque $\mathrm{X}^n \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}^m$ est canoniquement isomorphe à X^{n+m}, et que, dans cet isomorphisme, $\mu \circ (f^n \times_{\mathrm{S}} f^m)$ correspond à f^{n+m}, il est clair que $\mu \circ (f^\infty \times_{\mathrm{S}} f^\infty)$ se factorise à travers f^∞, si bien que f^∞ est couvrant pour la topologie (fppf). Ceci prouve que (iii) $\Rightarrow$ (ii), d'où l'équivalence des conditions (i), (ii) et (iii).

Notons de plus que, puisque les morphismes $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$ et $\mathrm{H} \to \mathrm{S}$ sont localement de présentation finie, il en est de même de $f : \mathrm{X} \to \mathrm{H}$ (cf. EGA IV_1, 1.4.3 (v)), et comme $\mu : \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}$ est aussi de présentation finie (cf. $\mathrm{VI_A}$, 0.1), il en résulte que chaque $f^n : \mathrm{X}^n \to \mathrm{H}$ l'est aussi. Donc, d'après EGA IV_1, 1.9.5 (viii), les $f^n(\mathrm{X}^n)$ sont des parties ind-constructibles de H.

Supposons de plus H *quasi-compact* (alors S l'est aussi, puisque $\mathrm{H} \to \mathrm{S}$ est surjectif). Alors, d'après EGA IV_1, 1.9.9, on conclut qu'il existe p tel que $f^p(\mathrm{X}^p) = \mathrm{H}$. Comme précédemment, on déduit alors du fait que les fibres de H sont réduites et du lemme 7.5, que le morphisme $\mu \circ (f^p \times_{\mathrm{S}} f^p) : \mathrm{X}^p \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}^p \to \mathrm{H}$ est *couvrant* pour la topologie (fppf) ; comme ce morphisme égale $f^{2p} : \mathrm{X}^{2p} \to \mathrm{H}$, cela achève de prouver 7.6.

Remarque 7.6.1. — Évidemment les conditions équivalentes de 7.6 impliquent que le faisceau F envisagé est représentable. La réciproque est fausse en général : [(78)] par exemple, si k est de caractéristique 0, soit $\mathrm{G} = \mathbb{G}_{a,k}$ et soit $f : \operatorname{Spec} k \to \mathrm{G}$ le morphisme donné par le point 1 de $\mathrm{G}(k)$, alors F est représenté par le k-groupe constant $\mathbb{Z}_k$, tandis que $\Gamma_{\mathrm{G}}(f) = \mathrm{G}$, donc le monomorphisme $\mathbb{Z}_k \hookrightarrow \mathrm{G}$ n'est pas surjectif.

Plaçons-nous, pour simplifier, sous les hypothèses du cas particulier de 7.6, et supposons F représentable. Alors, il résulte de EGA IV_3, 8.14.2 que F est *localement*

[(78)] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

371 *de présentation finie* sur k, donc la question est alors si le monomorphisme dominant $\mathrm{F} \to \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ est un isomorphisme, ou encore, une immersion fermée. Ce sera le cas, en vertu de 1.4.2, si F est *quasi-compact*, et, d'après $\mathrm{VI_A}$, 0.5.1, ceci sera vérifié si F est *connexe*, donc, en particulier (7.2.1), si X est connexe et si $f(\mathrm{X})$ contient l'élément unité de G.

Lemme 7.7. — *Soient k un corps* algébriquement clos*, G un k-groupe* localement de type fini*, X un k-schéma* géométriquement réduit et localement de type fini*, $f : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ un k-morphisme et H un sous-schéma en groupes de G tel que $\mathrm{H} \subset f(\mathrm{X})$. Posons*

$$\Gamma' = \bigcup_{n\geqslant 1} f^n(\mathrm{X}^n), \qquad \Gamma'_0 = \Gamma' \bigcap \mathrm{G}(k), \qquad \mathrm{H}_0 = \mathrm{H}(k)$$

et supposons H_0 d'indice fini *dans* Γ'_0.

Alors il existe un entier m tel que $f^m(\mathrm{X}^m) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ (cf. 7.6), et $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ est réunion d'un nombre fini *de translatés de* H.

Quel que soit $n \geqslant 1$, $f^n(\mathrm{X}^n)$ est une partie ind-constructible de G (EGA IV_1, 1.9.5 (viii)), il en est donc de même de Γ', si bien que, puisque G est un schéma de Jacobson, Γ'_0 est dense dans Γ'. Par hypothèse, il existe une suite finie $a_1, \ldots, a_r$ de points de Γ'_0 telle que $\Gamma'_0 = a_1\mathrm{H}_0 \cup \cdots \cup a_r\mathrm{H}_0$, d'où

$$\Gamma_{\mathrm{G}}(f) = \overline{\Gamma'} = \overline{\Gamma'_0} = \overline{a_1\mathrm{H}_0 \cup \cdots \cup a_r\mathrm{H}_0} = \overline{a_1\mathrm{H}_0} \cup \cdots \cup \overline{a_r\mathrm{H}_0} = a_1\overline{\mathrm{H}_0} \cup \cdots \cup a_r\overline{\mathrm{H}_0},$$

la dernière égalité résultant du fait que la translation par a_i est un homéomorphisme de G sur G. On a donc $\Gamma_{\mathrm{G}}(f) = a_1\mathrm{H} \cup \cdots \cup a_r\mathrm{H}$. Il est d'autre part clair qu'il existe un entier p tel que chacun des a_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ appartienne à $f^p(\mathrm{X}^p)$. Enfin, puisque $\mathrm{H} \subset f(\mathrm{X})$, on a, pour tout i : $a_i\mathrm{H} \subset f^{p+1}(\mathrm{X}^{p+1})$, si bien que $f^{p+1}(\mathrm{X}^{p+1}) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$.

Proposition 7.8. — *Soient* G *un k-groupe* localement de type fini*,* A *et* B *deux sous-k-schémas en groupes* géométriquement réduits (*donc lisses aux points génériques de leurs composantes irréductibles, donc* lisses *d'après* 1.3) *de* G*. Supposons remplie l'une des conditions* a) *ou* b) *suivantes :*

a) A *et* B *sont* invariants et de type fini *sur k.*

372 b) A *est* connexe *et* B *est* de type fini *sur k.*

Alors (A, B) *est* de type fini *sur k, et représente le* faisceau *associé pour la topologie* (fppf) (*ou* (fpqc)) *au préfaisceau en groupes des commutateurs de* A *et* B *dans* G*. De plus,* [(79)] *les k-groupes* $(\mathrm{A}, \mathrm{B}^0)$ *et* $(\mathrm{A}^0, \mathrm{B})$ *sont* connexes*, et l'on a*

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B})^0 = (\mathrm{A}, \mathrm{B}^0) \cdot (\mathrm{A}^0, \mathrm{B}).$$

D'après 7.6, pour montrer que (A, B) est le faisceau associé désiré, il suffit de montrer qu'il existe un entier n tel que $\nu^n((\mathrm{A} \times_k \mathrm{B})^n) = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$ (notations de 7.2.2). Pour montrer cela, ainsi que pour montrer les deux autres assertions, on peut supposer

(79) N.D.E. : On a précisé ce qui suit et, dans la démonstration, on a détaillé la réduction au cas où k est algébriquement clos.

k algébriquement clos. En effet, soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. D'après 7.1 (iii) et $\mathrm{VI_A}$ 2.4, on a, avec des notations évidentes :

$$(\mathrm{A},\mathrm{B})_{\overline{k}} = (\mathrm{A}_{\overline{k}},\mathrm{B}_{\overline{k}}), \qquad ((\mathrm{A},\mathrm{B})^0)_{\overline{k}} = (\mathrm{A}_{\overline{k}},\mathrm{B}_{\overline{k}})^0, \qquad (\mathrm{A},\mathrm{B}^0)_{\overline{k}} = (\mathrm{A}_{\overline{k}},\mathrm{B}^0_{\overline{k}}), \quad \text{etc.}$$

Par conséquent, si on montre que $(\mathrm{A}_{\overline{k}},\mathrm{B}_{\overline{k}})$ est de type fini sur $\overline{k}$ (resp. que $(\mathrm{A}_{\overline{k}},\mathrm{B}^0_{\overline{k}})$ et $(\mathrm{A}^0_{\overline{k}},\mathrm{B}_{\overline{k}})$ sont connexes, et que le morphisme $(\mathrm{A}_{\overline{k}},\mathrm{B}^0_{\overline{k}}) \times_{\overline{k}} (\mathrm{A}_{\overline{k}},\mathrm{B}^0_{\overline{k}}) \to (\mathrm{A}_{\overline{k}},\mathrm{B}_{\overline{k}})^0$ est surjectif), alors les assertions analogues seront vraies sur k, d'après EGA IV_2, 2.7.1 et 2.6.1.

Soient alors $\mathrm{B}^1,\dots,\mathrm{B}^p$ les composantes connexes de B autres que la composante neutre B^0 (celles-ci sont en nombre fini puisque B est supposé de type fini sur k, donc noethérien), et dans le cas (a), soient de même $\mathrm{A}^1,\dots,\mathrm{A}^q$ celles de A. (Dans le cas (b), on ne considérera que $\mathrm{A}^0 = \mathrm{A}$). Soit ν_{ij} la restriction de ν à $\mathrm{A}^i \times_k \mathrm{B}^j$. Alors chacun des A^i et des B^j est irréductible ($\mathrm{VI_A}$ 2.4.1), il en est donc de même de $\mathrm{A}^0 \times_k \mathrm{B}^j$ et de $\mathrm{A}^i \times_k \mathrm{B}^0$. Puisque l'élément neutre de G appartient à A^0 et à B^0, il appartient à $\nu_{0j}(\mathrm{A}^0 \times_k \mathrm{B}^j)$ et à $\nu_{i0}(\mathrm{A}^i \times_k \mathrm{B}^0)$. Alors chacun des $\Gamma_{\mathrm{G}}(\nu_{0j})$ et des $\Gamma_{\mathrm{G}}(\nu_{i0})$ est connexe (7.2.1). De même, si u_{0j} (resp. u_{i0}) désigne l'injection de $\Gamma_{\mathrm{G}}(\nu_{0j})$ (resp. $\Gamma_{\mathrm{G}}(\nu_{i0})$) dans G, alors

$$(\mathrm{A}^0,\mathrm{B}) = \Gamma_{\mathrm{G}}((u_{0j})_{j=0}^p) \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{A},\mathrm{B}^0) = \Gamma_{\mathrm{G}}((u_{i0})_{i=0}^q)$$

sont connexes. De plus, on déduit aisément de 7.4 et des constructions précédentes, qu'il existe un indice r tel que $(\mathrm{A}^0,\mathrm{B})$ et $(\mathrm{A},\mathrm{B}^0)$ soient inclus dans $\nu^r((\mathrm{A}\times_k\mathrm{B})^r)$. Dans le cas b), on a $(\mathrm{A},\mathrm{B}) = (\mathrm{A}^0,\mathrm{B})$, et on a terminé.

Plaçons-nous maintenant dans le cas (a). [80] On sait déjà que $(\mathrm{A}^0,\mathrm{B})$ et $(\mathrm{A},\mathrm{B}^0)$ sont des sous-k-groupes de G lisses et connexes, donc de type fini (cf. $\mathrm{VI_A}$, 2.4). D'autre part, comme A^0 est un sous-groupe caractéristique de A (cf. $\mathrm{VI_A}$, 2.6.5), c'est un sous-groupe invariant de G et donc, d'après 7.3 (v), $(\mathrm{A}^0,\mathrm{B})$ est un sous-groupe invariant de G, et de même pour $(\mathrm{A},\mathrm{B}^0)$. Donc, d'après 7.1.1, le sous-groupe H de G engendré par $(\mathrm{A},\mathrm{B}^0)$ et $(\mathrm{A}^0,\mathrm{B})$ n'est autre que $(\mathrm{A},\mathrm{B}^0)\cdot(\mathrm{A}^0,\mathrm{B})$. En particulier, on a donc $\mathrm{H} \subset \nu^{2r}((\mathrm{A}\times_k\mathrm{B})^{2r})$. 373

Étant donnée une partie X de G stable pour la loi de groupe (cf. 3.0), nous noterons X_0 le groupe des k-points de G appartenant à X. Posons $\Gamma' = \bigcup_{q\geqslant 1} \nu^q((\mathrm{A}\times_k\mathrm{B})^q)$. Alors, d'après la proposition 7.9 ci-dessous, on a :

$$(\mathrm{A}^0,\mathrm{B})_0 = (\mathrm{A}^0_0,\mathrm{B}_0), \qquad (\mathrm{A},\mathrm{B}^0)_0 = (\mathrm{A}_0,\mathrm{B}^0_0) \qquad \text{et} \qquad \Gamma'_0 = (\mathrm{A}_0,\mathrm{B}_0),$$

si bien que $\mathrm{H}_0 = (\mathrm{A}^0_0,\mathrm{B}_0)\cdot(\mathrm{A}_0,\mathrm{B}^0_0)$ est d'indice fini dans Γ'_0 (*Bible*, Exp. 3, Appendice) puisque A_0 et B_0 sont invariants, et que A^0_0 (resp. B^0_0) est d'indice fini dans A_0 (resp. B_0). Nous sommes alors dans les conditions du lemme 7.7 : puisque $\mathrm{H} \subset \nu^{2r}((\mathrm{A}\times_k\mathrm{B})^{2r})$, il existe un entier m tel que $\nu^{2rm}((\mathrm{A}\times_k\mathrm{B})^{2rm}) = (\mathrm{A},\mathrm{B})$, et il existe une suite finie $a_1,\dots,a_n$ de k-points de G telle que : $(\mathrm{A},\mathrm{B}) = a_1\mathrm{H}\cup\cdots\cup a_n\mathrm{H}$. Alors, puisque H est de type fini sur k, chacun des $a_i\mathrm{H}$ est quasi-compact, donc leur réunion (A,B) est quasi-compacte, donc de type fini sur k. Puisque H est irréductible, il en est de même de chacun des $a_i\mathrm{H}$ et puisque $e \in \mathrm{H}$, il est clair que $\mathrm{H} = (\mathrm{A},\mathrm{B})^0$.

[80] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit, en tenant compte de l'ajout 7.1.1.

Proposition 7.9. — *Soient k un corps* algébriquement clos*,* G *un k-groupe* localement de type fini.

(i) *Soient* A *et* B *deux parties* ind-constructibles *de* G. *Notons* A_0 *l'ensemble des points rationnels de* G *appartenant à* A. *Alors* $(A \cdot B)_0 = A_0 \cdot B_0$*, le second produit étant pris dans le groupe* $G(k)$.

(ii) *Soient* X *un k-schéma* géométriquement réduit et localement de type fini*, et* $f : X \to G$ *un k-morphisme. Posons* $\Gamma'_G(f) = \bigcup_{n\geqslant 1} f^n(X^n)$*. Alors* $\Gamma'_G(f)_0$ *est le sous-groupe de* $G(k)$ *engendré par* $f(X)_0$.

374 (iii) *En particulier, soient* A *et* B *deux sous-schémas en groupes* lisses *de* G *; posons* $\Gamma' = \bigcup_{n\geqslant 1} \nu^n(A \times_k B)^n$ (notations de 7.2.2)*. Alors* Γ'_0 *est le groupe des commutateurs de* $A(k)$ *et* $B(k)$ *dans* $G(k)$.

Démontrons (i). Il est clair que $A_0 \cdot B_0 \subset (A \cdot B)_0$. Réciproquement, soit $z \in (A \cdot B)_0$. Alors $\mu^{-1}(z)$ est un fermé de $G \times_k G$, et $A \times_k B$ (cf. 3.0) est une partie ind-constructible de $G \times_k G$, si bien que $\mu^{-1}(z) \cap (A \times_k B)$ est une partie ind-constructible non vide de $G \times_k G$; d'après EGA IV_3, 10.4.8, elle contient donc un point rationnel de $G \times_k G$, dont les projections x et y sont des points rationnels de G tels que $x \in A$, $y \in B$ et $x \cdot y = z$, si bien que $(A, B)_0 = A_0 \cdot B_0$.

Pour montrer (ii), remarquons que, f^n étant localement de type fini, $f^n(X^n)$ est une partie ind-constructible de G (EGA IV_4, 1.9.5 (viii)). L'assertion (i) permet alors de montrer par récurrence que, si on pose $A = f(X)_0$, on a : $f^n(X^n)_0 = (A \cup A^{-1})^n$, et par conséquent,

$$\Gamma'_G(f)_0 = \bigcup_{n\geqslant 1} f^n(X^n)_0 = \bigcup_{n\geqslant 1} (A \cup A^{-1})^n,$$

qui est le sous-groupe de $G(k)$ engendré par $A = f(X)_0$.

Enfin, (iii) résulte de (ii) et des définitions.

Corollaire 7.10. — *Sous les conditions de* 7.8*, si k est algébriquement clos, alors* $(A, B)(k)$ *est le sous-groupe des commutateurs de* $A(k)$ *et* $B(k)$ *dans* $G(k)$.

En effet, il suffit d'appliquer 7.9 (iii), 7.8 et 7.6.

8. Schémas en groupes résolubles ou nilpotents

8.1. — Soit $\mathscr{C}$ une catégorie munie d'une topologie $\mathcal{T}$ (cf. IV § 4). Pour tout préfaisceau P sur $\mathscr{C}$, on notera $P^\flat$ le faisceau associé.

Soient G un préfaisceau en groupes sur $\mathscr{C}$, A et B deux sous-préfaisceaux en groupes de G, et soit $\underline{\mathrm{Comm}}(A, B)$ le préfaisceau en groupes des commutateurs de A et B dans G ; c.-à-d., pour tout $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, $\underline{\mathrm{Comm}}(A, B)(S)$ est le sous-groupe de G(S) engendré
375 par les commutateurs $aba^{-1}b^{-1}$, avec $a \in A(S)$ et $b \in B(S)$. On note

$$\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(A, B) = \underline{\mathrm{Comm}}(A, B)^\flat.$$

On aura besoin, dans la démonstration de 8.2, des résultats suivants. [81]

Lemme 8.1.1. — *Soient* $\mathrm{A} \subset \mathrm{G}$ *des* faisceaux *en groupes, avec* A invariant *dans* G.

(i) $\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{G}, \mathrm{A})$ *est le plus petit sous-faisceau en groupes invariant* C *de* G *tel que le faisceau* $(\mathrm{A}/\mathrm{C})^\flat$*, associé au préfaisceau quotient* A/C*, soit* central dans $(\mathrm{G}/\mathrm{C})^\flat$.

(ii) *En particulier,* $\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{G}, \mathrm{G})$ *est le plus petit sous-faisceau en groupes invariant* C *de* G *tel que le faisceau quotient* $(\mathrm{G}/\mathrm{C})^\flat$*, soit* commutatif.

Évidemment, (ii) est le cas particulier A = G de (i), donc il suffit de montrer (i). Soit C un sous-faisceau en groupes de A, invariant dans G, et tel que le faisceau quotient $(\mathrm{A}/\mathrm{C})^\flat$ soit *central dans* $(\mathrm{G}/\mathrm{C})^\flat$. D'après le lemme IV 4.4.8.1, les préfaisceaux A/C et G/C sont *séparés*, et donc, d'après IV 4.3.11, tous les morphismes dans le diagramme ci-dessous sont des monomorphismes :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{A}/\mathrm{C} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathrm{G}/\mathrm{C} \arrow[d, hook] \\ (\mathrm{A}/\mathrm{C})^\flat \arrow[r, hook] & (\mathrm{G}/\mathrm{C})^\flat \end{tikzcd}$$

Comme $(\mathrm{A}/\mathrm{C})^\flat$ est central dans $(\mathrm{G}/\mathrm{C})^\flat$, alors A/C est central dans G/C, d'où $\underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{G}, \mathrm{A}) \subset \mathrm{C}$, et donc C contient $\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{G}, \mathrm{A})$, d'après IV 4.3.12.

Réciproquement, $\underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{G}, \mathrm{A})$ est un sous-préfaisceau en groupes de A, invariant dans G, et séparé (cf. IV 4.3.1, N.D.E. (24)), donc, d'après IV 4.4.8.2 (i) et IV 4.3.11, $\mathrm{C} = \underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{G}, \mathrm{A})$ est un sous-faisceau en groupes de A, invariant dans G et contenant $\underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{G}, \mathrm{A})$. Par conséquent, le préfaisceau A/C est central dans G/C et donc, d'après IV 4.4.8.2 (ii), $(\mathrm{A}/\mathrm{C})^\flat$ est central dans $(\mathrm{G}/\mathrm{C})^\flat$. Ceci prouve le lemme 8.1.1.

Lemme 8.1.2. — *Soient* G *un faisceau en groupes,* A, B *deux sous-préfaisceaux en groupes de* G.

(i) *Le morphisme* $\tau : \underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \to \underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A}^\flat, \mathrm{B}^\flat)$ *est un* monomorphisme couvrant.

(ii) *Par conséquent, on a un isomorphisme*

$$\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{A}^\flat, \mathrm{B}^\flat).$$

Démonstration. (i) Comme A (resp. B) est un sous-préfaisceau de G, alors $\mathrm{A}^\flat$ (resp. $\mathrm{B}^\flat$) est un sous-préfaisceau de G contenant A (resp. B), et il en résulte que τ est un monomorphisme.

Montrons que τ est couvrant. Soient $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et $g \in \underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A}^\flat, \mathrm{B}^\flat)(\mathrm{S})$. Alors, il existe un entier $n \geqslant 1$ et, pour $i = 1, \dots, n$, des éléments $a'_i \in \mathrm{A}^\flat(\mathrm{S})$, $b'_i \in \mathrm{B}^\flat(\mathrm{S})$, et $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, tels que

$$g = (a'_1, b'_1)^{\varepsilon_1} \cdots (a'_n, b'_n)^{\varepsilon_n},$$

[81] N.D.E. : Ces résultats sont signalés sans démonstration dans l'original ; on les a mis en évidence sous la forme des lemmes 8.1.1 et 8.1.2, et l'on a détaillé les démonstrations.

où (a,b) désigne le commutateur $aba^{-1}b^{-1}$, et il existe un raffinement R de S tel que $a'_i \in \mathrm{A}(\mathrm{R})$ et $b'_i \in \mathrm{B}(\mathrm{R})$ pour tout i. Alors, $\underline{g}$ est le morphisme composé

$$\mathrm{R} \xrightarrow{(a'_1,\ldots,b'_n)} (\mathrm{A}\times\mathrm{B})^n \xrightarrow{\Phi^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}} \underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A},\mathrm{B}),$$

où $\Phi = \Phi^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}$ est le morphisme défini ensemblistement par :

$$\Phi(a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) = (a_1,b_1)^{\varepsilon_1}\cdots(a_n,b_n)^{\varepsilon_n},$$

pour tout $\mathrm{T}\in\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et $a_i\in\mathrm{A}(\mathrm{T})$, $b_i\in\mathrm{B}(\mathrm{T})$. Ceci montre que $g\in\underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A},\mathrm{B})(\mathrm{R})$ et il en résulte, comme dans la démonstration de IV 4.3.11 (i), que $\underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A},\mathrm{B})\to\underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A}^\flat,\mathrm{B}^\flat)$ est couvrant.

Comme $\underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A}^\flat,\mathrm{B}^\flat)\to\underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A}^\flat,\mathrm{B}^\flat)^\flat$ est aussi un monomorphisme couvrant (IV 4.3.11 (iv)), il en est de même de $\underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A},\mathrm{B})\to\underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A}^\flat,\mathrm{B}^\flat)^\flat$ et donc, d'après IV 4.3.12, on obtient un isomorphisme :

$$\underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A},\mathrm{B})^\flat \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A}^\flat,\mathrm{B}^\flat)^\flat.$$

Ceci prouve le lemme 8.1.2.

Proposition 8.2. — *Soient $\mathscr{C}$ une catégorie, $\mathcal{T}$ une topologie sur $\mathscr{C}$,* G *un faisceau en groupes sur $\mathscr{C}$, n un entier $\geqslant 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Si on pose :* $\mathrm{K}_0=\mathrm{G}$*, et pour $p\geqslant 1$,* $\mathrm{K}_p=\underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{K}_{p-1},\mathrm{K}_{p-1})$ (*resp.* $\mathrm{K}_p=\underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{G},\mathrm{K}_{p-1})$)*, alors* K_n *est le préfaisceau en groupes unité.*

(ii) *Si on pose* $\mathrm{K}'_0=\mathrm{G}$*, et pour $p\geqslant 1$,* $\mathrm{K}'_p=\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{K}'_{p-1},\mathrm{K}'_{p-1})$ (*resp.* $\mathrm{K}'_p=\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{G},\mathrm{K}'_{p-1})$)*, alors* K'_n *est le faisceau en groupes unité.*

(iii) *Il existe une suite* $\mathrm{G}=\mathrm{H}_0\supset\mathrm{H}_1\supset\cdots\supset\mathrm{H}_n$ *de sous-faisceaux* invariants *de* G*, telle que, quel que soit i, le faisceau quotient* $\mathrm{H}_i/\mathrm{H}_{i+1}$ *soit commutatif* (*resp. central dans* $\mathrm{G}/\mathrm{H}_{i+1}$)*, et que* H_n *soit le faisceau unité.*

Il est clair que $\mathrm{K}_n\subset\mathrm{K}'_n$; par conséquent (ii) entraîne (i). Montrons que (i) entraîne (ii). On a $\mathrm{K}'_1=\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{G},\mathrm{G})=\mathrm{K}_1^\flat$, et on déduit par récurrence du lemme 8.1.2 que $\mathrm{K}'_p=\mathrm{K}_p^\flat$ pour tout p. Par conséquent, si K_n est le préfaisceau unité, alors $\mathrm{K}'_n=\mathrm{K}_n^\flat$ est le faisceau unité.

Enfin les conditions (ii) et (iii) sont équivalentes d'après le lemme 8.1.1.

376 ***Définition 8.2.1.*** — Lorsque ces conditions sont satisfaites, le faisceau G est dit *résoluble de classe n* (resp. *nilpotent de classe n*). Lorsqu'il existe un entier n tel que ces conditions soient satisfaites, on dit que G est *résoluble* (resp. *nilpotent*).

On notera que, d'après la condition (i), ceci ne dépend pas de la topologie $\mathcal{T}$.

Proposition 8.3. — *Soient k un corps,* S *un k-schéma non vide,* Ω *une extension* algébriquement close *de k,* G *un k-groupe* lisse de type fini*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est résoluble de classe n* (*resp. nilpotent de classe n*)*.*

(ii) $\mathrm{G}\times_k\mathrm{S}$ *est résoluble de classe n* (*resp. nilpotent de classe n*)*.*

(iii) *Le groupe* $\mathrm{G}(\Omega)$ *est résoluble de classe n* (*resp. nilpotent de classe n*)*.*

(iv) *Si on pose* $K_0 = G$ *et si on considère, pour* $p \geqslant 1$*, les* k-groupes $K_p = (K_{p-1}, K_{p-1})$ (*resp.* $K_p = (G, K_{p-1})$) (*cf.* 7.2.2)*, alors* K_n *est le* k*-groupe unité.*

L'équivalence des conditions (i) et (ii) résulte de la proposition 8.2, étant donné que la formation du préfaisceau en groupes des commutateurs commute aux changements de base (IV 4.1.3).

L'équivalence de (i) et (iv) résulte de ce que, d'après 7.8, le k-groupe $K_p = (K_{p-1}, K_{p-1})$ (resp. $K_p = (G, K_{p-1})$) représente le *faisceau* $\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(K_{p-1}, K_{p-1})$ (resp. $\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(G, K_{p-1})$), où $\mathcal{T}$ est la topologie (fppf) (ou (fpqc)).

Pour montrer que les conditions (iii) et (iv) sont équivalentes, on peut supposer que $k = \Omega$, et alors l'équivalence des conditions (iii) et (iv) résulte de 7.10.

Proposition 8.4. **—** *Soit* G *un* S*-groupe* de présentation finie*, tel que pour tout* $s \in S$*,* G_s *soit* lisse *sur* $\kappa(s)$*. Soit* T *l'ensemble des* $s \in S$ *tels que* G_s *soit* résoluble (*resp.* nilpotent)*.*

(i) *Alors* T *est* localement constructible *dans* S.

(ii) *Si on suppose de plus* G plat et séparé *sur* S (*i.e. lorsque* G *est* lisse*,* quasi-compact et séparé *sur* S)*, alors* T *est* fermé *dans* S.

Il est clair qu'on peut supposer S affine d'anneau A. Il existe alors, d'après 10.1 **377**
et 10.10 b), [(*)] un sous-anneau noethérien A' de A et un A'-groupe de type fini G' tel que $G' \otimes_{A'} A$ soit isomorphe à G. D'après EGA IV_3, 11.2.6 et 8.10.5 [(82)], si G est plat et séparé sur S, on peut supposer G' plat et séparé sur $S' = \operatorname{Spec} A'$. [(83)] Comme G est de présentation finie sur S, alors (EGA IV_3, 9.7.7) l'ensemble des $s \in S$ tels que G_s soit géométriquement réduit (ou, ce qui revient au même, *lisse* sur $\kappa(s)$) est localement constructible. Donc, d'après EGA IV_3, 9.3.3, on peut supposer que, pour tout $s' \in S'$, $G'_{s'}$ est lisse sur $\kappa(s')$. D'autre part, si s' désigne l'image de s dans S', on a : $G'_{s'} \otimes_{\kappa(s')} \kappa(s) \simeq G_s$. Donc, d'après 8.3, pour que G_s soit résoluble (resp. nilpotent), il faut et il suffit qu'il en soit de même de $G'_{s'}$. Nous somme donc ramenés au cas où S est un schéma affine noethérien.

Montrons alors que T est constructible. En appliquant le critère (EGA 0_{III}, 9.2.3), on voit, en raisonnant comme précédemment, qu'on est ramené à montrer que, dans le cas où S est noethérien et *intègre*, T ou $S - T$ contient un ouvert non vide de S.

Supposons donc S intègre et noethérien, de point générique η. Posons, quel que soit $s \in S$, $K_s^0 = G_s$, et $K_s^p = (K_s^{p-1}, K_s^{p-1})$ (resp. $K_s^p = (G, K_s^{p-1})$). Montrons d'abord que la suite des sous-schémas fermés K_η^p est stationnaire. Il résulte de 7.3 (v) que chacun des K_η^p est *invariant*, donc la suite des K_η^p est décroissante ; cette suite est alors stationnaire puisque G_η est noethérien ; il existe donc un entier n tel que, pour tout $p \geqslant n$, on ait : $K_\eta^p = K_\eta^n$.

D'autre part, d'après 10.12.1 et 10.13, il existe un ouvert non vide S' de S et **378**

[(*)]Nous nous servirons au cours de cette démonstration de résultats établis au numéro 10, qui ne dépendent, pas plus que le numéro 9, du présent n°8.

[(82)]N.D.E. : On a corrigé 10.8.5 en 8.10.5.
[(83)]N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

un S′-groupe *de présentation finie* D tel que pour tout $s \in \mathrm{S}'$, on ait $\mathrm{D}_s = \mathrm{K}^n_s$ et $(\mathrm{D}_s, \mathrm{D}_s) = \mathrm{D}_s$ (resp. $(\mathrm{G}_s, \mathrm{D}_s) = \mathrm{D}_s$). Nous pouvons supposer que $\mathrm{S}' = \mathrm{S}$. Alors, quel que soit $s \in \mathrm{S}$, et quel que soit $p \geqslant n$, on a $\mathrm{D}_s = \mathrm{K}^p_s$, si bien que G_s est résoluble (resp. nilpotent) si et seulement si D_s est isomorphe au $\kappa(s)$-groupe unité.

Mais d'après EGA IV_3, 9.6.1 (xi), l'ensemble des $s \in \mathrm{S}$ tels que le morphisme structural $\mathrm{D}_s \to \operatorname{Spec} \kappa(s)$ soit un isomorphisme est constructible, [84] donc ou bien est rare, ou bien contient un ouvert non vide de S. On a donc obtenu que T est localement constructible.

Montrons que si, de plus, G est plat et séparé sur S, alors T est fermé. Puisque T est localement constructible, pour que T soit fermé, il faut et il suffit que T soit stable par spécialisation (cf. EGA IV_1, 1.10.1).

Soient donc $s \in \mathrm{S}$ et s' une spécialisation de s dans S. Puisqu'on s'est ramené au cas où S est noethérien, alors, d'après EGA II, 7.1.9, il existe un anneau de valuation discrète A et un morphisme $\operatorname{Spec}(\mathrm{A}) \to \mathrm{S}$ tel que s (resp. s') soit l'image du point générique α (resp. du point fermé a) de Spec(A). Il suffit alors de montrer que si on pose $\mathrm{G}' = \mathrm{G} \otimes_{\mathrm{S}} \mathrm{A}$, et si G'_α est résoluble (resp. nilpotent), il en est de même de G'_a. Remarquons que, puisque G est plat et séparé sur S, G'_α est plat et séparé sur A, de sorte qu'on est ramené au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète A.

Alors, puisque G_α est supposé résoluble (resp. nilpotent), il existe un entier q tel que K^q_α (avec les notations introduites précédemment) soit isomorphe au $\kappa(\alpha)$-groupe unité. Pour tout n, notons $\overline{\mathrm{K}^n_\alpha}$ l'adhérence schématique (au sens de EGA IV_2, 2.8.5) de K^n_α dans G. Montrons, par récurrence sur p, que $(\overline{\mathrm{K}^p_\alpha})_a \supset \mathrm{K}^p_a$. Notons d'abord que,
379 puisque G est *plat* sur A, alors $\overline{\mathrm{G}_\alpha}$ est égal à G (EGA IV_2, 2.8.5), donc $(\overline{\mathrm{K}^0_\alpha})_a = \mathrm{K}^0_a$.

Soit $p \geqslant 0$. Supposons avoir établi que $\mathrm{K}^p_a \subset (\overline{\mathrm{K}^p_\alpha})_a$, et notons ν_a, ν_α, $\overline{\nu}$, $\overline{\nu}_a$ les morphismes suivants, définis comme dans 7.2.2 :

$$
\begin{array}{llll}
 & \text{cas } \textit{résoluble} & & \text{cas } \textit{nilpotent} \\
\nu_a : & \mathrm{K}^p_a \times_{\kappa(a)} \mathrm{K}^p_a \to \mathrm{G}_a, & \text{resp.} & \mathrm{G}_a \times_{\kappa(a)} \mathrm{K}^p_a \to \mathrm{G}_a, \\
\nu_\alpha : & \mathrm{K}^p_\alpha \times_{\kappa(\alpha)} \mathrm{K}^p_\alpha \to \mathrm{G}_\alpha & \text{resp.} & \mathrm{G}_\alpha \times_{\kappa(\alpha)} \mathrm{K}^p_\alpha \to \mathrm{G}_\alpha, \\
\overline{\nu} : & \overline{\mathrm{K}^p_\alpha} \times_{\mathrm{A}} \overline{\mathrm{K}^p_\alpha} \to \mathrm{G}, & \text{resp.} & \mathrm{G} \times_{\mathrm{A}} \overline{\mathrm{K}^p_\alpha} \to \mathrm{G}, \\
\overline{\nu}_a : & (\overline{\mathrm{K}^p_\alpha})_a \times_{\kappa(a)} (\overline{\mathrm{K}^p_\alpha})_a \to \mathrm{G}_a, & \text{resp.} & \mathrm{G}_a \times_{\kappa(a)} (\overline{\mathrm{K}^p_\alpha})_a \to \mathrm{G}_a.
\end{array}
$$

Puisque ν_α se factorise à travers K^{p+1}_α, alors $\overline{\nu}$ se factorise à travers $\overline{\mathrm{K}^{p+1}_\alpha}$, qui est évidemment un sous-schéma en groupes de G, donc $\overline{\mathrm{K}^{p+1}_\alpha}$ contient $\Gamma_{\mathrm{G}}(\overline{\nu})$. D'après 7.1 (iii), on a $\Gamma_{\mathrm{G}}(\overline{\nu})_a = \Gamma_{\mathrm{G}_a}(\overline{\nu}_a)$; et, d'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$
\mathrm{K}^p_a \underset{\kappa(a)}{\times} \mathrm{K}^p_a \subset (\overline{\mathrm{K}^p_\alpha})_a \underset{\kappa(a)}{\times} (\overline{\mathrm{K}^p_\alpha})_a \qquad \text{resp.} \qquad \mathrm{G}_a \underset{\kappa(a)}{\times} \mathrm{K}^p_a \subset \mathrm{G}_a \underset{\kappa(a)}{\times} (\overline{\mathrm{K}^p_\alpha})_a,
$$

si bien que $\mathrm{K}^{p+1}_a = \Gamma_{\mathrm{G}_a}(\nu_a) \subset \Gamma_{\mathrm{G}_a}(\overline{\nu}_a) = \Gamma_{\mathrm{G}}(\overline{\nu})_a \subset (\overline{\mathrm{K}^{p+1}_\alpha})_a$.

[84] N.D.E. : Compte tenu du fait que S est supposé affine, donc quasi-compact et quasi-séparé (cf. EGA 0_{III}, 9.1.12).

Mais puisque K^q_α est isomorphe au $\kappa(\alpha)$-groupe unité, et que le A-groupe unité est plat sur A et est isomorphe à un sous-schéma fermé de G (puisque G est *séparé* sur A, cf. 5.1), il résulte de EGA IV_2, 2.8.5 que l'adhérence schématique $\overline{\mathrm{K}^q_\alpha}$ est isomorphe au A-groupe unité. Comme on vient de voir que $\mathrm{K}^q_a \subset (\overline{\mathrm{K}^q_\alpha})_a$, ceci entraîne que K^q_a est isomorphe au $\kappa(a)$-groupe unité, si bien que G_a est résoluble (resp. nilpotent).

9. Faisceaux quotients

Le présent numéro se borne pour l'essentiel à un rappel dans le cas particulier d'espaces homogènes de groupes, de faits généraux bien connus sur le passage au quotient par des relations d'équivalences plates (cf. Exp. IV).

Définition 9.1. — Étant donné un *monomorphisme* $u : \mathrm{G}' \to \mathrm{G}$ de S-groupes, on note G/G' (resp. $\mathrm{G}'\backslash\mathrm{G}$) et on appelle *faisceau quotient à droite* (resp. *à gauche*) *de* G *par* G′ le faisceau (pour la topologie (fpqc)) quotient de G par la relation d'équivalence 380
définie par le monomorphisme :

$$\mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{G}' \xrightarrow{\delta\circ(\mathrm{id}_\mathrm{G}\times u)} \mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{G} \qquad (\text{resp. } \mathrm{G}' \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{G} \xrightarrow{\gamma\circ(u\times \mathrm{id}_\mathrm{G})} \mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{G}),$$

où δ (resp. γ) désigne l'automorphisme de $\mathrm{G}\times_\mathrm{S}\mathrm{G}$ défini par $(g,h) \mapsto (g,gh)$ (resp. $(h,g) \mapsto (hg,g)$) pour $g,h \in \mathrm{G}(\mathrm{T})$.

Proposition 9.2. — *Soit* $u : \mathrm{G}' \to \mathrm{G}$ *un* monomorphisme *de* S*-groupes. Supposons que* G/G' *soit* représentable *par un* S*-schéma* G''*. Alors :*

(i) *Le morphisme canonique* $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G}''$ *est* couvrant *pour la topologie* (fpqc).

(ii) *Si on pose* $\varepsilon'' = p \circ \varepsilon$ *(ce morphisme s'appelle* section unité de G''*), les diagrammes suivants sont cartésiens :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G}\times_\mathrm{S}\mathrm{G}' \arrow[r, "\mu\circ(\mathrm{id}_\mathrm{G}\times u)"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & \mathrm{G} \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{G} \arrow[r, "p"] & \mathrm{G}'' \end{tikzcd} \quad , \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{G}' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\pi'"'] & \mathrm{G} \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{S} \arrow[r, "\varepsilon''"] & \mathrm{G}'' \end{tikzcd} \quad .$$

En particulier, u est une immersion.

(iii) *Il existe sur* G'' *une structure unique de* S*-schéma à* groupe d'opérateurs *à gauche* G*, telle que p soit un morphisme de* S*-schémas à groupe d'opérateurs* G.

(iv) *Si on suppose de plus que* G′ *est* invariant *dans* G*, il existe sur* G'' *une structure unique de* S-groupe *telle que p soit un morphisme de* S*-groupes.*

(v) *Soit* S_0 *un* S*-schéma ; posons* $\mathrm{G}_0 = \mathrm{G}\times_\mathrm{S}\mathrm{S}_0$*, et* $\mathrm{G}'_0 = \mathrm{G}'\times_\mathrm{S}\mathrm{S}_0$ *; alors* $\mathrm{G}_0/\mathrm{G}'_0$ *est représentable par* $\mathrm{G}''_0 = \mathrm{G}''\times_\mathrm{S}\mathrm{S}_0$. [85]

(vi) *Soit* $\mathscr{P}$ *une propriété pour un* S*-morphisme. Supposons* $\mathscr{P}$ stable par changement de base *; alors si* $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G}''$ *vérifie* $\mathscr{P}$*, il en est de même du morphisme* 381
structural $\pi' : \mathrm{G}' \to \mathrm{S}$.

[85] N.D.E. : c.-à-d., le quotient est *universel*, cf. Exp. IV § 3.

(vii) *Soit* $\mathscr{P}$ *une propriété pour un* S*-morphisme. Supposons* $\mathscr{P}$ de nature locale pour la topologie (fpqc) (*cf.* 2.0 *et* 2.1.2)*. Alors, pour que le morphisme* $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G}''$ *vérifie* $\mathscr{P}$*,* il faut et il suffit *qu'il en soit de même de* $\pi' : \mathrm{G}' \to \mathrm{S}'$*.*

(viii) *Soit* $\mathscr{P}$ *une propriété pour un* S*-morphisme ; supposons* $\mathscr{P}$ de nature locale pour la topologie (fpqc)*, et* stable par composition *; alors, si les morphismes structuraux* $\mathrm{G}'' \to \mathrm{S}$ *et* $\mathrm{G}' \to \mathrm{S}$ *vérifient* $\mathscr{P}$*, il en est de même du morphisme structural* $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$*.*

(ix) *Supposons* G réduit *; alors* G'' *est* réduit*.*

(x) *Pour que* G'' *soit* séparé *sur* S*, il faut et il suffit que* u (*ou, ce qui revient au même,* ε'') *soit une* immersion fermée*.*

(xi) *Pour que* G' *soit* plat *sur* S*, il faut et il suffit que* p *soit un morphisme* plat (*ou, ce qui revient au même,* fidèlement plat)*.*

Dans ce cas, pour que G'' *soit* plat *sur* S*, il faut et il suffit que* G *soit* plat *sur* S*.*

(xii) *Pour que* G' *soit* plat et localement de présentation finie *sur* S*, il faut et il suffit que* $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G}''$ *soit* fidèlement plat et localement de présentation finie*.*

Dans ce cas, pour que G'' *soit* localement de présentation finie (*resp.* localement de type fini*,* de type fini*,* lisse*,* étale*,* non ramifié*,* localement quasi-fini*,* quasi-fini) *sur* S*, il suffit qu'il en soit de même de* G *sur* S*,* (*et la condition est également* nécessaire dans les deux premiers cas*, cf.* (viii))*.*

(xiii) *Supposons* G' plat et de présentation finie *sur* S*.*

a) *Alors* p *est* de présentation finie et fidèlement plat *;*

b) *de plus, pour que* G *soit* de présentation finie *sur* S*, il faut et il suffit qu'il en soit de même de* G''*.*

382 Rappelons que la relation d'équivalence considérée est effective universelle (IV 4.4.9). Alors les assertions (i), (iii), (iv), (v) et la première assertion de (ii) résultent de IV 4.4.3, 5.2.2, 5.2.4, 3.4.5 et 3.3.2 (iii). La seconde assertion de (ii) résulte de la première, comme le montre le diagramme cartésien suivant, puisque $(\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}') \times_{\mathrm{G}} \mathrm{S}$ est isomorphe à G' :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G}' \arrow[r, "((\varepsilon\circ\pi'),\, \mathrm{id}_{\mathrm{G}'})"] \arrow[d, "\pi'"'] & \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}' \arrow[r, "\mu\circ(\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times u)"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & \mathrm{G} \arrow[d, "p"] \\
\mathrm{S} \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathrm{G} \arrow[r, "p"] & \mathrm{G}''
\end{tikzcd} .$$

Enfin, il est clair que ε'' est une S-section de G'', donc une immersion (EGA I, 5.3.13) ; d'après le diagramme cartésien précédent, il en est de même de u, ce qui achève de montrer (ii). De plus, (vi) est une conséquence immédiate du second diagramme cartésien de (ii).

Montrons (vii). D'après (i), p est couvrant pour la topologie (fpqc) ; donc, d'après (ii), pour montrer que p vérifie $\mathscr{P}$, il suffit de montrer que la première projection $\mathrm{pr}_1 : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}' \to \mathrm{G}$ vérifie $\mathscr{P}$, ce qui résulte de ce que $\mathscr{P}$ est stable par changement de base, puisque pr_1 provient de π' par changement de base.

Il est clair que (viii) résulte de (vii), car $\pi = \pi'' \circ p$, où $\pi'' : \mathrm{G}'' \to \mathrm{S}$ désigne le morphisme structural.

Montrons (ix). D'après (i), p est un épimorphisme ; puisque G est réduit, p se factorise à travers l'immersion $\mathrm{G}''_{\text{réd}} \to \mathrm{G}''$, qui est donc aussi un épimorphisme, donc un isomorphisme (IV 4.4.4).

Montrons (x). Si G'' est séparé sur S, alors ε'' est une immersion fermée, d'après EGA I, 5.4.6. D'autre part, on a vu en (ii) que ε'' est une immersion fermée si et seulement si u en est une. Enfin, si u est une immersion fermée, il en est de même de $\delta \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times u) : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}' \to \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$; donc, d'après le lemme 9.2.1 ci-dessous, G'' est 383
séparé sur S.

L'assertion (xi) résulte de (vii) et de EGA IV_2, 2.2.13.

L'assertion (xii) résulte de (vii), de EGA IV_4, 17.7.5 et 17.7.7, et de ce que, p étant universellement ouvert, quel que soit $s \in \mathrm{S}$, si l'espace sous-jacent à G_s est discret, il en est de même de l'espace sous-jacent à G''_s.

Enfin, l'assertion (xiii) résulte de (vii), (viii), et de EGA IV_4, 17.7.5.

Lemme 9.2.1. — *Soient* X *un* S*-schéma et* R *une relation d'équivalence définie sur* X *par le monomorphisme* $v : \mathrm{R} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$. *Supposons* R *effective. Alors :*

(i) *v est une immersion, et c'est une immersion fermée si* $\mathrm{Y} = \mathrm{X}/\mathrm{R}$ *est séparé.*

(ii) *Supposons de plus que* Y *représente le faisceau* (fpqc) *quotient de* X *par* R [86] *et que v soit une immersion fermée. Alors* $\mathrm{Y} = \mathrm{X}/\mathrm{R}$ *est* séparé *sur* S.

Rappelons (IV Déf. 3.3.2) que l'hypothèse « R effective » signifie qu'il existe un morphisme de S-schémas $p : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ tel que le morphisme naturel $\mathrm{R} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}$ soit un *isomorphisme.* On en déduit (EGA I, 5.3.5) le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{R} \arrow[r, "v"] \arrow[d] & \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \arrow[d, "p \times p"] \\ \mathrm{Y} \arrow[r, "\Delta_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}"] & \mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y} \end{tikzcd} .$$

Alors, puisque $\Delta_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}$ est une immersion (EGA I, 5.3.9), il en est de même de v. De même, si Y est séparé sur S, $\Delta_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}$ est une immersion fermée, donc il en est de même de v.

Réciproquement, supposons que v soit une immersion fermée et que Y représente le faisceau (fpqc) quotient de X par R. Alors p est couvrant pour la topologie (fpqc) (IV 4.4.3), et donc $p \times p$ l'est aussi (par changement de base, $p \times \mathrm{id}_{\mathrm{X}}$ et $\mathrm{id}_{\mathrm{Y}} \times p$ sont 384
couvrants, donc aussi leur composée $p \times p$). Donc, par descente (fpqc) (cf. EGA IV_2, 2.7.1), $\Delta_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}$ est une immersion fermée, i.e. Y est séparé sur S.

Remarque 9.2.2. — Sous les hypothèses générales de 9.2, si on suppose G' *plat* et *localement de présentation finie* sur S, alors p est couvrant pour la topologie (fppf)

[86] N.D.E. : Comme signalé par O. Gabber, ceci est utilisé dans la démonstration et doit être inséré dans les hypothèses.

[87], d'après 9.2 (vii), donc les assertions (vii) et (viii) de 9.2 peuvent être étendues aux propriétés $\mathscr{P}$ de nature locale pour la topologie (fppf).

***Remarque 9.3.* —** a) La question de savoir si un quotient G/G' est ou non représentable est souvent délicate ; dans ce séminaire nous démontrons la représentabilité de certains quotients particuliers.

En général, pour pouvoir affirmer que le quotient G/G' est représentable, il ne suffit pas de supposer G et G′ de présentation finie sur S et G′ plat sur S. En effet, supposons de plus G lisse à fibres connexes. Dans ce cas, si G/G' est un schéma, il est *séparé*, d'après le corollaire 5.4, et donc $G' \hookrightarrow G$ est une immersion fermée, d'après 9.2 (x) ; par conséquent, si G′ n'est *pas fermé* dans G, alors G/G' n'est *pas représentable*.

Pour obtenir un tel contre-exemple, on peut prendre pour S le spectre d'un anneau de valuation discrète, et poser $G = \mathbb{G}_{m,S}$. Considérons d'autre part un entier $n > 1$, *inversible* sur S ; alors $\boldsymbol{\mu}_n = \operatorname{Ker}(G \xrightarrow{n} G)$ est un sous-groupe fermé de G étale sur S (cf. VII_A [88]). Soit G′ le sous-groupe ouvert de $\boldsymbol{\mu}_n$ obtenu en ôtant de $\boldsymbol{\mu}_n$ la partie fermée de la fibre fermée de $\boldsymbol{\mu}_n$ complémentaire de l'origine. Alors G′ n'est pas fermé dans G, donc G/G' n'est pas représentable. (On peut aussi fabriquer de tels exemples où G′ est lisse à fibres connexes.)

b) Il n'est pas exclu que G/G' soit représentable en revanche, lorsque G et G′ sont
385 *de présentation finie* sur S, et que G′ est *plat* sur S et *fermé* dans G [(*)] [89]. Sous ces hypothèses, on sait que G/G' est représentable dans les cas particuliers suivants :

1° – S est le spectre d'un anneau artinien (cf. VI_A 3.2 et 3.3.2).

2° – G′ est propre sur S et G quasi-projectif sur S (cf. V 7.1).

3° – S est localement noethérien de dimension 1 (cf. [**An73**], Th. 4.C).

10. Passage à la limite projective dans les schémas en groupes et les schémas à groupe d'opérateurs

10.0. — Rappelons le résultat essentiel de EGA IV_3, § 8.8. Soit donnée la situation suivante : S_0 un schéma *quasi-compact et quasi-séparé*, I un ensemble préordonné filtrant croissant, $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ un système inductif de $\mathscr{O}_{S_0}$-algèbres commutatives quasi-cohérentes, $\mathscr{A} = \varinjlim \mathscr{A}_i$, $S_i = \operatorname{Spec} \mathscr{A}_i$ pour $i \in I$, et $S = \operatorname{Spec} \mathscr{A}$ [90], alors la catégorie des S-schémas *de présentation finie* est déterminée à équivalence près par la donnée des catégories des S_i-schémas de présentation finie, des foncteurs entre ces catégories $\rho_{ji} : X_i \mapsto X_i \times_{S_i} S_j$ pour $i \leqslant j$, et isomorphismes de transitivité $\rho_{kj} \circ \rho_{ji} \xrightarrow{\sim} \rho_{ki}$.

(*) C'est trop optimiste, comme le montre M. Raynaud dans sa thèse (*loc. cit.* X 14).

[87] N.D.E. : On a corrigé (fpqc) en (fppf).

[88] N.D.E. : voir VII_A, 8.4 ou VIII, 2.1.

[89] N.D.E. : La remarque (*) se réfère au contre-exemple X.14 dans [**Ray70a**]. La base y est régulière locale de dimension 2.

[90] N.D.E. : Noter que S, étant affine sur S_0, est donc quasi-compact et quasi-séparé, cf. la N.D.E. (92) plus loin.

Précisons. Étant donné $j \in \mathrm{I}$, et un S_j-schéma de présentation finie X_j, nous poserons, pour tout $i \in \mathrm{I}$ tel que $i \geqslant j$, $\mathrm{X}_i = \mathrm{X}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i$, et $\mathrm{X} = \mathrm{X}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}$. Alors (EGA IV_3, 8.8.2) :

(i) Étant donné $j \in \mathrm{I}$, et deux S_j-schémas de présentation finie X_j et Y_j, l'application canonique de $\varinjlim_{i \geqslant j} \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_i}(\mathrm{X}_i, \mathrm{Y}_i)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ est bijective.

(ii) Pour tout S-schéma de présentation finie X, il existe un indice $j \in \mathrm{I}$, un S_j-schéma de présentation finie X_j et un S-isomorphisme $\mathrm{X} \xrightarrow{\sim} \mathrm{X}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}$.

On en conclut (EGA IV_3, 8.8.3) que, chaque fois qu'on aura un diagramme D portant sur un nombre fini d'objets et de flèches de la catégorie des S-schémas de présentation finie, on peut trouver un indice $i \in \mathrm{I}$ et un diagramme D_i dans la catégorie des S_i-schémas de présentation finie, tels que le diagramme D provienne à isomorphisme près du diagramme D_i par changement de base $\mathrm{S} \to \mathrm{S}_i$. On peut même trouver i et D_i tels que tout carré cartésien de D provienne d'un carré cartésien de D_i. 386

10.1. — De plus, un grand nombre de propriétés courantes pour un morphisme, stables par changement de base, possèdent la propriété suivante :

> Soit $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un S-morphisme entre S-schémas de présentation finie, il provient par changement de base d'un S_j-morphisme $u_j : \mathrm{X}_j \to \mathrm{Y}_j$ entre S_j-schémas de présentation finie, d'après 10.0 ; alors, pour que u ait la propriété $\mathscr{P}$, il faut et il suffit qu'il existe $i \geqslant j$ tel que $u_i = u_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i$ ait la propriété $\mathscr{P}$.

Il en est ainsi dans le cas où $\mathscr{P}$ est l'une des propriétés suivantes pour un morphisme : être séparé, surjectif, radiciel, affine, quasi-affine, fini, quasi-fini, propre, projectif, quasi-projectif, un isomorphisme, un monomorphisme, une immersion, une immersion ouverte, une immersion fermée (EGA IV_3, 8.10.5), plat (EGA IV_3, 11.2.6), lisse, non ramifié ou étale (EGA IV_4, 17.7.8). (91)

Remarquons qu'il en est encore ainsi dans le cas où $\mathscr{P}$ est la propriété d'être *couvrant pour la topologie* (fppf) ; en effet, étant donnés deux S-schémas de présentation finie X et Y, et un S-morphisme $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, il résulte de IV, 6.3.1 (i) (92) que, pour que u soit couvrant pour la topologie (fppf), il faut et il suffit qu'il existe un S-schéma Z et un S-morphisme $v : \mathrm{Z} \to \mathrm{Y}$ fidèlement plat et de présentation finie qui se factorise à travers u.

Le but de cette section 10 est de donner des variantes de ce genre de résultats pour la catégorie des S-groupes de présentation finie, celle des S-schémas à groupe d'opérateurs, et pour certaines propriétés pour des monomorphismes de groupes (être invariant, central à faisceau quotient représentable, etc.). 387

Les deux résultats préliminaires de ce type sont les suivants. (Dans les n$^{\mathrm{os}}$ 10.2 à 10.9 ci-dessous, on conserve les notations introduites en 10.0.)

(91) N.D.E. : On a rajouté le mot « plat », et corrigé 17.7.6 en 17.7.8.

(92) N.D.E. : et du fait que Y, étant de présentation finie sur S, est quasi-compact

Lemme 10.2. — *Soient* G_j *et* H_j *deux* S_j*-groupes de présentation finie ; posons, pour tout* $i \geqslant j$, $G_i = G_j \times_{S_j} S_i$, $G = G_j \times_{S_j} S$, *et définissons de même* H_i *et* H. *Alors l'application canonique ci-dessous est bijective :*

$$\varinjlim_{i \geqslant j} \mathrm{Hom}_{S_i\text{-gr.}}(G_i, H_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S\text{-gr.}}(G, H).$$

Lemme 10.3. — *Soit* G *un* S*-groupe de présentation finie ; alors il existe* $j \in I$, *un* S_j*-groupe de présentation finie* G_j, *et un isomorphisme de* S*-groupes* $G \cong G_j \times_{S_j} S$.

Les assertions 10.2 et 10.3 sont des conséquences faciles de 10.0 et 10.1, compte tenu de l'interprétation [93] de la structure de S-groupe donnée en EGA 0_{III}, 8.2.5 et 8.2.6.

Lemme 10.4. — *Soit* $u : G \to H$ *un morphisme de* S*-groupes entre* S*-groupes de présentation finie.* D'après 10.3 et 10.2, u provient par changement de base d'un morphisme $u_j : G_j \to H_j$ entre S_j-groupes de présentation finie. *Alors, pour que* u *soit un* monomorphisme central (*resp. un* monomorphisme invariant), *il faut et il suffit qu'il existe* $i \geqslant j$ *tel que* $u_i = u_j \times_{S_j} S_i$ *ait la même propriété.*

C'est une conséquence immédiate de 10.0 et 10.1, compte-tenu de la caractérisation donnée en 6.7 des monomorphismes de groupes centraux ou invariants.

388 ***Corollaire 10.5.*** — *Soit* G_j *un* S_j*-groupe de présentation finie. Pour que* $G_j \times_{S_j} S$ *soit* commutatif, *il faut et il suffit qu'il existe* $i \geqslant j$, *tel que* $G_j \times_{S_j} S_i$ *le soit.*

En effet, il revient au même de dire qu'un S-groupe est commutatif, ou que, considéré comme sous-schéma en groupes de lui-même, il est central.

Proposition 10.6. — *Soit* G_j *un* S_j*-groupe de présentation finie,* G'_j *un sous-schéma en groupes de* G_j plat *et de présentation finie sur* S_j. *Pour que* $(G_j \times_{S_j} S)/(G'_j \times_{S_j} S)$ *soit* représentable *pour la topologie* (fpqc), *il faut et il suffit qu'il existe* $i \geqslant j$ *tel que* $(G_j \times_{S_j} S_i)/(G'_j \times_{S_j} S_i)$ *le soit.*

C'est une conséquence du lemme plus général suivant :

Lemme 10.7. — *Soient* X_j *un* S_j*-schéma de présentation finie, et* R_j *une relation d'équivalence sur* X_j plate et de présentation finie [94]. *Pour que le faisceau quotient* $(X_j \times_{S_j} S)/(R_j \times_{S_j} S)$ *pour la topologie* $\mathcal{T}$ = (fppf) *ou* (fpqc) *soit* représentable, *il faut et il suffit qu'il existe* $i \geqslant j$, *tel que le faisceau quotient* $(X_j \times_{S_j} S_i)/(R_j \times_{S_j} S_i)$ *pour la topologie* $\mathcal{T}$ *le soit.*

Compte tenu des énoncés de EGA IV_2, 8.8.2, 8.8.3, 8.10.5 et 11.2.6 rappelés en 10.0, ce lemme est conséquence du résultat suivant :

Lemme 10.8. — *Soit* $\mathcal{T}$ *la topologie* (fppf) *ou* (fpqc) *; soient* X *un* S*-schéma* de pré-
389 sentation finie (*resp.* localement de présentation finie), R *une relation d'équivalence sur* X *définie par un monomorphisme* $v : R \to X \times_S X$ *tel que* $\mathrm{pr}_1 \circ v$ *soit* plat et de

[93] N.D.E. : en termes de diagrammes commutatifs de S-morphismes

[94] N.D.E. : c.-à-d., telle que le composé $R_j \hookrightarrow X_j \times_{S_j} X_j \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} X_j$ soit plat et de présentation finie.

présentation finie (*resp.* plat et localement de présentation finie). *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le faisceau quotient* X/R *pour la topologie* $\mathcal{T}$ *est* représentable.

(ii) *Il existe un* S-*schéma* de présentation finie (*resp.* localement de présentation finie) Y *et un morphisme* fidèlement plat $p : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *tel que le diagramme*

(D)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{R} \arrow[r, "\mathrm{pr}_1 \circ v"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2 \circ v"'] & \mathrm{X} \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{X} \arrow[r, "p"'] & \mathrm{Y} \end{tikzcd}$$

soit cartésien.

Notons d'abord que d'après IV, 3.3.2 et 4.4.3, pour que le faisceau X/R pour la topologie $\mathcal{T}$ soit représentable par Y, il faut et il suffit que le diagramme (D) soit cartésien et que p soit couvrant pour la topologie $\mathcal{T}$.

Montrons que (i) entraîne (ii). L'hypothèse (i) implique que le diagramme (D) est cartésien, donc que $\mathrm{pr}_1 \circ v$ se déduit de p par changement de base par p, et que p est couvrant pour la topologie (fpqc). Donc, par descente (fpqc) (EGA IV_2, 2.7.1), puisque $\mathrm{pr}_1 \circ v$ est fidèlement plat et (localement) de présentation finie, il en est de même de p. Alors, d'après EGA IV_4, 17.7.5, comme X est (localement) de présentation finie sur S, il en est de même de Y.

Montrons que (ii) entraîne (i). Il suffit de montrer que p est couvrant pour la topologie (fppf) ; or p est fidèlement plat par hypothèse, et est localement de présentation 390
finie car X et Y sont localement de présentation finie sur S (EGA IV_1, 1.4.3 (v)).

Lemme 10.9. — *Soit* G_j *un* S_j*-groupe de présentation finie, et* $\mathrm{G} = \mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}$. *Pour que* G^0 *soit* représentable*, il faut et il suffit qu'il existe* $i \geqslant j$ *tel que* $(\mathrm{G}_i)^0 = (\mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i)^0$ *le soit.*

La condition est suffisante, puisque le foncteur $\mathrm{G} \mapsto \mathrm{G}^0$ commute au changement de base, d'après 3.3.

Réciproquement, supposons G^0 représentable. Alors, d'après 3.9, G^0 est ouvert dans G et quasi-compact sur S, donc de présentation finie sur S, puisque G l'est. Alors, d'après 10.3 et 10.1, il existe $i \geqslant j$ et un sous-schéma en groupes ouvert H_i de G_i tel que $\mathrm{H}_i \times_{\mathrm{S}_i} \mathrm{S} = \mathrm{G}^0$. Le morphisme structural $\mathrm{G}^0 \to \mathrm{S}$ est connexe, i.e. à fibres géométriquement connexes (VI_A 2.1.1), donc, d'après EGA IV_3, 9.3.3 et 9.7.7, quitte à augmenter i, on peut supposer que le morphisme structural $\mathrm{H}_i \to \mathrm{S}$ est connexe. Alors, d'après 3.10.1, l'espace sous-jacent à H_i n'est autre que $\underline{(\mathrm{G}_i)}^0$, et donc H_i représente $(\mathrm{G}_i)^0$.

10.10. — Rappelons deux cas particuliers très utiles de la situation énoncée en 10.0 (cf. EGA IV_3, 8.1.2 a) et c)) :

a) Étant donné un point x d'un schéma X, on pose $\mathrm{S}_0 = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ et on considère le système projectif filtrant décroissant $(\mathrm{S}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ des voisinages ouverts affines de x ; alors $\mathrm{S} = \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$. En particulier, si x est le point générique d'un schéma intègre X, on trouve $\mathrm{S} = \operatorname{Spec} \kappa(x)$.

b) On pose $\mathrm{S}_0 = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, et on considère la famille $(\mathscr{A}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ préordonnée par inclu-
391 sion des sous-$\mathbb{Z}$-algèbres de type fini de l'anneau d'un schéma affine S. Étant donné que les $\mathscr{A}_i$ sont des anneaux noethériens, cela permet dans de nombreux cas de passer du cas noethérien au cas général.

Nous allons maintenant donner deux résultats concernant le cas particulier envisagé en a). [95]

Proposition 10.11. — [96] *Soient* S *un schéma intègre de point générique* η, G (*resp.* Y, Z) *un* S*-groupe* (*resp. des* S*-schémas*) de présentation finie*,* $u, v, i : \mathrm{Y} \to \mathrm{G}$ *et* $j : \mathrm{Z} \to \mathrm{G}$ *des morphismes de* S*-schémas. On suppose que* $i_\eta : \mathrm{Y}_\eta \to \mathrm{G}_\eta$ *et* $j_\eta : \mathrm{Z}_\eta \to \mathrm{G}_\eta$ *sont des* immersions fermées*.*

Alors, il existe un ouvert non vide S' *de* S *tel que les morphismes* $i' : \mathrm{Y}' \to \mathrm{G}'$ *et* $j' : \mathrm{Z}' \to \mathrm{G}'$ *obtenus par changement de base soient des* immersions fermées*, et que les foncteurs :*

$$\underline{\mathrm{Transp}}(u', v'), \quad \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}'}(i'(\mathrm{Y}'), j'(\mathrm{Z}')) \quad \textit{et} \quad \underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}'}(i'(\mathrm{Y}'), j'(\mathrm{Z}'))$$

resp.

$$\underline{\mathrm{Centr}}(u') \qquad \textit{et} \qquad \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}'}\, i'(\mathrm{Y}')$$

soient représentables *par des sous-*S'*-schémas* (*resp. sous-*S'-groupes) fermés *de* G', de présentation finie *sur* S'*.*

On va appliquer les résultats de 10.1, d'abord dans la situation de 10.10 a), puis dans celle de 10.10 b). Puisque $\mathrm{G}_\eta, \mathrm{Y}_\eta, \mathrm{Z}_\eta$ sont *plats* sur le corps $\kappa(\eta)$, que G_η est *séparé* sur $\kappa(\eta)$ ($\mathrm{VI_A}$ 0.3), et que i_η, j_η sont des *immersions fermées*, alors, d'après 10.1, il existe un ouvert affine $\mathrm{S}' = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}')$ de S, un sous-anneau *noethérien* A de A', des A-schémas $\mathrm{G_A}, \mathrm{Y_A}, \mathrm{Z_A}$, *plats et de présentation finie* sur A, et des morphismes $u_\mathrm{A}, v_\mathrm{A}, i_\mathrm{A} : \mathrm{Y_A} \to \mathrm{G_A}$ et $j_\mathrm{A} : \mathrm{Z_A} \to \mathrm{G_A}$, tels que $\mathrm{G_A}$ soit un A-*groupe, séparé* sur A, que i_A et j_A soient des *immersions fermées*, et que $\mathrm{G} \times_\mathrm{S} \mathrm{S}' = \mathrm{G_A} \otimes \mathrm{A}'$, etc. Comme les foncteurs considérés pour S' se déduisent par changement de base des foncteurs analogues pour Spec(A), il suffit d'établir le résultat pour ces derniers.

D'après EGA IV_2, 6.9.2, quitte à remplacer A par un localisé A_f (et donc S' par l'ouvert affine S'_f), on peut supposer que $\mathrm{G_A}, \mathrm{Y_A}, \mathrm{Z_A}$ sont essentiellement libres sur A (au sens de 6.2.1). [97] Il résulte alors de 6.2.4 b) et e) que, sous les hypothèses de l'énoncé, les foncteurs considérés sont représentables par des sous-A-schémas fermés de $\mathrm{G_A}$ (donc de présentation finie sur A, puisque A est noethérien et $\mathrm{G_A}$ de présentation

[95] N.D.E. : Noter que la *démonstration* utilise aussi le cas b).

[96] N.D.E. : On a simplifié l'énoncé, et traité à part, dans le corollaire 10.11.1, le cas des sous-groupes.

[97] N.D.E. : En effet, $\mathrm{G_A}$ étant plat et de présentation finie sur A, il est recouvert par des ouverts affines $\mathrm{G}_1, \dots, \mathrm{G}_n$ tels que chaque $\mathscr{O}(\mathrm{G}_i)$ soit une A-algèbre plate et de présentation finie ; alors, d'après EGA IV_2, 6.9.2, il existe $f_i \in \mathrm{A}$ tel que $\mathscr{O}(\mathrm{G}_i)_{f_i}$ soit un module libre sur A_{f_i} ; on peut alors remplacer Spec(A) par l'ouvert affine $\mathrm{D}(f)$, où $f = f_1 \cdots f_n$, et l'on fait de même pour $\mathrm{Y_A}$ et $\mathrm{Z_A}$.

finie sur A), et ce sont des sous-A-groupes de $\mathrm{G_A}$ dans le cas de $\underline{\mathrm{Centr}}(u_{\mathrm{A}})$ et de $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G_A}}\, i_{\mathrm{A}}(\mathrm{Y_A})$.

Corollaire 10.11.1. — *Soient* S *un schéma* intègre *de point générique* η*,* G, H, K *des* S-*groupes* de présentation finie, $i : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *et* $j : \mathrm{K} \to \mathrm{G}$ *deux* monomorphismes quasi-compacts *de* S-*groupes. Alors, il existe un ouvert non vide* S′ *de* S *tel que les morphismes* $i' : \mathrm{H}' \to \mathrm{G}'$ *et* $j' : \mathrm{K}' \to \mathrm{G}'$ *obtenus par changement de base soient des* immersions fermées*, et que les foncteurs :*

$$\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}'}(\mathrm{H}', \mathrm{K}') \ \ \textit{et} \ \ \underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}'}(\mathrm{H}', \mathrm{K}') \qquad \Big(\textit{resp.} \ \ \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}'}\,\mathrm{H}' \ \ \textit{et} \ \ \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}'}\,\mathrm{H}'\Big)$$

soient représentables *par des sous*-S′-*schémas* (*resp. sous*-S′-groupes) fermés *de* G′, de présentation finie *sur* S′. 392

Ceci découle de la proposition précédente car, d'après 1.4.2, les hypothèses entraînent que i_η et j_η sont des immersions fermées.

Proposition 10.12. — *Soient* S *un schéma* intègre*,* G *un* S-*groupe* de présentation finie*,* A *et* B *deux sous-schémas en groupes de* G*,* de présentation finie sur S et à fibre générique lisse*. Supposons de plus vérifiée l'une des conditions suivantes :*

a) A *est à* fibre générique connexe*,*

b) A *et* B *sont* invariants *dans* G*.*

Alors, il existe un ouvert non vide S′ *de* S *et un sous-schéma en groupes* fermé D′ *de* $\mathrm{G}' = \mathrm{G}|_{\mathrm{S}'}$, de présentation finie sur S′, à fibres lisses*, qui représente le faisceau* (fppf) *associé au préfaisceau en groupes des commutateurs de* $\mathrm{A}' = \mathrm{A}|_{\mathrm{S}'}$ *et* $\mathrm{B}' = \mathrm{B}|_{\mathrm{S}'}$ *dans* G′*, et* D′ *est* à fibres connexes *dans le cas* (a)*, et* invariant *dans* G′ *dans le cas* (b)*.*

En particulier, pour tout $s \in \mathrm{S}'$*, on a* $\mathrm{D}'_s = (\mathrm{A}_s, \mathrm{B}_s)$ *avec les notations de* 7.2.2*.*

Soit η le point générique de S ; posons $\mathrm{H}_\eta = (\mathrm{A}_\eta, \mathrm{B}_\eta)$. Comme A_η et B_η sont 393
lisses, alors, d'après 7.8 dans le cas (a), et 7.3 (v) dans le cas (b), H_η est connexe (resp. invariant dans G_η).

On est dans la situation de 10.0 correspondant à 10.10 (a) ; donc, d'après 10.3 et 10.1, il existe un ouvert non vide S′ de S et un sous-S′-schéma en groupes D′ de présentation finie et fermé dans G′, tel que $\mathrm{D}'_\eta = \mathrm{D}' \otimes_{\mathrm{S}'} \kappa(\eta)$ égale H_η. De plus, d'après EGA IV_3, 9.7.7 et 9.3.3, on peut supposer que D′ est à fibres géométriquement réduites. Dans le cas (a), on peut supposer, d'après EGA IV_3, 9.7.7 et 9.3.3, à nouveau, que D′ est à fibres connexes, donc géométriquement connexes (cf. $\mathrm{VI_A}$, 2.1.1). Dans le cas (b), on peut supposer, d'après 10.4, que D′ est invariant dans G′.

De plus, nous avons vu, au cours de la démonstration de 7.8, qu'il existe un entier n tel que $\nu_\eta^n((\mathrm{A}_\eta \times_{\kappa(\eta)} \mathrm{B}_\eta)^n) = \mathrm{D}'_\eta$, où ν_η et ν_η^n sont définis comme en 7.2.2 (a) et 7.1 (ii). Nous pouvons définir par les mêmes formules les morphismes

$$\nu' : \mathrm{A}' \underset{\mathrm{S}'}{\times} \mathrm{B}' \longrightarrow \mathrm{G}' \qquad \text{et} \qquad \nu'^n : (\mathrm{A}' \underset{\mathrm{S}'}{\times} \mathrm{B}')^n \longrightarrow \mathrm{G}',$$

et l'on a $\nu'^n \otimes_{\mathrm{S}'} \kappa(\eta) = \nu_\eta^n$.

Par conséquent, d'après 10.1, on peut choisir S′ tel que le morphisme ν'^n soit *plat* et se factorise à travers D′, et que le morphisme $\nu'^n : (\mathrm{A}' \times_{\mathrm{S}'} \mathrm{B}')^n \to \mathrm{D}'$ ainsi obtenu soit *surjectif*. Alors, d'après 7.5, le morphisme [98]

$$\nu'^{2n} = \mu \circ (\nu'^n \times_{\mathrm{S}'} \nu'^n) : \quad (\mathrm{A}' \underset{\mathrm{S}'}{\times} \mathrm{B}')^{2n} \longrightarrow \mathrm{D}',$$

est couvrant pour la topologie (fppf). Donc, d'après 7.6, D′ représente le faisceau (fppf) associé au préfaisceau des commutateurs de A′ et B′ dans G′.

De plus, ν'^n induit, pour tout $s \in \mathrm{S}'$, un morphisme surjectif $\nu_s^n : (\mathrm{A}_s \times_{\kappa(s)} \mathrm{B}_s)^n \to \mathrm{D}'_s$. [99] Alors, D'_s est un sous-groupe fermé de G_s contenant $\nu_s(\mathrm{A}_s \times_{\kappa(s)} \mathrm{B}_s)$, donc aussi $(\mathrm{A}_s, \mathrm{B}_s)$. Comme ν_s^n est surjectif, alors D'_s égale $(\mathrm{A}_s, \mathrm{B}_s)$ et représente, d'après 7.6, le faisceau (fppf) des commutateurs de A_s et B_s dans G_s.

Corollaire 10.12.1. — [100] *Soient* S *un schéma intègre, de point générique* η, *et* G *un* S-*groupe de présentation finie à fibres lisses. Posons* $\mathrm{K}_\eta^0 = \mathrm{G}_\eta$ *et* $\mathrm{K}_\eta^p = (\mathrm{K}_\eta^{p-1}, \mathrm{K}_\eta^{p-1})$ (*resp.* $\mathrm{K}_\eta^p = (\mathrm{G}, \mathrm{K}_\eta^{p-1})$) *pour tout* $p \in \mathbb{N}^*$. *Fixons* $n \in \mathbb{N}^*$. *Alors il existe un ouvert non vide* S′ *de* S *et un sous-schéma en groupes* D *invariant dans* $\mathrm{G}|_{\mathrm{S}'}$, *de présentation finie et à fibres lisses, tel que* $\mathrm{D}_s = \mathrm{K}_s^n$ *pour tout* $s \in \mathrm{S}'$.

Ceci résulte de 10.12, par récurrence sur n.

Corollaire 10.13. — *Soit* S *un schéma intègre de point générique* η, *soient* G *un* S-*groupe,* H *un sous*-S-*schéma en groupes* invariant *dans* G, *on suppose* G *et* H de présentation finie sur S et à fibre générique lisse. [101]

394 *Si l'on a* $(\mathrm{H}_\eta, \mathrm{H}_\eta) = \mathrm{H}_\eta$ (*resp.* $(\mathrm{G}_\eta, \mathrm{H}_\eta) = \mathrm{H}_\eta$), *alors il existe un ouvert non vide* S′ *de* S *tel que pour tout* $s \in \mathrm{S}'$, *on ait* $(\mathrm{H}_s, \mathrm{H}_s) = \mathrm{H}_s$ (*resp.* $(\mathrm{G}_s, \mathrm{H}_s) = \mathrm{H}_s$).

En effet, d'après la démonstration de 10.12, il existe un ouvert non vide S′ de S et un sous-S′-schéma en groupes D de $\mathrm{G}|_{\mathrm{S}'}$, de présentation finie et à fibres lisses, tel que $\mathrm{D}_s = (\mathrm{H}_s, \mathrm{H}_s)$ (resp. $\mathrm{D}_s = (\mathrm{G}_s, \mathrm{H}_s)$) pour tout $s \in \mathrm{S}'$. D'autre part, comme $\mathrm{D}_\eta = \mathrm{H}_\eta$ et comme D et H sont de présentation finie sur S′, alors, d'après EGA IV_3, 8.8.2.5, il existe un ouvert non vide S″ de S′ tel que $\mathrm{D}|_{\mathrm{S}''} = \mathrm{H}|_{\mathrm{S}''}$. Pour tout $s \in \mathrm{S}''$, on a donc $\mathrm{H}_s = \mathrm{D}_s = (\mathrm{H}_s, \mathrm{H}_s)$ (resp. $\mathrm{H}_s = \mathrm{D}_s = (\mathrm{G}_s, \mathrm{H}_s)$).

10.14. — Les énoncés 10.2 et 10.3 concernant la catégorie des S-groupes de présentation finie s'étendent à la catégorie des couples formés d'un S-groupe de présentation finie et d'un S-schéma de présentation finie à groupe d'opérateurs G. De façon précise, dans la situation rappelée au début de 10.0 :

(i) soient $j \in \mathrm{I}$ et G_j et G'_j deux S_j-groupes de présentation finie, H_j (resp. H'_j) un S_j-schéma de présentation finie à groupe d'opérateurs G_j (resp. G'_j). Posons, pour $i \in \mathrm{I}$, $i \geqslant j$, $\mathrm{G}_i = \mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i$ et $\mathrm{G} = \mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}$, et définissons de même G'_i, G′, H_i, H, H'_i et H′. Notons $\mathrm{Dihom}_{\text{S-gr.}}((\mathrm{G}, \mathrm{H}), (\mathrm{G}', \mathrm{H}'))$ l'ensemble des di-morphismes de S-groupes

[98] N.D.E. : On a corrigé ci-dessous $n+1$ en $2n$.

[99] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

[100] N.D.E. : On a ajouté ce corollaire, utilisé dans la démonstration de 8.4.

[101] N.D.E. : L'original supposait G, H de présentation finie et H à fibres lisses ; on a modifié l'hypothèse afin de pouvoir appliquer 10.12. On a aussi détaillé la démonstration.

et de S-schémas à groupe d'opérateurs du couple (G,H) dans le couple $(\mathrm{G}',\mathrm{H}')$. Alors l'application canonique

$$\varinjlim_{i\geqslant j} \mathrm{Dihom}_{\mathrm{S}_i\text{-gr.}}((\mathrm{G}_i,\mathrm{H}_i),(\mathrm{G}'_i,\mathrm{H}'_i)) \longrightarrow \mathrm{Dihom}_{\mathrm{S}\text{-gr.}}((\mathrm{G},\mathrm{H}),(\mathrm{G}',\mathrm{H}'))$$

est bijective.

(ii) soient G un S-groupe de présentation finie et H un S-schéma de présentation finie à groupe d'opérateurs G ; il existe alors un indice $j \in \mathrm{I}$, un S_j-groupe de présentation finie G_j, un S_j-schéma de présentation finie H_j à groupe d'opérateurs G_j et un di-isomorphisme de S-groupes et de S-schémas à groupes d'opérateurs de $(\mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}, \mathrm{H}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S})$ sur (G,X).

Définition 10.15. — [102] Soit $\mathcal{T}$ une topologie sur $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$, moins fine que la topologie canonique. Étant donné un S-schéma en groupes G et un S-schéma X à groupe d'opérateurs G, on dit que X est un espace *formellement homogène* sous G (relativement à la topologie $\mathcal{T}$) si le morphisme $\Phi : \mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{X} \to \mathrm{X}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{X}$, défini par $(g,x)\mapsto(gx,x)$ 395
pour tout $\mathrm{S}'\to\mathrm{S}$ et $g\in\mathrm{G}(\mathrm{S}')$, $x\in\mathrm{X}(\mathrm{S}')$, est un *épimorphisme* dans la catégorie des faisceaux pour la topologie $\mathcal{T}$, ce qui équivaut à dire que Φ est couvrant pour la topologie $\mathcal{T}$ (cf. IV 4.4.3).

On dit que X est un espace *homogène* s'il est formellement homogène et si de plus le morphisme $\mathrm{X}\to\mathrm{S}$ est également couvrant pour la topologie $\mathcal{T}$.

En particulier, on dit que X est un espace *formellement principal homogène* sous G si Φ est un *isomorphisme*, et que X est un fibré *principal homogène* (ou G-*torseur*) si Φ est un isomorphisme et si de plus le morphisme $\mathrm{X}\to\mathrm{S}$ est couvrant pour la topologie $\mathcal{T}$ (cf. IV 5.1.5 et 5.1.6 (ii)).

Proposition 10.16. — *On se place dans la situation envisagée au début de* 10.0. *Soient* $j\in\mathrm{I}$, G_j *un* S_j*-groupe et* X_j *un* S_j*-schéma à groupe d'opérateurs* G_j. *On suppose* G_j *et* X_j de présentation finie *sur* S_j.

Pour que $\mathrm{X}=\mathrm{X}_j\times_{\mathrm{S}_j}\mathrm{S}$ *soit un espace homogène* (*resp. un fibré principal homogène*) *sous* $\mathrm{G}=\mathrm{G}_j\times_{\mathrm{S}_j}\mathrm{S}$ *pour la topologie* (fppf), *il faut et il suffit qu'il existe un indice* $i\geqslant j$ *tel que* $\mathrm{X}_i=\mathrm{X}_j\times_{\mathrm{S}_j}\mathrm{S}_i$ *soit un espace homogène* (*resp. un fibré principal homogène*) *sous* $\mathrm{G}_i=\mathrm{G}_j\times_{\mathrm{S}_j}\mathrm{S}_i$.

Compte tenu de 10.14 et de EGA IV_3, 8.8.2, 8.8.3 et 8.10.5, l'énoncé résulte de la propriété concernant les morphismes couvrants pour la topologie (fppf) rappelée en 10.1. [103]

11. Schémas en groupes affines

396

11.0. Rappels. — [104] Soit $q : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ un morphisme de schémas *quasi-compact et quasi-séparé* (cf. EGA IV$_1$, 1.1 & 1.2), et soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-module quasi-cohérent. Rappelons que $q_*(\mathscr{F})$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent (EGA I, 9.2.1). De plus, d'après EGA III, 1.4.15 (complété par EGA IV$_1$, 1.7.21), on a le point (c) ci-dessous, et la démonstration de *loc. cit.* donne aussi les points (a) et (b) :

(a) Si $\mathscr{F}$ est une limite inductive filtrante de sous-modules quasi-cohérents $\mathscr{F}_\alpha$, alors $q_*(\mathscr{F}) = \varinjlim_\alpha q_*(\mathscr{F}_\alpha)$.

(b) Si $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module *plat*, le morphisme canonique $\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} q_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}) \to q_*q^*(\mathscr{E})$ est un isomorphisme.

(c) Soient $p : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ un morphisme *plat*, $q' : \mathrm{X}' \to \mathrm{S}'$ le morphisme déduit de q par changement de base, et $\mathscr{F}'$ l'image inverse de $\mathscr{F}$ sur X'. Alors le morphisme canonique $p^*q_*(\mathscr{F}) \to q'_*(\mathscr{F}')$ est un isomorphisme.

En effet, soit $\mathrm{U} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ un ouvert affine arbitraire de S. D'après l'hypothèse, $q^{-1}(\mathrm{U})$ est réunion d'ouverts affines $\mathrm{V}_i = \mathrm{Spec}(\mathrm{B}_i)$, pour $i = 1, \dots, n$, et chaque intersection $\mathrm{V}_i \cap \mathrm{V}_j$ est réunion d'un nombre fini d'ouverts affines $\mathrm{W}_{ijk} = \mathrm{Spec}(\mathrm{C}_{ijk})$. Alors $\Gamma(\mathrm{U}, q_*(\mathscr{F})) = \Gamma(q^{-1}(\mathrm{U}), \mathscr{F})$ est le noyau du morphisme

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \Gamma(\mathrm{V}_i, \mathscr{F}) \longrightarrow \bigoplus_{i,j,k} \Gamma(\mathrm{W}_{ijk}, \mathscr{F}).$$

Le point (a) en résulte, car chacun des termes ci-dessus commute aux limite inductives filtrantes (puisque les V_i et W_{ijk} sont affines, donc quasi-compacts). Prouvons (b) : $\mathrm{E} = \Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{E})$ est un A-module plat, et $\Gamma(\mathrm{U}, q_*q^*(\mathscr{E}))$ est le noyau $\mathrm{K}(\mathrm{E})$ du morphisme

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{B}_i \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{E} \longrightarrow \bigoplus_{i,j,k} \mathrm{C}_{ijk} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{E}$$

et comme E est plat sur A, ce noyau s'identifie à $\mathrm{K}(\mathrm{A}) \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{E} = \mathscr{O}_{\mathrm{X}}(q^{-1}(\mathrm{U})) \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{E}$. Enfin, si U' est un ouvert affine arbitraire de S' au-dessus de U, alors $\mathrm{A}' = \mathscr{O}(\mathrm{U}')$ est une A-algèbre plate, et l'on obtient comme ci-dessus que $\mathscr{F}(q^{-1}(\mathrm{U})) \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}' \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}'(q'^{-1}(\mathrm{U}))$.

Notation. **—** Soient S un schéma, X un S-schéma, $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ le morphisme structural ; on posera $\mathscr{A}(\mathrm{X}) = f_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$.

Lemme 11.1. **—** *Soient* X *et* Y *deux* S-*schémas* quasi-compacts et quasi-séparés *sur* S*,* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *et* $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ *les morphismes structuraux. Alors l'homomorphisme canonique*

$$\varphi : \mathscr{A}(\mathrm{X}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{Y}) \longrightarrow \mathscr{A}(\mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{Y})$$

[102] N.D.E. : On a corrigé l'original en distinguant les notions d'objet « formellement homogène » ou « homogène », voir IV §§ 5.1 et 6.7.

[103] N.D.E. : Pour les propriétés de passage à la limite pour les torseurs en termes de cohomologie de Čech, voir aussi SGA 4, VII 5.7 et ses corollaires. Ceci a été détaillé dans l'article [**Ma07**].

[104] N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe de rappels.

est un isomorphisme *dans chacun des cas suivants :* [105]

a) f *et* g *sont* affines*,*

b) g *(ou* f*) est* plat et affine*,*

c) g *est* plat *et* $f_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$ *est un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module* plat*.*

On supposera, dans le cas (b), que c'est g qui est plat et affine. Posons alors $\mathrm{S}' = \operatorname{Spec} \mathscr{A}(\mathrm{X})$, $\mathrm{Y}' = \mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$, $g' = g \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ et notons v le morphisme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Y}' \arrow[r] \arrow[d, "g'"'] & \mathrm{Y} \arrow[d, "g"] \\ \operatorname{Spec} \mathscr{A}(\mathrm{X}) = \mathrm{S}' \arrow[r, "v"] & \mathrm{S} \end{tikzcd} .$$

Dans les cas (a) et (b), g est affine et donc, d'après EGA II, 1.5.2, on a :

$$(1) \qquad g'_*(\mathscr{O}'_{\mathrm{Y}}) = v^* g_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}) = \mathscr{A}(\mathrm{Y}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}'} \quad .$$

On a la même égalité dans le cas (c), d'après 11.0 (c), puisque S' est plat sur S et que g est quasi-compact et quasi-séparé.

D'autre part (EGA II 1.2.7), $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ se factorise à travers v au moyen d'un morphisme $p : \mathrm{X} \to \mathrm{S}'$, et l'on a $p_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}) = \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$ et $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y} = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}'} \mathrm{Y}'$. Puisque f est quasi-séparé, p l'est aussi (EGA IV_1, 1.2.2), et puisque f est quasi-compact et que v est quasi-séparé, p est aussi quasi-compact (EGA IV_1, 1.2.4). Considérons alors le carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y} \arrow[r, "p'"] \arrow[d] & \mathrm{Y}' \arrow[d, "g'"] \\ \mathrm{X} \arrow[r, "p"] & \mathrm{S}' \end{tikzcd} .$$

Dans les cas (b) et (c), Y est plat sur S, donc Y' est plat sur S' ; appliquant de nouveau 11.0 (c), on obtient :

$$(2) \qquad p'_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}}) = g'^* p_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}) = g'^*(\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}) = \mathscr{O}_{\mathrm{Y}'} \quad ,$$

et l'on a la même égalité dans le cas (a), car dans ce cas p et p' sont des isomorphismes. 397

Enfin, v étant affine on a, d'après EGA II, 1.4.7, $v_*(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}) = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{X})$ pour tout $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent $\mathscr{F}$. Combiné avec (2) et (1), ceci donne :

$$\mathscr{A}(\mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{Y}) = v_* g'_* p'_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}}) \overset{(2)}{=} v_* g'_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}'}) \overset{(1)}{=} v_*(\mathscr{A}(\mathrm{Y}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}) = \mathscr{A}(\mathrm{Y}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{X}).$$

Corollaire 11.2. — *Le foncteur* $\mathrm{X} \mapsto \operatorname{Spec} \mathscr{A}(\mathrm{X})$*, de la sous-catégorie pleine de* $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$ *formée des* S*-schémas* X plats quasi-compacts et quasi-séparés *sur* S*, et tels que* $\mathscr{A}(\mathrm{X})$ *soit un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module* plat*, dans celle des* S*-schémas* plats et affines *sur* S*,* commute aux produits finis*, donc transforme* S-groupes *en* S-groupes*.*

[105] N.D.E. : Notons que si k est un corps et si X est une somme infinie de copies de $\mathrm{S} = \operatorname{Spec} k$ (de sorte que X n'est pas quasi-compact), alors $\mathscr{A}(\mathrm{X}) = k^{\mathrm{X}}$ et le morphisme canonique $k^{\mathrm{X}} \otimes k^{\mathrm{X}} \to k^{\mathrm{X} \times \mathrm{X}}$ n'est pas surjectif.

Définition 11.3. — Étant donné un S-groupe G plat, quasi-compact et quasi-séparé sur S, tel que $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ soit plat sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, [106] nous noterons G_{af}, et nous appellerons *enveloppe affine* de G, le S-groupe $\mathrm{G}_{\mathrm{af}} = \operatorname{Spec} \mathscr{A}(\mathrm{G})$.

Proposition 11.3.1. — [107] *Le morphisme canonique* $\tau_{\mathrm{G}} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}_{\mathrm{af}}$ *est un morphisme de* S*-groupes. De plus, il vérifie la propriété universelle suivante :*

(i) *Pour tout morphisme de* S*-schémas* $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$*, où* H *est* affine *sur* S*, il existe un unique morphisme de* S*-schémas* $\phi' : \mathrm{G}_{\mathrm{af}} \to \mathrm{H}$ *tel que* $\phi = \phi' \circ \tau_{\mathrm{G}}$.

(ii) *Si de plus* H *est un* S*-groupe et si* ϕ *est un morphisme de* S*-groupes, alors il en est de même de* ϕ'.

11.4. — [108] Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules quasi-cohérents. Considérons le S-foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{E}), \mathbf{W}(\mathscr{F}))$ (cf. I, 3.1.4), i.e. pour tout S-schéma $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$,

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{E}), \mathbf{W}(\mathscr{F}))(\mathrm{X}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}_{\mathrm{X}}}(\mathbf{W}(\mathscr{E})_{\mathrm{X}}, \mathbf{W}(\mathscr{F})_{\mathrm{X}}).$$

De plus, d'après I, 4.6.2, on a $\mathbf{W}(\mathscr{E})_{\mathrm{X}} = \mathbf{W}(f^*(\mathscr{E}))$ (et de même pour $\mathscr{F}$) et

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}_{\mathrm{X}}}\big(\mathbf{W}(f^*(\mathscr{E})), \mathbf{W}(f^*(\mathscr{F}))\big) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}}}(f^*(\mathscr{E}), f^*(\mathscr{F})).$$

On obtient donc (en utilisant la formule d'adjonction pour la dernière égalité) :

$$(\dagger) \quad \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{E}), \mathbf{W}(\mathscr{F}))(\mathrm{X}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}}}(f^*(\mathscr{E}), f^*(\mathscr{F})) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{E}, f_*f^*(\mathscr{F})).$$

398 ***Proposition 11.5.*** — *Soient* X *un* S*-schéma* quasi-compact et quasi-séparé *sur* S*,* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *le morphisme structural,* $\mathscr{E}$ *et* $\mathscr{E}'$ *deux* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-modules quasi-cohérents. On suppose vérifiée l'une des deux conditions suivantes :*

a) f *est* affine*,*

b) $\mathscr{E}$ *est* plat *sur* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$.

Alors le morphisme canonique $\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{X}) \to f_*f^*(\mathscr{E})$ *est un isomorphisme, et l'on a donc*

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{E}'), \mathbf{W}(\mathscr{E}))(\mathrm{X}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{E}', \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{X})).$$

En effet, la seconde assertion découle de 11.4 et de la première ; celle-ci résulte de EGA II, 1.4.7 dans le cas (a), et de 11.0 (b) dans le cas (b). [109]

[106] N.D.E. : Signalons que si S est un schéma localement noethérien régulier de dimension $\leqslant 2$, et X un S-schéma plat, quasi-compact et quasi-séparé, alors $\mathscr{A}(\mathrm{X})$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module plat, cf. [**Ray70a**], VII 3.2.

[107] N.D.E. : On a ajouté cette proposition ; voir aussi le paragraphe additionnel 12 plus loin pour une étude du morphisme $\mathrm{G} \to \mathrm{G}_{\mathrm{af}}$ et de son noyau.

[108] N.D.E. : Dans 11.4–11.6, on a considéré $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{E}), \mathbf{W}(\mathscr{F}))$ au lieu de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbb{V}(\mathscr{F}), \mathbb{V}(\mathscr{E}))$ (cf. I, 4.6.3) et simplifié l'original en tenant compte de l'ajout 11.0 (b).

[109] N.D.E. : On a simplifié l'original, qui utilisait l'isomorphisme $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{E}'), \mathbf{W}(\mathscr{E})) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbb{V}(\mathscr{E}), \mathbb{V}(\mathscr{E}'))$ puis l'inclusion du terme de droite dans

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathbb{V}(\mathscr{E}), \mathbb{V}(\mathscr{E}')) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\big(\mathscr{E}', f_*f^*(\mathrm{Sym}(\mathscr{E}))\big)$$

et appliquait EGA III, 4.1.15 à $\mathbb{V}(\mathscr{E}) = \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(\mathscr{E}))$ pour en déduire 11.0 (b).

11.6. — [110] Soient G un S-groupe et $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent. Se donner 399
sur $\mathscr{E}$ une structure de G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module (i.e. une opération $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-linéaire de G sur $\mathbf{W}(\mathscr{E})$, cf. I 4.7.1) équivaut à se donner un morphisme de S-*foncteurs en monoïdes* $\rho : \mathrm{G} \to \underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{E}))$ (en effet, un tel ρ envoie nécessairement G dans $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{E}))$).

Or, d'après 11.4, se donner un morphisme de S-*foncteurs* $\rho : \mathrm{G} \to \underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{E}))$ équivaut à se donner un élément θ de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{G}}}(f^*(\mathscr{E}), f^*(\mathscr{E}))$, qui correspond par adjonction à un élément δ de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{E}, f_*f^*(\mathscr{E}))$, où l'on a noté f la projection $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$.

Soient $m : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ la multiplication, δ_{G} le morphisme $\mathscr{O}_{\mathrm{G}} \to m_*(\mathscr{O}_{\mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{G}})$, et ϕ la projection $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ (qui égale $f \circ m$). Il est commode de noter $\boxtimes$ le produit tensoriel « externe », on obtient ainsi un morphisme

$$\mathrm{id}_{\mathscr{E}} \boxtimes \delta_{\mathrm{G}} : \quad f^*(\mathscr{E}) = \mathscr{E} \boxtimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathscr{E} \boxtimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} m_*(\mathscr{O}_{\mathrm{G}\times\mathrm{G}})$$

et par abus de notation, on notera encore $\mathrm{id}_{\mathscr{E}} \boxtimes \delta_{\mathrm{G}}$ la composée du morphisme précédent avec le morphisme canonique $\mathscr{E} \boxtimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} m_*(\mathscr{O}_{\mathrm{G}\times\mathrm{G}}) \to m_*m^*f^*(\mathscr{E}) = m_*\phi^*(\mathscr{E})$.

D'autre part, désignons par $h : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ une seconde copie de $f : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ et considérons le diagramme commutatif suivant, où p, q désignent les deux projections :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "\phi"] & \mathrm{G} \arrow[d, "h"] \\
\mathrm{G} \arrow[r, "f"'] & \mathrm{S}.
\end{tikzcd}$$

Notant encore δ le morphisme $\mathscr{E} \to h_*h^*(\mathscr{E})$, on obtient le morphisme

$$\delta \boxtimes \mathrm{id}_{\mathscr{O}_{\mathrm{G}}} : \quad f^*(\mathscr{E}) = \mathscr{E} \boxtimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{G}} \longrightarrow h_*h^*(\mathscr{E}) \boxtimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{G}} = f^*h_*h^*(\mathscr{E})$$

et par abus nous noterons encore $\delta \boxtimes \mathrm{id}_{\mathscr{O}_{\mathrm{G}}}$ la composée de ce morphisme avec le morphisme canonique $f^*h_*h^*(\mathscr{E}) \to p_*\phi^*(\mathscr{E})$.

Alors la condition que ρ soit compatible à la multiplication équivaut à dire que, pour tout ouvert U de S, le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$(1) \qquad \begin{tikzcd}
\Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{E}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & \Gamma(\mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}, \mathscr{E} \boxtimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{G}}) \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathscr{E}} \boxtimes \delta_{\mathrm{G}}"] \\
\Gamma(\mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}, \mathscr{E} \boxtimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{G}}) \arrow[r, "\delta \boxtimes \mathrm{id}_{\mathscr{O}_{\mathrm{G}}}"] & \Gamma(\mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}, \mathscr{E} \boxtimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{G}} \boxtimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{G}}).
\end{tikzcd}$$

Par ailleurs, la section unité $\varepsilon : \mathrm{S} \to \mathrm{G}$ induit un morphisme u de $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}$ vers $\varepsilon_*\varepsilon^*(\mathscr{O}_{\mathrm{G}}) = \varepsilon_*(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$, et la condition que ρ préserve les éléments unité équivaut à

[110] N.D.E. : On a détaillé 11.6, et mis en évidence les résultats obtenus sous la forme de la Proposition 11.6.1.

la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(\mathrm{U},\mathscr{E}) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & \Gamma(\mathrm{U}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{G},\mathscr{E}\boxtimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathscr{O}_{\mathrm{G}}) \arrow[dl, "\mathrm{id}_{\mathscr{E}}\boxtimes u"] \\
& \Gamma(\mathrm{U}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{S},\mathscr{E}\boxtimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathscr{O}_{\mathrm{S}}). &
\end{tikzcd} \tag{2}$$

On voit donc que se donner sur $\mathscr{E}$ une structure de G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module équivaut à se donner un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules $\delta : \mathscr{E} \to f_*f^*(\mathscr{E})$ vérifiant les conditions (1) et (2) ci-dessus, et dans ce cas le morphisme $\theta : f^*(\mathscr{E}) \to f^*(\mathscr{E})$, déduit de δ par adjonction, est un isomorphisme (car il correspond à l'isomorphisme $\mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathbf{W}(\mathscr{E}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathbf{W}(\mathscr{E})$ défini ensemblistement par $(g,x)\mapsto(g,gx)$, voir aussi I, 6.5.4).

Supposons maintenant que G soit *plat, quasi-compact et quasi-séparé* sur S, et que $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ soit un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module *plat* ; alors, d'après 11.1 (c), le morphisme canonique $\mathscr{A}(\mathrm{G})\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathscr{A}(\mathrm{G}) \to \mathscr{A}(\mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{G})$ est un isomorphisme, et le morphisme $\delta_{\mathrm{G}} : \mathscr{A}(\mathrm{G}) \to \mathscr{A}(\mathrm{G})\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathscr{A}(\mathrm{G})$ sera noté Δ.

Si de plus $\mathscr{E}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathscr{A}(\mathrm{G}) = f_*f^*(\mathscr{E})$ (ce qui est le cas, d'après 11.5, si $\mathrm{G}\to\mathrm{S}$ est affine, ou si $\mathscr{E}$ est plat sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$), on obtient que les conditions (1) et (2) équivalent aux conditions ci-dessous, qui expriment que $\delta : \mathscr{E} \to \mathscr{E}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathscr{A}(\mathrm{G})$ fait de $\mathscr{E}$ un $\mathscr{A}(\mathrm{G})$-comodule à droite (cf. I 4.7.2) :

(CM 1) Posant $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\mathrm{G})$, le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & \mathscr{E}\otimes\mathscr{A} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathscr{E}}\otimes\Delta"] \\
\mathscr{E}\otimes\mathscr{A} \arrow[r, "\delta\otimes\mathrm{id}_{\mathscr{A}}"] & \mathscr{E}\otimes\mathscr{A}\otimes\mathscr{A}.
\end{tikzcd}$$

(CM 2) Notant $\eta : \mathscr{A} \to \mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ le morphisme $\mathscr{A}(\varepsilon)$, le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E} \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & \mathscr{E}\otimes\mathscr{A} \arrow[dl, "\mathrm{id}_{\mathscr{E}}\otimes\eta"] \\
& \mathscr{E}\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{S}}. &
\end{tikzcd}$$

Remarque 11.6.A. — Rappelons qu'on note $\mathbb{V}(\mathscr{E})$ la fibration vectorielle sur S qui représente le foncteur $\mathbf{V}(\mathscr{E})$, i.e. pour tout $\mathrm{S}'\to\mathrm{S}$, $\mathbb{V}(\mathscr{E})(\mathrm{S}') = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}}(\mathscr{E}_{\mathrm{S}'},\mathscr{O}_{\mathrm{S}'})$. Comme on a, d'après I, 4.6.2, un *anti-isomorphisme* de S-foncteurs en monoïdes $\underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{E})) \simeq \underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbb{V}(\mathscr{E}))$, on voit que si $\mathscr{E}$ est un G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module à gauche, on a une action à droite $\mu : \mathbb{V}(\mathscr{E})\times_{\mathrm{S}}\mathrm{G} \to \mathbb{V}(\mathscr{E})$ de G sur $\mathbb{V}(\mathscr{E})$, définie ensemblistement par $(\phi g)(x) = \phi(gx)$, pour tout $g\in\mathrm{G}(\mathrm{S}')$, $x\in\Gamma(\mathrm{S}',\mathscr{E}_{\mathrm{S}'})$ et $\phi\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}}(\mathscr{E}_{\mathrm{S}'},\mathscr{O}_{\mathrm{S}'})$. On
400 obtient donc des diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{V}(\mathscr{E}) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \arrow[r, "\mu\times\mathrm{id}_{\mathrm{G}}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbb{V}(\mathscr{E})}\times m"'] & \mathbb{V}(\mathscr{E}) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \arrow[d, "\mu"] \\
\mathbb{V}(\mathscr{E}) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \arrow[r, "\mu"] & \mathbb{V}(\mathscr{E})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{V}(\mathscr{E}) & \mathbb{V}(\mathscr{E}) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \arrow[l, "\mu"'] \\
& \mathbb{V}(\mathscr{E}) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}. \arrow[ul, "\simeq"] \arrow[u, "\mathrm{id}_{\mathbb{V}(\mathscr{E})}\times\varepsilon"']
\end{tikzcd}$$

Lorsque G est plat, quasi-compact et quasi-séparé sur S, que $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module plat, et que l'une des conditions de 11.5 est vérifiée, on retrouve de même les conditions (CM 1) et (CM2).

Par conséquent, on a obtenu :

Proposition 11.6.1. — *Soit* G *un* S*-groupe* plat, quasi-compact et quasi-séparé *sur* S, *tel que* $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ *soit un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module* plat, *et soit* $\mathscr{E}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module quasi-cohérent.*

(i) *Il revient au même de se donner une structure de* $\mathscr{A}(\mathrm{G})$*-comodule* $\delta : \mathscr{E} \to \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G})$ *ou une structure de* G_{af}*-*$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module sur* $\mathscr{E}$ (*i.e. une opération* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-linéaire de* G_{af} *sur* $\mathscr{E}$). *Par composition avec le morphisme de* S*-groupes* $\mathrm{G} \to \mathrm{G}_{\mathrm{af}}$, *ceci définit une structure de* G*-*$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module sur* $\mathscr{E}$.

(ii) *Si de plus* $\mathscr{E}$ *est* plat, *toute opération* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-linéaire de* G *sur* $\mathscr{E}$ *se factorise à travers* G_{af} *et correspond à une unique structure de* $\mathscr{A}(\mathrm{G})$*-comodule sur* $\mathscr{E}$.

Lemme 11.7. — *Soit* G *un* S*-groupe* plat, quasi-compact et quasi-séparé *sur* S, *tel que* $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\mathrm{G})$ *soit un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module* plat. *Soient* $\mathscr{E}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module quasi-cohérent,* $\delta : \mathscr{E} \to \mathscr{E} \otimes \mathscr{A}$ *une structure de* $\mathscr{A}$*-comodule, et* $\rho : \mathrm{G} \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{E}))$ *l'opération de* G *sur* $\mathscr{E}$ *associée.* 401

Soit $\mathscr{E}_0$ *un sous-*$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module quasi-cohérent de* $\mathscr{E}$ *tel que la restriction* δ_0 *de* μ *à* $\mathscr{E}_0$ *se factorise à travers* $\mathscr{E}_0 \to \mathscr{E}_0 \otimes \mathscr{A}$, *i.e. tel qu'on ait un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E}_0 \arrow[r, hook] \arrow[d, "\delta_0"'] & \mathscr{E} \arrow[d, "\delta"] \\
\mathscr{E}_0 \otimes \mathscr{A} \arrow[r, hook] & \mathscr{E} \otimes \mathscr{A}
\end{tikzcd} \quad .$$

(*N. B. Le morphisme* $\mathscr{E}_0 \otimes \mathscr{A} \to \mathscr{E} \otimes \mathscr{A}$ *est injectif, puisque* $\mathscr{A}$ *est plat sur* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$.)

Alors δ_0 *fait de* $\mathscr{E}_0$ *un* $\mathscr{A}(\mathrm{G})$*-comodule, donc définit une opération* ρ_0 *de* G *sur* $\mathscr{E}_0$ (qu'on appellera *opération induite* sur $\mathscr{E}_0$ par ρ, et on dira que $\mathscr{E}_0$ est *stable* sous ρ).

Cela résulte immédiatement des définitions et de 11.6. On remarquera cependant qu'en général l'application canonique $\mathbf{W}(\mathscr{E}_0) \to \mathbf{W}(\mathscr{E})$ n'est pas un monomorphisme.

Remarque 11.7.bis. — [(111)] Soient G un S-groupe *plat* et $\mathscr{E}$ un G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent. Notons f le morphisme $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$ et δ le morphisme $\mathscr{E} \to f_*f^*(\mathscr{E})$ défini en 11.6. Soit $\mathscr{E}_0$ un sous-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent de $\mathscr{E}$; comme f est plat, alors $f_*f^*(\mathscr{E}_0)$ est un sous-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module de $f_*f^*(\mathscr{E})$, et de même pour $\phi = f \times f$. Par conséquent, si

[(111)] N.D.E. : On a ajouté cette remarque, qui généralise 11.7 et sera utile en 11.10.bis.

la restriction δ_0 de δ à $\mathscr{E}_0$ se factorise à travers $f_*f^*(\mathscr{E}_0)$, alors elle fait de $\mathscr{E}_0$ un G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module. Dans ce cas, on dira que $\mathscr{E}_0$ est un sous-module G-*stable* de $\mathscr{E}$.

Définition 11.8.0. — [112] Soit S un schéma. Une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-*cogèbre* est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module $\mathscr{C}$ muni de deux morphismes de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules $\Delta : \mathscr{C} \to \mathscr{C} \otimes \mathscr{C}$ et $\varepsilon : \mathscr{C} \to \mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, vérifiant les deux axiomes suivants (cf. I 4.2) :

(CO 1) Δ *est co-associatif* : le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{C} \otimes \mathscr{C} \arrow[dr, "\mathrm{id} \otimes \Delta"] & \\ \mathscr{C} \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & \mathscr{C} \otimes \mathscr{C} \otimes \mathscr{C} \\ & \mathscr{C} \otimes \mathscr{C} \arrow[ur, "\Delta \otimes \mathrm{id}"'] & \end{tikzcd}$$

(CO 2) : ε est une *coÃ¼nité*, i.e. les deux composés suivants sont l'identité

$$\mathscr{C} \xrightarrow{\Delta} \mathscr{C} \otimes \mathscr{C} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \varepsilon} \mathscr{C} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{C} \quad ,$$
$$\mathscr{C} \xrightarrow{\Delta} \mathscr{C} \otimes \mathscr{C} \xrightarrow{\varepsilon \otimes \mathrm{id}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \otimes \mathscr{C} \xrightarrow{\sim} \mathscr{C} \quad .$$

Un $\mathscr{C}$-*comodule* (à droite) est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module $\mathscr{E}$ muni d'un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules $\mu : \mathscr{E} \to \mathscr{E} \otimes \mathscr{C}$ vérifiant les axiomes (CM 1) et (CM 2) de 11.6.

On dira que $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{E}$) est une cogèbre quasi-cohérente (resp. un comodule quasi-cohérent) si c'est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent.

Soient A un anneau commutatif et C une A-cogèbre, alors $\mathrm{C}^{\vee} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{C}, \mathrm{A})$ est une A-algèbre. On notera ev l'application naturelle d'évaluation $\mathrm{C} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C}^{\vee} \to \mathrm{A}$.

Lemme 11.8. — *Soient* C *une* A-*cogèbre,* V *un* C-*comodule,* M *un sous*-A-*module de* V. *On suppose que* C *est un* A-*module* projectif. [113] *Soit* $c(\mathrm{M})$ *l'image du morphisme de* A-*modules*

$$\theta : \quad \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C}^{\vee} \xrightarrow{\mu \otimes \mathrm{id}} \mathrm{V} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C}^{\vee} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{ev}} \mathrm{V}.$$

Alors, $c(\mathrm{M})$ *est le* plus petit sous-comodule de V contenant M*, et est un* A-*module* de type fini *si* M *l'est. On dira que* $c(\mathrm{M})$ *est le sous-comodule* engendré *par* M.

De plus, pour tout morphisme d'anneaux $\mathrm{A} \to \mathrm{A}'$*, si on note* M' *l'image de* $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}'$ *dans* $\mathrm{V}' = \mathrm{V} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}'$*, alors* $c(\mathrm{M}')$ *est l'image de* $c(\mathrm{M}) \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}'$ *dans* V'*, donc :* « la formation de $c(\mathrm{M})$ commute au changement de base ».

---

[112] N.D.E. : Les énoncés 11.8 et 11.9 portant uniquement sur la notion de comodule sur une cogèbre, on a introduit la définition 11.8.0 et reformulé 11.8 et 11.9 en conséquence.

[113] N.D.E. : Dans l'original, il est supposé que C est un A-module *libre*, la généralisation au cas où C est un A-module projectif, signalée par J.-P. Serre, étant mentionnée dans la remarque 11.10.1. On a inclus cette généralisation ici et dans 11.9, et détaillé les démonstrations en conséquence.

D'abord, $\mathrm{M} \subset c(\mathrm{M})$ d'après (CM 2), et si N est un sous-comodule de V contenant M, on a $\mu(\mathrm{M}) \subset \mathrm{N} \otimes \mathrm{C}$ et donc $c(\mathrm{M}) \subset \mathrm{N}$.

Par hypothèse, C est facteur direct d'un A-module libre L, de base $(e_i)_{i\in \mathrm{I}}$. Notons φ_i la restriction à C de la forme linéaire e_i^*, définie par $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$. Soit $x \in \mathrm{M}$. On peut écrire :

$$\mu(x) = \sum_{i\in \mathrm{J}} x_i \otimes e_i, \tag{1}$$

où $x_i \in \mathrm{V}$ et J est un sous-ensemble fini de I. Alors $x_i = \theta(x\otimes\varphi_i)$ appartient à $c(\mathrm{A}x)$, et l'on a donc $c(\mathrm{A}x) = \sum_{i\in \mathrm{J}} \mathrm{A}x_i$. Comme C est facteur direct de L, disons $\mathrm{L} = \mathrm{C}\oplus\mathrm{R}$, d'où $\mathrm{V} \otimes \mathrm{L} = (\mathrm{V} \otimes \mathrm{C}) \oplus (\mathrm{V} \otimes \mathrm{R})$, on obtient que

$$(c(\mathrm{A}x) \otimes \mathrm{L}) \bigcap (\mathrm{V} \otimes \mathrm{C}) = c(\mathrm{A}x) \otimes \mathrm{C}.$$

Par conséquent, $\mu(x)$ peut aussi s'écrire sous la forme

$$\mu(x) = \sum_{j\in \mathrm{J}} x_j \otimes b_j, \tag{2}$$

avec $b_j \in \mathrm{C}$. On peut écrire $\Delta(b_j) = \sum_{i\in \mathrm{I}} b_{ij} \otimes e_i$, avec $b_{ij} \in \mathrm{C}$. Alors, en appliquant $\mu\otimes\mathrm{id}$ à (1) (resp. $\mathrm{id}\otimes\Delta$ à (2)) et en utilisant l'axiome (CM 1), on obtient, pour tout $i \in \mathrm{J}$:

$$\mu(x_i) = \sum_{j\in \mathrm{J}} x_j \otimes b_{ij} \in c(\mathrm{A}x) \otimes \mathrm{C}.$$

Ceci montre que $c(\mathrm{M})$ est un sous-comodule de V, et c'est donc le plus petit sous-comodule de V contenant M.

Il est clair que $c(\mathrm{M})$ est un A-module de type fini si M l'est : si $\mathrm{M} = \mathrm{A}x_1+\cdots+\mathrm{A}x_n$, et $\mu(x_k) = \sum_i x_{ik} \otimes e_i$, alors $c(\mathrm{M})$ est engendré par les x_{ik}, pour $k = 1,\dots,n$ et i parcourant un sous-ensemble fini de I.

Enfin, soit $\mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ un morphisme d'anneaux et soit M' l'image de $\mathrm{M} \otimes \mathrm{A}'$ dans $\mathrm{V}' = \mathrm{V}\otimes\mathrm{A}'$. Alors $c(\mathrm{M}')$ (resp. l'image de $c(\mathrm{M})\otimes\mathrm{A}'$ dans V') est l'image du morphisme θ' ci-dessous (resp. du composé $\theta' \circ \tau$) :

$$\mathrm{M} \otimes \mathrm{A}' \otimes \mathrm{C}^\vee \xrightarrow{\ \tau\ } \mathrm{M} \otimes \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{C}, \mathrm{A}') \xrightarrow{\ \theta'\ } \mathrm{V}'.$$

Or, ces deux morphismes ont même image. En effet, soient $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{C}, \mathrm{A}')$ et $x \in \mathrm{M}$. Posons $\mu(x) = \sum_{i\in \mathrm{J}} x_i \otimes e_i$. Alors

$$\theta'(x \otimes \psi) = \sum_{i\in \mathrm{J}} \psi(e_i)x_i$$

est l'image par $\theta' \circ \tau$ de l'élément $\sum_{i\in \mathrm{J}} x \otimes \psi(e_i) \otimes \varphi_i$ de $\mathrm{M} \otimes \mathrm{A}' \otimes \mathrm{C}^\vee$. Ceci prouve le lemme.

Par ailleurs, on a la proposition suivante :

Proposition 11.8.bis. — [114] *Soient* A *un anneau* noethérien*,* C *une* A-*cogèbre* plate *sur* A*,* V *un* C-*comodule, et* M *un sous-*A-*module* de type fini *de* V*. Alors il existe un sous-comodule* W *de* V*, de type fini sur* A*, contenant* M*.*

[114] N.D.E. : On a ajouté cette proposition, tirée de [**Se68**], § 1.5, Prop. 2.

En effet, comme M est de type fini, il en est de même de $\Delta_V(M)$, donc il existe un sous-A-module de type fini M′ de V tel que $\Delta_V(M) \subset M' \otimes_A C$. Soient π la projection $V \to V/M'$ et $\overline{\Delta}_V = (\pi \otimes \mathrm{id}_C)\Delta_V$, et soit

$$W = \{x \in V \mid \Delta_V(x) \in M' \otimes_A C\} = \mathrm{Ker}\, \overline{\Delta}_V\, ;$$

c'est un sous-A-module de V contenant M et contenu dans M′ (puisque $x = (\mathrm{id}_V \otimes \varepsilon)\Delta_V(x))$, donc de type fini sur A. De plus, $(\overline{\Delta}_V \otimes \mathrm{id}_C)\Delta_V = (\pi \otimes \Delta_C)\Delta_V$ s'annule sur W, i.e. $\Delta_V(W)$ est contenu dans le noyau K de $(\overline{\Delta}_V \otimes \mathrm{id}_C)$. Mais comme C est plate sur A, on a $K = W \otimes C$, donc W est un sous-comodule de V.

Lemme 11.8.1. — [115] *Soient* C *une* A*-cogèbre,* V *un* C*-comodule,* M *un sous-*A*-module de* V*, et* $f : A \to A'$ *un morphisme d'anneaux* fidèlement plat*. On suppose que* $C' = C \otimes A'$ *est un* A′*-module* projectif.

(i) *Alors il existe un* plus petit sous-comodule $t(M)$ *de* V contenant M*, et* $t(M)$ *est un* A*-module* de type fini *si* M *l'est. De plus, «* la formation de $t(M)$ commute au changement de base *».*

(ii) *Plus précisément,* C *est un* A*-module projectif, et l'on a* $t(M) = c(M)$*.*

Démonstration. (ii) D'après [**RG71**] (voir la proposition 11.8.2 ci-dessous), C est un A-module projectif. On peut donc appliquer le lemme 11.8 : $c(M)$ est le plus petit sous-comodule de V contenant M, c'est un A-module de type fini si M l'est, et sa formation commute au changement de base.

Pour éviter un anachronisme ([**RG71**] étant postérieur à SGA 3), esquissons une démonstration directe du point (i). Comme $A \to A'$ est plat, $M' = M \otimes A'$ est un sous-A′-module de $V' = V \otimes A'$, et, puisque C′ est un A′-module projectif, $c(M')$ est le plus petit sous-comodule de V′ contenant M′. Notons $V' \otimes A'$ et $A' \otimes V'$ les deux structures de $A' \otimes A'$-comodule sur $V'' = V' \otimes_{A'} (A' \otimes A')$ obtenues par les deux changements de base $A' \rightrightarrows A' \otimes A'$, $a' \mapsto a' \otimes 1$ et $a' \mapsto 1 \otimes a'$. Le A′-comodule V′ est muni d'un isomorphisme de $A' \otimes A'$-comodules $\phi : V' \otimes A' \xrightarrow{\sim} A' \otimes V'$, $(x \otimes a') \otimes b' \mapsto b' \otimes (x \otimes a')$, qui est une donnée de descente, i.e. , qui vérifie $\phi_{31} = \phi_{32} \circ \phi_{21}$.

Comme $M' = M \otimes A'$, alors ϕ envoie $M' \otimes A'$ sur $A' \otimes M'$, et donc $c(M' \otimes A')$ sur $c(A' \otimes M')$. Comme la formation de $c(M')$ commute au changement de base, on a $c(M' \otimes A') = c(M') \otimes A'$ et $c(A' \otimes M') = A' \otimes c(M')$. On a donc

$$\phi(c(M') \otimes A') = A' \otimes c(M')$$

et il en résulte que ϕ munit $c(M')$ d'une donnée de descente. Par descente (fpqc), il existe un unique sous-comodule $t(M)$ de V tel que $c(M') = t(M) \otimes A'$, et $t(M)$ contient M puisque $t(M) \otimes A'$ contient M′. De plus, si N est un sous-comodule de V contenant M, alors N contient $t(M)$, puisque $N \otimes A'$ contient $c(M') = t(M) \otimes A'$. Donc $t(M)$ est le plus petit sous-comodule de V contenant M.

Enfin, soit $A \to B$ un morphisme d'anneaux. Soit $B' = B \otimes A'$ et soit M_B (resp. $M'_{B'}$) l'image de $M \otimes B$ dans $V_B = V \otimes B$ (resp. de $M' \otimes_{A'} B'$ dans $V \otimes B'$) ; alors $M_B \otimes_B B' =$

[115] N.D.E. : On a ajouté ce lemme, qui est utilisé dans la démonstration de 11.9.

$M'_{B'}$. D'une part, la construction précédente, appliquée à C_B et au morphisme $B \to B'$, donne :
$$c(M_B \otimes_B B') = t(M_B) \otimes_B B' = t(M_B) \otimes A'.$$
D'autre part, comme la formation de $c(M')$ commute au changement de base, $c(M'_{B'})$ est l'image dans $V' \otimes_{A'} B' = V \otimes B \otimes A'$ de
$$c(M') \otimes_{A'} B' = t(M) \otimes B \otimes A'.$$
Il en résulte que $t(M_B)$ est l'image dans V_B de $t(M) \otimes B$.

Proposition 11.8.2 **(**Gruson–Raynaud**). —** *Soit* $f : A \to A'$ *un morphisme* fidèlement plat*, alors* f *«* descend la projectivité *», i.e. si* M *est un* A*-module et si* $M \otimes_A A'$ *est un* A'*-module projectif, alors* M *est un* A*-module projectif.*

En effet, d'après [**RG71**] II 2.5.1, f « descend la condition de Mittag-Leffler » donc, d'après *loc. cit.* II 3.1.3, f descend la projectivité. [116]

Proposition 11.9. **—** [117] *Soient* $\mathscr{C}$ *une* $\mathscr{O}_S$*-cogèbre,* $\mathscr{E}$ *un* $\mathscr{C}$*-comodule,* $\mathscr{F}$ *un sous-*$\mathscr{O}_S$*-module de* $\mathscr{E}$*, tous quasi-cohérents. On suppose donné un recouvrement de* S *par des ouverts affines* $U_\alpha = \operatorname{Spec} A_\alpha$ *, et pour chaque* α*, un morphisme d'anneaux* $A_\alpha \to A'_\alpha$ fidèlement plat *tel que* $\Gamma(U_\alpha, \mathscr{C}) \otimes_{A_\alpha} A'_\alpha$ *soit un* A'_α*-module* projectif. [(*)] 402

Il existe alors un plus petit sous-comodule quasi-cohérent $t(\mathscr{F})$ *de* $\mathscr{E}$ *contenant* $\mathscr{F}$*, et* $t(\mathscr{F})$ *est un* $\mathscr{O}_S$*-module de type fini si* $\mathscr{F}$ *l'est. De plus, pour tout changement de base* $S' \to S$*, si on note* $\mathscr{F}'$ *l'image de* $\mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_{S'}$ *dans* $\mathscr{E}' = \mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_{S'}$*, alors* $t(\mathscr{F}')$ *est l'image de* $t(\mathscr{F}) \otimes \mathscr{O}_{S'}$ *dans* $\mathscr{E}'$*, i.e. «* la formation de $t(\mathscr{F})$ commute au changement de base *».*

Démonstration. [117] Pour chaque α, le $\mathscr{O}_{U_\alpha}$-module $\mathscr{T}_\alpha$ associé au A_α-module $T_\alpha = t(\Gamma(U_\alpha, \mathscr{F}))$ est, d'après 11.8.1 (i), le plus petit sous-comodule quasi-cohérent de $\mathscr{E}|_{U_\alpha}$ contenant $\mathscr{F}|_{U_\alpha}$, et est un $\mathscr{O}_{U_\alpha}$-module de type fini si $\mathscr{F}|_{U_\alpha}$ l'est.

Pour tout α, β, posons $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$. Comme la construction de $t(M)$ commute au changement de base, on a pour tout α, β des isomorphismes canoniques de $\mathscr{O}_{U_{\alpha\beta}}$-modules
$$\phi_{\alpha\beta} : \quad T_\beta \otimes_{A_\beta} \mathscr{O}_{U_{\alpha\beta}} \xrightarrow{\sim} T_\alpha \otimes_{A_\alpha} \mathscr{O}_{U_{\alpha\beta}}$$
qui vérifient la condition de cocycle $\phi'_{\alpha\gamma} = \phi'_{\alpha\beta} \circ \phi'_{\beta\gamma}$, où $\phi'_{\alpha\gamma}$ (resp. $\cdots$) désigne la restriction de $\phi_{\alpha\gamma}$ (resp. $\cdots$) à $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Par conséquent, les $\mathscr{T}_\alpha$ se recollent en un sous-comodule quasi-cohérent $t(\mathscr{F})$ de $\mathscr{E}$ contenant $\mathscr{F}$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que $t(\mathscr{F})$ est le plus petit

---

(*) C'est le cas par exemple lorsque $\mathscr{C} = \mathscr{A}(G)$, où G est un S-groupe réductif, comme nous le verrons dans l'Exp. XXII 5.7.8.

(116) N.D.E. : Signalons au passage que l'assertion II 2.5.2 de *loc. cit.*, plus générale que II 2.5.1, est corrigée dans l'article [**Gr73**] (ceci n'affectant pas le cas des morphismes fidèlement plats).

(117) N.D.E. : Comme signalé dans la N.D.E. (112), on a récrit l'énoncé pour une $\mathscr{O}_S$-cogèbre $\mathscr{C}$ (plutôt que pour un S-groupe G vérifiant les hypothèses indiquées dans le corollaire 11.10). D'autre part, on a détaillé la démonstration (l'original indiquait : « $(\cdots)$ la proposition est conséquence du lemme 11.8. »).

sous-comodule quasi-cohérent de $\mathscr{E}$ contenant $\mathscr{F}$, et que sa formation commute au changement de base.

Définition 11.9.1. — [118] Soient S un schéma et $\mathscr{P}$ un $\mathscr{O}_S$-module quasi-cohérent. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout ouvert affine U de S, $\Gamma(U, \mathscr{P})$ est un $\mathscr{O}_S(U)$-module projectif.

(ii) Il existe un recouvrement (U_α) de S par des ouverts affines, tel que chaque $\Gamma(U_\alpha, \mathscr{P})$ soit un $\mathscr{O}_S(U_\alpha)$-module projectif.

(iii) Il existe un recouvrement (U_α) de S par des ouverts affines, et des morphisme d'anneaux $A_\alpha = \mathscr{O}_S(U_\alpha) \to A'_\alpha$ *fidèlement plats*, tels que, pour chaque α, $\Gamma(U_\alpha, \mathscr{P}) \otimes_{A_\alpha} A'_\alpha$ soit un A'_α-module projectif.

En effet, il est clair que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii). Réciproquement, si (iii) est vérifié, 11.8.2 entraîne que chaque $\Gamma(U_\alpha, \mathscr{P})$ est un $\mathscr{O}_S(U_\alpha)$-module projectif, d'où (ii). Enfin, supposons (ii) vérifié et soit $V = \operatorname{Spec} A$ un ouvert affine arbitraire ; il est recouvert par un nombre fini d'ouverts affines $V_1, \dots, V_n$, où chaque $V_i = \operatorname{Spec} A_i$ est contenu dans au moins un $V \cap U_\alpha$, de sorte que $\Gamma(V_i, \mathscr{P})$ est un A_i-module projectif. Soit $A' = A_1 \times \cdots \times A_n$, alors $A \to A'$ est fidèlement plat et $\Gamma(V, \mathscr{P}) \otimes_A A'$ est un A'-module projectif. Donc, d'après 11.8.2, $\Gamma(V, \mathscr{P})$ est un A-module projectif.

Lorsque ces conditions équivalentes sont vérifiées, on dit que $\mathscr{P}$ est un $\mathscr{O}_S$-module *localement projectif.*

Corollaire 11.10. — *Soient* S *un schéma* quasi-compact et quasi-séparé, G *un* S-*groupe, et* ρ *une opération linéaire de* G *sur un* $\mathscr{O}_S$*-module quasi-cohérent* $\mathscr{E}$*. On suppose que :*

(i) G *vérifie l'une des conditions suivantes :*

a) G *est* affine et plat *sur* S*,*

b) G *est* plat, quasi-compact et quasi-séparé *sur* S*, et* $\mathscr{E}$ *est* plat *;*

(ii) $\mathscr{A}(G)$ *est un* $\mathscr{O}_S$*-module* localement projectif.

Alors $\mathscr{E}$ *est limite inductive d'une famille filtrante croissante de sous-*$\mathscr{O}_S$*-modules* quasi-cohérents de type fini *de* $\mathscr{E}$*,* stables *sous* G.

D'après l'hypothèse (i) et 11.6.1, $\mathscr{E}$ est muni d'une structure de $\mathscr{A}(G)$-comodule. D'autre part, comme S est quasi-compact et quasi-séparé, $\mathscr{E}$ est limite inductive de ses sous-modules quasi-cohérents de type fini (EGA I, 9.4.9 et EGA IV_1, 1.7.7). Par conséquent, le corollaire découle de la proposition 11.9, appliquée à la cogèbre $\mathscr{A}(G)$.

Par ailleurs, on a la proposition suivante :

[118] N.D.E. : On a ajouté cette définition, tirée de [**RG71**], bas de la p. 82. Ainsi, dans la proposition 11.9, l'hypothèse est que la cogèbre $\mathscr{C}$ soit un $\mathscr{O}_S$-module localement projectif, et l'on a utilisé cette terminologie dans le corollaire 11.10.

Proposition 11.10.bis. — [119] *Soient* S *un schéma* noethérien, G *un* S*-groupe* plat, quasi-compact et quasi-séparé *sur* S, $\mathscr{E}$ *un* G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module quasi-cohérent,* $\mathscr{M}$ *un sous-*$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module* cohérent *de* $\mathscr{E}$. *Alors* $\mathscr{M}$ *est contenu dans un sous-*$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module* cohérent stable sous G.

Démonstration. Notons f le morphisme $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$ et τ le morphisme d'adjonction $\mathscr{E} \to f_*f^*(\mathscr{E})$. D'après 11.6, la structure de G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module sur $\mathscr{E}$ est donnée par un automorphisme θ du $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}$-module $f^*(\mathscr{E})$, tel que le morphisme $\delta = \theta \circ \tau$ vérifie les conditions (1) et (2) de 11.6. (La situation envisagée dans [**Th87**] est plus générale, en ce que l'auteur considère un G-schéma X et un $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-module G-équivariant $\mathscr{E}$ (cf. Exp. I, Section 6) ; ici $\mathrm{X} = \mathrm{S}$ muni de l'action triviale de G.)

Comme S est noethérien, $\mathscr{E}$ est la limite inductive filtrante de ses sous-modules cohérents $\mathscr{F}_\alpha$ (cf. EGA I, 9.4.9). Alors $f^*(\mathscr{E})$ est la limite inductive filtrante des $f^*(\mathscr{F}_\alpha)$, qui sont des sous-modules de $f^*(\mathscr{E})$ puisque f est plat. Comme, de plus, f est quasi-compact et quasi-séparé alors, d'après 11.0, le $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module $f_*f^*(\mathscr{E})$ est quasi-cohérent et est la limite inductive filtrante des sous-modules quasi-cohérents $f_*f^*(\mathscr{F}_\alpha)$. Par conséquent, $\mathscr{E}$ est la limite inductive filtrante des sous-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules quasi-cohérents $\mathscr{E}_\alpha$, où $\mathscr{E}_\alpha$ désigne l'image réciproque par δ de $f_*f^*(\mathscr{F}_\alpha)$, i.e. le noyau du morphisme composé

$$\overline{\delta}_\alpha : \quad \mathscr{E} \xrightarrow{\ \delta\ } f_*f^*(\mathscr{E}) \longrightarrow f_*f^*(\mathscr{E}/\mathscr{F}_\alpha)\ .$$

Comme $\mathscr{M}$ est cohérent et S noethérien, toute suite croissante de sous-modules de $\mathscr{M}$ est stationnaire, donc $\mathscr{M}$ est contenu dans un certain $\mathscr{E}_\alpha$. Montrons que chaque $\mathscr{E}_\alpha$ est cohérent et G-stable.

Soit u le morphisme $f^*(\mathscr{E}) \to \varepsilon_*(\mathscr{E})$ correspondant par adjonction au morphisme identique de $\mathscr{E}$ vers $f_*\varepsilon_*(\mathscr{E}) = \mathscr{E}$, alors le morphisme composé

$$\mathscr{E} \xrightarrow{\ \tau\ } f_*f^*(\mathscr{E}) \xrightarrow{f_*(u)} f_*\varepsilon_*(\mathscr{E}) = \mathscr{E}$$

est l'identité (cf. 11.6 (2)). Comme on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E}_\alpha \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "i_\alpha"'] & f_*f^*(\mathscr{F}_\alpha) \arrow[r, "f_*(u)"] \arrow[d] & \mathscr{F}_\alpha \arrow[d, "j_\alpha"] \\
\mathscr{E} \arrow[r, "\tau"] & f_*f^*(\mathscr{E}) \arrow[r, "f_*(u)"] & \mathscr{E},
\end{tikzcd}$$

où i_α (resp. j_α) désigne l'inclusion de $\mathscr{E}_\alpha$ (resp. $\mathscr{F}_\alpha$) dans $\mathscr{E}$, on en déduit que i_α se factorise à travers j_α, i.e. $\mathscr{E}_\alpha$ est un sous-module de $\mathscr{F}_\alpha$, donc est cohérent.

[119] N.D.E. : On a ajouté cette proposition, qui est un cas particulier de [**Th87**], 1.4–1.5. L'auteur y fait référence à un argument de Deligne (cf. [**Kn71**], III Th. 1.1) ; on peut aussi noter la similarité avec l'argument de Serre ([**Se68**], Prop. 2) rappelé en 11.8.bis.

Montrons enfin que $\mathscr{E}_\alpha$ est G-stable (cf. 11.7.bis). Désignons par $h : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ une seconde copie de $f : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ et considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "\phi"] & \mathrm{G} \arrow[d, "h"] \\ \mathrm{G} \arrow[r, "f"'] & \mathrm{S}. \end{tikzcd}$$

Alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{E}_\alpha \longrightarrow \mathscr{E} \xrightarrow{\overline{\delta}_\alpha} h_*h^*(\mathscr{E}/\mathscr{F}_\alpha)$$

donne, puisque f est plat, la suite exacte

$$(\dagger) \qquad 0 \longrightarrow f_*f^*(\mathscr{E}_\alpha) \longrightarrow f_*f^*(\mathscr{E}) \xrightarrow{f_*f^*(\overline{\delta}_\alpha)} f_*f^*h_*h^*(\mathscr{E}/\mathscr{F}_\alpha)\ .$$

De plus, comme h est quasi-compact et quasi-séparé, et f plat, le morphisme canonique

$$f^*h_*h^*(\mathscr{E}/\mathscr{F}_\alpha) \longrightarrow p_*q^*h^*(\mathscr{E}/\mathscr{F}_\alpha) = p_*\phi^*(\mathscr{E}/\mathscr{F}_\alpha)$$

est un isomorphisme, de sorte que le terme de droite dans ($\dagger$) est $\phi_*\phi^*(\mathscr{E}/\mathscr{F}_\alpha)$. Reprenant les notations de 11.6 et notant π_α la projection $\mathscr{E} \to \mathscr{E}/\mathscr{F}_\alpha$, on obtient donc le diagramme commutatif ci-dessous, dont la ligne du bas est exacte :

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{E}_\alpha \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & f_*f^*(\mathscr{E}) \arrow[d, "f_*(f^*(\pi)\boxtimes\delta_{\mathrm{G}})"] \\ f_*f^*(\mathscr{E}_\alpha) \arrow[r] & f_*f^*(\mathscr{E}) \arrow[r, "f_*f^*(\overline{\delta}_\alpha)"] & \phi_*\phi^*(\mathscr{E}/\mathscr{F}_\alpha) \end{tikzcd}$$

et comme $f_*(f^*(\pi) \boxtimes \delta_{\mathrm{G}}) \circ \delta$ s'annule sur $\mathscr{E}_\alpha$, il en résulte que δ envoie $\mathscr{E}_\alpha$ dans $f_*f^*(\mathscr{E}_\alpha)$, i.e. que $\mathscr{E}_\alpha$ est G-stable. La proposition est démontrée.

403 ***Remarque 11.10.1.*** — [120] Dans 11.8, il n'est pas suffisant de supposer que C soit un A-module *plat*, même si A est un anneau principal. En effet, on a les contre-exemples suivants, qui nous ont été signalés (indépendamment) par O. Gabber et J.-P. Serre.

(a) Soient $(\mathrm{A}, \mathfrak{m})$ un anneau de valuation discrète, K son corps des fractions, et G le A-groupe « extension par zéro » du K-groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\mathrm{K}}$. Alors le groupe constant $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\mathrm{A}}$, et donc aussi son sous-groupe G, agit sur le A-module libre V de base v_1, v_2 en échangeant v_1 et v_2. Alors $\mathrm{A}v_1$ n'est pas un sous-G-module de V, mais c'est l'intersection des sous-G-modules $\mathrm{A}v_1 + \mathfrak{m}^n v_2$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Donc il n'existe pas de plus petit sous-G-module de V contenant v_1.

(b) Soit A un anneau intègre, distinct de son corps des fractions K, et soit G le A-groupe affine et plat correspondant à l'algèbre de Hopf

$$\mathscr{A}(\mathrm{G}) = \{\mathrm{P} \in \mathrm{K}[\mathrm{T}] \mid \mathrm{P}(0) \in \mathrm{A}\},$$

[120] N.D.E. : La première partie de la remarque 11.10.1 originelle a été incorporée dans 11.8 et 11.9 (en remplaçant « libre » par « projectif ») ; les contre-exemples ci-dessous corrigent la seconde partie.

la comultiplication, resp. la coÃ¼nité et l'antipode, étant définies par $\Delta(\mathrm{T}) = \mathrm{T}\otimes 1 + 1\otimes \mathrm{T}$, resp. $\varepsilon(\mathrm{T}) = 0$ et $\tau(\mathrm{T}) = -\mathrm{T}$. (N. B. On a donc $\mathrm{G}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{K} = \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{K}}$.)

Soient V le A-module libre $\mathrm{A}v_1 \oplus \mathrm{A}v_2$ et u l'endomorphisme de V défini par $u(v_1) = v_2$, $u(v_2) = 0$, de sorte que $u^2 = 0$. Alors V est muni d'une structure de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$-comodule, définie par

$$\mu(m) = 1\otimes m + \mathrm{T}\otimes u(m).$$

Les sous-G-modules de V contenant v_1 sont exactement les sous-A-modules de la forme $\mathrm{A}v_1 \oplus \mathrm{I}v_2$, pour I idéal non nul de A ; leur intersection est $\mathrm{A}v_1$, qui n'est pas un sous-G-module. Donc il n'existe pas de plus petit sous-G-module de V contenant v_1. (Remarquons de plus que $\mathrm{C} = \mathrm{A}\oplus \mathrm{K}\cdot\mathrm{T}$ est une sous-cogèbre de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$, plate sur A, et que la coaction $\mu : \mathrm{V}\to \mathrm{V}\otimes\mathscr{A}(\mathrm{G})$ se factorise par $\mathrm{V}\otimes\mathrm{C}$, donc on obtient aussi un contre-exemple pour la cogèbre « très simple » C.)

Enfin, remarquons que les deux exemples précédents sont des cas particuliers de la construction suivante. Soit A un anneau intègre, distinct de son corps des fractions K, soit B une A-algèbre de Hopf, libre sur A. Notons $\varepsilon : \mathrm{B}\to\mathrm{A}$ l'augmentation de B et $\mathrm{I} = \mathrm{Ker}(\varepsilon)$ l'idéal d'augmentation. Comme $\mathrm{B} = \mathrm{A}\cdot 1 \oplus \mathrm{I}$, on voit facilement que $\mathrm{B}' = \{b\in\mathrm{B}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{K} \mid \varepsilon(b)\in\mathrm{A}\}$ est une sous-algèbre de Hopf de B_{K}. Si V est un B-comodule, libre de base $(v_1,\dots,v_n)$ comme A-module, et si $\mu_{\mathrm{V}}(v_1)\neq v_1\otimes 1$, alors $\mathrm{A}v_1$ n'est pas un sous-comodule de V mais c'est l'intersection des sous-comodules $\mathrm{A}v_1 + \mathrm{I}\cdot\mathrm{V}$, pour I parcourant les idéaux non nuls de A. Donc il n'existe pas de plus petit sous-comodule de V contenant v_1.

Proposition 11.11. — *Soit* G *un groupe algébrique sur le corps* k. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est affine.*

(ii) G *est quasi-affine.*

(iii) G *opère fidèlement sur un* k*-schéma* X *quasi-affine.*

(iv) G *opère linéairement et fidèlement sur un* k*-espace vectoriel* (*pas nécessairement de dimension finie*).

(v) G *est isomorphe à un sous-groupe fermé d'un groupe* $\mathrm{GL}(n)_k$.

Démonstration. On a (i) $\Rightarrow$ (ii) trivialement, et (ii) $\Rightarrow$ (iii), car G opère fidèlement sur lui-même par translations.

Supposons que G opère fidèlement *à droite* sur un k-schéma X quasi-affine. [121] Comme X est quasi-affine, il est séparé et quasi-compact [122]. De même, G est séparé ($\mathrm{VI_A}$ 0.3) et quasi-compact (car de type fini sur k). Donc, d'après 11.1 (c), on a des isomorphismes canoniques :

$$\mathscr{O}(\mathrm{X}\times\mathrm{G}) = \mathscr{O}(\mathrm{X})\otimes\mathscr{O}(\mathrm{G}) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{O}(\mathrm{X}\times\mathrm{G}\times\mathrm{G}) = \mathscr{O}(\mathrm{X})\otimes\mathscr{O}(\mathrm{G})\otimes\mathscr{O}(\mathrm{G}).$$

[121] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit ; d'autre part, on a choisi de faire opérer G *à droite* sur X afin d'obtenir une opération linéaire de G à gauche sur $\mathscr{O}(\mathrm{X})$.

[122] N.D.E. : Rappelons qu'un k-schéma X est dit *quasi-affine* s'il est isomorphe à un ouvert *quasi-compact* d'un k-schéma affine (EGA II, 5.1.1).

On en déduit que le morphisme $\mu : \mathscr{O}(\mathrm{X}) \to \mathscr{O}(\mathrm{X}) \otimes \mathscr{O}(\mathrm{G})$ induit par le morphisme $\mathrm{X} \times \mathrm{G} \to \mathrm{X}$ munit $\mathscr{O}(\mathrm{X})$ d'une structure de $\mathscr{O}(\mathrm{G})$-comodule à droite, i.e. G opère linéairement à gauche sur la k-algèbre $\mathscr{O}(\mathrm{X})$. Par conséquent, G opère aussi à droite
404 sur l'enveloppe affine $\mathrm{X}_{\mathrm{af}} = \operatorname{Spec} \mathscr{O}(\mathrm{X})$ de X, et le morphisme canonique $\mathrm{X} \to \mathrm{X}_{\mathrm{af}}$ est G-équivariant.

De plus, X étant quasi-affine, $\mathrm{X} \to \mathrm{X}_{\mathrm{af}}$ est une immersion ouverte (EGA II, 5.1.2), donc a fortiori G opère fidèlement sur X_{af}. On obtient donc que l'opération linéaire (à gauche) de G sur la k-algèbre $\mathscr{O}(\mathrm{X}) = \mathscr{O}(\mathrm{X}_{\mathrm{af}})$ est fidèle. Ceci prouve l'implication (iii) $\Rightarrow$ (iv).

Supposons maintenant que G opère fidèlement sur un k-espace vectoriel V. Alors, en vertu de 11.10, V est limite inductive de sous-espaces vectoriels V_i de dimension finie, stables sous l'action de G. Si K_i est le noyau de l'action induite de G sur V_i, i.e. du morphisme $\mathrm{G} \to \underline{\mathrm{Aut}}(\mathrm{V}_i)$, alors K_i est un sous-schéma fermé de G, et l'hypothèse que G opère fidèlement s'exprime par le fait que l'intersection des K_i est le sous-groupe unité de G. Comme G est noethérien, il s'ensuit que l'un des K_i est déjà réduit au groupe unité, donc que $\mathrm{G} \to \underline{\mathrm{Aut}}(\mathrm{V}_i)$ est un monomorphisme. C'est donc une immersion fermée en vertu de 1.4.2, ce qui prouve que (iv) $\Rightarrow$ (v). Comme (v) $\Rightarrow$ (i) trivialement, cela prouve 11.11.

Remarque 11.11.1. — On peut généraliser 11.11 comme suit. Soient S un schéma localement noethérien régulier de dimension $\leqslant 1$, et G un schéma en groupes plat, quasi-compact et quasi-séparé sur S. (Dans ce cas, $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module sans torsion, donc plat).

(a) On a alors l'équivalence des conditions suivantes : [123]

(i) G est affine sur S.

(ii) G est quasi-affine sur S.

(iii) G opère fidèlement sur un S-schéma quasi-affine et plat.

(iv) G opère linéairement et fidèlement sur un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent plat.

(b) Si de plus G est de type fini sur S et S noethérien, ces conditions entraînent
405 que G est isomorphe à un sous-groupe fermé d'un $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathscr{E})$, où $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module localement libre de type fini. [124]

Lemme 11.12. — *Soient k un corps,* G *un k-groupe affine. Posons* $\mathrm{A} = \mathscr{A}(\mathrm{G})$*. Étant donné $x \in \mathrm{A}$, il existe une sous-k-algèbre* de type fini B *de* A *telle que $x \in \mathrm{B}$, que $\Delta(\mathrm{B}) \subset \mathrm{B} \otimes_k \mathrm{B}$ et $u(\mathrm{B}) \subset \mathrm{B}$, où u désigne l'involution de* A *correspondant au morphisme d'inversion de* G. [125]

[123] N.D.E. : L'équivalence de ces conditions est démontrée dans la section additionnelle 12.

[124] N.D.E. : Ceci est démontré, avec diverses généralisations, dans la section additionnelle 13.

[125] N.D.E. : D'une part, ceci est généralisé dans la section 13 au cas où G est affine et plat sur une base régulière de dimension $\leqslant 2$. D'autre part, dans ce qui suit on a détaillé et corrigé l'original.

On peut supposer $x \neq 0$, alors $\Delta(x) \neq 0$ puisque $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta(x) = x$, où ε désigne l'augmentation (coÃ¼nité) de A. Écrivons

$$\Delta(x) = \sum_{j=1}^{n} e_j \otimes a_j \qquad \text{avec } n \ \textit{minimal}\ , \tag{1}$$

dans ce cas les e_j (resp. a_j) sont linéairement indépendants. Complétons $(e_1, \dots, e_n)$ en une base $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de A et posons, pour $j \in \mathrm{J} = \{1, \dots, n\}$,

$$\Delta(e_j) = \sum_{i\in\mathrm{I}} e_i \otimes b_{ij}\,.$$

Appliquant $\Delta \otimes \mathrm{id}$ et $\mathrm{id} \otimes \Delta$ à (1), on tire de l'axiome (CO 1) de 11.8.0 (voir aussi (HA 1) dans I 4.2) les égalités :

$$\sum_{j\in\mathrm{J}} e_j \otimes \Delta(a_j) = \sum_{\ell\in\mathrm{J}} \Delta(e_\ell) \otimes a_\ell = \sum_{i\in\mathrm{I}} e_i \otimes \Big(\sum_{\ell\in\mathrm{J}} b_{i\ell} \otimes a_\ell\Big).$$

Comme les e_i sont linéairement indépendants, il en résulte que

$$\forall\, j \in \mathrm{J}, \qquad \Delta(a_j) = \sum_{\ell\in\mathrm{J}} b_{j\ell} \otimes a_\ell. \tag{2}$$

Soit alors B la sous-k-algèbre de type fini de A engendrée par les b_{ij} et les $u(b_{ij})$, pour $i, j \in \mathrm{J}$. Il est clair que $u(\mathrm{B}) = \mathrm{B}$.

Appliquant $\Delta \otimes \mathrm{id}$ et $\mathrm{id} \otimes \Delta$ à (2), on tire encore de (CO 1) les égalités :

$$\sum_{\ell\in\mathrm{J}} \Delta(b_{j\ell}) \otimes a_\ell = \sum_{i\in\mathrm{J}} b_{ji} \otimes \Delta(a_i) = \sum_{i,\ell\in\mathrm{J}} b_{ji} \otimes b_{i\ell} \otimes a_\ell,$$

et comme les a_ℓ sont linéairement indépendants, on en déduit que

$$\forall\, j, \ell \in \mathrm{J}, \qquad \Delta(b_{j\ell}) = \sum_{i\in\mathrm{J}} b_{ji} \otimes b_{i\ell}. \tag{3}$$

Comme $\Delta \circ u = (u \times u) \circ v \circ \Delta$, où $v(a \otimes b) = b \otimes a$, on a donc aussi

$$\forall\, j, \ell \in \mathrm{J}, \qquad \Delta\big(u(b_{j\ell})\big) = \sum_{i\in\mathrm{J}} u(b_{i\ell}) \otimes u(b_{ji}). \tag{4}$$

Puisque Δ est un homomorphisme d'algèbres, on déduit de (3) et (4) que $\Delta(\mathrm{B}) \subset \mathrm{B} \otimes_k \mathrm{B}$. Enfin l'axiome (CO 2) de 11.8.0 (voir aussi (HA 2) dans I, 4.2) montre que $a_j = \sum_{i\in\mathrm{I}} \varepsilon(a_j) b_{ij}$ et que $x = \sum_{j\in\mathrm{J}} \varepsilon(e_j) a_j$, si bien que $x \in \mathrm{B}$.

Proposition 11.13. — *Soient k un corps et* G *un k-groupe* affine *d'algèbre* A*. Alors* G *est limite projective d'un système filtrant croissant de k-groupes affines de type fini, dont les morphismes de transition sont* fidèlement plats*.*

Si B et B′ sont deux sous-algèbres de A de type fini stables par Δ et u, alors il en est de même de la sous-algèbre engendrée par B et B′. Donc, d'après le lemme 11.12, A est limite inductive d'une famille filtrante croissante $(\mathrm{B}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de sous-algèbres de type fini stables par Δ et u. Alors chaque B_i, munie de la restriction de u et du 406
morphisme $\mathrm{B}_i \to \mathrm{B}_i \otimes_k \mathrm{B}_i$ déduit de Δ, est une algèbre de Hopf, donc d'après I 4.2 c'est l'algèbre d'un k-groupe affine G_i, de type fini sur k. Enfin, puisque $\mathrm{A} = \varinjlim \mathrm{B}_i$,

on a $\mathrm{G} = \varprojlim \mathrm{G}_i$ (cf. EGA IV_3 8.2.3). Les morphismes de transition sont fidèlement plats d'après le lemme suivant :

Lemme 11.14. — *Soient k un corps, $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ un morphisme entre k-groupes* affines de type fini*, et $u^\natural : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$* [126] *le morphisme de k-algèbres correspondant. Pour que u soit fidèlement plat, il faut et il suffit que $u^\natural$ soit injectif.*

La condition est évidemment nécessaire (cf. EGA 0_{I} 6.6.1). Montrons qu'elle est suffisante. Posons $\mathrm{N} = \operatorname{Ker} u$. Alors, d'après $\mathrm{VI_A}$, 3.3.2 et 5.4.1, G/N est un k-groupe de type fini et u se factorise en $\mathrm{G} \xrightarrow{p} \mathrm{G/N} \xrightarrow{v} \mathrm{H}$, où p est fidèlement plat et où v est une immersion fermée. Donc, puisque H est un schéma affine, G/N est un schéma affine et le morphisme $v^\natural : \mathrm{B} \to \mathscr{O}(\mathrm{G/N})$ est surjectif (cf. EGA I 4.2.3). Or, puisque $u^\natural$ est supposé injectif, et que $u^\natural = p^\natural \circ v^\natural$, alors $v^\natural$ est aussi injectif : c'est donc un isomorphisme, ainsi que v, et puisque p est fidèlement plat, il en est de même de u.

Définition 11.15. — [127] Soient k un corps, G un k-groupe quasi-compact et V un k-espace vectoriel muni d'une action k-linéaire de G, donc d'une structure de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$-comodule $\delta : \mathrm{V} \to \mathrm{V} \otimes \mathscr{A}(\mathrm{G})$, d'après 11.6.1. Soit $v \in \mathrm{V}$ non nul. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $\lambda \in \mathscr{A}(\mathrm{G})$ (nécessairement unique) tel que $\delta(v) = v \otimes \lambda$.

(ii) Pour toute k-algèbre R et tout $g \in \mathrm{G(R)}$, on a $g \cdot v \in \mathrm{R}v$ (c.-à-d., il existe $f \in \mathrm{R}$, nécessairement unique, tel qu'on ait dans $\mathrm{V} \otimes \mathrm{R}$ l'égalité $g \cdot v = v \otimes f$).

En effet, il est clair que (i) ⇒ (ii). Réciproquement, si (ii) est vérifié et si on l'applique à $\mathrm{R} = \mathscr{A}(\mathrm{G})$ et $g = \mathrm{id}_{\mathscr{A}(\mathrm{G})}$, on obtient qu'il existe un unique $\lambda \in \mathscr{A}(\mathrm{G})$ tel que $\delta(v) = v \otimes \lambda$.

Si v vérifie ces conditions, on dit que v est vecteur *semi-invariant* sous G, et que λ est le *poids* de v ; on dira aussi que « *v est un semi-invariant de poids λ* ».

407 Notons Δ la comultiplication de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$; alors l'égalité

$$v \otimes \lambda \otimes \lambda = (\delta \otimes \mathrm{id})(\delta(v)) = (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\delta(v)) = v \otimes \Delta(\lambda)$$

entraîne que $\Delta(\lambda) = \lambda \otimes \lambda$. Par conséquent, λ définit un morphisme d'algèbres de Hopf

$$\mathscr{A}(\mathbb{G}_{m,k}) = k[\mathrm{T}, \mathrm{T}^{-1}] \longrightarrow \mathscr{A}(\mathrm{G}), \qquad \mathrm{T} \mapsto \lambda,$$

et donc un morphisme de k-groupes $\lambda : \mathrm{G} \to \mathbb{G}_{m,k}$, i.e. λ est un *caractère* de G, appelé *caractère associé* au vecteur semi-invariant v.

Lemme 11.16.0. — [128] *Soient k un corps,* H *un k-groupe affine,* V *un* H*-module de dimension n et* U *un sous-espace vectoriel de* V *de dimension d. Considérons la droite $\mathrm{D} = \bigwedge^d \mathrm{U} \subset \bigwedge^d \mathrm{V}$. Pour que* U *soit stable par* H*, il faut et il suffit que* D *le soit.*

[126] N.D.E. : On a noté $u^\natural$ (au lieu de u°) le morphisme $\mathrm{B} \to \mathrm{A}$ correspondant à $u : \mathrm{Spec(A)} \to \mathrm{Spec(B)}$.

[127] N.D.E. : On a ajouté l'hypothèse que G soit *quasi-compact* et détaillé l'équivalence des conditions (i) et (ii).

[128] N.D.E. : On a ajouté ce lemme, tiré de [**DG70**], § II.2, 3.5.

La nécessité étant claire, prouvons la suffisance. On peut supposer $d < n$. Soit $(e_1, \ldots, e_d)$ une base de U, complétons-la en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de V. Pour toute k-algèbre R, $\mathrm{V_R} = \mathrm{V} \otimes \mathrm{R}$ est un R-module libre et l'on a

$$\mathrm{U_R} = \{v \in \mathrm{V_R} \mid v \wedge (e_1 \wedge \cdots \wedge e_d) = 0\}$$

(car pour $i > d$ les $e_i \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_d$ sont linéairement indépendants dans $\bigwedge_{\mathrm{R}}^{d+1} \mathrm{V_R}$). Comme H(R) opère sur $\bigwedge_{\mathrm{R}}^{\bullet}(\mathrm{V_R})$ par

$$h(x_1 \wedge \cdots \wedge x_s) = h(x_1) \wedge \cdots \wedge h(x_s),$$

il en résulte que si H(R) stabilise $\mathrm{D_R} = \mathrm{R}e_1 \wedge \cdots \wedge e_d$, il stabilise aussi $\mathrm{U_R}$.

Théorème 11.16 **(**Chevalley**). —** *Soient k un corps,* G *un k-groupe* algébrique affine*,* H *un sous-schéma en groupes fermé de* G. [129] *Alors il existe un* G*-module de dimension finie* V *et une droite* D *de* V *telle que* $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{D})$*, i.e. telle que pour toute k-algèbre* R*,*

$$\mathrm{H(R)} = \{g \in \mathrm{G(R)} \mid g(\mathrm{D_R}) = \mathrm{D_R}\}.$$

En d'autres termes, il existe un nombre fini d'éléments $a_1, \ldots, a_n \in \mathscr{A}(\mathrm{G})$, qui sont semi-invariants, tous de même poids λ, pour l'action « à droite » *de* H *(i.e. $a_i(gh) = \lambda(h)a_i(g)$, pour toute k-algèbre* R *et $g \in \mathrm{G(R)}$, $h \in \mathrm{H(R)}$), tels que* H *soit le plus grand sous-schéma en groupes fermé de* G *sous lequel les a_i soient semi-invariants.*

Notons Δ (resp. ε) la comultiplication (resp. l'augmentation) de $\mathrm{A} = \mathscr{A}(\mathrm{G})$. Alors $\mathrm{H} = \mathrm{Spec(A/I)}$, pour un certain idéal I de A, contenu dans $\mathrm{Ker}\,\varepsilon$ et tel que $\Delta(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I} \otimes \mathrm{A} + \mathrm{A} \otimes \mathrm{I}$. Soient $\mathrm{B} = \mathrm{A/I}$ et π la projection $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$. Considérons l'action à gauche de H sur A donnée par $(h\phi)(g) = \phi(gh)$; la structure de B-comodule correspondante est donnée par :

$$\overline{\Delta}: \quad \mathrm{A} \xrightarrow{\Delta} \mathrm{A} \otimes \mathrm{A} \xrightarrow{\mathrm{id_A} \otimes \pi} \mathrm{A} \otimes \mathrm{B}.$$

Alors I est un sous-H-module de A, puisque $\overline{\Delta}(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I} \otimes \mathrm{B}$.

D'autre part, A est une k-algèbre de type fini, donc noethérienne, donc I admet un système fini de générateurs $(x_1, \ldots, x_r)$. D'après 11.8, les x_i sont contenus dans un sous-G-module V de dimension finie sur k. Alors $\mathrm{W} = \mathrm{V} \cap \mathrm{I}$ est un H-module de dimension finie, dont nous noterons d la dimension. Puisque V contient tous les x_i, 408
W engendre l'idéal I.

Posons $\mathrm{E} = \bigwedge^d \mathrm{V}$, soit $(w_1, \ldots, w_d)$ une base de W, et soit $\mathscr{B} = (e_0, \ldots, e_n)$ une base de E contenant le vecteur $e_0 = w_1 \wedge \cdots \wedge w_d$. L'opération de G sur V détermine canoniquement une opération de G sur E, donc une structure de A-comodule $\rho : \mathrm{E} \to \mathrm{E} \otimes \mathrm{A}$. Pour $j = 0, \ldots, n$, posons $\rho(e_j) = \sum_{i=1}^n e_i \otimes b_{ij}$; on a vu dans la démonstration de 11.12 qu'alors

$$(*) \qquad \Delta(b_{ij}) = \sum_{\ell=0}^{n} b_{i\ell} \otimes b_{\ell j}.$$

[129] N.D.E. : D'une part, on rappelle que tout sous-schéma en groupes de G est fermé (1.4.2). D'autre part, on a énoncé le résultat sous la forme usuelle : « H est le stabilisateur d'une droite dans une représentation de G », tout en conservant la formulation originelle en termes d'une suite $a_1, \ldots, a_n$ de semi-invariants dans $\mathscr{A}(\mathrm{G})$.

Posons $a_i = b_{i0}$, i.e. si $(e_0^*, \ldots, e_n^*)$ est la base duale de $\mathscr{B}$, les a_i sont les « coefficients matriciels » $g \mapsto e_i^*(ge_0)$. D'autre part, l'opération de H sur E correspond à :

$$\overline{\rho}: \quad \mathrm{E} \xrightarrow{\ \rho\ } \mathrm{E} \otimes \mathrm{A} \xrightarrow{\mathrm{id}_\mathrm{E} \otimes \pi} \mathrm{E} \otimes \mathrm{B}.$$

Puisque W est stable sous H, alors e_0 est semi-invariant sous H, donc $\overline{\rho}(e_0) = e_0 \otimes \pi(a_0)$ et $a_i = b_{i0}$ appartient à I pour $i = 1, \ldots, n$. Reportant ceci dans $(*)$, on obtient $\overline{\Delta}(a_i) = a_i \otimes \pi(a_0)$ pour $i = 0, \ldots, n$, i.e. les a_i sont semi-invariants sous H de poids $\pi(a_0)$. (De plus, quitte à remplacer E par le sous-G-module engendré par e_0 (cf. 11.8) on peut supposer que les a_i sont linéairement indépendants.)

Réciproquement, soit $\mathrm{H}' = \operatorname{Spec} \mathrm{B}'$, où $\mathrm{B}' = \mathrm{A}/\mathrm{I}'$, un sous-schéma en groupes fermé de G sous lequel chacun des a_i est semi-invariant, de poids $\lambda_i \in \mathrm{B}'$ (c'est le cas, en
409 particulier, si e_0 est invariant sous H′ de poids λ'). Montrons que $\mathrm{H}' = \mathrm{H}$. Notons π' la projection $\mathrm{A} \to \mathrm{B}'$; l'hypothèse entraîne que

$$a_i \otimes \lambda_i = (\mathrm{id}_\mathrm{A} \otimes \pi')\Delta(b_{i0}) = \sum_{\ell=0}^{n} b_{i\ell} \otimes \pi'(a_\ell),$$

d'où $\lambda_i = \pi'(a_0)$ et $a_\ell \in \mathrm{I}'$ pour $\ell = 1, \ldots, n$, et donc e_0 est semi-invariant sous H′. D'après le lemme 11.16.0, ceci entraîne que W est stable par H′. Comme l'idéal I est engendré par W, il est donc aussi stable sous H′, et donc

$$\Delta(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I} \otimes \mathrm{A} + \mathrm{A} \otimes \mathrm{I}'.$$

Comme $\mathrm{I} \subset \operatorname{Ker} \varepsilon$ et $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}_\mathrm{A}) \circ \Delta = \mathrm{id}_\mathrm{A}$, il en résulte $\mathrm{I} \subset \mathrm{I}'$, d'où $\mathrm{H}' \subset \mathrm{H}$.

Lemme 11.17.0. **—** [130] *Soient k un corps algébriquement clos,* G *un k-groupe algébrique affine réduit,* V *un* G*-module de dimension finie sur k, et $v \in$* V*. Soit* E *le sous-espace vectoriel de* V *engendré par les vecteurs gv, pour $g \in \mathrm{G}(k)$. Alors* E *est le plus petit sous-*G*-module de* V *contenant v, et donc le morphisme* $\mathrm{G} \times \mathrm{E} \to \mathrm{V}$, *$(g, x) \mapsto gx$ se factorise à travers* E.

Démonstration. D'après 11.8, on sait qu'il existe un plus petit sous-G-module U de V contenant v : si $\mu : \mathrm{V} \to \mathrm{V} \otimes \mathscr{A}(\mathrm{G})$ désigne la structure de comodule et si l'on écrit $\mu(v) = \sum_{i=1}^n v_i \otimes a_i$ avec les a_i linéairement indépendants, on a $\mathrm{U} = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n)$. Il est clair que U contient E, et que le morphisme $\mathrm{G} \times \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ se factorise à travers U.

Réciproquement, l'image inverse de E par le morphisme $\mu_v : g \mapsto gv$ est un fermé de G qui contient les points rationnels ; or ceux-ci sont denses dans G, puisque G est de type fini sur k (cf. EGA IV_3, 10.4.8), donc $\mu_v^{-1}(\mathrm{E}) = \mathrm{G}$ et donc, puisque G est réduit, μ_v se factorise à travers E, d'où $\mathrm{E} = \mathrm{U}$.

Théorème 11.17 **(Chevalley). —** *Soient k un corps,* G *un k-groupe* affine (*pas nécessairement de type fini*)*, et* N *un sous-schéma en groupes fermé de* G invariant *dans*

[130] N.D.E. : On a ajouté ce lemme, tiré de la démonstration du thm. 5.6 de [**DG70**], § III.3 (par abus de notation, on désigne par la même lettre E un k-espace vectoriel et le k-schéma en modules $\mathbf{W}(\mathrm{E}) = \operatorname{Spec} \mathrm{S}(\mathrm{E}^*)$).

G *; alors le faisceau* (fpqc) *quotient* G/N *est représentable par un k-groupe* affine. (131)

Supposons d'abord G *de type fini*. D'après $\mathrm{VI_A}$ 3.2 et 5.2, le faisceau (fpqc) quotient G/N est représentable par un k-groupe Q ; il s'agit donc de montrer que Q est affine. La démonstration se fait en plusieurs étapes, supposons d'abord k *algébriquement clos*. (132)

(a) Supposons de plus G réduit et connexe et N réduit. D'après 11.16, il existe un G-module V, de dimension finie sur k, et une droite $\mathrm{D} = ke_0$ telle que $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{D}) = \mathrm{N}$; en particulier N opère sur D via un caractère $\chi : \mathrm{N} \to \mathbb{G}_{m,\,k}$.

Fixons $h \in \mathrm{N}(k)$. Pour tout $g \in \mathrm{G}(k)$, on a $hge_0 = g(g^{-1}hg)e_0 = \chi(g^{-1}hg)ge_0$, donc $\chi(g^{-1}hg)$ est une valeur propre de h. Donc l'application continue $\phi : \mathrm{G}(k) \to k$, $g \mapsto \chi(g^{-1}hg)$, ne prend qu'un nombre fini de valeurs, et comme $\mathrm{G}(k)$ est irréductible (car dense dans G), on a donc $\phi(g) = \phi(e) = \chi(h)$ pour tout $g \in \mathrm{G}(k)$ et donc

$$\chi(g^{-1}hg) = \chi(h), \qquad \forall\, g \in \mathrm{G}(k),\ h \in \mathrm{N}(k).$$

Soit E le sous-espace vectoriel de V engendré par les vecteurs ge_0, pour $g \in \mathrm{G}(k)$; d'après le lemme 11.17.0, c'est le sous-G-module de V engendré par e_0.

D'après ce qui précède, les deux morphismes $\mathrm{N} \times \mathrm{E} \to \mathrm{E}$, $(h, x) \mapsto hx$ et $(h, x) \mapsto \chi(h)x$, coïncident sur l'ensemble des points rationnels $(\mathrm{N} \times \mathrm{E})(k) = \mathrm{N}(k) \times \mathrm{E}(k)$, qui est dense dans $\mathrm{N} \times \mathrm{E}$. Comme $\mathrm{N} \times \mathrm{E}$ est réduit (et E séparé), ces deux morphismes sont donc égaux, donc N agit sur E par homothéties. Par conséquent, N est contenu dans le noyau K du morphisme $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathrm{End}_k(\mathrm{E}))$, défini par $\rho(g)(u) = gug^{-1}$, pour tout $g \in \mathrm{G}(\mathrm{R})$ et $u \in \mathrm{End}_{\mathrm{R}}(\mathrm{E} \otimes \mathrm{R})$ (R une k-algèbre). D'autre part, si $g \in \mathrm{K}(\mathrm{R})$ alors $g(\mathrm{R}e_0) = \mathrm{R}e_0$, d'où $g \in \mathrm{N}(\mathrm{R})$. Ceci montre que $\mathrm{N} = \mathrm{K}$. Alors, d'après $\mathrm{VI_A}$ 5.4.1, le morphisme $\mathrm{G/N} \to \mathrm{GL}(\mathrm{End}_k(\mathrm{E}))$ est une immersion fermée, et donc G/N est affine. **410**

(b) Supposons maintenant G et N réduits, G n'étant pas nécessairement connexe. Posons $\mathrm{N}' = \mathrm{N} \cap \mathrm{G}^0$, alors G^0/N' est affine d'après (a). D'autre part, NG^0 est un sous-groupe invariant de G et $\mathrm{G/NG}^0$, étant un quotient du groupe constant fini $\mathrm{G/G}^0$ (cf. $\mathrm{VI_A}$, 5.5.1) est de même un groupe constant fini. Donc G/N est la somme directe des fibres du morphisme $\mathrm{G/N} \to \mathrm{G/NG}^0$, toutes isomorphes à NG^0/N, donc à G^0/N', d'après $\mathrm{VI_A}$, 5.3.3. Donc G/N est affine.

(c) Supposons G réduit, et N arbitraire. Le morphisme $\mathrm{G} \times \mathrm{N} \to \mathrm{N}$, $(g, h) \mapsto ghg^{-1}$, induit un morphisme $(\mathrm{G} \times \mathrm{N})_{\text{réd}} \to \mathrm{N}_{\text{réd}}$; or, comme G est réduit et k algébriquement clos, on a $(\mathrm{G} \times \mathrm{N})_{\text{réd}} = \mathrm{G} \times \mathrm{N}_{\text{réd}}$, donc $\mathrm{N}_{\text{réd}}$ est un sous-groupe *invariant* de G. (N. B. ceci est en défaut lorsque G n'est pas réduit, cf. $\mathrm{VI_A}$, 0.2).

Donc, d'après (a), $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{N}_{\text{réd}}$ est affine. D'autre part, d'après $\mathrm{VI_A}$ 5.6.1, $\mathrm{N}' = \mathrm{N}/\mathrm{N}_{\text{réd}}$ est un k-groupe fini, donc d'après le théorème 4.1 de l'Exp. V, le quotient $\mathrm{G/N} = \mathrm{G}'/\mathrm{N}'$ est affine.

(131) N.D.E. : Pour une autre démonstration de ce théorème, n'utilisant pas les résultats de $\mathrm{VI_A}$, voir [**Ta72**], Th. 5.2 (voir aussi la remarque 11.18.5).

(132) N.D.E. : Dans ce qui suit, on a détaillé l'original (et corrigé l'assertion erronée $(\mathrm{G/N})_{\text{réd}} = \mathrm{G}_{\text{réd}}/\mathrm{N}_{\text{réd}}$), en s'appuyant sur [**DG70**], § III.3, 5.6.

(d) Pour G et N quelconques, la relation d'équivalence déduite de $G \times N \rightrightarrows G$ par le changement de base $G_{réd} \to G$ est :

$$G_{réd} \times N' \rightrightarrows G_{réd}, \qquad \text{où} \qquad N' = N \cap G_{réd}.$$

Comme les espaces sous-jacents sont les mêmes (et comme le quotient est l'espace annelé quotient), le morphisme $G_{réd}/N' \to G/N$ est un homéomorphisme. Comme $G_{réd}/N'$ est réduit (puisque $p : G_{réd} \to G_{réd}/N'$ est fidèlement plat), il en résulte que $(G/N)_{réd}$ s'identifie à $G_{réd}/N'$, lequel est est affine, d'après (c). Comme G/N est de type fini sur k (cf. VI_A, 3.3.2), ceci entraîne, d'après EGA I, 5.1.10, que G/N est affine.

Enfin, pour k arbitraire, soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Alors, d'après 9.2 (v), $(G \otimes_k \overline{k})/(N \otimes_k \overline{k})$ est isomorphe à $(G/N) \otimes_k \overline{k}$, donc puisque le premier est affine, il en est de même du second, donc G/N est également affine, par descente (fpqc) (cf. EGA IV_2, 2.7.1). Ceci prouve 11.17 lorsque G est de type fini. Pour étendre ceci au cas général, on aura besoin du lemme suivant. [133]

Lemme 11.17.1. — *Soit* $(C_i \to A_i)_{i \in I}$ *un système inductif filtrant de morphismes d'anneaux, tous fidèlement plats. Alors* $A = \varinjlim A_i$ *est fidèlement plat sur* $C = \varinjlim C_i$.

Démonstration. D'après [**BAC**] § I.3, Prop. 9, pour qu'un morphisme d'anneaux $B \to B'$ soit fidèlement plat, il faut et il suffit qu'il soit injectif et que B'/B soit un B-module plat. Comme chaque $C_i \to A_i$ est fidèlement plat, on a donc des suites exactes

$$0 \longrightarrow C_i \longrightarrow A_i \longrightarrow A_i/C_i \longrightarrow 0$$

et A_i/C_i est un C_i-module plat, donc $(A_i/C_i) \otimes_{C_i} C$ est un C-module plat. Comme les limites inductives sont exactes et commutent au produit tensoriel, on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow A \longrightarrow A/C \longrightarrow 0$$

ainsi qu'un isomorphisme

$$\varinjlim \big((A_i/C_i) \otimes_{C_i} C\big) = (A/C) \otimes_C C = A/C\,,$$

duquel on déduit que A/C est un C-module plat. Donc A est fidèlement plat sur C.

Revenons maintenant à la démonstration de 11.17 dans le cas général, i.e. lorsque G n'est pas supposé de type fini. Posons $\mathscr{A}(G) = A$ et $\mathscr{A}(N) = B = A/J$. D'après 11.13, A est limite inductive d'une famille filtrante croissante $(A_i)_{i \in I}$ de sous-algèbres de Hopf de type fini, donc G est la limite projective des k-groupes algébriques affines $G_i = \mathrm{Spec}(A_i)$. Notons Δ (resp. τ) la comultiplication (resp. l'antipode) de A, et $\Delta^2 = (\Delta \otimes \mathrm{id}_A) \circ \Delta$.

Pour tout i, $B_i = A_i/(J \cap A_i)$ est une algèbre de Hopf quotient de A_i, donc $N_i = \mathrm{Spec}(B_i)$ est un sous-groupe fermé de G_i. De plus, comme N est invariant

[133] N.D.E. : On a ajouté ce lemme, tiré de [**DG70**], § III.3, 7.1.

dans G, le morphisme $G \times N \to G$ défini par $(g, n) \mapsto gng^{-1}$ se factorise à travers N, et ceci équivaut à dire que le couple (A, J) vérifie la propriété suivante :

$$\big(m_{13} \circ (\Delta \otimes \tau) \circ \Delta\big)(J) \subset A \otimes_k J$$

où m_{13} désigne l'application $a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \mapsto a_1 a_3 \otimes a_2$. Il en résulte que $(A_i, A_i \cap J)$ vérifie la propriété analogue, donc que N_i est *invariant* dans G_i. D'autre part, on a $\varinjlim B_i = B$ et donc $\varprojlim N_i = N$.

D'après ce qu'on a vu précédemment, chaque faisceau (fpqc) quotient G_i/N_i est représentable par un k-groupe affine $Q_i = \mathrm{Spec}(C_i)$. Posons $C = \varinjlim C_i$. On a donc un système projectif filtrant de k-groupes affines Q_i ; sa limite projective $Q = \varprojlim Q_i$ est le k-groupe Spec(C) (cf. EGA IV_3, 8.2.3). On a alors une suite exacte de k-groupes : 411

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow Q\ .$$

Montrons que Q représente le faisceau (fpqc) quotient de G par N ; pour cela, il suffit de vérifier que le morphisme $G \to Q$ est couvrant pour la topologie (fpqc) (cf. IV, 3.3.2.1 et 5.1.7.1). Or, chacun des morphismes $G_i \to Q_i$ est fidèlement plat (cf. 9.2 (xi)), autrement dit A_i est fidèlement plat sur C_i ; puisque $A = \varinjlim A_i$ et $C = \varinjlim C_i$, il résulte du lemme 11.17.1 que A est fidèlement plat sur C, si bien que $G \to Q$ est un morphisme fidèlement plat. Puisque ce morphisme est affine, il est quasi-compact, donc couvrant pour la topologie (fpqc). Ceci achève la démonstration du théorème 11.17.

11.18. Compléments. — [134] De plus, on déduit de 11.17 (et de sa démonstration) les résultats suivants, tirés de [**DG70**], III § 3.7. Soit k un corps. Commençons par le lemme suivant (cf. [**An73**], 2.3.3.2), qui sera utile plus loin (cf. 12.10).

Lemme 11.18.1. — *Soient* $u : G \to G'$ *un morphisme de k-groupes,* $N = \mathrm{Ker}(u)$. *On suppose* G' *affine et* G *de type fini.*

(i) *Le morphisme* $\tau : G/N \to G'$ *est une immersion fermée. En particulier,* G/N *est affine.*

(ii) *Si de plus le morphisme* $u^\natural : \mathscr{O}(G') \to \mathscr{O}(G)$ *est injectif, alors* τ *est un isomorphisme.* (*Et donc* G' *est de type fini et* u *est fidèlement plat*).

En effet, on sait (11.13) que G' est limite projective d'un système filtrant de k-groupes algébriques affines G'_i. Notons u_i le morphisme composé $G \to G' \to G'_i$ et N_i son noyau. Alors les N_i forment un système filtrant décroissant de sous-groupes fermés de G, dont l'intersection est N. Comme G est noethérien, il existe un indice i tel que $N = N_i$. Comme G et G_i sont de type fini alors, d'après VI_A, 3.2 et 5.4.1, le quotient G/N est un k-groupe de type fini et u_i est la composée de la projection $p : G \to G/N$, qui est fidèlement plate, et d'une immersion fermée $\tau_i : G/N \hookrightarrow G_i$.

[134] N.D.E. : On a ajouté cette sous-section.

Considérons alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p"'] & G' \arrow[d, "q_i"] \\ G/N \arrow[ur, "\tau"] \arrow[r, "\tau_i"] & G_i. \end{tikzcd}$$

Puisque $q_i \circ \tau = \tau_i$ est une immersion fermée et que q_i est séparé (G' étant séparé, cf. VI_A, 0.3), alors τ est une immersion fermée (cf. EGA I, 5.4.4). Il en résulte que G/N est affine, et que le morphisme $\tau^\natural : \mathscr{O}(G') \to \mathscr{O}(G/N)$ est surjectif, d'où (i).

Si de plus $u^\natural : \mathscr{O}(G') \to \mathscr{O}(G)$ est injectif, il en est de même de $\tau^\natural$, donc $\tau^\natural$ est un isomorphisme, donc aussi τ (puisque G' et G/N sont affines). Ceci prouve (ii).

Théorème 11.18.2. — *Soient* G *et* G' *deux* k*-groupes affines, d'algèbres* A *et* A'*, et soient* $u : G \to G'$ *un morphisme de* k*-groupes,* $N = \mathrm{Ker}(u)$*, et* $\phi : A' \to A$ *le morphisme induit par* u*.*

(i) *Si* ϕ *est injectif, alors* u *est fidèlement plat et identifie* G' *à* G/N*.*

(ii) *On a* $G/N = \mathrm{Spec}(B)$*, où* $B = \phi(A')$*, et donc* u *est la composée du morphisme fidèlement plat* $G \to G/N$*, correspondant à l'inclusion* $B \hookrightarrow A$*, et de l'immersion fermée* $G/N \hookrightarrow G'$*, qui correspond à la surjection* $A' \to B$*. De plus,* N *est défini dans* G *par l'idéal* AB_+*, où* B_+ *désigne l'idéal d'augmentation de* B*.*

(iii) *En particulier, si* u *est un monomorphisme, c'est une immersion fermée.*

Démonstration. (i) Supposons ϕ injectif et identifions A' à une sous-algèbre de Hopf de A. D'après 11.13, A est réunion filtrante de sous-algèbres de Hopf $A_i = \mathscr{O}(G_i)$ de type fini sur k ; notons $G'_i = \mathrm{Spec}(A'_i)$, où $A'_i = A' \cap A_i$, et N_i le noyau du morphisme $G_i \to G'_i$ induit par l'inclusion $A'_i \hookrightarrow A_i$. D'après le lemme précédent, on a $G_i/N_i \simeq G'_i$ et l'on obtient donc, pour tout i, une suite exacte

$$1 \longrightarrow N_i \longrightarrow G_i \xrightarrow{p_i} G'_i \longrightarrow 1$$

où p_i est fidèlement plat. Comme $G = \varprojlim_i G_i$ et $G' = \varprojlim_i G'_i$, on obtient donc une suite exacte

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \xrightarrow{p} G/N$$

où l'on a posé $N = \varprojlim_i N_i$. De plus, d'après le lemme 11.17.1, p est fidèlement plat (et affine), donc G' représente le faisceau (fpqc) quotient de G par N. Ceci prouve (i).

Dans le cas général, $B = \phi(A')$ est une sous-algèbre de Hopf de A ; notons H le k-groupe Spec(B) et N' le noyau du morphisme $G \to H$ induit par l'inclusion $B \hookrightarrow A$. D'après (i), H s'identifie à G/N', et u est donc la composée de la projection $G \to G/N'$ et de l'immersion fermée $G/N' \hookrightarrow G'$ induite par la surjection $A' \to B$. Il en résulte que $N' = N$. De plus, d'après 9.2 (ii), on a un carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{Spec}(k) \arrow[r, "\varepsilon"] & G' \end{tikzcd}$$

où ε est la section unité de G', qui correspond au morphisme d'augmentation $B \to k$. Il en résulte que N est défini dans G par l'idéal AB_+. Ceci prouve (ii), et (iii) en découle.

Remarque 11.18.3. — Soient G un k-groupe affine et N un k-sous-groupe invariant. Comme le morphisme $p : G \to G/N$ est fidèlement plat et quasi-compact alors, d'après IV 3.3.3.2, $\mathscr{O}(G/N)$ est la sous-algèbre de $\mathscr{O}(G)$ formée des fonctions ϕ qui sont N-invariantes à droite, i.e. qui vérifient $\phi(gh) = \phi(g)$, pour tout k-schéma S et $g \in G(S)$, $h \in N(S)$. Notant J l'idéal de $A = \mathscr{O}(G)$ qui définit N, ceci équivaut à dire que $\Delta(\phi) - \phi \otimes 1 \in \mathscr{O}(G) \otimes J$, où Δ est la comultiplication de A.

Le théorème précédent peut alors se reformuler en termes d'algèbres de Hopf comme suit.

Corollaire 11.18.4. — *Soient k un corps,* A *une k-algèbre de Hopf commutative,* $G = \mathrm{Spec}(A)$.

(i) *Si* B *est une sous-algèbre de Hopf de* A*, alors* A *est fidèlement plate sur* B.

(ii) *L'application* $N \mapsto \mathscr{O}(G/N)$ *est une bijection entre l'ensemble des sous-groupes invariants de* G *et celui des sous-algèbres de Hopf de* A *; l'application inverse est donnée par* $B \mapsto \mathrm{Spec}(A/AB_+)$. *De plus, si* J *est l'idéal de* A *définissant* N*, on a*

$$\mathscr{O}(G/N) = \{x \in A \mid \Delta(x) - x \otimes 1 \in A \otimes J\}.$$

Remarques 11.18.5. — (a) Une conséquence du théorème précédent est que la catégorie des k-groupes affines commutatifs est *abélienne*. Pour ceci, ainsi que pour d'autres résultats sur les k-groupes affines, on renvoie à [**DG70**], § III.3, 7.4 à 7.8.

(b) Signalons enfin que M. Takeuchi a donné une autre démonstration des résultats 11.17 à 11.18.4, cf. [**Ta72**], § 5 ; il a de plus renforcé 11.18.4 (i) ci-dessus en montrant que A est même un B-module projectif, cf. [**Ta79**], Th. 5 (voir aussi [**MW94**], Th. 3.6).

12. Compléments sur G_{af} et les groupes « anti-affines »

(135) Commençons par le lemme suivant, qui étend 11.18.1 au cas où G n'est pas supposé de type fini. (136)

Lemme 12.1. — *Soient k un corps, $u : G \to H$ un monomorphisme de k-groupes, avec* H affine. *On suppose u* quasi-compact. *Alors u est une* immersion fermée.

(135) N.D.E. : On a ajouté cette section.

(136) N.D.E. : Ce lemme nous a été communiqué par M. Raynaud, il sera utilisé dans la démonstration de la proposition 12.9.

Démonstration. Par descente (fpqc), on peut supposer k algébriquement clos. D'après $\mathrm{VI_A}$, 6.4, l'image fermée I de u est un sous-schéma en groupes fermé de H, donc encore affine. Donc, remplaçant H par I, on peut supposer u schématiquement dominant. Comme k est algébriquement clos, $\mathrm{H}' = \mathrm{H}_{\mathrm{réd}}$ est un sous-schéma en groupes de H ; notons $\mathrm{G}' = \mathrm{G} \times_{\mathrm{H}} \mathrm{H}'$, alors le morphisme $u' : \mathrm{G}' \to \mathrm{H}'$ déduit de u par changement de base est un monomorphisme quasi-compact, et est dominant (l'application continue sous-jacente étant la même pour u et u'). Donc, d'après $\mathrm{VI_A}$, 6.2, u' est fidèlement plat ; c'est donc un monomorphisme fidèlement plat quasi-compact, donc un isomorphisme (cf. IV 1.14).

Donc $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ est un homéomorphisme, donc est affine d'après 2.9.1. Donc G est affine, et donc u est une immersion fermée d'après 11.18.2 (iii).

Théorème 12.2. — *Soit* G *un k-groupe* algébrique. *On note ρ le morphisme canonique* $\mathrm{G} \to \mathrm{G}_{\mathrm{af}}$ *et* N *son noyau.*

(i) *Le morphisme canonique* $\mathrm{G}/\mathrm{N} \to \mathrm{G}_{\mathrm{af}}$ *est un* isomorphisme, *et donc* G_{af} *est un groupe affine* algébrique, *et ρ est fidèlement plat.*

(ii) *On a un isomorphisme canonique* $(\mathrm{G}/\mathrm{N})_{\mathrm{af}} = \mathrm{G}_{\mathrm{af}}$.

(iii) N *est un sous-groupe* caractéristique *de* G.

(iv) $\mathscr{O}(\mathrm{N}) = k$.

(v) N *est lisse, connexe et commutatif.*

Démonstration. Le point (i) est un cas particulier de 11.18.1, et le point (ii) découle des propriétés universelles de G_{af} et $(\mathrm{G}/\mathrm{N})_{\mathrm{af}}$.

Prouvons (iii). Pour un k-schéma $\pi : \mathrm{S} \to \operatorname{Spec} k$ arbitraire, considérons le carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G_S} \arrow[r] \arrow[d, "q"'] & \mathrm{G} \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{S} \arrow[r, "\pi"] & \operatorname{Spec} k, \end{tikzcd}$$

comme p est quasi-compact et séparé et π plat alors, d'après EGA III 1.4.15 et EGA IV_1 1.7.21, on a $q_*(\mathscr{O}_{\mathrm{G_S}}) = \pi^*(\mathscr{O}(\mathrm{G})) = \pi^*(\mathscr{O}(\mathrm{G}_{\mathrm{af}}))$, et donc, d'après EGA II, 1.5.2, on a $(\mathrm{G_S})_{\mathrm{af}} = (\mathrm{G}_{\mathrm{af}})_{\mathrm{S}}$ donc $\mathrm{N_S}$, étant le noyau du morphisme canonique $\mathrm{G_S} \to (\mathrm{G_S})_{\mathrm{af}}$, est invariant par tout automorphisme de $\mathrm{G_S}$, i.e. N est un sous-groupe caractéristique de G.

Pour prouver (iv), posons $\mathrm{N}' = \operatorname{Ker}(\mathrm{N} \to \mathrm{N}_{\mathrm{af}})$; d'après (ii), c'est un sous-groupe invariant de G. Comme N est algébrique (étant un sous-groupe fermé de G) alors, d'après (i), $\mathrm{N}/\mathrm{N}' \cong \mathrm{N}_{\mathrm{af}}$; de plus, d'après $\mathrm{VI_A}$, 3.2 et 5.3.2, on a un isomorphisme de k-groupes

$$(\mathrm{G}/\mathrm{N}')/\mathrm{N}_{\mathrm{af}} \cong (\mathrm{G}/\mathrm{N}')/(\mathrm{N}/\mathrm{N}') \cong \mathrm{G}/\mathrm{N}.$$

Comme N_{af} est affine, la projection $\mathrm{G}/\mathrm{N}' \to \mathrm{G}/\mathrm{N}$ l'est aussi, d'après 9.2 (vii), et comme $\mathrm{G}/\mathrm{N} = \mathrm{G}_{\mathrm{af}}$ est affine, alors G/N' l'est aussi. Donc, d'après la propriété universelle de G_{af}, la projection $p' : \mathrm{G} \to \mathrm{G}/\mathrm{N}'$ se factorise à travers $\mathrm{G}_{\mathrm{af}} = \mathrm{G}/\mathrm{N}$, d'où $\mathrm{N} \subset \mathrm{N}'$ et donc $\mathrm{N} = \mathrm{N}'$. Donc N_{af} est le groupe trivial, d'où $\mathscr{O}(\mathrm{N}) = k$.

Enfin, l'assertion (v) est conséquence du lemme suivant.

Lemme 12.3. — *Soient k un corps et* N *un k-groupe algébrique tel que* $\mathscr{O}(N) = k$. *Alors* N *est lisse, connexe, et commutatif.*

En effet, on peut supposer k algébriquement clos. Alors $H = N^0_{\text{réd}}$ est un sous-k-groupe de N, et le k-schéma quotient $X = N/H$ est fini (donc affine) sur k, d'après VI_A, 5.5.1 et 5.6.1. D'autre part, comme $p : N \to X$ est fidèlement plat, on a $\mathscr{O}(X) \subset \mathscr{O}(N) = k$. Il en résulte que $N = N^0_{\text{réd}}$, donc N est lisse (VI_A 1.3.1) et connexe.

Soit alors Z le centre de N. D'après 6.2.6, N/Z est affine, et l'on obtient comme plus haut que $\mathscr{O}(N/Z) = k$, d'où $N = Z$. Ceci prouve 12.3 et termine la démonstration de 12.2.

Signalons aussi, sans démonstration, le théorème suivant. (On rappelle qu'une variété abélienne sur un corps k est un k-schéma en groupes *propre, lisse et connexe.*)

Théorème 12.4 **(**Chevalley)**.** — *Soient k un corps* parfait *et* G *un k-groupe* algébrique, lisse et connexe. *Alors il existe un k-sous-groupe affine, lisse et connexe* L*, invariant dans* G*, tel que le quotient* G/L *soit une variété abélienne. De plus,* L *est unique et sa formation commute à l'extension du corps de base.*

Remarques 12.5. — (1) Ce théorème a été annoncé en 1953 par C. Chevalley, qui a publié sa démonstration en 1960 ([**Ch60**]). Entre-temps, d'autres démonstrations ont été obtenues, indépendamment, par I. Barsotti et M. Rosenlicht ([**Ba55, Ro56**]) ; voir [**Se99**] pour des commentaires historiques.

(2) Une version moderne (i.e. dans le langage des schémas) de la démonstration de Chevalley a été donnée par B. Conrad ([**Co02**]). (Noter que dans *loc. cit.*, « algebraic group » signifie k-schéma en groupes lisse et connexe.)

(3) D'autre part, une version moderne de la démonstration de Rosenlicht a été donnée par Ngô B.-C. dans un cours à Orsay en 2005-2006.

(4) Si l'on omet l'hypothèse que k soit parfait, il existe encore un plus petit sous-groupe affine connexe invariant L (pas nécessairement lisse) tel que G/L soit une variété abélienne ([**BLR**], § 9.2, Thm. 1).

(5) On peut aussi omettre l'hypothèse que G soit lisse sur k : en effet, d'après VII_A, 8.3, il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que le quotient $G' = G/({}_{\mathrm{Fr}^n}G)$ soit lisse, alors G' contient un sous-groupe L' comme en (4) ci-dessus, et l'image inverse de L' dans G a encore les mêmes propriétés. Donc, pour tout groupe algébrique connexe G sur un corps k, il existe une suite exacte

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow A \longrightarrow 1$$

où H est un k-groupe affine et A une k-variété abélienne. De plus, d'après [**Per76**], Cor. 4.2.9, on a une telle suite exacte pour tout k-groupe connexe G (pas nécessairement algébrique).

(6) Soient k un corps algébriquement clos et G le produit semi-direct d'une courbe elliptique E par le k-groupe constant $\{\pm 1\}_k$, pour l'action définie par $(-1) \cdot x = -x$; dans ce cas, si L est un sous-groupe fermé invariant de G tel que G/L soit connexe, alors $L = G$.

Remarque 12.6. — On dira, suivant [**Br09**], qu'un k-groupe N est *anti-affine* si $\mathscr{O}(\mathrm{N}) = k$. D'après 12.3 et 12.4, si k est parfait tout k-groupe algébrique anti-affine est extension d'une variété abélienne par un k-groupe algébrique affine, lisse, connexe, et commutatif. Pour la structure précise des groupes algébriques anti-affines sur un corps parfait, et diverses conséquences, voir les articles récents de M. Brion et C. & F. Sancho de Salas ([**Br09, SS09**]).

Pour terminer cette section, on va démontrer deux résultats dus à M. Raynaud, le premier étant la remarque 11.11.1, le second la proposition 2.1 de l'Exp. XVII, Appendice III. On aura besoin du lemme suivant [137], qui améliore (pour un anneau de valuation discrète complet R) les critères de platitude donnés dans [**BAC**], § III.5.

Lemme 12.7. — *Soient* R *un anneau de valuation discrète,* K *son corps des fractions,* π *une uniformisante. Soient* A *une* R*-algèbre plate et* M *un* A*-module plat sur* R*. On suppose que :*

(i) $\mathrm{M}/\pi\mathrm{M}$ *est un module plat sur* $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A}/\pi\mathrm{A}$*,*

(ii) $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{K}$ *est un module plat sur* $\mathrm{A} \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{K}$*.*

Alors M *est un* A*-module plat.*

Démonstration. D'après le critère de platitude dans le cas nilpotent (cf. [**BAC**], III § 5.2, Th. 1), $\mathrm{M}/\pi^n\mathrm{M}$ est un module plat sur $\mathrm{A}/\pi^n\mathrm{A}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Il résulte alors de [**RG71**], II Lemme 1.4.2.1, que M est un A-module plat. Pour la commodité du lecteur, indiquons rapidement la démonstration. Posons $s = \pi^n$ et $\mathrm{P} = \mathrm{M}/s\mathrm{M}$. Comme P est plat sur $\mathrm{A}/s\mathrm{A}$ et que ce dernier est de dimension projective 1 sur A, il résulte de la suite spectrale des foncteurs composés que P est de Tor-dimension $\leqslant 1$ sur A. Or, comme M est R-plat donc sans π-torsion, $\mathrm{M_K}/\mathrm{M}$ est la limite inductive des A-modules $\pi^{-n}\mathrm{M}/\mathrm{M} \simeq \mathrm{M}/\pi^n\mathrm{M}$, et donc $\mathrm{M_K}/\mathrm{M}$ est également de Tor-dimension $\leqslant 1$. Comme on a la suite exacte $0 \to \mathrm{M} \to \mathrm{M_K} \to \mathrm{M_K}/\mathrm{M} \to 0$ et que par hypothèse $\mathrm{M_K}$ est plat sur $\mathrm{A_K}$ donc sur A, il en résulte que M est plat.

Pour être complet, indiquons aussi la démonstration plus simple suivante, signalée par O. Gabber. Soit I un idéal de type fini de A, on doit montrer que le morphisme $u : \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{I} \to \mathrm{M}$ est injectif. D'après l'hypothèse (ii), $u \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{K}$ est injectif, donc $\mathrm{Ker}(u)$ est un R-module de π-torsion. Il suffit donc de montrer que la partie de π-torsion de $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{I}$ est nulle ; or celle-ci est un quotient de $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{I}/\pi\mathrm{I})$, comme on le voit en tensorisant par M la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{I} \xrightarrow{\ \pi\ } \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{I}/\pi\mathrm{I} \longrightarrow 0\,.$$

D'autre part, M étant sans π-torsion (car plat sur R), on obtient que $\mathrm{Tor}_i^{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \overline{\mathrm{A}}) = 0$ pour tout $i \geqslant 1$. Par conséquent, si $(\mathrm{P}_\bullet)$ est une résolution projective du A-module M, alors $(\mathrm{P}_\bullet \otimes_{\mathrm{A}} \overline{\mathrm{A}})$ est une résolution projective du $\overline{\mathrm{A}}$-module $\overline{\mathrm{M}} = \mathrm{M}/\pi\mathrm{M}$, et donc pour tout $\overline{\mathrm{A}}$-module N, on a $\mathrm{Tor}_i^{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{M}}, \mathrm{N}) = \mathrm{Tor}_i^{\overline{\mathrm{A}}}(\overline{\mathrm{M}}, \mathrm{N})$, et ceci est nul pour $i \geqslant 1$ puisque $\overline{\mathrm{M}}$ est plat sur $\overline{\mathrm{A}}$. On a donc $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{I}/\pi\mathrm{I}) = 0$, ce qui prouve le lemme.

(137) N.D.E. : C'est une version améliorée par O. Gabber d'un énoncé communiqué par M. Raynaud.

Remarque 12.8. — Soient S un schéma localement noethérien régulier de dimension 1, et X un S-schéma plat, quasi-séparé et quasi-compact sur S. Alors $\mathscr{A}(X)$ est un $\mathscr{O}_S$-module plat. En effet, on peut supposer que S est local, notons s son point fermé, i l'inclusion $X_s \hookrightarrow X$, et π une uniformisante de $R = \mathscr{O}(S)$; comme X est plat sur S, on a une suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X \xrightarrow{\ \pi\ } \mathscr{O}_X \longrightarrow i_*(\mathscr{O}_{X_s}) \to 0$$

et donc, en prenant les sections globales, on obtient que $\mathscr{A}(X)$ est un R-module sans π-torsion, donc plat. [138] On obtient de plus que le morphisme de $\mathscr{A}((X_{af})_s) = \mathscr{A}(X)/\pi\mathscr{A}(X)$ vers $\mathscr{A}(X_s)$, induit par le morphisme $X \to X_{af}$, est *injectif.*

On peut maintenant démontrer la proposition suivante (cf. la remarque 11.11.1).

Proposition 12.9. — *Soient* S *un schéma localement noethérien régulier de dimension* $\leqslant 1$, G *un* S-*schéma en groupes plat, quasi-séparé et quasi-compact sur* S. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est affine sur* S.

(ii) G *est quasi-affine sur* S.

(iii) G *opère fidèlement sur un* S-*schéma quasi-affine et plat* X.

(iv) G *opère linéairement et fidèlement sur un module quasi-cohérent* $\mathscr{E}$ *plat sur* S.

(v) *Le morphisme* $\rho : G \to G_{af}$ *est un monomorphisme.*

Démonstration. L'implication (i) ⇒ (ii) est évidente, ainsi que (ii) ⇒ (iii) (prendre $X = G$).

Supposons (iii) vérifié. Comme $\mathscr{A}(G)$ et $\mathscr{A}(X)$ sont des $\mathscr{O}_S$-modules plats on obtient, en procédant comme en 11.11, que G opère (à droite) fidèlement sur X_{af} et opère donc (à gauche) linéairement et fidèlement sur le $\mathscr{O}_S$-module quasi-cohérent plat $\mathscr{A}(X)$.

D'autre part, si (iv) est vérifié alors, d'après 11.6.1 (ii), le monomorphisme $G \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_S}(\mathscr{E})$ se factorise à travers G_{af}, donc $G \to G_{af}$ est un monomorphisme.

Enfin, supposons (v) vérifié et montrons que $\rho : G \to G_{af}$ est un isomorphisme. Remplaçant S par une de ses composantes connexes, on peut supposer S irréductible, de point générique η. Comme la formation de G_{af} commute aux changements de base plats, on a $(G_{af})_\eta = (G_\eta)_{af}$, et donc le morphisme $G_\eta \to (G_\eta)_{af}$ est un monomorphisme, donc une immersion fermée, d'après 12.1, donc un isomorphisme puisque $\mathscr{O}((G_\eta)_{af}) = \mathscr{O}(G_\eta)$. Si $S = \mathrm{Spec}(\kappa(\eta))$ on a fini ; on peut donc supposer $\dim S = 1$.

Soit alors s un point fermé de S, montrons que $G_s \to (G_{af})_s$ est un isomorphisme et que ρ est plat en tous les points de G_s. Pour cela, on peut supposer que S est local, de point fermé s. Le morphisme $\rho_s : G_s \to (G_{af})_s$ obtenu par changement de base est un monomorphisme, donc une immersion fermée d'après 12.1, donc le morphisme $\mathscr{O}((G_{af})_s) \to \mathscr{O}(G_s)$, induit par ρ_s, est surjectif. Or, d'après la remarque précédente, il est aussi injectif, donc c'est un isomorphisme. (En particulier, ρ est donc surjectif).

[138] N.D.E. : Ceci est vrai, plus généralement, si S est localement noethérien régulier de dimension $\leqslant 2$, cf. [**Ray70a**], VII 3.2.

Il résulte alors du lemme 12.7 que $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{G}_{\mathrm{af}}$ est fidèlement plat. Comme G est quasi-compact sur S et G_{af} séparé sur S, alors ρ est aussi quasi-compact (cf. EGA I, 6.6.4). Par conséquent, ρ est un monomorphisme fidèlement plat et quasi-compact, donc un isomorphisme. Ceci prouve la proposition.

Enfin, démontrons la Prop. 2.1 de l'Exp. XVII, Appendice III ; en tenant compte de [**Per76**], Cor. 4.2.5, on a substitué dans les hypothèses « quasi-compact et quasi-séparé » à « de type fini » (si l'on suppose G de type fini, on peut utiliser 12.1 au lieu de *loc. cit.*).

Proposition 12.10. — *Soient* S *un schéma localement noethérien régulier de dimension* $\leqslant 1$*,* G *un* S*-schéma en groupes plat, quasi-compact et quasi-séparé.*

(i) *Le morphisme canonique* $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{G}_{\mathrm{af}}$ *est fidèlement plat et quasi-compact. Par conséquent,* G_{af} *représente le faisceau* (fpqc) *quotient de* G *par* $\mathrm{N} = \mathrm{Ker}(\rho)$.

(ii) *Si de plus* G *est de type fini sur* S*, alors* ρ *est de présentation finie et* G_{af} *représente le faisceau* (fppf) *quotient de* G *par* N *et est de type fini sur* S.

(iii) *Supposons de plus* G_η affine *pour tout point maximal* η *de* S*. Alors* N *est un* S*-groupe étale, et est le groupe unité si* G *est séparé sur* S.

Démonstration. D'abord, comme G_{af} est affine donc séparé sur S, alors ρ est quasi-compact (cf. EGA I, 6.6.4) et le noyau $\mathrm{N} = \mathrm{Ker}(\rho)$ est un sous-groupe fermé de G. De plus, remplaçant S par une de ses composantes connexes, on peut supposer S irréductible, de point générique η.

Remarquons que, pour prouver (i) et (ii), il suffit de montrer que ρ est fidèlement plat car alors, d'après l'Exp. IV, 5.1.7.1, G_{af} représente le faisceau (fpqc) quotient de G par N, et si de plus G est de type fini sur S, donc de présentation finie (S étant localement noethérien), alors, d'après 9.2 (xiii), ρ est de présentation finie (ainsi que $\mathrm{G}_{\mathrm{af}} \to \mathrm{S}$) et donc ρ est couvrant pour la toplogie (fppf).

On peut donc supposer $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{R})$, où R est un anneau de valuation discrète (si $\dim \mathrm{S} = 1$) ou bien le corps $\kappa(\eta)$ (si $\dim \mathrm{S} = 0$). Notons s le point fermé de S. Comme la formation de G_{af} commute aux changements de base plats, le morphisme canonique $\mathrm{G}_\eta \to (\mathrm{G}_\eta)_{\mathrm{af}}$ s'identifie au morphisme $\rho_\eta : \mathrm{G}_\eta \to (\mathrm{G}_{\mathrm{af}})_\eta$, et comme $\mathscr{O}((\mathrm{G}_{\mathrm{af}})_\eta) = \mathscr{O}((\mathrm{G}_\eta)_{\mathrm{af}}) = \mathscr{O}(\mathrm{G}_\eta)$, alors ρ_η est fidèlement plat d'après [**Per76**], 4.2.5 (voir aussi l'ajout VI_{A}, 6.6). Si $\dim \mathrm{S} = 1$, on obtient de même que ρ_s est fidèlement plat, puisque le morphisme $\mathscr{O}((\mathrm{G}_{\mathrm{af}})_s) \to \mathscr{O}(\mathrm{G}_s)$ est injectif, d'après la remarque 12.8. Donc, d'après le lemme 12.7, ρ est fidèlement plat. Ceci prouve (i) et (ii). En particulier, N est plat sur S.

Supposons maintenant G_η affine. Comme ρ_η coïncide avec le morphisme canonique $\mathrm{G}_\eta \to (\mathrm{G}_\eta)_{\mathrm{af}}$, son noyau N_η est le groupe unité. Montrons que N est étale sur S. Comme N est plat sur S, il reste à voir que N_s est étale sur $\kappa(s)$, pour tout point $s \neq \eta$ de S. Il n'y a rien à montrer si $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\kappa(\eta))$, donc on peut supposer que $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{R})$, où R est un anneau de valuation discrète. Soient s le point fermé de S, K le corps des fractions de R, et π une uniformisante. Soient $x \in \mathrm{N}_s$ et U_x un voisinage ouvert affine de x dans N ; comme N est plat sur S, alors $\mathrm{U}_x \cap \mathrm{N}_\eta$ est non vide, donc égal à $\{\varepsilon(\eta)\}$, où ε désigne la section unité. Donc $A = \mathscr{O}(U_x)$ est une R-algèbre plate, telle que $A_K = K$ et $\pi^{-1} \notin A$ (puisque π appartient à l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{U,x}$). Il en résulte que $A = R$, et donc la projection $U_x \to S$ est un isomorphisme. Ceci prouve que N est étale sur S ; si de plus G est séparé sur S, alors l'isomorphisme inverse $S \to U_x$ égale la section unité (puisqu'ils coïncident sur l'ouvert dense $\{\eta\}$ de $S = \mathrm{Spec}(R)$), donc N est le groupe unité. La proposition est démontrée.

On obtient en particulier le corollaire suivant, dont deux autres démonstrations se trouvent dans [**An73**], Prop. 2.3.1 et [**PY06**], Prop. 3.1

***Corollaire 12.10.1.* —** *Soient* R *un anneau de valuation discrète,* K *son corps des fractions,* G *un* R*-schéma en groupes séparé, plat et de type fini sur* R*. Si* G_K *est affine, alors* G *est affine.*

***Remarques 12.10.2.* —** (a) D'une part, O. Gabber nous a indiqué des exemples où G est un groupe plat et de type fini sur un anneau de valuation discrète, dont la fibre générique est une variéte abélienne, et où le noyau N de $G \to G_{\mathrm{af}}$ n'est pas lisse.

(b) D'autre part, signalons que M. Raynaud a donné un exemple, pour S étant l'espace affine de dimension 2 sur un corps k, d'un S-schéma en groupes lisse et quasi-affine, à fibres affines et connexes, qui n'est pas affine sur S, cf. [**Ray70a**], § VII.3, p. 116.

13. Groupes affines plats sur une base régulière de dimension $\leqslant 2$

[139] Commençons par remarquer que l'argument bien connu qui montre que tout groupe algébrique affine sur un corps k est linéaire, ainsi que le lemme 11.12, s'étendent au cas d'un schéma en groupes G, affine, plat et de type fini sur un schéma de base S, noethérien régulier de dimension $\leqslant 2$. Pour S de dimension $\leqslant 1$, ceci prouve le point (b) de la remarque 11.11.1. L'extension au cas où $\dim S = 2$ repose sur le lemme suivant, qui nous a été communiqué par O. Gabber.

***Lemme 13.1.* —** *Soient* S *un schéma noethérien normal,* $\mathscr{A}$ *un* $\mathscr{O}_S$*-module quasi-cohérent plat,* $\mathscr{F}$ *un sous-*$\mathscr{O}_S$*-module de type fini de* $\mathscr{A}$*,* $\mathscr{F}^{**}$ *son bidual, et* U *le lieu de platitude de* $\mathscr{F}$*, i.e. l'ensemble des points* $s \in S$ *tels que* $\mathscr{F}_s$ *soit un* $\mathscr{O}_{S,s}$*-module plat.*

(i) U *est un ouvert de* S *et* $\mathscr{F}^{**} = j_*j^*(\mathscr{F})$*, où* j *désigne l'inclusion* $U \hookrightarrow X$.

(ii) *Le morphisme canonique* $j_*(\mathscr{E}) \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A} \to j_*(\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_U} j^*(\mathscr{A}))$ *est un isomorphisme, pour tout* $\mathscr{O}_U$*-module quasi-cohérent* $\mathscr{E}$*.*

(iii) *En particulier,* $\mathscr{V} = j_*j^*(\mathscr{F})$ *est un sous-module de* $\mathscr{A} = j_*j^*(\mathscr{A})$*, et le morphisme canonique* $\mathscr{V} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A} \to j_*j^*(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A})$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. Remplaçant S par une de ses composantes connexes, on peut supposer S intègre. D'après EGA IV_2, 2.1.12, le lieu de platitude de $\mathscr{F}$, i.e. l'ensemble des points $s \in S$ tels que $\mathscr{F}_s$ soit un $\mathscr{O}_{S,s}$-module plat, est un ouvert U de S ; notons j l'inclusion $U \hookrightarrow S$. Comme $\mathscr{A}_s$ est plat, donc sans torsion, il en est de même de $\mathscr{F}_s$,

[139] N.D.E. : On a ajouté cette section.

donc U contient tous les points de codimension $\leqslant 1$. Par conséquent, d'après [**BAC**], VII, § 4.2, cor. du th. 1, on a $\mathscr{F}^{**} = j_*j^*(\mathscr{F})$, et l'on obtient donc un monomorphisme $\mathscr{F}^{**} \to j_*j^*(\mathscr{A})$.

La démonstration de (ii) est analogue à celle de EGA III, 1.4.15, rappelée en 11.0. D'autre part, comme S est normal, le morphisme $\mathscr{O}_S \to j_*j^*(\mathscr{O}_S)$ est un isomorphisme (cf. EGA IV$_2$, 5.8.6 et 5.10.5). D'après (ii) appliqué à $\mathscr{E} = \mathscr{O}_U$, on a donc $\mathscr{A} = j_*j^*(\mathscr{A})$. Enfin, comme $j^*(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A}) = j^*(\mathscr{F}) \otimes_{\mathscr{O}_U} j^*(\mathscr{A})$, la dernière assertion de (iii) découle de (ii) appliqué à $\mathscr{E} = j^*(\mathscr{F})$. Le lemme est démontré.

Par ailleurs, rappelons qu'un R-module de type fini M est dit réflexif si le morphisme canonique de M vers son bidual M** est un isomorphisme. Lorsque R est un anneau noethérien régulier de dimension $\leqslant 2$, ceci entraîne que M est *projectif.* En effet, pour tout R-module de type fini N, considérons une résolution $L_1 \to L_0 \to N \to 0$, où L_0 et L_1 sont des R-modules finis libres, alors on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow N^* \longrightarrow L_0^* \longrightarrow L_1^* \longrightarrow Q \longrightarrow 0,$$

où Q désigne le conoyau de $L_0^* \to L_1^*$, et comme R est de dimension homologique $\leqslant 2$ (cf. [**BAC**], X § 4.2, cor. 1 du th. 1), il en résulte que N* est projectif.

Proposition 13.2. — *Soient* S *un schéma noethérien régulier de dimension* $\leqslant 2$*,* G *un* S*-groupe affine et plat,* $\mathscr{A}(G)$ *son algèbre affine.*

(i) *Si* G *est de type fini sur* S*, il est isomorphe à un sous-groupe fermé de* $H = \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{V})$*, pour un certain* $\mathscr{O}_S$*-module* $\mathscr{V}$ *localement libre de rang fini. Si de plus* S *est affine, on peut prendre* $\mathscr{V} = \mathscr{O}_S^{\oplus d}$ *pour un certain* d*, d'où* $H = GL_{d,S}$.

(ii) $\mathscr{A}(G)$ *est limite inductive filtrante de sous-*$\mathscr{O}_S$*-algèbres de Hopf plates de type fini.*

Démonstration. Soit $\mathscr{B}$ une sous-$\mathscr{O}_S$-algèbre de type fini de $\mathscr{A}(G)$. Comme tout module cohérent sur un ouvert de S s'étend en un module cohérent sur S (cf. EGA I, 9.4.5), il existe un sous-$\mathscr{O}_S$-module cohérent $\mathscr{M}$ de $\mathscr{B}$ qui engendre $\mathscr{B}$ comme $\mathscr{O}_S$-algèbre (*loc. cit.*, 9.6.5). D'après 11.10.bis, $\mathscr{M}$ est contenu dans un sous-$\mathscr{O}_S$-module cohérent G-stable $\mathscr{F}$. (N. B. Comme G est ici affine sur S, la démonstration de *loc. cit.* s'écrit plus simplement : on peut y remplacer $f_*f^*(\mathscr{E})$ par $\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A}(G)$, etc.)

Soit j l'inclusion $U \hookrightarrow S$, où U désigne le lieu de platitude de $\mathscr{F}$. D'après le lemme 13.1 et le rappel qui le suit, $\mathscr{V} = j_*j^*(\mathscr{F})$ est un sous-$\mathscr{O}_S$-module localement libre de $\mathscr{A}(G)$, et comme le morphisme canonique

$$\mathscr{V} \otimes \mathscr{A}(G) \longrightarrow j_*j^*(\mathscr{F} \otimes \mathscr{A}(G))$$

est un isomorphisme, alors $\mathscr{V}$ est un sous-G-module de $\mathscr{A}(G)$. L'action de G sur $\mathscr{V}$ induit alors un morphisme de S-groupes affines $\rho_{\mathscr{V}} : G \to H = \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{V})$ et donc un morphisme de $\mathscr{O}_S$-algèbres de Hopf $\phi_{\mathscr{V}} : \mathscr{A}(H) \to \mathscr{A}(G)$. Notons $\mathscr{A}_{\mathscr{V}}$ l'image de $\phi_{\mathscr{V}}$; c'est l'algèbre affine d'un sous-groupe fermé $G_{\mathscr{V}}$ de H, qui est l'image fermée de $\rho_{\mathscr{V}}$. Montrons que $\mathscr{A}_{\mathscr{V}}$ contient $\mathscr{B}$.

La question étant locale sur S, on peut supposer que $S = \mathrm{Spec}(R)$ et que $V = \Gamma(S, \mathscr{V})$ est un R-module libre de base $v_1, \ldots, v_n$; dans ce cas $H \simeq GL_{n,R}$ et $\mathscr{A}(H)$ est engendrée comme R-algèbre par les « coefficients matriciels » c_{ij} et l'élément d^{-1}, où

d désigne le déterminant. Soit Δ (resp. ε) la comultiplication (resp. l'augmentation) de A. Pour $j = 1, \dots, n$, écrivons $\Delta(v_j) = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes a_{ij}$; alors $a_{ij} = \phi(c_{ij})$ appartient à $\mathrm{Im}(\phi)$. D'autre part, comme V est un sous-R-module de A, on peut utiliser l'égalité $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{A}}) \circ \Delta = \mathrm{id}_{\mathrm{A}}$, qui entraîne que $v_j = \sum_i \varepsilon(v_i) a_{ij}$ appartient à $\mathrm{Im}(\phi)$. Comme V contient un système de générateurs de $\mathrm{B} = \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{B})$, il en résulte que $\mathrm{B} \subset \mathrm{Im}(\phi)$.

Si G est de type fini sur S, on peut prendre $\mathscr{B} = \mathscr{A}(\mathrm{G})$ et ϕ est alors surjectif, donc le morphisme de S-groupes $\mathrm{G} \to \mathrm{H} = \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{V})$ est une immersion fermée.

Si de plus S est affine, il existe un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module localement libre $\mathscr{V}'$ de rang fini tel que $\mathscr{V} \oplus \mathscr{V}' = \mathscr{O}_{\mathrm{S}}^{d}$ comme $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules. Considérant $\mathscr{V}'$ comme G-module trivial, on peut remplacer $\mathscr{V}$ par $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}^{d}$, et l'on obtient ainsi que G est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_{d,\mathrm{S}}$.

Enfin, revenons au cas d'un S-groupe affine et plat G arbitraire. D'après EGA I, 9.4.9, $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ est la réunion de ses sous-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules cohérents $\mathscr{M}$, donc aussi des sous-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbres de Hopf $\mathscr{A}_{\mathscr{V}}$ comme plus haut, d'où (ii).

***Exemple 13.3.* —** Soit R un anneau de valuation discrète, d'uniformisante π et de corps des fractions K. Considérons le système projectif filtrant de R-groupes :

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{G}_{a,\mathrm{R}} \xrightarrow{\times \pi} \mathbb{G}_{a,\mathrm{R}} \xrightarrow{\times \pi} \mathbb{G}_{a,\mathrm{R}}$$

(qui correspond au système inductif $\mathrm{R}[\mathrm{X}_0] \to \mathrm{R}[\mathrm{X}_1] \to \mathrm{R}[\mathrm{X}_2] \to \cdots$, où les morphismes de transition sont donnés par $\mathrm{X}_n = \pi \mathrm{X}_{n+1}$). Sa limite projective G est un R-schéma en groupes affine plat, non de type fini, dont la fibre spéciale est triviale et dont la fibre générique est $\mathbb{G}_{a,\mathrm{K}}$; la R-algèbre affine $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ est le sous-anneau de K[X] formé des polynômes dont le coefficient constant appartient à R. (N. B. On a déjà rencontré cet exemple dans la remarque 11.10.1.) Notons que G représente le foncteur qui à toute R-algèbre B associe l'ensemble des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de B, où $x_n = \pi x_{n+1}$ pour tout n. (En particulier, chaque x_n est indéfiniment π-divisible.)

Soit maintenant S un schéma noethérien tel que tout $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module cohérent soit le quotient d'un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module localement libre de type fini ; c'est le cas, par exemple, si S est un schéma séparé noethérien régulier, cf. SGA 6, Exp. II, 2.1.1 et 2.2.7. (On peut montrer que tout schéma noethérien régulier de dimension $\leqslant 1$ a aussi cette propriété ; par contre elle n'est pas vérifiée lorsque S est le plan affine sur un corps k, dont l'origine a été dédoublée, cf. *loc. cit.*, 2.2.7.2.)

***Définition 13.4.* —** Soit G un S-groupe affine et plat. Suivant R. W. Thomason ([**Th87**], 2.1), disons que le couple (G, S) possède la propriété de résolution équivariante, ou vérifie (RE), si pour tout G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module cohérent $\mathscr{F}$, il existe un G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module $\mathscr{E}$ localement libre de rang fini, et un épimorphisme G-équivariant $\mathscr{E} \to \mathscr{F}$.

Dans *loc. cit.*, Th. 3.1, Thomason démontre le résultat ci-dessous, sous l'hypothèse que G soit essentiellement libre sur S (cf. la remarque plus bas). Gabber nous a indiqué la démonstration plus simple ci-dessous, qui n'utilise pas cette hypothèse.

***Proposition 13.5.* —** *Soient* S *un schéma noethérien et* G *un* S*-groupe affine, plat et de type fini, d'algèbre affine* $\mathscr{A}(\mathrm{G})$*. On suppose que* (G, S) *vérifie* (RE)*. Alors :*

(i) G *est isomorphe à un sous-groupe fermé de* $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathscr{O}_\mathrm{S}}(\mathscr{V})$, *pour un certain* $\mathscr{O}_\mathrm{S}$*-module* $\mathscr{V}$ *localement libre de rang fini.*

(ii) *Si de plus* S *est affine, on peut prendre* $\mathscr{V} = \mathscr{O}_\mathrm{S}^{\oplus d}$ *pour un certain* n, *d'où* $\mathrm{H} = \mathrm{GL}_{d,\,\mathrm{S}}$.

La démonstration est analogue à celle de 13.2. Comme dans *loc. cit.*, il existe un sous-$\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module cohérent G-stable $\mathscr{F}$ qui engendre $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\mathrm{G})$ comme $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-algèbre. Remplaçant S par une de ses composantes connexes, on peut supposer S connexe. D'après l'hypothèse (RE), il existe un G-$\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module $\mathscr{E}$ localement libre de rang n, et un épimorphisme de $\mathscr{A}$-comodules $\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$. Posons $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathscr{O}_\mathrm{S}}(\mathscr{E})$, c'est un S-schéma en groupes, localement isomorphe à $\mathrm{GL}_{n,\,\mathrm{S}}$. L'action de G sur $\mathscr{E}$ induit un morphisme de S-groupes affines $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$, correspondant à un morphisme de $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-algèbres de Hopf $\phi : \mathscr{A}(\mathrm{H}) \to \mathscr{A}(\mathrm{G})$. Montrons que ρ est une immersion fermée.

La question étant locale sur S, on peut supposer que $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{R})$ et que $\mathrm{V} = \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{E})$ est un R-module libre de base $v_1, \dots, v_n$; dans ce cas $\mathrm{H} \simeq \mathrm{GL}_{n,\mathrm{R}}$ et $\mathrm{B} = \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{A}(\mathrm{H}))$ est engendrée comme R-algèbre par les « coefficients matriciels » c_{ij} et l'élément d^{-1}, où d désigne le déterminant. Soit Δ (resp. ε) la comultiplication (resp. l'augmentation) de $\mathrm{A} = \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{A}(\mathrm{G}))$, soit $\mu : \mathrm{V} \to \mathrm{V} \otimes_\mathrm{R} \mathrm{A}$ la structure de A-comodule sur V, et soit $\mathrm{F} = \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{F})$. Pour $j = 1, \dots, n$, écrivons

$$\mu(v_j) = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes a_{ij}$$

alors $\phi(c_{ij}) = a_{ij}$. D'autre part, comme $\pi : \mathrm{V} \to \mathrm{F}$ est un morphisme de A-comodules, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(v_i) \otimes a_{ij} = (\pi \otimes_\mathrm{R} \mathrm{id}_\mathrm{A})(\mu(v_j)) = \Delta(\pi(v_j))$$

et donc

$$\pi(v_j) = (\varepsilon \otimes_\mathrm{R} \mathrm{id}_\mathrm{A})\Delta(\pi(v_j)) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon\pi(v_i)\, a_{ij} = \phi\big(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon\pi(v_i)\, c_{ij}\big).$$

Donc $\phi(\mathrm{B})$ contient $\pi(\mathrm{V}) = \mathrm{F}$, qui engendre A comme R-algèbre, et donc ϕ est surjectif. Ceci montre que ρ est une immersion fermée, d'où l'assertion (i).

Si de plus S est affine, il existe un $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module localement libre $\mathscr{V}'$ de rang fini tel que $\mathscr{V} \oplus \mathscr{V}' = \mathscr{O}_\mathrm{S}^d$ comme $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-modules. Considérant $\mathscr{V}'$ comme G-module trivial, on peut remplacer $\mathscr{V}$ par $\mathscr{O}_\mathrm{S}^d$, et l'on obtient ainsi que G est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_{d,\,\mathrm{S}}$. La proposition est démontrée.

Remarques 13.6. — (a) Pour être complet, esquissons rapidement l'argument de Thomason ([**Th87**], Th. 3.1), en conservant les notations précédentes. L'épimorphisme G-équivariant $\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ induit une immersion fermée $\tau : \mathrm{G} \to \mathbb{V}(\mathscr{E})$ telle que $\tau(g'g) = \tau(g') \cdot g$ (N. B. : G opère à droite sur $\mathbb{V}(\mathscr{E})$) et l'on a un isomorphisme $\mathrm{H} \simeq \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}}(\mathbb{V}(\mathscr{E}))^{\mathrm{op}}$, qui est compatible avec les opérations de G à gauche sur $\mathscr{E}$ et à droite sur $\mathbb{V}(\mathscr{E})$. Soit alors N le transporteur strict $\underline{\mathrm{Transpstr}}_\mathrm{H}(\tau(\mathrm{G}), \tau(\mathrm{G}))$; lorsque G est essentiellement libre sur S, il résulte de 6.2.4 e) que N est un sous-schéma en groupes fermé de H, donc affine sur S. De plus, ρ se factorise en un morphisme de S-groupes $\rho' : G \to N$. D'autre part, pour tout $S' \to S$ et $h \in N(S')$, posons $\pi(h) = \tau(1) \cdot h$ (où 1 est l'élément neutre de $G(S')$) ; ceci définit un morphisme de S-schémas $\pi : N \to \tau(G)$, qui est une rétraction de ρ' (lorsqu'on identifie G à $\tau(G)$). Comme N est séparé sur S, il en résulte que ρ' est une immersion fermée.

(b) Il semble que la démonstration de [**Th87**], Th. 3.1 nécessite l'hypothèse que G soit essentiellement libre sur S, qui ne figure pas dans *loc. cit.* (l'auteur invoquant à la place le fait que H est essentiellement libre). Toutefois cette hypothèse est vérifiée lorsque G est *réductif* (cf. Exp. XXII 5.7.8), donc est vérifiée dans tous les cas considérés dans *loc. cit.*, Cor. 3.2. En particulier, Thomason démontre dans *loc. cit.*, 2.5, que si S est séparé noethérien régulier de dimension $\leqslant 2$, et si G est affine, de présentation finie, et tel que $\mathscr{A}(G)$ soit un $\mathscr{O}_S$-module localement projectif, alors (G, S) vérifie (RE) ; d'après 13.5, ceci donne 13.2 sous une hypothèse légèrement plus restrictive.

Pour terminer, signalons que la démonstration de [**Th87**], 2.5, peut être légèrement simplifiée, comme suit. (Pour abréger, on se place dans la situation où $S = \mathrm{Spec}(R)$ est affine.)

Proposition 13.7. — *Soient* R *un anneau noethérien régulier de dimension* $\leqslant 2$*,* C *une* R*-cogèbre, projective comme* R*-module, et* F *un* C*-comodule, de type fini sur* R*. Alors* F *est le quotient d'un* C*-comodule* V*, projectif de type fini sur* R*.*

Démonstration. Remplaçant Spec(R) par une de ses composantes connexes, on peut supposer R intègre, de corps des fractions K. Notons Δ (resp. ε) la comultiplication (resp. l'augmentation) de C et $\rho : F \to F \otimes C$ la structure de comodule sur F. Soit $\pi : W \to F$ un morphisme surjectif, où W est un R-module libre de rang fini. On munit $W \otimes C$ de la structure de comodule définie par $\mathrm{id}_W \otimes \Delta$, et de même pour $F \otimes C$. Alors $\rho : F \to F \otimes C$ est un morphisme de C-comodules, qui admet $\mathrm{id}_F \otimes \varepsilon$ pour section.

Soit W' le C-comodule défini par le carré cartésien ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} W' \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[d, "\rho"] \\ W \otimes C \arrow[r, "\pi \otimes \mathrm{id}_C"] & F \otimes C \end{tikzcd}$$

i.e. W' s'identifie au noyau du morphisme $W \otimes C \to (F \otimes C)/\rho(F)$, et la projection $\pi' : W' \to F$, donnée par $x \mapsto (\pi \otimes \varepsilon)(x)$, est surjective. Comme F est un R-module de type fini, il existe un sous-comodule V' de W', de type fini sur R, tel que $\pi'(V') = F$. Comme $W \otimes C$ est sans R-torsion, il en est de même de V', donc remplaçant F par V', on peut supposer au départ que F est *sans torsion*.

Appliquant la construction précédente à ce nouvel F, on obtient V' comme ci-dessus. Considérons alors le sous-comodule V, noyau du morphisme

$$W \otimes C \longrightarrow E = \frac{W \otimes C \otimes K}{V' \otimes K}.$$

Alors V contient V' et $Q = (W \otimes C)/V$ est un sous-R-module du K-espace vectoriel E ; posons $Q' = E/Q$. Comme $W \otimes C$ et E sont des R-modules plats, on obtient que, pour tout R-module N,

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{R}}(\mathrm{V},\mathrm{N}) \simeq \mathrm{Tor}_2^{\mathrm{R}}(\mathrm{Q},\mathrm{N}) \simeq \mathrm{Tor}_3^{\mathrm{R}}(\mathrm{Q}',\mathrm{N})$$

et comme R est régulier de dimension $\leqslant 2$, le terme de droite est nul. Ceci montre que V est un R-module plat. Montrons enfin que V est un R-module de type fini. Posons $\mathrm{M} = \mathrm{W} \otimes \mathrm{C}$; il résulte de la définition que V/V' est isomorphe au sous-module de R-torsion $(\mathrm{M}/\mathrm{V}')_{\mathrm{tors}}$ de M/V'.

Comme M est un R-module projectif, il existe un R-module projectif P tel que $\mathrm{M} \oplus \mathrm{P}$ soit un R-module libre L. Alors $(\mathrm{M}/\mathrm{V}')_{\mathrm{tors}} \simeq (\mathrm{L}/\mathrm{V}')_{\mathrm{tors}}$. D'autre part, comme V' est de type fini, il existe un facteur direct $\mathrm{L}' \simeq \mathrm{R}^n$ de L tel que $\mathrm{V}' \subset \mathrm{L}'$, et l'on a donc aussi $(\mathrm{L}/\mathrm{V}')_{\mathrm{tors}} \simeq (\mathrm{L}'/\mathrm{V}')_{\mathrm{tors}}$, et ce dernier est de type fini puisque $(\mathrm{L}'/\mathrm{V}')$ l'est. Par conséquent, V est un R-module plat de type fini, donc projectif de type fini (R étant noethérien). La proposition 13.7 est démontrée.

Bibliographie

(140)

[An73] S. Anantharaman, *Schémas en groupes, espaces homogènes et espaces algébriques sur une base de dimension* 1, Mém. Soc. Math. France **33** (1973), 5-79.

[Ba55] I. Barsotti, *Un teorema di struttura per le varietà gruppali*, Atti Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **18** (1955), 43-50.

[BLR] S. Bosch, W. LÃ¼tkebohmert, M. Raynaud, *Néron Models*, Springer-Verlag, 1990.

[BAC] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Chap. I-IV, V-VII et X, Masson, 1985 et 1998.

[BTop] N. Bourbaki, *Topologie générale*, Chap. I-IV, Hermann, 1971.

[Br09] M. Brion, *Anti-affine algebraic groups*, J. Algebra **321** (2009), n°3, 934-952.

[Ch60] C. Chevalley, *Une démonstration d'un théorème sur les groupes algébriques*, J. Maths. Pure Appl. **39** (1960), 307-317.

[Co02] B. Conrad, *A modern proof of Chevalley's theorem on algebraic groups*, J. Ramanujan Math. Soc. **17** (2002), 1-18.

[DG70] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Masson & North-Holland, 1970.

[Gr73] L. Gruson, *Dimension homologique des modules plats sur un anneau noethérien*, Symposia Mathematica **XI** (1973), 243-254.

[Kn71] D. Knutson, *Algebraic spaces*, Lect. Notes Maths. **203**, Springer-Verlag, 1971.

[Ma07] B. Margaux, *Passage to the Limit in Non-Abelian Čech Cohomology*, J. Lie Theory **17** (2007), 591-596.

[MW94] A. Masuoka, D. Wigner, *Faithful flatness of Hopf algebras*, J. Algebra **170** (1994), 156-184.

(140) N.D.E. : références additionnelles citées dans cet Exposé

[Per76] D. Perrin, *Approximation des schémas en groupes, quasi-compacts sur un corps*, Bull. Soc. Math. France **104** (1976), 323-335.

[Pes66] C. Peskine, *Une généralisation du « Main Theorem » de Zariski*, Bull. Sci. Math. **90** (1966), 119-127.

[PY06] G. Prasad, J.-K. Yu, *On quasi-reductive group schemes*, J. Alg. Geom. **15** (2006), 507-549.

[Ray70a] M. Raynaud, *Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes*, Lect. Notes Maths. **119**, Springer-Verlag, 1970.

[Ray70b] M. Raynaud, *Anneaux locaux henséliens*, Lect. Notes Maths. **169**, Springer-Verlag, 1970.

[RG71] M. Raynaud, L. Gruson, *Critères de platitude et de projectivité*, Invent. math. **13** (1971), 1-89.

[Ro56] M. Rosenlicht, *Some basic theorems on algebraic groups*, Amer. J. Math. **78** (1956), 401-443.

[SS09] C. Sancho de Salas, F. Sancho de Salas, *Principal bundles, quasi-abelian varieties and structure of algebraic groups*, J. Algebra **322** (2009), n°8, 2751-2772.

[Se68] J.-P. Serre, *Groupes de Grothendieck des schémas en groupes réductifs déployés*, Publ. math. I.H.É.S. **34** (1968), 37-52.

[Se99] C. S. Seshadri, *Chevalley : some reminiscences*, Transform. Groups **4** (1999), nos 2-3, 119-125.

[Ta72] M. Takeuchi, *A correspondence between Hopf ideals and sub-Hopf algebras*, Manuscripta Math. **7** (1972), 251-270.

[Ta79] M. Takeuchi, *Relative Hopf modules – Equivalences and freeness criteria*, J. Algebra **60** (1979), 452-471.

[Th87] R. W. Thomason, *Equivariant resolution, linearization, and Hilbert's fourteenth problem over arbitrary base schemes*, Adv. Math. **65** (1987), 16-34.