

EXPOSÉ VII_B

ÉTUDE INFINITÉSIMALE DES SCHÉMAS EN GROUPES

par P. GABRIEL

B) Groupes formels

⁽⁰⁾ L'étude des groupes formels est habituellement d'une simplicité extrême. Si cela n'apparaît pas clairement dans les pages qui suivent, la responsabilité en incombe à un arithméticien, qui prétend connaître des groupes formels sur « autre chose que des corps ». ⁽¹⁾ Nous avons donc déroulé pour les groupes formels « localement libres sur des limites projectives d'anneaux artiniens » les généralités qu'on énonce d'habitude pour les groupes formels définis sur un corps. Pour une étude plus détaillée de ces derniers, nous renvoyons au séminaire de géométrie algébrique 1964/65 de Heidelberg-Strasbourg. ⁽²⁾

0. Rappels sur les anneaux et modules pseudocompacts

Ce paragraphe contient quelques préliminaires techniques ; nous y rappelons et complétons quelques résultats de [CA] (*Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France 90, 1962).

0.1. — Un anneau *pseudocompact* à gauche est un anneau topologique avec élément unité, séparé et complet, qui possède une base de voisinages de 0 formée d'idéaux à gauche I de colongueur finie (i.e. $\text{long}_A(A/I) < +\infty$). Nous allons supposer ici que A est commutatif, de sorte qu'il n'y a pas à distinguer « entre la gauche et la droite ».

⁽⁰⁾N.D.E. : Version du 13/10/2024

⁽¹⁾N.D.E. : L'intérêt des groupes formels sur un anneau local noethérien complet apparaît, par exemple, dans les travaux de Lubin et Tate (cf. [LT65]). L'étude des groupes formels sur une base arbitraire, et des questions de relèvement et de déformation, en particulier pour les groupes de Barsotti-Tate (« groupes p -divisibles ») a donné lieu à une abondante littérature, cf. par exemple [LT66, Ta67, Gr74, Me72, La75, Fo77, Il85, Br00] ; en particulier, les résultats du présent exposé sont en grande partie repris dans le chapitre I de [Fo77].

⁽²⁾N.D.E. : Les éditeurs ont seulement trouvé un tel séminaire daté 1965/66 et intitulé « Groupes algébriques linéaires », où la notion de groupe formel n'apparaît pas ; voir par contre [De72].

En particulier, les quotients A/I sont des anneaux artiniens et A s'identifie à la limite projective topologique de ces anneaux qu'on munit de la topologie discrète.

Un anneau local noethérien complet $(A, \mathfrak{m})$ est évidemment pseudocompact ⁽³⁾.

0.1.1. — Tout idéal fermé I de A est l'intersection des idéaux ouverts qui le contiennent. ⁽⁴⁾ Tout idéal fermé maximal est donc ouvert. De plus, si I est un idéal ouvert de A , les idéaux maximaux de A/I correspondent biunivoquement aux idéaux maximaux $\mathfrak{m}$ qui contiennent I ; ces derniers sont donc ouverts et fermés. Par conséquent, tout idéal fermé maximal est un idéal maximal *ouvert* (et donc fermé); la réciproque étant évidente. On notera $\Upsilon(A)$ l'ensemble de ces idéaux.

Si I est un idéal ouvert de A et si $\mathfrak{m} \in \Upsilon(A)$, le localisé $(A/I)_{\mathfrak{m}}$ est donc un anneau local si $\mathfrak{m}$ contient I et est nul sinon. Comme l'anneau A/I est artinien, il est produit direct d'un nombre fini d'anneaux locaux, ce qu'on peut écrire

$$A/I \simeq \prod_{\mathfrak{m} \in \Upsilon(A)} (A/I)_{\mathfrak{m}}.$$

On tire de là des isomorphismes « canoniques »

$$A \simeq \varprojlim_I (A/I) \simeq \varprojlim_I \prod_{\mathfrak{m}} (A/I)_{\mathfrak{m}} \simeq \prod_{\mathfrak{m}} \varprojlim_I (A/I)_{\mathfrak{m}} \simeq \prod_{\mathfrak{m}} A_{\mathfrak{m}},$$

où l'on a posé :

$$A_{\mathfrak{m}} = \varprojlim_I (A/I)_{\mathfrak{m}}.$$

Cette *composante locale* $A_{\mathfrak{m}}$ est une limite projective filtrante d'anneaux locaux artiniens, munis de la topologie discrète; c'est donc un anneau local qui est pseudocompact pour la topologie de la limite projective. ⁽⁵⁾

479

0.1.2. — Soit $\mathfrak{r}(A)$ l'intersection des idéaux maximaux ouverts de A , c'est-à-dire le produit cartésien des idéaux $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ lorsqu'on identifie A à $\prod_{\mathfrak{m}} A_{\mathfrak{m}}$. Pour tout idéal ouvert I de A , l'image de $\mathfrak{r}(A)$ dans A/I est contenue dans le radical de A/I . Une certaine puissance de cette image est donc nulle, de sorte que $\mathfrak{r}(A)^n$ est contenu dans I lorsque n est assez grand. La suite des $\mathfrak{r}(A)^n$ tend donc vers 0.

Il en va de même de la suite des x^n , lorsque x appartient à $\mathfrak{r}(A)$. Autrement dit, tout élément de $\mathfrak{r}(A)$ est topologiquement nilpotent et la réciproque est claire. Il s'ensuit que la suite de terme général $1 + x + \dots + x^n$ est convergente et converge vers $1/(1 - x)$ lorsque $x \in \mathfrak{r}(A)$. Cela montre que $\mathfrak{r}(A)$ est le radical de Jacobson de

⁽³⁾N.D.E. : (lorsqu'on le munit de la topologie $\mathfrak{m}$ -adique)

⁽⁴⁾N.D.E. : En effet, si $x \notin I$, il existe un idéal ouvert I' tel que $(x + I) \cap I' = \emptyset$, alors $I + I'$ est un idéal ouvert ne contenant pas x . D'autre part, dans ce qui suit, on a explicité le fait que tout idéal « fermé maximal » est maximal et *ouvert*.

⁽⁵⁾N.D.E. : Remarquons que $A_{\mathfrak{m}}$ est le *localisé* de A en l'idéal maximal $\mathfrak{m}$. En effet, l'élément unité $e_{\mathfrak{m}}$ de $A_{\mathfrak{m}}$ est un idempotent de A n'appartenant pas à $\mathfrak{m}$, et comme $A = A_{\mathfrak{m}} \times B$, où $B = A(1 - e_{\mathfrak{m}})$, alors $A_{\mathfrak{m}}$ s'identifie au localisé $A_{e_{\mathfrak{m}}}$ et donc aussi au localisé $S^{-1}A$, où $S = A - \mathfrak{m}$. D'autre part, comme $e_{\mathfrak{m}}(1 - e_{\mathfrak{m}}) = 0$ alors $\mathfrak{m}$ contient $1 - e_{\mathfrak{m}}$ donc aussi B et donc $\mathfrak{m}$ s'identifie à $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}} \times B$.

A , c.-à-d., l'intersection de *tous* les idéaux maximaux de A (cf. Bourbaki, *Algèbre*, Chap. 8, § 6, th. 1). ⁽⁶⁾

Remarques. — ⁽⁷⁾ a) Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier *ouvert* de A alors, comme $A/\mathfrak{p}$ est artinien, $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal. Par conséquent, $\Upsilon(A)$ égale l'ensemble des idéaux *premiers ouverts* de A .

b) Chaque $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ est un *idéal de définition* de $A_{\mathfrak{m}}$, i.e. un idéal *ouvert* I tel que la suite des I^n tende vers 0 (cf. EGA 0_I, 7.1.2). Par conséquent, $\text{Spec}(A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}})$, muni de l'anneau topologique $A_{\mathfrak{m}}$, est un schéma *formel affine* au sens de EGA I, 10.1.2.

c) L'anneau topologique A est *admissible* au sens de EGA 0_I, 7.1.2, si et seulement si $\mathfrak{r}(A)$ est *ouvert* (donc un idéal de définition), et ceci a lieu si et seulement si $\Upsilon(A)$ est *fini*. Dans ce cas, le schéma formel affine $\text{Spf}(A) = \text{Spec}(A/\mathfrak{r}(A))$ (cf. EGA I, 10.1.2) a $\Upsilon(A)$, muni de la topologie discrète, comme espace sous-jacent, et le faisceau structural $\mathcal{A}$ pour anneau de sections sur une partie E de $\Upsilon(A)$ le produit $\prod_{\mathfrak{m} \in E} A_{\mathfrak{m}}$.

d) Soit A un anneau pseudocompact arbitraire. En 1.1 plus bas, l'espace $\Upsilon(A)$ est muni de la topologie discrète et du faisceau d'anneaux dont l'anneau des sections sur toute partie E est $\prod_{\mathfrak{m} \in E} A_{\mathfrak{m}}$. D'après b), tout point admet alors un voisinage ouvert qui est un schéma formel affine, donc ceci définit un *schéma formel* (EGA I, 10.4.2), qu'on notera $\text{Spf}(A)$. (Pour que ce schéma formel soit affine, il faut qu'il soit quasi-compact, donc que $\Upsilon(A)$ soit fini, et en ce cas $\text{Spf}(A)$ coïncide avec la définition de EGA I, 10.1.2).

0.1.3. — Si A et B sont deux anneaux pseudocompacts, un *homomorphisme* de A dans B est, par définition, une application *continue* compatible avec l'addition, la multiplication et les éléments unité. Un tel homomorphisme envoie un élément topologiquement nilpotent de A sur un élément topologiquement nilpotent de B ; il applique donc le radical $\mathfrak{r}(A)$ de A dans le radical $\mathfrak{r}(B)$ de B .

0.2. — Soit A un anneau pseudocompact (commutatif). Un *A -module pseudocompact* M est un A -module topologique, séparé et complet, qui possède une base de voisinages de 0 formée de sous-modules M' tels que M/M' soit de longueur finie sur A .

Si M et N sont deux A -modules pseudocompacts, un *morphisme* de M dans N est par définition une application A -linéaire continue. On notera $\text{Hom}_c(M, N)$ le groupe 480 de ces morphismes.

Proposition 0.2.B. — ⁽⁸⁾ (i) Les A -modules pseudocompacts forment une catégorie abélienne, qu'on notera $\mathbf{PC}(A)$. (En particulier, pour tout morphisme $f : M \rightarrow N$, $\text{Im}(f)$ est un sous-module complet, donc fermé dans N).

⁽⁶⁾N.D.E. : En effet, soit $x \in \mathfrak{r}(A)$; si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal ne contenant pas x , il existe $y \in A$ tel que $1 - xy \in \mathfrak{m}$, or $xy \in \mathfrak{r}(A)$ donc $1 - xy$ est inversible, d'où une contradiction. Notons la conséquence suivante : si $\Upsilon(A)$ est un ensemble *fini* $\{\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r\}$, les $\mathfrak{m}_i$ sont *tous* les idéaux maximaux de A .

⁽⁷⁾N.D.E. : On a ajouté ces remarques, afin de pouvoir comparer la définition du *spectre formel* $\text{Spf}(A)$ donnée en 1.1, avec celles de EGA I, 10.1.2 et 10.4.2.

⁽⁸⁾N.D.E. : On a mis en évidence les résultats de ce paragraphe dans la proposition qui suit, et l'on a indiqué ensuite les étapes de la démonstration, cf. [CA], § IV.3 ou [DG70], § V.2.

(ii) Les A -modules pseudocompacts de longueur finie (dont la topologie est donc discrète) forment un système de cogénérateurs de $\mathbf{PC}(A)$.

(iii) Les produits infinis et limites projectives filtrantes sont exacts, c.-à-d., $\mathbf{PC}(A)$ vérifie l'axiome $(AB5^*)$.⁽⁹⁾

Pour la commodité du lecteur, indiquons brièvement les étapes de la démonstration. D'abord, on a le lemme suivant ([CA] § IV.3, Lemme 1 ; pour la démonstration, voir [BEs], III, § 7.4, th. 1 et exemple 2) :

Lemme 0.2.C. — Soient B un anneau, I un ensemble ordonné filtrant, (M_i) et (N_i) deux systèmes projectifs de B -modules à gauche, indexés par I . Soit (s_i) un morphisme de systèmes projectifs $(M_i) \rightarrow (N_i)$, tel que s_i soit surjectif et de noyau artinien pour tout i . Alors, l'application

$$\varprojlim s_i : \varprojlim M_i \longrightarrow \varprojlim N_i$$

est surjective.

Corollaire 0.2.D ([CA] § IV.3, Prop. 10 & 11). — Soit M un A -module pseudocompact.

(i) Soit K un sous-module fermé de M . Alors M/K , muni de la topologie quotient, est un A -module pseudo-compact.

(ii) Soit (M_i) une famille filtrante décroissante de sous-modules fermés de M .

(a) L'application canonique $M \rightarrow \varprojlim M/M_i$ est surjective et a pour noyau $\bigcap_i M_i$.

(b) Pour tout sous-module fermé N de M , on a $N + \bigcap_i M_i = \bigcap_i (N + M_i)$.

Démonstration. Soit (L_j) la famille filtrante décroissante des sous-modules ouverts de M . On munit M/K de la topologie quotient, i.e. une base de voisinages de 0 est formée par les sous-modules ouverts $(K + L_j)/K$. Comme K est fermé, il est égal à l'intersection des $K + L_j$, donc l'application

$$\tau : M/K \longrightarrow \varprojlim_j M/(K + L_j)$$

est injective. Elle est également ouverte, le terme de droite étant la limite projective des modules discrets $M/(K + L_j)$. De plus, pour chaque j , l'application $t_j : M/L_j \rightarrow M/(K + L_j)$ est surjective, de noyau artinien, donc d'après le lemme précédent, l'application t dans le diagramme commutatif ci-dessous est surjective :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow[\sim]{p} & \varprojlim_j M/L_j \\ \downarrow & & \downarrow t \\ M/K & \xrightarrow{\tau} & \varprojlim_j M/(K + L_j). \end{array}$$

Comme p est un isomorphisme puisque M est complet, il en résulte que τ est surjectif, donc est un isomorphisme. Ceci prouve (i).

⁽⁹⁾N.D.E. : cf. [Gr57], I § 1.5 et Prop. 1.8 ; on peut aussi consulter, par exemple, [Po73], § 2.8 ou [We95], Append. A.4.

Montrons (ii) (a). D'après ce qui précède, on a pour tout i un isomorphisme $M/M_i \xrightarrow{\sim} \varprojlim_j M/(M_i + L_j)$, et donc les deux flèches horizontales dans le diagramme commutatif ci-dessous sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow[p \sim]{} & \varprojlim_j M/L_j \\ \downarrow g & & \downarrow s \\ \varprojlim_i M/M_i & \xrightarrow{\sim} & \varprojlim_{i,j} M/(M_i + L_j). \end{array}$$

De plus, pour chaque j , la famille de sous-modules $(M_i + L_j)/L_j$ admet un plus petit élément, puisque M/L_j est artinien, donc le morphisme $s_j : M/L_j \rightarrow \varprojlim_i M/(L_j + M_i)$ est surjectif; donc, d'après le lemme précédent, s est surjectif. Il en résulte que g est surjectif. Enfin, le noyau de g est la limite projective des M_i , i.e. leur intersection. Ceci prouve le point (a).

Déduisons-en le point (b). Comme N est un sous-module fermé (donc séparé et complet), c'est un module pseudocompact pour la topologie induite par celle de M . Donc, d'après (a), les morphismes f et g dans le diagramme commutatif et exact ci-dessous sont surjectifs :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/N \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\ 0 & \longrightarrow & \varprojlim_i N/(N \cap M_i) & \longrightarrow & \varprojlim_i M/M_i & \longrightarrow & \varprojlim_i M/(N + M_i) \end{array} .$$

Alors, d'après le « lemme du serpent », la suite $0 \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow \text{Ker } g \rightarrow \text{Ker } h \rightarrow 0$ est exacte, et l'égalité $N + \bigcap_i M_i = \bigcap_i (N + M_i)$ en résulte.

On peut maintenant démontrer la proposition 0.2.B. Soit $f : M \rightarrow N$ un morphisme de A -modules pseudocompacts. Alors $K = \text{Ker}(f)$ est un sous-module fermé de M , donc séparé et complet, donc K est un module pseudocompact pour la topologie induite par celle de M . D'après 0.2.D (i), M/K muni de la topologie quotient est pseudocompact.

Montrons que le morphisme continu bijectif $M/K \rightarrow \text{Im}(f)$ est bicontinu. Identifiant M/K à $\text{Im}(f)$, il s'agit de montrer que la topologie quotient $\mathcal{Q}$ est plus fine que la topologie $\mathcal{T}$ induite par celle de N . Notons (L_j) (resp. (N_i)) l'ensemble filtrant décroissant des sous-modules ouverts de M (resp. N) et posons $N'_i = N_i \cap \text{Im}(f)$. Soit $P = (K + L_j)/K$ un sous-module de M/K ouvert pour $\mathcal{Q}$. Comme $M/(K + L_j)$ est artinien, la famille $N'_i + P$ a un plus petit élément $N'_{i_0} + P$. Comme les N'_i sont ouverts, donc fermés, pour $\mathcal{T}$ donc aussi pour $\mathcal{Q}$, il résulte de 0.2.D (ii) (b) que

$$N'_{i_0} + P = \bigcap_i (N'_i + P) = P + \bigcap_i N'_i = P,$$

d'où $N'_{i_0} \subset P$. Ceci montre que P est ouvert pour $\mathcal{T}$, et $M/K \rightarrow \text{Im}(f)$ est donc un isomorphisme de modules pseudocompacts.

En particulier, $\text{Im}(f)$ est complet pour $\mathcal{T}$, donc *fermé* dans N . Alors, d'après 0.2.D (i) à nouveau, $\text{Coker}(f)$ muni de la topologie quotient est pseudocompact. Ceci prouve que $\mathbf{PC}(A)$ est une catégorie abélienne.

D'autre part, les limites projectives arbitraires existent dans $\mathbf{PC}(A)$: si (M_i) est un système projectif de modules pseudocompacts, la limite projective des M_i a pour module

sous-jacent la limite projective des modules sous-jacents, pour topologie celle de la limite projective. De plus, si l'on a une famille de suites exactes dans $\mathbf{PC}(A)$:

$$0 \longrightarrow K_i \longrightarrow M_i \longrightarrow Q_i \longrightarrow 0$$

alors la suite $0 \rightarrow \prod_i K_i \rightarrow \prod_i M_i \rightarrow \prod_i Q_i \rightarrow 0$ est exacte. Le point (iii) de 0.2.B en découle, car dans toute catégorie abélienne où les produits arbitraires existent, les conditions (a) et (b) de 0.2.D sont équivalentes et équivalent à l'exactitude des limites projectives filtrantes (cf. [Mi65], III 1.2–1.9 ou [Po73], Chap. 2, Th. 8.6).

Enfin, tout module pseudocompact M est un sous-module du produit $\prod_L M/L$, où L parcourt les sous-modules ouverts de M , donc les objets de longueur finie forment un système de cogénérateurs de $\mathbf{PC}(A)$. (De plus, tout objet de longueur n est isomorphe à un quotient A^n/L , où L est un sous-module ouvert de A^n de colongueur n ; ces quotients forment donc un ensemble de cogénérateurs.) Ceci achève la démonstration de 0.2.B.

⁽¹⁰⁾ Soient $(\mathbf{Ab})$ la catégorie des groupes abéliens et $\mathbf{LF}(A)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{PC}(A)$ formée des objets *de longueur finie*. Pour tout objet M de $\mathbf{PC}(A)$, notons $\mathbf{h}_c^M$ le foncteur :

$$\mathbf{LF}(A) \longrightarrow (\mathbf{Ab}), \quad N \mapsto \mathrm{Hom}_c(M, N).$$

D'après [CA], § II.4, th. 1, lemme 4 et cor. 1, on a les résultats suivants. ⁽¹¹⁾

Proposition 0.2.E. — *Le foncteur $M \mapsto \mathbf{h}_c^M$ est une anti-équivalence de $\mathbf{PC}(A)$ sur la catégorie $\mathbf{Lex}(\mathbf{LF}(A), (\mathbf{Ab}))$ des foncteurs exacts à gauche $\mathbf{LF}(A) \rightarrow (\mathbf{Ab})$.*

Corollaire 0.2.F. — (i) *Un objet P de $\mathbf{PC}(A)$ est projectif si et seulement si le foncteur $\mathbf{h}_c^P$ est exact (c.-à-d., si et seulement si le foncteur $\mathrm{Hom}_c(P, -)$ est exact sur $\mathbf{LF}(A)$).*

(ii) *Soit (M_i) un système projectif filtrant ⁽¹²⁾ d'objets de $\mathbf{PC}(A)$. Pour tout objet N de $\mathbf{LF}(A)$, on a un isomorphisme fonctoriel en N :*

$$\mathrm{Hom}_c(\varprojlim M_i, N) \cong \varprojlim \mathrm{Hom}_c(M_i, N).$$

(iii) *Toute limite projective filtrante et tout produit ⁽¹²⁾ d'objets projectifs de $\mathbf{PC}(A)$ est un objet projectif de $\mathbf{PC}(A)$.*

Enfin, on déduit de 0.2.F le

Corollaire 0.2.G. — *Soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille d'objets de $\mathbf{PC}(A)$. Alors $\prod_{i \in I} M_i$ est projectif si et seulement si chaque M_i l'est.*

⁽¹⁰⁾N.D.E. : On a inséré dans ce paragraphe la proposition 0.2.E et le corollaire 0.2.F, qui seront utiles en 0.2.2. (Dans l'original, ces résultats figuraient en 0.3).

⁽¹¹⁾N.D.E. : En effet, $\mathbf{PC}(A)$ a un ensemble de cogénérateurs artiniens, les limites projectives filtrantes y sont exactes, et $\mathbf{LF}(A)$ est la sous-catégorie des objets artiniens. La catégorie duale $\mathbf{PC}(A)^0$ a donc un ensemble de générateurs noethériens, et les limites inductives filtrantes y sont exactes. D'après la démonstration de [CA] § II.4, th. 1, le foncteur $M \mapsto \mathrm{Hom}_c(M, -)$ est une anti-équivalence de $\mathbf{PC}(A)$ sur $\mathbf{Lex}(\mathbf{LF}(A), (\mathbf{Ab}))$. De même, lemme 4 et cor. 1 de *loc. cit.* énoncent des résultats « *duaux* » de ceux du corollaire 0.2.F. Pour une démonstration « directe », voir [DG70], § V.2, th. 3.1, lemme 3.5, cor. 3.3 & 3.4.

⁽¹²⁾N.D.E. : Comme tout produit infini est une limite projective filtrante de produits finis, tout foncteur additif qui commute aux limites projectives filtrantes commute aussi aux produits infinis.

En effet, pour tout $N \in \text{Ob } \mathbf{LF}(A)$, on a $\text{Hom}_c(\prod_i M_i, N) \cong \bigoplus_i \text{Hom}_c(M_i, N)$.

0.2.1. — Chaque composante locale $A_{\mathfrak{m}}$ de A est un facteur direct de A , donc un objet projectif de $\mathbf{PC}(A)$ (A est manifestement projectif). De plus, $A_{\mathfrak{m}}$ a $S_{\mathfrak{m}} = A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ pour unique quotient simple, donc est indécomposable. D'autre part, tout objet simple de $\mathbf{PC}(A)$ est isomorphe à un unique $S_{\mathfrak{m}}$. D'après [CA], IV § 3, cor. 1 du th. 3, ⁽¹³⁾ on a donc :

Proposition. — (i) *Tout objet projectif de $\mathbf{PC}(A)$ est produit direct d'objets projectifs indécomposables, uniquement déterminés (à isomorphisme près).*

(ii) *Tout objet projectif indécomposable est isomorphe à un unique $A_{\mathfrak{m}}$ ($\mathfrak{m} \in \Upsilon(A)$).*

Définition. — Un A -module pseudocompact M est dit *topologiquement libre* s'il est isomorphe au produit d'une famille (A_i) d'exemplaires de A .

Dans ce cas, une famille (m_i) d'éléments de M est appelée une *pseudobase* de M si les applications A -linéaires de A_i dans M qui envoient l'élément unité de A_i sur m_i se prolongent en un isomorphisme de $\prod_i A_i$ sur M .

0.2.2. — ⁽¹⁴⁾ Si M est un A -module pseudocompact, on notera $M^\dagger$ le A -module (sans topologie) $\text{Hom}_c(M, A)$.

Réciproquement, si N est un A -module, on note $N^* = \text{Hom}_A(N, A)$ son dual, muni de la topologie de la convergence ponctuelle, c.-à-d., une base de voisinages de 0 dans N^* est formée par les sous-modules suivants, où $x \in N$ et $\mathfrak{l}$ est un idéal ouvert de A :

$$\mathcal{V}(x, \mathfrak{l}) = \{f \in N^* \mid f(x) \in \mathfrak{l}\}.$$

Ceci fait de N^* un A -module pseudocompact. En effet, on voit d'abord que si $N = A$, alors $N^* = A$, muni de sa topologie d'anneau pseudo-compact, et si N est un module libre $A^{(I)}$, alors N^* est le produit A^I , muni de la topologie produit. D'autre part, pour tout morphisme $\phi : N_1 \rightarrow N_2$, le morphisme transposé ${}^t\phi : N_2^* \rightarrow N_1^*$ est continu, puisque l'image inverse par ${}^t\phi$ d'un sous-module $\mathcal{V}(x_1, \mathfrak{l})$ de N_1^* n'est autre que le sous-module $\mathcal{V}(\phi(x_1), \mathfrak{l})$ de N_2^* . Alors, pour N arbitraire, prenant une présentation

$$A^{(J)} \xrightarrow{\phi} A^{(I)} \xrightarrow{\pi} N \longrightarrow 0,$$

on voit que N^* est le noyau du morphisme continu ${}^t\phi : A^I \rightarrow A^J$, donc N^* est pseudo-compact.

Lorsque A est artinien (auquel cas on peut prendre ci-dessus $\mathfrak{l} = 0$), on déduit de 0.2.F :

Proposition. — *Lorsque A est artinien, les foncteurs*

481

$$P \mapsto P^\dagger \quad \text{et} \quad Q \mapsto Q^*,$$

⁽¹³⁾N.D.E. : Ceci renvoie aux énoncés « duaux », établis dans *loc. cit.*, § 2, Th. 2 et § 1, Prop. 2 ; pour une démonstration « directe », voir [DG70], V, § 2, Th. 4.5 et Exemple 4.6 b).

⁽¹⁴⁾N.D.E. : On a détaillé les résultats de ce paragraphe, qui jouent un rôle important dans la suite (cf. 1.2.3, 1.3.5, 2.2.1, etc.).

où P (resp. Q) est un objet projectif de $\mathbf{PC}(A)$ (resp. un A -module projectif), établissent une anti-équivalence entre la catégorie des A -modules pseudocompacts projectifs et celle des A -modules projectifs. ⁽¹⁵⁾

En particulier, lorsque A est un corps k , $P \mapsto P^\dagger$ est une anti-équivalence de la catégorie de tous les k -modules pseudocompacts (on parle aussi de k -espaces vectoriels linéairement compacts) sur celle des k -espaces vectoriels. ⁽¹⁶⁾

0.3. — ⁽¹⁷⁾ Soient L et M deux A -modules pseudocompacts. Le foncteur

$$\mathbf{LF}(A) \longrightarrow (\mathbf{Ab}), \quad N \mapsto \text{Bil}_c(L \times M, N),$$

où $\text{Bil}_c(L \times M, N)$ désigne le groupe abélien des applications A -bilinéaires continues de $L \times M$ dans N , est exact à gauche.

D'après 0.2.E, il existe donc un A -module pseudocompact $L \widehat{\otimes}_A M$, unique à isomorphisme unique près, qui représente ce foncteur, i.e. tel qu'on ait un isomorphisme fonctoriel, pour tout objet N de $\mathbf{LF}(A)$:

$$\text{Hom}_c(L \widehat{\otimes}_A M, N) \simeq \text{Bil}_c(L \times M, N).$$

De plus, $L \widehat{\otimes}_A M$ s'identifie à la limite projective $P = \widehat{L \otimes_A M}$ des A -modules (discrets) $(L/L') \otimes_A (M/M')$, où L' et M' parcourent respectivement les sous-modules ouverts de L et de M .

En effet, soit $\varphi : L \times M \rightarrow N$ une application bilinéaire continue de $L \times M$ dans un A -module (discret) de longueur finie N . D'après le lemme 0.3.1 ci-dessous, il existe des sous-modules ouverts L' et M' de L et M tels que $\varphi(L' \times M) = \varphi(L \times M') = \{0\}$. Cela signifie que l'application $\overline{\varphi} : L \otimes_A M \rightarrow N$, qui est induite par φ , est de la forme $\varphi' \circ p$, où p est la projection canonique de $L \otimes_A M$ sur $(L/L') \otimes_A (M/M')$. Si l'on note $\widehat{\varphi}$ la composée :

$$P \longrightarrow (L/L') \otimes_A (M/M') \xrightarrow{\varphi'} N,$$

on voit que l'application $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ est une bijection fonctorielle de $\text{Bil}_c(L \times M, N)$ sur $\text{Hom}_c(P, N)$, d'où $P \cong L \widehat{\otimes}_A M$.

Le module pseudocompact $L \widehat{\otimes}_A M$ est donc le séparé complété de $L \otimes_A M$, pour la topologie linéaire définie par les noyaux des projections canoniques de $L \otimes_A M$ sur $(L/L') \otimes_A (M/M')$, et on l'appellera le *produit tensoriel complété* de L et M .

Si x et y appartiennent à L et M , l'image de $x \otimes_A y$ dans $L \widehat{\otimes}_A M$ sera notée $x \widehat{\otimes}_A y$.

0.3.1. Lemme. — Soient L , M et N des A -modules pseudocompacts, N étant de longueur finie. Si $\varphi : L \times M \rightarrow N$ est une application A -bilinéaire continue, il existe des sous-modules ouverts L' et M' de L et M tels que $\varphi(L' \times M) = \varphi(L \times M') = \{0\}$.

⁽¹⁵⁾N.D.E. : Rappelons d'autre part que, sur un anneau *artinien*, un module est projectif si, et seulement si, il est plat, voir par exemple VI_B, N.D.E. (54) ou 0.3.7 plus loin.

⁽¹⁶⁾N.D.E. : On notera que la *somme directe dans* $\mathbf{PC}(k)$ d'une famille $(V_i)_{i \in I}$ de k -espaces vectoriels linéairement compacts est $(\prod_{i \in I} V_i^\dagger)^*$.

⁽¹⁷⁾N.D.E. : On a modifié ce paragraphe, en tenant compte des ajouts faits en 0.2.

En effet, $\varphi^{-1}(0)$ est un voisinage ouvert de $(0, 0)$, donc contient un ouvert de la forme $L_1 \times M_1$, où L_1 et M_1 sont des sous-modules ouverts de L et M . Comme L/L_1 est de longueur finie, il existe des éléments $x_1, \dots, x_r$ de L tels que $L_1 + Ax_1 + \dots + Ax_r = L$. Si $M' \subset M_1$ est « assez petit », on a aussi $\varphi(x_i, M') = 0$ pour tout i , parce que l'application $y \mapsto \varphi(x_i, y)$ est continue; on tire de là $\varphi(L, M') = \{0\}$; de même, $\varphi(L', M) = \{0\}$ si L' est assez petit.

Corollaire 0.3.1.1. — ⁽¹⁸⁾ Soit M un A -module pseudocompact.

(i) Pour tout sous-module ouvert M' , il existe un idéal ouvert $\mathfrak{l}$ de A tel que $\overline{\mathfrak{l}M} \subset M'$.

(ii) Par conséquent, $M \simeq \varprojlim_{\mathfrak{l}} M/\overline{\mathfrak{l}M}$, où $\mathfrak{l}$ parcourt le système projectif filtrant des idéaux ouverts de A et chaque $M/\overline{\mathfrak{l}M}$ est muni de la topologie quotient (qui en fait un module pseudocompact, cf. 0.2.D).

En effet, considérons l'application $\varphi : A \times M \rightarrow M/M'$, $(a, m) \mapsto am + M'$; d'après 0.3.1 il existe un idéal ouvert $\mathfrak{l}$ de A tel que $\mathfrak{l}M \subset M'$ et comme M' est aussi fermé, il contient aussi $\overline{\mathfrak{l}M}$. Comme l'intersection des sous-modules ouverts de M est nulle, on a donc $\bigcap_{\mathfrak{l}} \overline{\mathfrak{l}M} = (0)$. D'autre part, d'après 0.2.D, l'application $\phi : M \rightarrow \varprojlim_{\mathfrak{l}} M/\overline{\mathfrak{l}M}$ est surjective; d'après (la démonstration de) 0.2.B, ϕ induit donc un isomorphisme $M/\text{Ker}(\phi) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\mathfrak{l}} M/\overline{\mathfrak{l}M}$, or on vient de voir que $\text{Ker}(\phi) = \bigcap_{\mathfrak{l}} \overline{\mathfrak{l}M}$ est nul.

Remarque 0.3.1.2. — ⁽¹⁹⁾ Le produit tensoriel complété vérifie la condition usuelle d'associativité : si L, M, P sont des A -modules pseudocompacts, on a un isomorphisme canonique

$$(L \widehat{\otimes} M) \widehat{\otimes} P \simeq L \widehat{\otimes} (M \widehat{\otimes} P);$$

en effet, ces deux objets représentent le foncteur qui associe à tout objet N de $\mathbf{LF}(A)$ le groupe abélien des applications A -trilinéaires continues de $L \times M \times P$ dans N .

0.3.2. — Soient $L' \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} L'' \rightarrow 0$ une suite exacte et M un objet de $\mathbf{PC}(A)$. Il est clair que pour tout objet N de $\mathbf{LF}(A)$, les suites induites :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Bil}_c(L'' \times M, N) & \longrightarrow & \text{Bil}_c(L \times M, N) & \longrightarrow & \text{Bil}_c(L' \times M, N) \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_c(L'' \widehat{\otimes}_A M, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_c(L \widehat{\otimes}_A M, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_c(L' \widehat{\otimes}_A M, N) \end{array}$$

sont exactes. D'après 0.2.E, ceci équivaut à dire que la suite

483

$$(*) \quad L' \widehat{\otimes}_A M \xrightarrow{f \widehat{\otimes} M} L \widehat{\otimes}_A M \xrightarrow{g \widehat{\otimes} M} L'' \widehat{\otimes}_A M \longrightarrow 0$$

est exacte. Donc :

Corollaire. — Pour tout A -module pseudocompact M , le foncteur $-\widehat{\otimes}_A M$ est exact à droite.

⁽¹⁸⁾N.D.E. : On a ajouté ce corollaire.

⁽¹⁹⁾N.D.E. : On a ajouté cette remarque.

Prenons en particulier pour L l'anneau A , pour f l'inclusion d'un idéal fermé $\mathfrak{a}$ dans A , pour g la projection canonique de A sur $A/\mathfrak{a}$. On peut alors identifier $A \hat{\otimes}_A M$ à M au moyen de l'application $x \hat{\otimes}_A m \mapsto xm$. Comme l'image de $\mathfrak{a} \hat{\otimes}_A M$ est fermée dans M (cf. 0.2.B) et que l'image de $\mathfrak{a} \otimes_A M$ est partout dense dans $\mathfrak{a} \hat{\otimes}_A M$, l'image de $f \hat{\otimes}_A M$ n'est autre que l'adhérence $\overline{\mathfrak{a}M}$ de $\mathfrak{a}M$ dans M . La suite exacte $(*)$ entraîne donc l'isomorphisme :

$$(A/\mathfrak{a}) \hat{\otimes}_A M \xrightarrow{\sim} M/\overline{\mathfrak{a}M}.$$

0.3.3. Lemme de Nakayama. — Soient A un anneau pseudocompact, M un A -module pseudocompact et $\mathfrak{a}$ un idéal de A contenu dans le radical $\mathfrak{r}(A)$. L'égalité $\overline{\mathfrak{a}M} = M$ entraîne alors $M = 0$.

En effet, supposons $\overline{\mathfrak{a}M} = M$.⁽²⁰⁾ Soient M' un sous-module ouvert de M et M'' le quotient M/M' . Comme M'' est discret, $\mathfrak{a}M''$ est fermé dans M'' , donc égal à $\overline{\mathfrak{a}M''}$. D'après 0.3.2, l'application canonique de $M/\overline{\mathfrak{a}M}$ dans $M''/\overline{\mathfrak{a}M''}$ est surjective, de sorte qu'on a $\mathfrak{a}M'' = \overline{\mathfrak{a}M''} = M''$. Puisque M'' est un A -module de type fini et $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{r}(A)$, ceci entraîne $M'' = 0$, d'après le lemme de Nakayama usuel. Par conséquent, tout sous-module ouvert M' de M est égal à M , donc M est nul⁽²¹⁾.

484 **0.3.4.** — On tire du lemme de Nakayama les conséquences habituelles :

Corollaire. — Soient $\mathfrak{a}$ un idéal fermé contenu dans $\mathfrak{r}(A)$ et $f : M \rightarrow N$ un morphisme de A -modules pseudocompacts.

- (i) f est surjectif si l'application induite $f' : M/\overline{\mathfrak{a}M} \rightarrow N/\overline{\mathfrak{a}N}$ l'est.⁽²²⁾
- (ii) Si N est projectif, f est inversible si f' l'est.

En effet, (i) résulte du lemme 0.3.3 appliqué à Coker f . Pour (ii), supposons f' inversible. Alors, d'après (i), f est surjectif, donc possède une section ; on applique alors 0.3.3 à $\text{Ker } f$.

Lorsque A est local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, on peut aussi déduire de 0.3.3 le *théorème d'échange* qui suit :

Théorème. — Soient A un anneau pseudocompact local, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, M un A -module topologiquement libre de pseudobase $(m_i)_{i \in I}$ (0.2.1) et N un facteur direct (fermé) de M . Il existe une pseudobase de M formée d'éléments de N et de certains m_i .

En effet, cela est clair lorsque A est un corps (se servir alors de la dualité de 0.2.2 et appliquer le théorème d'échange habituel) ; par conséquent, $N/\overline{\mathfrak{m}N}$ ⁽²³⁾ a pour supplémentaire un module topologiquement libre sur $A/\mathfrak{m}$ de pseudobase $(\overline{m}_i)_{i \in J}$, où $\overline{m}_i$ est l'image de m_i dans $M/\overline{\mathfrak{m}M}$ et J une partie de I . Si P désigne le produit direct

⁽²⁰⁾N.D.E. : Quitte à remplacer $\mathfrak{a}$ par son adhérence, on peut supposer $\mathfrak{a}$ fermé.

⁽²¹⁾N.D.E. : puisqu'égal à la limite projective des $M/M' = 0$.

⁽²²⁾N.D.E. : Par conséquent, tout A -module pseudocompact est quotient d'un A -module topologiquement libre (on se ramène d'abord au cas où A est local), cf. la preuve de 0.3.7.

⁽²³⁾N.D.E. : On a corrigé $N/\mathfrak{m}N$ en $N/\overline{\mathfrak{m}N}$, et de même pour $M/\overline{\mathfrak{m}M}$ ci-dessous.

$\prod_{i \in J} Am_i$, l'application canonique de $N \oplus P$ dans M est « bijective modulo $\mathfrak{m}$ » ; elle est donc bijective d'après ce qui précède (pour une autre preuve voir [CA], §IV.2, prop. 8).

0.3.5. — Considérons maintenant trois A -modules pseudocompacts L , M et N , où N est de longueur finie. Munissant le A -module $\text{Hom}_c(M, N)$ de la topologie discrète, tout élément ψ de $\text{Hom}_c(L, \text{Hom}_c(M, N))$ définit une application bilinéaire continue $\psi' : (\ell, m) \mapsto \psi(\ell)(m)$ de $L \times M$ dans N . On obtient ainsi un isomorphisme naturel 485

$$(1) \quad \text{Hom}_c(L, \text{Hom}_c(M, N)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_c(L \hat{\otimes}_A M, N),$$

donc une autre caractérisation de $\text{Hom}_c(L \hat{\otimes}_A M, N)$, qu'on va utiliser lorsque M est la limite projective d'un système projectif filtrant de A -modules pseudocompacts M_i . Alors, d'après (1) et 0.2.F (ii), on a des isomorphismes naturels :

$$(2) \quad \begin{aligned} \text{Hom}_c(L \hat{\otimes}_A \varprojlim M_i, N) &\simeq \text{Hom}_c(L, \text{Hom}_c(\varprojlim M_i, N)) \\ &\simeq \text{Hom}_c(L, \varinjlim \text{Hom}_c(M_i, N)). \end{aligned}$$

De plus, comme le module $\varinjlim \text{Hom}_c(M_i, N)$ est discret, toute application continue de source L se factorise par un quotient de longueur finie de L . Par conséquent, l'application naturelle ci-dessous est un isomorphisme :

$$(3) \quad \varinjlim \text{Hom}_c(L, \text{Hom}_c(M_i, N)) \longrightarrow \text{Hom}_c(L, \varinjlim \text{Hom}_c(M_i, N)).$$

Enfin, d'après (1) et 0.2.F (ii) à nouveau, on a des isomorphismes naturels :

$$(4) \quad \begin{aligned} \varinjlim \text{Hom}_c(L, \text{Hom}_c(M_i, N)) &\simeq \varinjlim \text{Hom}_c(L \hat{\otimes}_A M_i, N) \\ &\simeq \text{Hom}_c(\varprojlim (L \hat{\otimes}_A M_i), N). \end{aligned}$$

Combinant les isomorphismes (2), (3), (4), on obtient :

Proposition. — Soit (M_i) un système projectif filtrant d'objets de $\mathbf{PC}(A)$, et soit L (resp. N) un objet de $\mathbf{PC}(A)$ (resp. $\mathbf{LF}(A)$). On a un isomorphisme fonctoriel en N :

$$\text{Hom}_c(L \hat{\otimes}_A \varprojlim M_i, N) \simeq \text{Hom}_c(\varprojlim (L \hat{\otimes}_A M_i), N),$$

et donc un isomorphisme :

$$L \hat{\otimes}_A \varprojlim M_i \simeq \varprojlim (L \hat{\otimes}_A M_i).$$

Donc le produit tensoriel complété commute aux limites projectives filtrantes. ⁽²⁴⁾

0.3.6. — En particulier, ⁽²⁵⁾ le produit tensoriel complété commute aux produits infinis. Par exemple, comme l'anneau A est le produit de ses composantes locales $A_{\mathfrak{m}}$ (0.1.1), tout A -module pseudocompact M ($\simeq A \hat{\otimes}_A M$) s'identifie au produit des modules $M_{\mathfrak{m}} = A_{\mathfrak{m}} \hat{\otimes}_A M$ (les composantes locales de M).

⁽²⁴⁾N.D.E. : On retrouve ainsi 0.3.1.1 : $L = L \hat{\otimes}_A A = L \hat{\otimes}_A \varprojlim_{\mathfrak{l}} (A/\mathfrak{l}) \simeq \varprojlim_{\mathfrak{l}} L/\overline{\mathfrak{l}L}$, où $\mathfrak{l}$ parcourt les idéaux ouverts de A .

⁽²⁵⁾N.D.E. : cf. N.D.E. (12).

De même, soient M et N deux A -modules pseudocompacts. On rappelle (cf. 0.2.2) que $M^\dagger$ désigne $\text{Hom}_c(M, A)$. Considérons l'application

$$\varphi : M^\dagger \otimes_A N^\dagger \longrightarrow (M \widehat{\otimes}_A N)^\dagger$$

qui associe à un élément $f \otimes g$ de $M^\dagger \otimes_A N^\dagger$ l'application $m \widehat{\otimes} n \mapsto f(m)g(n)$ de $M \widehat{\otimes}_A N$ dans A . Cette application φ est bijective lorsque M est isomorphe à A .

Corollaire. — *Lorsque A est artinien, φ est un isomorphisme chaque fois que M est topologiquement libre (ou plus généralement projectif).*

En effet, pour N fixé, le foncteur $M \mapsto (M \widehat{\otimes}_A N)^\dagger$ (resp. $M \mapsto M^\dagger \otimes_A N^\dagger$) transforme tout produit direct en somme directe, d'après ce qui précède et 0.2.F.

Remarque 0.3.6.A. — ⁽²⁶⁾ En utilisant 0.2.F de façon similaire, on obtient aussi le résultat suivant : *Soient A un anneau artinien, M, Q des objets de $\mathbf{PC}(A)$, et N un objet de $\mathbf{LF}(A)$. On suppose Q projectif ; alors on a des isomorphismes naturels :*

$$\text{Hom}_c(M, Q) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_A(Q^\dagger, M^\dagger) \quad \text{et} \quad Q^\dagger \otimes_A N \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_c(Q, N).$$

0.3.7. — Pour tout $\mathfrak{m} \in \Upsilon(A)$, le foncteur $M \mapsto A_{\mathfrak{m}} \widehat{\otimes}_A M$ est évidemment exact. Comme tout A -module pseudocompact projectif P est un produit de modules de la forme $A_{\mathfrak{m}}$, il en résulte que le foncteur $M \mapsto P \widehat{\otimes}_A M$ est exact lorsque P est projectif. La réciproque est vraie :

Proposition. — *Soient A un anneau pseudocompact, P un A -module pseudocompact. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) P est un objet projectif de $\mathbf{PC}(A)$.
- (ii) Chaque composante locale $P_{\mathfrak{m}}$ est un $A_{\mathfrak{m}}$ -module topologiquement libre.
- (iii) Le foncteur $M \mapsto P \widehat{\otimes}_A M$ est exact.

En effet, l'équivalence de (i) et (ii) résulte de 0.2.F (iii) et 0.2.1, et l'on vient de voir que (ii) $\Rightarrow$ (iii). Supposons le foncteur $M \mapsto P \widehat{\otimes}_A M$ exact. Comme $P \widehat{\otimes}_A M$ est le produit de ses composantes locales :

$$(P \widehat{\otimes}_A M)_{\mathfrak{m}} \simeq P_{\mathfrak{m}} \widehat{\otimes}_{A_{\mathfrak{m}}} M_{\mathfrak{m}},$$

on est ramené au cas où l'anneau A est local. On va prouver alors que P est *topologiquement libre*.

Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A ; alors $P/\overline{\mathfrak{m}P}$ est un espace vectoriel linéairement compact sur $A/\mathfrak{m}$, donc un produit d'exemplaires de $A/\mathfrak{m}$ (cf. 0.2.2). Il y a donc une

⁽²⁶⁾N.D.E. : On a ajouté cette remarque, qui sera utile en 2.3.1.

famille $(A_i)_{i \in I}$ d'exemplaires de A et un isomorphisme $\varphi : \prod_{i \in I} (A_i/\mathfrak{m}) \xrightarrow{\sim} P/\overline{\mathfrak{m}P}$. Comme $\prod_{i \in I} A_i$ est projectif, il y a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} A_i & \xrightarrow{\psi} & P \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ \prod_{i \in I} (A_i/\mathfrak{m}) & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & P/\overline{\mathfrak{m}P} \end{array}$$

où p et q désignent les projections canoniques. Appliquant le lemme de Nakayama à $\text{Coker } \psi$ et notant que $(A/\mathfrak{m}) \hat{\otimes}_A \psi$ n'est autre que φ , on voit que ψ est surjectif. ⁽²⁷⁾

Posant alors $B = \prod_{i \in I} A_i$ et $N = \text{Ker } \psi$, on a le diagramme commutatif et exact suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & \xrightarrow{\quad} & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & \text{---} & & \\ \mathfrak{m} \hat{\otimes}_A N & \longrightarrow & \mathfrak{m} \hat{\otimes}_A B & \longrightarrow & \mathfrak{m} \hat{\otimes}_A P & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A \hat{\otimes}_A N & \longrightarrow & A \hat{\otimes}_A B & \xrightarrow{\psi} & A \hat{\otimes}_A P \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ (A/\mathfrak{m}) \hat{\otimes}_A N & \longrightarrow & (A/\mathfrak{m}) \hat{\otimes}_A B & \xrightarrow{\varphi} & (A/\mathfrak{m}) \hat{\otimes}_A P & \longrightarrow & 0 \end{array} .$$

Le « lemme du serpent » appliqué aux deux premières lignes montre alors que, dans la ligne du bas, le morphisme $(A/\mathfrak{m}) \hat{\otimes}_A N \rightarrow (A/\mathfrak{m}) \hat{\otimes}_A B$ est un monomorphisme. Mais alors, comme φ est un isomorphisme, $(A/\mathfrak{m}) \hat{\otimes}_A N$ est nul ; d'où $N = 0$ (0.3.3) et ψ un isomorphisme. ⁽²⁸⁾ 487

0.3.8. Corollaire. — Soient A un anneau local, noethérien, complet et P un A -module pseudocompact. Alors P est topologiquement libre si et seulement si P est plat sur A .

En effet, l'application canonique de $M \otimes_A P$ dans $M \hat{\otimes}_A P$ est bijective lorsque M est égal à A , donc aussi lorsque M est noethérien (prendre une présentation finie de M et utiliser l'exactitude à droite du produit tensoriel et du produit tensoriel complété).

⁽²⁷⁾N.D.E. : Ceci montre le résultat annoncé dans la N.D.E. (22) : tout A -module pseudocompact M est quotient d'un A -module topologiquement libre. (Comme les produits sont exacts dans $\mathbf{PC}(A)$, on se ramène au cas où A est local, traité ci-dessus.)

⁽²⁸⁾N.D.E. : Une démonstration tout-à-fait analogue, utilisant le « lemme de Nakayama nilpotent », montre que si A est artinien et P un A -module plat, chaque composante locale de P est un A -module libre (cf. [BAC], II § 3.2, cor. 2 de la prop. 5).

Or P est plat si et seulement si le foncteur $M \mapsto M \otimes_A P$ est exact quand M parcourt les modules noethériens. De même, on a vu dans la démonstration de la proposition 0.3.7 que P est topologiquement libre si la suite

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m} \hat{\otimes}_A P \longrightarrow A \hat{\otimes}_A P \longrightarrow (A/\mathfrak{m}) \hat{\otimes}_A P \longrightarrow 0$$

488 est exacte. Donc P est topologiquement libre si et seulement si le foncteur $M \mapsto M \hat{\otimes}_A P$ est exact quand M parcourt les modules noethériens. Le corollaire résulte donc de l'égalité $M \otimes_A P = M \hat{\otimes}_A P$ établie ci-dessus.

0.4. — Soit k un anneau pseudocompact ; une k -algèbre topologique est un anneau topologique A (commutatif), muni d'un morphisme d'anneaux topologiques $k \rightarrow A$. On dit que A est une k -algèbre *profinie* si le k -module topologique sous-jacent est pseudocompact.

Dans ce cas, soit $\mathfrak{l}$ un k -sous-module ouvert de A . L'application composée

$$\varphi : A \times A \xrightarrow{\text{mult.}} A \xrightarrow{\text{can.}} A/\mathfrak{l}$$

est continue, donc, d'après le lemme 0.3.1, il existe un k -sous-module ouvert $\mathfrak{n}$ de A tel que $\varphi(A \times \mathfrak{n}) = 0$. Cela signifie que $\mathfrak{l}$ contient l'idéal ouvert $A\mathfrak{n}$ et entraîne que A est un anneau pseudocompact.

De même, soit M un A -module topologique dont le k -module sous-jacent est pseudocompact. Si M' est un k -sous-module ouvert de M , le lemme 0.3.1 appliqué à l'application

$$A \times M \xrightarrow{\text{mult.}} M \xrightarrow{\text{can.}} M/M'$$

montre que M' contient un A -sous-module ouvert, donc que M est aussi un A -module pseudocompact. ⁽²⁹⁾ Réciproquement :

Lemme. — Soient A une k -algèbre profinie et M un A -module pseudocompact. Alors, le k -module $M|_k$ obtenu par restriction des scalaires est pseudocompact.

En effet, tout A -module pseudocompact de longueur finie est isomorphe à un quotient A^n/L (où L est un sous-module ouvert de A^n), donc est un k -module pseudocompact. Comme $M|_k$ est une limite projective de tels modules, c'est un k -module pseudocompact.

0.4.1. — Si A et B sont deux k -algèbres profinies, un *morphisme* de A dans B est, par définition, un homomorphisme continu de k -algèbres. On notera $\mathbf{Alp}_k$ la catégorie des k -algèbres profinies.

489 Elle possède évidemment des limites projectives : l'algèbre sous-jacente à une limite projective est la limite projective des algèbres sous-jacentes ; la topologie est celle de la limite projective.

Elle possède aussi des *limites inductives finies* ⁽³⁰⁾ : par exemple, si $f : A \rightarrow B$ et $g : A \rightarrow C$ sont deux morphismes de k -algèbres profinies, la somme amalgamée de B et C sous A a $B \hat{\otimes}_A C$ pour A -module topologique sous-jacent (d'après 0.4, f et g

⁽²⁹⁾N.D.E. : On a ajouté le lemme qui suit, cf. la N.D.E. (36) dans la proposition 0.5.

⁽³⁰⁾N.D.E. : On verra en 0.4.2 qu'elle possède des limites inductives arbitraires.

munissent B et C de structures de A -module pseudocompact); la multiplication de $B \widehat{\otimes}_A C$ est évidemment telle que $(b \widehat{\otimes} c)(b' \widehat{\otimes} c') = (bb') \widehat{\otimes} (cc')$ si $b, b' \in B$ et $c, c' \in C$.

0.4.2. Définition. — Une k -algèbre profinie C sera dite de *longueur finie* si le k -module sous-jacent est de longueur finie (donc discret); nous noterons $\mathbf{Alf}_{/k}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Alp}_{/k}$ formée des k -algèbres de longueur finie. ⁽³¹⁾

Pour toute k -algèbre profinie A , on notera $\mathbf{h}^A$ le foncteur :

$$\mathbf{Alf}_{/k} \longrightarrow (\mathbf{Ens}), \quad C \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/k}}(A, C).$$

Il est clair que $\mathbf{h}^A$ est un foncteur exact à gauche ⁽³²⁾. De plus, les projections canoniques $A \rightarrow A/\mathfrak{l}$ (où $\mathfrak{l}$ parcourt les idéaux ouverts de A), induisent, pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$ un isomorphisme canonique

$$\varinjlim_{\mathfrak{l}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alf}_{/k}}(A/\mathfrak{l}, C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/k}}(A, C),$$

fonctoriel en C . Cela signifie que $\mathbf{h}^A$ est la limite inductive des foncteurs représentables $\mathbf{h}^{A/\mathfrak{l}}$, c.-à-d.,

$$(*) \quad \mathbf{h}^A \simeq \varinjlim_{\mathfrak{l}} \mathbf{h}^{A/\mathfrak{l}}.$$

Si B est une autre k -algèbre profinie, les propriétés générales du bifoncteur Hom et l'isomorphisme $\mathrm{Hom}(\mathbf{h}^C, \mathbf{h}^B) = \mathbf{h}^B(C)$ pour C de longueur finie, donnent des isomorphismes :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/k}}(B, A) &\simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/k}}(B, A/\mathfrak{l}) \\ &\simeq \varprojlim \mathrm{Hom}(\mathbf{h}^{A/\mathfrak{l}}, \mathbf{h}^B) \\ &\simeq \mathrm{Hom}(\varinjlim_{\mathfrak{l}} \mathbf{h}^{A/\mathfrak{l}}, \mathbf{h}^B); \end{aligned}$$

combiné avec $(*)$ ceci montre que le foncteur contravariant $A \mapsto \mathbf{h}^A$ est *pleinement fidèle*. En fait : 490

Proposition. — *Le foncteur $A \mapsto \mathbf{h}^A$ est une anti-équivalence de $\mathbf{Alp}_{/k}$ sur la catégorie des foncteurs exacts à gauche de $\mathbf{Alf}_{/k}$ dans $(\mathbf{Ens})$.*

Il suffit en effet, d'après ce qui précède, de montrer que tout foncteur exact à gauche $\mathbf{F} : \mathbf{Alf}_{/k} \rightarrow (\mathbf{Ens})$ est isomorphe à un foncteur du type $\mathbf{h}^A$; pour cela, on peut construire A comme suit (cf. TDTE II, § 3).

Comme $\mathbf{F}$ est exact à gauche, il y a, pour toute k -algèbre de longueur finie C et pour tout élément ξ de $\mathbf{F}(C)$, une plus petite sous-algèbre C' de C telle que ξ appartienne à l'image de $\mathbf{F}(C')$ dans $\mathbf{F}(C)$. Si l'on a $C' = C$, on dit que le couple (C, ξ) est *minimal*.

Les couples minimaux forment une catégorie si l'on prend pour morphismes de (C, ξ) dans (D, η) les homomorphismes φ de C dans D tels que $(\mathbf{F}\varphi)(\xi) = \eta$; il est clair qu'un tel φ est une surjection et que la catégorie des couples minimaux est

⁽³¹⁾N.D.E. : Attention, k n'est un objet de $\mathbf{Alf}_{/k}$ que si k est artinien, cf. 1.2.2 plus loin.

⁽³²⁾N.D.E. : c.-à-d., qui commute aux limites projectives finies.

« filtrante à gauche ». De plus, on peut se restreindre aux couples (C, ξ) tels que C appartienne à un ensemble contenant des k -algèbres de longueur finie de chaque type d'isomorphisme ⁽³³⁾. Donc, le foncteur $(C, \xi) \mapsto C$, qui a pour catégorie de départ celle des couples minimaux et pour catégorie d'arrivée celle des k -algèbres profinies, possède une limite projective ; on prend pour A cette limite projective.

Corollaire. — La catégorie $\mathbf{Alp}_{/k}$ possède des limites inductives infinies.

En effet, la catégorie des foncteurs exacts à gauche de $\mathbf{Alf}_{/k}$ vers $(\mathbf{Ens})$ possède des limites projectives, qui sont définies « argument par argument », c.-à-d., si $(\mathbf{F}_i)$ est un système projectif de tels foncteurs, on a, pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$:

$$(\varprojlim \mathbf{F}_i)(C) = \varprojlim \mathbf{F}_i(C). \quad (34)$$

491 **0.5.** — ⁽³⁵⁾ Soit $\varphi : k \rightarrow \ell$ un homomorphisme d'anneaux pseudocompacts (cf. 0.1.3). On peut généraliser la construction de 0.3 comme suit.

Définition 0.5.A. — Pour tout objet M de $\mathbf{PC}(k)$ (resp. N de $\mathbf{PC}(\ell)$), nous noterons $M \widehat{\otimes}_k N$ le séparé complété de $M \otimes_k N$ pour la topologie linéaire définie par les noyaux des projections :

$$M \otimes_k \ell \longrightarrow (M/M') \otimes_k (N/N'),$$

où M' (resp. N') est un sous-module ouvert de M (resp. de N). Alors, $M \widehat{\otimes}_k N$ est un ℓ -module pseudocompact. Si $m \in M$ et $x \in N$, nous noterons $m \widehat{\otimes}_k x$ l'image canonique de $m \otimes_k x$ dans $M \widehat{\otimes}_k N$.

Ceci s'applique en particulier lorsque $N = \ell$, dans ce cas on dira que $M \widehat{\otimes}_k \ell$ est le ℓ -module pseudocompact *déduit de M par le changement de base $k \rightarrow \ell$* .

Remarques 0.5.B. — (i) Lorsqu'on considérera un tel changement de base, ℓ ne sera pas en général une k -algèbre profinie : un exemple typique est le cas où k est un corps et ℓ est une extension arbitraire K de k .

(ii) Toutefois, si le k -module sous-jacent à N est pseudocompact (par exemple si ℓ est une k -algèbre profinie) alors, d'après 0.4, tout sous- k -module ouvert de N contient un sous- ℓ -module ouvert de N ; par conséquent, $M \widehat{\otimes}_k N$ coïncide dans ce cas avec le produit tensoriel complété (cf. 0.3) des k -modules pseudocompacts M et N , et la notation ne comporte donc pas d'ambiguïté.

⁽³³⁾N.D.E. : En effet, tout k -module discret de longueur n est isomorphe à k^n/L , où L est un sous-module ouvert de k^n de colongueur n . Ensuite, on peut considérer l'ensemble des (classes d'isomorphisme de) structures de k -algèbre profinie sur chaque tel module.

⁽³⁴⁾N.D.E. : Si $(A_i)_{i \in I}$ est un système inductif de $\mathbf{Alp}_{/k}$, sa limite inductive dans $\mathbf{Alp}_{/k}$ est le séparé complété de la k -algèbre B , limite inductive des k -algèbres sous-jacentes, pour la topologie définie par les idéaux I tels que $I \cap A_i$ soit un idéal ouvert de A_i pour tout i , et $\text{long}_k(B/I) < \infty$. Noter que si, par exemple, K/k est une extension algébrique de corps, de degré infini, et si (k_i) désigne le système inductif filtrant des sous-extensions de degré fini, alors la limite inductive du système (k_i) dans $\mathbf{Alp}_{/k}$ est l'anneau nul !

⁽³⁵⁾N.D.E. : On a détaillé ce paragraphe.

Le k -module $N|_k$ obtenu par restriction des scalaires est de toute façon un k -module topologique, i.e. l'application $k \times N \rightarrow N$, $(t, n) \mapsto \varphi(t)n$ est continue. On notera $\text{Hom}_c(M, N|_k)$ le groupe abélien des homomorphismes continus de k -modules de M dans $N|_k$.

Proposition 0.5.C. — *Pour tout $M \in \text{Ob } \mathbf{PC}(k)$ et $N \in \text{Ob } \mathbf{PC}(\ell)$, on a un isomorphisme fonctoriel*

$$\text{Hom}_{\mathbf{PC}(\ell)}(M \widehat{\otimes}_k \ell, N) \simeq \text{Hom}_c(M, N|_k). \quad (36)$$

En effet, soit ϕ un homomorphisme continu $M \rightarrow N|_k$, alors l'application $\phi' : M \times \ell \rightarrow N$, $(m, \lambda) \mapsto \lambda\phi(m)$ est continue et « bilinéaire » (c.-à-d., k -linéaire en le premier facteur et ℓ -linéaire en le second). Si N' un sous- ℓ -module ouvert de N , on montre comme dans le lemme 0.3.1 qu'il existe un sous-module ouvert M' de M et un idéal ouvert ℓ' de ℓ tels que $\phi'(M' \times \ell)$ et $\phi'(M \times \ell')$ soient contenus dans N' . Il en résulte que ϕ induit un homomorphisme continu de ℓ -modules $\Phi : M \widehat{\otimes}_k \ell \rightarrow N$, tel que $\Phi(m \widehat{\otimes} \lambda) = \lambda\phi(m)$, pour tout $m \in M$ et $\lambda \in \ell$.

Réciproquement, on associe à tout morphisme $f : M \widehat{\otimes}_k \ell \rightarrow N$ le morphisme $f' : m \mapsto f(m \widehat{\otimes}_k 1)$ de M dans $N|_k$.

On obtient alors, comme en 0.3.2, 0.3.5 et 0.3.1.2, le :

Corollaire 0.5.D. — *Le foncteur $\mathbf{PC}(k) \rightarrow \mathbf{PC}(\ell)$, $M \mapsto M \widehat{\otimes}_k \ell$ est exact à droite, et commute aux limites projectives filtrantes, c.-à-d., si (M_i) est un système projectif filtrant d'objets de $\mathbf{PC}(k)$, on a un isomorphisme canonique :*

$$(\varprojlim M_i) \widehat{\otimes}_k \ell \simeq \varprojlim (M_i \widehat{\otimes}_k \ell).$$

De plus, si M, N sont des k -modules pseudocompacts, on a un isomorphisme canonique :

$$(M \widehat{\otimes}_k N) \widehat{\otimes}_k \ell \cong (M \widehat{\otimes}_k \ell) \widehat{\otimes}_\ell (N \widehat{\otimes}_k \ell).$$

Définition 0.5.E. — Enfin, si A est une k -algèbre profinie, il y a sur $A \widehat{\otimes}_k \ell$ une et une seule structure de ℓ -algèbre profinie telle que, si $a, b \in A$ et $\lambda, \mu \in \ell$,

$$(a \widehat{\otimes}_k \lambda)(b \widehat{\otimes}_k \mu) = (ab) \widehat{\otimes}_k (\lambda\mu).$$

On dit que $A \widehat{\otimes}_k \ell$ est la ℓ -algèbre profinie déduite de A par l'extension des scalaires (ou le « changement de base ») $k \rightarrow \ell$.

1. Variétés formelles sur un anneau pseudocompact

492

1.1. — On peut associer à tout anneau pseudocompact A un schéma formel (EGA I, 10.4.2) en procédant comme suit : l'espace topologique sous-jacent est l'ensemble $\Upsilon(A)$ des idéaux premiers ouverts (donc maximaux) de A , qu'on munit de la topologie discrète ; le faisceau structural a le produit cartésien $\prod_{m \in E} A_m$ pour espace des

⁽³⁶⁾N.D.E. : Par conséquent, si ℓ est une k -algèbre profinie, le foncteur $M \mapsto M \widehat{\otimes}_k \ell$ est adjoint à gauche du foncteur de restriction des scalaires $\mathbf{PC}(\ell) \rightarrow \mathbf{PC}(k)$ (cf. lemme 0.4).

sections sur une partie E de $\Upsilon(A)$. Le schéma formel ainsi obtenu est noté $\mathrm{Spf}(A)$ (le *spectre formel* de A). ⁽³⁷⁾

Si A et B sont deux anneaux pseudocompacts, un *morphisme* de $\mathrm{Spf}(B)$ dans $\mathrm{Spf}(A)$ consiste en la donnée d'une application f de $\Upsilon(B)$ dans $\Upsilon(A)$ et d'une famille d'homomorphismes continus $f_y^\natural : A_{f(y)} \rightarrow B_y$, pour $y \in \Upsilon(B)$. Un tel morphisme induit un homomorphisme continu $f^\natural$ de $A = \prod_{x \in \Upsilon(A)} A_x$ dans $B = \prod_{y \in \Upsilon(B)} B_y$. La réciproque est vraie :

Proposition. — *Le foncteur contravariant $A \mapsto \mathrm{Spf}(A)$ est pleinement fidèle.*

En effet, si $\varphi : A \rightarrow B$ est un homomorphisme continu d'algèbres, l'image réciproque $\varphi^{-1}(\mathfrak{n})$ d'un idéal maximal ouvert de B est un idéal premier ouvert de A , donc maximal dans A . On obtient donc une application $\mathfrak{n} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{n})$ de $\Upsilon(B)$ dans $\Upsilon(A)$, et φ induit un homomorphisme continu $A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{n})} \rightarrow B_{\mathfrak{n}}$. Donc φ induit un morphisme de schémas formels $\mathrm{Spf}(\varphi) : \mathrm{Spf}(B) \rightarrow \mathrm{Spf}(A)$. On vérifie facilement que $\mathrm{Spf}(\varphi)^\natural = \varphi$, et que $\mathrm{Spf}(f^\natural) = f$, pour tout morphisme $f : \mathrm{Spf}(B) \rightarrow \mathrm{Spf}(A)$, d'où la proposition.

Bien que nous ne parlions ici que de schémas formels de la forme $\mathrm{Spf}(A)$, nous utiliserons le langage des schémas formels plutôt que celui des anneaux pseudocompacts, afin d'appuyer nos assertions sur une intuition géométrique.

1.2. — Soit k un anneau pseudocompact.

Définition 1.2.A. — ⁽³⁸⁾ Nous appellerons *variété formelle* sur k tout schéma formel X au-dessus de $\mathrm{Spf}(k)$ qui est isomorphe à un k -schéma formel $\mathrm{Spf}(A)$ pour une certaine k -algèbre profinie A . L'algèbre A est alors isomorphe à l'*algèbre affine* de X , c'est-à-dire à l'algèbre des sections du faisceau structural $\mathcal{O}_X$ de X .

On notera $\mathbf{Vaf}/_k$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des schémas formels sur $\mathrm{Spf}(k)$ dont les objets sont les k -variétés formelles. ⁽³⁹⁾

D'après 1.1, le foncteur $A \mapsto \mathrm{Spf}(A)$ est une anti-équivalence de $\mathbf{Alp}/_k$ (0.4.1) sur $\mathbf{Vaf}/_k$. Donc, d'après le corollaire 0.4.2 :

Proposition 1.2.B. — *La catégorie $\mathbf{Vaf}/_k$ possède des limites projectives et inductives.* ⁽⁴⁰⁾

Par exemple, soient $X \in \mathrm{Ob} \mathbf{Vaf}/_k$ et $f : Y \rightarrow X$ et $g : Z \rightarrow X$ deux k -variétés formelles au-dessus de X et soient A, B, C les algèbres affines de X, Y, Z ; d'après

⁽³⁷⁾N.D.E. : cf. Remarques 0.1.2.

⁽³⁸⁾N.D.E. : On a ajouté la numérotation 1.2.A à 1.2.E, pour des références ultérieures.

⁽³⁹⁾N.D.E. : Notons que, d'après la définition des morphismes (1.1), tout $X \in \mathrm{Ob} \mathbf{Vaf}/_k$ est la *somme directe* dans $\mathbf{Vaf}/_k$ des variétés formelles ponctuelles $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{X,x})$, pour $x \in X$.

⁽⁴⁰⁾N.D.E. : En particulier, les *conoyaux* existent dans $\mathbf{Vaf}/_k$, voir ci-dessous. Remarquons d'autre part qu'une limite projective filtrante dans $\mathbf{Vaf}/_k$, dont tous les morphismes de transition sont surjectifs, peut être vide, cf. N.D.E. (34).

0.4.1, l'algèbre affine du produit fibré $Y \times_X Z$ s'identifie à $B \widehat{\otimes}_A C$, ⁽⁴¹⁾ de sorte que l'inclusion de $\mathbf{Vaf}/_k$ dans la catégorie de tous les k -schémas formels commute aux limites projectives finies (cf. EGA I, 10.7).

Les limites inductives de k -variétés formelles correspondent aux limites projectives de leurs algèbres affines.

Exemple 1.2.C (Conoyaux). — Soit, par exemple, $d, e : X \rightrightarrows Y$ une double-flèche de $\mathbf{Vaf}/_k$; l'algèbre affine de $\text{Coker}(d, e)$ est isomorphe au noyau des homomorphismes induits sur les algèbres affines de X et Y , mais on peut aussi donner de $\text{Coker}(d, e)$ la construction suivante : l'espace topologique sous-jacent à $\text{Coker}(d, e)$ est le conoyau des espaces sous-jacents ⁽⁴²⁾; si p est la projection canonique de l'ensemble sous-jacent à Y sur le conoyau et si z appartient au conoyau, l'algèbre locale de $\text{Coker}(d, e)$ en z est le noyau de la double-flèche

$$d^\sharp, e^\sharp : \prod_{p(y)=z} \mathcal{O}_{Y,y} \rightrightarrows \prod_{q(x)=z} \mathcal{O}_{X,x}$$

où l'on a posé $q = p \circ d = p \circ e$ et où $d^\sharp$ et $e^\sharp$ sont induits par les homomorphismes $d_x^\sharp$ et $e_x^\sharp$ (notations de 1.1). 494

Définition 1.2.D. — Si $\varphi : k \rightarrow \ell$ est un homomorphisme d'anneaux pseudocompacts et X une k -variété formelle d'algèbre affine A , le schéma formel $X \times_{\text{Spf}(k)} \text{Spf}(\ell)$, obtenu par changement de base, est une ℓ -variété formelle, que nous noterons aussi $X \widehat{\otimes}_k \ell$ et qui a pour algèbre affine le produit tensoriel complété $A \widehat{\otimes}_k \ell$ (cf. 0.5 et EGA I, § 10).

Remarque 1.2.E. — Comme toute variété formelle sur k se décompose en variétés formelles sur les composantes locales de k , nous supposons dans certaines démonstrations que k est un anneau pseudocompact local.

Donnons maintenant quelques exemples, en même temps que nous fixons notre terminologie.

1.2.1. — Un k -foncteur sera, par définition, un foncteur *covariant* de $\mathbf{Alf}/_k$ dans $(\mathbf{Ens})$. D'après 1.1 et 0.4.2, on peut identifier $\mathbf{Vaf}/_k \cong (\mathbf{Alp}/_k)^0$ à une sous-catégorie pleine de la catégorie des k -foncteurs, en associant à toute k -variété formelle X le foncteur :

$$\mathbf{Alf}/_k \longrightarrow (\mathbf{Ens}), \quad C \mapsto X(C) = \text{Hom}_{\mathbf{Vaf}/_k}(\text{Spf}(C), X).$$

⁽⁴¹⁾N.D.E. : Notons que $Y \times_X Z$ est la somme directe, pour $x \in X$, des variétés formelles $B_x \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{X,x}} C_x$, où B_x est le produit des $\mathcal{O}_{Y,y}$ pour les $y \in Y$ tels que $f(y) = x$, et C_x est défini de façon analogue. Ceci sera utilisé en 2.5.1.

⁽⁴²⁾N.D.E. : c.-à-d., l'ensemble quotient de Y par les identifications $d(x) = e(x)$, pour tout $x \in X$, muni de la topologie quotient, qui est ici la topologie discrète.

Nous rencontrerons plus loin des k -foncteurs $\mathbf{F}$ qui associent à tout objet C de $\mathbf{A}l\mathbf{f}/k$ un module $\mathbf{F}(C)$ sur C et à tout morphisme $\varphi : C \rightarrow D$ de $\mathbf{A}l\mathbf{f}/k$ une application k -linéaire $\mathbf{F}(\varphi) : \mathbf{F}(C) \rightarrow \mathbf{F}(D)$ telle que, si $x \in \mathbf{F}(C)$ et $\lambda \in C$:

$$\mathbf{F}(\varphi)(\lambda x) = \varphi(\lambda)\mathbf{F}(\varphi)(x).$$

D'après l'Exp. I, 3.1, un tel $\mathbf{F}$ est muni d'une structure de $\mathbf{O}_k$ -module, si l'on note $\mathbf{O}_k$ le k -foncteur en anneaux qui associe à tout objet C de $\mathbf{A}l\mathbf{f}/k$ l'anneau sous-jacent à C .

495 **Définitions.** — (i) Un $\mathbf{O}_k$ -module $\mathbf{F}$ sera dit *admissible* si tout morphisme $\varphi : C \rightarrow D$ de $\mathbf{A}l\mathbf{f}/k$ induit une bijection de $D \otimes_C \mathbf{F}(C)$ sur $\mathbf{F}(D)$. ⁽⁴³⁾

(ii) On dira que $\mathbf{F}$ est *plat* s'il est admissible et si, pour tout objet C de $\mathbf{A}l\mathbf{f}/k$, $\mathbf{F}(C)$ est un C -module plat. ⁽⁴⁴⁾

Par exemple, si M est un k -module (*pas nécessairement pseudocompact*), nous noterons (comme dans l'Exp. I, 4.6.1) $\mathbf{W}(M)$ le $\mathbf{O}_k$ -module $C \mapsto C \otimes_k M$; alors $\mathbf{W}(M)$ est plat lorsque M est plat sur k .

De plus, le foncteur $M \mapsto \mathbf{W}(M)$ a pour adjoint à droite le foncteur qui associe à tout $\mathbf{O}_k$ -module $\mathbf{F}$ le k -module $\varprojlim_{\mathfrak{l}} \mathbf{F}(k/\mathfrak{l})$, où $\mathfrak{l}$ parcourt les idéaux ouverts de k .

1.2.2. — Dans la suite, un $\mathbf{O}_k$ -module sera toujours désigné par une lettre en caractères gras telle que $\mathbf{F}$; lorsque k est artinien, nous écrirons alors simplement F au lieu de $\mathbf{F}(k)$. Dans ce cas, il va de soi que le foncteur $\mathbf{F} \mapsto F$ induit une équivalence de la catégorie des $\mathbf{O}_k$ -modules plats sur celle des k -modules plats! La terminologie que nous avons adoptée a donc seulement pour but de nous permettre de raisonner « comme si k était toujours artinien ».

Conformément à l'exposé I §3.1, nous utiliserons des conventions analogues pour d'autres structures algébriques : ainsi, une $\mathbf{O}_k$ -algèbre (resp. une $\mathbf{O}_k$ -coalgèbre, resp. une $\mathbf{O}_k$ -algèbre de Lie, resp. une $\mathbf{O}_k$ - p -algèbre de Lie) consistera en la donnée d'un $\mathbf{O}_k$ -module $\mathbf{M}$ et, pour tout objet C de $\mathbf{A}l\mathbf{f}/k$, d'une structure de C -algèbre (resp. de C -coalgèbre, resp. de C -algèbre de Lie, resp. de C - p -algèbre de Lie) sur $\mathbf{M}(C)$; on suppose de plus que, pour tout morphisme $\varphi : C \rightarrow D$ de $\mathbf{A}l\mathbf{f}/k$, l'application de $D \otimes_C \mathbf{M}(C)$ dans $\mathbf{M}(D)$, qui est induite par $\mathbf{M}(\varphi)$, est un homomorphisme de D -algèbres (resp. de D -coalgèbres, etc.).

Notons enfin que, si $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ sont deux $\mathbf{O}_k$ -modules, $\mathbf{F} \otimes_k \mathbf{G}$ désignera le $\mathbf{O}_k$ -module $C \mapsto \mathbf{F}(C) \otimes_C \mathbf{G}(C)$.

1.2.3. — ⁽⁴⁵⁾ Commençons par le lemme suivant.

⁽⁴³⁾N.D.E. : On a introduit cette terminologie, cf. la N.D.E. (47) dans 1.2.3.

⁽⁴⁴⁾N.D.E. : et donc *projectif*, puisque C est artinien.

⁽⁴⁵⁾N.D.E. : On a ajouté le lemme qui suit et l'on a introduit la numérotation 1.2.3.A à 1.2.3.F, pour des références ultérieures.

Lemme 1.2.3.A. — Soit $k \rightarrow K$ un morphisme d'anneaux pseudocompacts, B un K -module pseudocompact, et M un k -module (sans topologie) projectif. On a un isomorphisme canonique de K -modules pseudocompacts

$$(2) \quad \theta : \operatorname{Hom}_k(M, k) \widehat{\otimes}_k B \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_k(M, B).$$

Ici, $M^* = \operatorname{Hom}_k(M, k)$ est muni de la topologie définie en 0.2.2, qui en fait un k -module pseudocompact, et la topologie de $\operatorname{Hom}_k(M, B)$ est définie de façon analogue : une base de voisinages de 0 est formée par les sous- K -modules suivants, où $x \in M$ et B' est un sous- K -module ouvert de B :

$$\mathcal{H}(x, B') = \{f \in \operatorname{Hom}_k(M, B) \mid f(x) \in B'\}.$$

Enfin, $M^* \widehat{\otimes}_k B$ est le K -module pseudocompact déduit de M^* par changement de base, cf. 0.5.A.

Ceci étant, θ est évidemment un isomorphisme lorsque $M = k$; de plus, les deux membres de (2), considérés comme foncteurs en M , transforment somme directes en produits (en particulier, commutent aux sommes directes finies). On obtient donc que (2) est un isomorphisme lorsque M est un k -module libre, puis lorsque M est projectif.

Définition 1.2.3.B. — Soit N un k -module pseudocompact. Nous notons $\mathbf{V}_k^f(N)$ ou $\mathbf{N}^\dagger$ 496
(46) le $\mathbf{O}_k$ -module qui associe à tout $C \in \operatorname{Ob} \mathbf{A}lf_k$ le C -module $(C \widehat{\otimes}_k N)^\dagger$ dual de $C \widehat{\otimes}_k N$ (0.2.2), c.-à-d., le C -module

$$\operatorname{Hom}_C(C \widehat{\otimes}_k N, C) \cong \operatorname{Hom}_C(N, C|_k),$$

où $C|_k$ désigne le k -module C obtenu par restriction des scalaires. Ce $\mathbf{O}_k$ -module $\mathbf{V}_k^f(N)$ sera appelé *le dual* de N .

Si k_m est une composante locale de k , alors, pour tout objet C de $\mathbf{A}lf_k$,

$$\operatorname{Hom}_C(k_m, C|_k) = C_m = C \otimes_k k_m$$

est un C -module projectif, et de plus on a $D \otimes_C C_m = D_m$, pour tout morphisme $C \rightarrow D$ de $\mathbf{A}lf_k$; donc $\mathbf{V}_k^f(k_m)$ est un $\mathbf{O}_k$ -module plat (cf. 1.2.1). Comme tout k -module pseudocompact projectif est un produit de modules k_m (cf. Prop. 0.2.1), on déduit du corollaire 0.2.F le :

Corollaire 1.2.3.C. — $\mathbf{V}_k^f(N)$ est un $\mathbf{O}_k$ -module plat lorsque N est un k -module pseudocompact projectif.

Définition 1.2.3.D. — Réciproquement, si $\mathbf{M}$ est un $\mathbf{O}_k$ -module admissible (cf. 1.2.1),
(47) nous appelons *dual de $\mathbf{M}$* et nous notons $\Gamma^*(\mathbf{M})$ le k -module pseudocompact défini comme suit. Pour $\mathfrak{l}$ parcourant les idéaux ouverts de k , on munit chaque $k/\mathfrak{l}$ -module

$$\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^* = \operatorname{Hom}_{k/\mathfrak{l}}(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l}), k/\mathfrak{l})$$

(46) N.D.E. : En fait, on n'utilisera pas cette seconde notation, voir la N.D.E. (47).

(47) N.D.E. : Les éditeurs ne comprennent pas la définition qui suit si $\mathbf{M}$ n'est pas supposé admissible, d'où l'ajout de cette hypothèse. D'autre part, on a noté $\Gamma^*(\mathbf{M})$ au lieu de $\mathbf{M}^*$, afin d'éviter des confusions entre $\mathbf{M}^*$, le module dual du foncteur $\mathbf{M}$, et $\mathbf{N}^\dagger$, le foncteur dual du module N , cf. N.D.E. (46). Enfin, on a détaillé la construction de $\Gamma^*(\mathbf{M})$.

de la topologie décrite en 0.2.2, qui en fait un k -module pseudocompact. Comme $\mathbf{M}(k/\mathfrak{l}) \simeq \mathbf{M}(k/\mathfrak{l}') \otimes (k/\mathfrak{l})$ pour $\mathfrak{l} \supset \mathfrak{l}'$, on a des morphismes de transition :

$$\mathrm{Hom}_{k/\mathfrak{l}'}(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l}'), k/\mathfrak{l}') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k/\mathfrak{l}'}(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l}'), k/\mathfrak{l}) = \mathrm{Hom}_{k/\mathfrak{l}}(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l}), k/\mathfrak{l})$$

et par définition $\Gamma^*(\mathbf{M})$ est la limite projective de ce système projectif (filtrant) de k -modules pseudocompacts.

Désormais, on suppose de plus que $\mathbf{M}$ est un $\mathbf{O}_k$ -module *plat* (cf. 1.2.1), alors chaque $\mathbf{M}(k/\mathfrak{l}')$ est un $(k/\mathfrak{l}')$ -module projectif, donc les morphismes de transition ci-dessus sont surjectifs, et donc il en est de même des projections $\Gamma^*(\mathbf{M}) \rightarrow \mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^*$, puisque dans $\mathbf{PC}(k)$ les limites projectives filtrantes sont exactes.

Si $\tau : k \rightarrow K$ est un morphisme d'anneaux pseudocompacts, on notera $\mathbf{M} \otimes_k K$ ou simplement $\mathbf{M}_K$ le $\mathbf{O}_K$ -foncteur défini comme suit. Si C est une K -algèbre de longueur finie, alors le noyau de $k \rightarrow C$ est un idéal ouvert $\mathfrak{l}$, et l'on pose $\mathbf{M}_K(C) = \mathbf{M}(k/\mathfrak{l}) \otimes_k C$; on a alors $\mathbf{M}_K(C) = \mathbf{M}(k/\mathfrak{l}') \otimes_k C$ pour tout idéal ouvert $\mathfrak{l}'$ contenu dans $\mathfrak{l}$. On définit alors $\Gamma_K^*(\mathbf{M}_K)$ comme la limite projective, pour I parcourant les idéaux ouverts de K , des K -modules pseudocompacts :

$$\mathrm{Hom}_{K/I}(\mathbf{M}_K(K/I), K/I) = \mathrm{Hom}_{k/\mathfrak{l}}(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l}), K/I),$$

où dans le terme de droite $\mathfrak{l}$ est un quelconque idéal ouvert de k tel que $\tau(\mathfrak{l}) \subset I$. De plus, d'après 1.2.3.A, le terme de droite s'identifie à $\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^* \widehat{\otimes}_k (K/I)$. Comme les projections $\Gamma^*(\mathbf{M}) \rightarrow \mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^*$ sont surjectives, on voit que la limite projective des $\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^* \widehat{\otimes}_k (K/I)$ n'est autre que le K -module pseudocompact $\Gamma^*(\mathbf{M}) \widehat{\otimes}_k K$ (cf. 0.5.A). On a ainsi obtenu que, pour tout $\mathbf{O}_k$ -module *plat* $\mathbf{M}$, la formation de $\Gamma^*(\mathbf{M})$ *commute à l'extension de la base*, i.e. on a

$$(\star) \quad \Gamma_K^*(\mathbf{M} \otimes_k K) \simeq \Gamma^*(\mathbf{M}) \widehat{\otimes}_k K.$$

Proposition 1.2.3.E. — (i) Les foncteurs $N \mapsto \mathbf{V}_k^f(N)$ et $\mathbf{M} \mapsto \Gamma^*(\mathbf{M})$ définissent une anti-équivalence entre la catégorie des k -modules pseudocompacts projectifs et celle des $\mathbf{O}_k$ -modules plats. ⁽⁴⁸⁾

(ii) De plus, si $k \rightarrow K$ est un morphisme d'anneaux pseudocompacts, alors l'anti-équivalence précédente « commute au changement de base » au sens suivant : si $N \simeq \Gamma^*(\mathbf{M})$, alors $N \widehat{\otimes}_k K \simeq \Gamma_K^*(\mathbf{M} \otimes_k K)$.

Démonstration. D'une part, on a une transformation naturelle $\phi_N : N \rightarrow \Gamma^*(\mathbf{V}_k^f(N))$. Comme le foncteur $\Gamma^* \circ \mathbf{V}_k^f$ commute aux produits, d'après 0.3.5 et 0.2.F, il suffit de vérifier que ϕ_N est un isomorphisme lorsque N est une composante locale $k_{\mathfrak{m}}$ de k . Dans ce cas, pour tout idéal ouvert $\mathfrak{l}$ de k contenu dans $\mathfrak{m}$, le morphisme naturel

$$(k/\mathfrak{l})_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k/\mathfrak{l}}(\mathrm{Hom}_c(k_{\mathfrak{m}} \widehat{\otimes} k/\mathfrak{l}, k/\mathfrak{l}), k/\mathfrak{l})$$

est un isomorphisme, d'où le résultat.

⁽⁴⁸⁾N.D.E. : On a ajouté le point (ii) ci-dessous, ainsi que la démonstration qui suit. L'original indiquait : « Si $\mathbf{M}$ est un $\mathbf{O}_k$ -module plat, il est clair que $\mathbf{M}$ n'est autre que le dual de $\mathbf{M}^*$, donc les foncteurs $N \mapsto N^*$ et $\mathbf{M} \mapsto \mathbf{M}^*$ définissent une anti-équivalence... »

D'autre part, soit $\mathbf{M}$ un $\mathbf{O}_k$ -module plat. Montrons que $\Gamma^*(\mathbf{M}) = \varprojlim \mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^*$ est un objet projectif de $\mathbf{PC}(k)$. Soit $N \rightarrow N'$ un morphisme surjectif entre objets de $\mathbf{LF}(k)$. D'après 0.2.F (i) et (ii), il suffit de montrer que l'application naturelle

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_c(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^*, N) \longrightarrow \varinjlim \mathrm{Hom}_c(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^*, N')$$

est surjective. Mais ceci est clair, car N et N' sont des $k/\mathfrak{l}_0$ -modules, pour un certain idéal ouvert $\mathfrak{l}_0$; donc, si $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{l}_0$, tout morphisme $\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^* \rightarrow N'$ se relève en un morphisme $\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^* \rightarrow N$, puisque $\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^*$ est un objet projectif de $\mathbf{PC}(k/\mathfrak{l})$.

On a un morphisme $\psi : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{V}_k^f(\Gamma^*(\mathbf{M}))$ de foncteurs de $\mathbf{Alf}/_k$ dans $(\mathbf{Ens})$. Soit B un objet de $\mathbf{Alf}/_k$, montrons que

$$(1) \quad \psi(B) : \mathbf{M}(B) \longrightarrow \mathbf{V}_k^f(\Gamma^*(\mathbf{M}))(B) = \mathrm{Hom}_c\left(\varprojlim_{\mathfrak{l}} (\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^* \widehat{\otimes}_k B), B\right)$$

est une bijection (dans l'égalité ci-dessus, on a utilisé le fait que $\widehat{\otimes}$ commute aux limites projectives filtrantes). Soit $\mathfrak{l}_0$ un idéal ouvert de k contenu dans le noyau de $k \rightarrow B$. D'après le lemme 1.2.3.A, pour tout $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{l}_0$, on a un isomorphisme canonique de B -modules pseudocompacts :

$$\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^* \widehat{\otimes}_k B \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k/\mathfrak{l}}(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l}), B)$$

et, puisque $\mathbf{M}(B) = \mathbf{M}(k/\mathfrak{l}) \otimes_{k/\mathfrak{l}} B$, le terme de droite égale $\mathrm{Hom}_B(\mathbf{M}(B), B)$. Donc, le système projectif dans (1) est constant pour $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{l}_0$, et (1) se réduit au morphisme canonique

$$\mathbf{M}(B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_c(\mathrm{Hom}_B(\mathbf{M}(B), B), B),$$

qui est un isomorphisme d'après 0.2.2, puisque B est artinien et $\mathbf{M}(B)$ un B -module projectif. Ceci prouve le point (i) de la proposition, et le point (ii) découle de l'isomorphisme $(\star)$ établi plus haut.

Remarque 1.2.3.F. — Revenons à l'énoncé de la proposition, et supposons de plus que N soit un k -module pseudocompact *topologiquement libre*. Dans ce cas, on peut choisir « de manière cohérente » des bases pour les C -modules $\mathbf{V}_k^f(N)(C)$.

En effet, soient (n_i) une pseudobase de N (0.2.1) et n_i^C l'image canonique de n_i dans $C \widehat{\otimes}_k N$, pour $C \in \mathbf{Alf}/_k$. Si l'on définit l'élément δ_i^C de $(C \widehat{\otimes}_k N)^\dagger$ par les égalités $\delta_i^C(n_i^C) = 1$ et $\delta_i^C(n_j^C) = 0$ pour $i \neq j$, la famille (δ_i^C) est une base de $\mathbf{V}_k^f(N)(C)$; en outre, pour tout morphisme $\varphi : C \rightarrow D$ de $\mathbf{Alf}/_k$, $\mathbf{V}_k^f(N)(\varphi)$ envoie δ_i^C sur δ_i^D .

1.2.4. — ⁽⁴⁹⁾ Pour tout k -module pseudocompact E , soit $\widehat{S}_k(E)$ l'algèbre symétrique complétée de E , définie de la manière suivante. Soit $T_k(E)$ la somme directe des k -modules pseudocompacts :

$$\widehat{\bigotimes}_k^n E = E \widehat{\otimes}_k \cdots \widehat{\otimes}_k E \quad (n \geq 0; \quad \text{si } n = 0, \quad \widehat{\bigotimes}_k^0 E = k);$$

on fait de $T_k(E)$ une k -algèbre graduée en définissant la multiplication de la façon 497

⁽⁴⁹⁾N.D.E. : Dans ce paragraphe, on a modifié l'ordre, en définissant d'abord $\widehat{S}_k(E)$ et énonçant ensuite que $\mathbf{V}_k^f(E)$ représente $\mathbf{V}_k^f(E)$.

habituelle ; soit alors $S_k(E)$ le quotient de $T_k(E)$ par l'idéal homogène qui a pour n -ième composante le k -sous-module fermé de $\widehat{\bigotimes}_k^n E$ engendré par les éléments :

$$x_1 \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} x_i \widehat{\otimes} x_{i+1} \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} x_n - x_1 \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} x_{i+1} \widehat{\otimes} x_i \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} x_n.$$

Si l'on désigne par $S_k^n(E)$ ce quotient, $S_k(E)$ est évidemment une k -algèbre graduée de n -ième composante $S_k^n(E)$.

On munit $S_k(E)$ de la topologie linéaire définie par l'ensemble Υ des idéaux $\mathfrak{l}$ tels que $S_k(E)/\mathfrak{l}$ soit un k -module de longueur finie et que $S_k^n(E) \cap \mathfrak{l}$ soit un sous-module ouvert de $S_k^n(E)$ pour tout n . Alors, l'algèbre profinie $\widehat{S}_k(E)$ est le séparé complété de $S_k(E)$ pour cette topologie. ⁽⁵⁰⁾

On note $\mathbb{V}_k^f(E)$ la k -variété formelle $\mathrm{Spf}(\widehat{S}_k(E))$. Elle représente le k -foncteur $\mathbb{V}_k^f(E)$, c.-à-d., pour tout objet C de $\mathbf{AIf}_{/k}$, on a un isomorphisme canonique :

$$\mathbb{V}_k^f(E)(C) = \mathrm{Hom}_c(E, C|_k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{AIf}_{/k}}(\widehat{S}_k(E), C) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/k}}(\mathrm{Spf}(C), \mathbb{V}_k^f(E)).$$

Dans toute la suite, nous identifions $\mathbb{V}_k^f(E)$ au k -foncteur $\mathbb{V}_k^f(E)$.

1.2.5. — D'après 1.2.4, le morphisme nul de E dans k est associé à un morphisme d'algèbres profinies $\pi : \widehat{S}_k(E) \rightarrow k$; ce morphisme π induit l'application nulle sur $S_k^n(E)$ pour $n \geq 1$ et définit une section du morphisme structural $\mathbb{V}_k^f(E) \rightarrow \mathrm{Spf}(k)$.

Nous noterons $\mathbb{V}_k^{f,0}(E)$ la variété formelle qui a pour points les images des points de $\mathrm{Spf}(k)$ par la section $\mathrm{Spf}(\pi)$ et qui a les mêmes algèbres locales que $\mathbb{V}_k^f(E)$ en ces points.

⁽⁵¹⁾ Alors, l'algèbre affine de $\mathbb{V}_k^{f,0}(E)$ est le séparé complété de $S_k(E)$ pour la topologie définie par les idéaux $\mathfrak{l} \in \Upsilon$ (cf. 1.2.4) qui contiennent $S_k^n(E)$ pour n assez grand. On en déduit que c'est le produit infini :

$$k[[E]] = k \times E \times S_k^2(E) \times S_k^3(E) \times \cdots$$

D'autre part, soient C un objet de $\mathbf{AIf}_{/k}$, u un élément de $\mathbb{V}_k^f(C) = \mathrm{Hom}_c(E, C)$, et $\phi : \widehat{S}_k(E) \rightarrow C$ le morphisme de k -algèbres profinies correspondant à u . Alors $\mathrm{Ker}(\phi)$ est un idéal ouvert (i.e. ϕ appartient à $\mathbb{V}_k^{f,0}(C)$) si et seulement si $\mathrm{Ker}(\phi)$ contient

⁽⁵⁰⁾N.D.E. : Par exemple, soient k un corps, E un k -espace vectoriel pseudocompact, $V = \mathrm{Hom}_c(E, k)$; on a $E \simeq V^*$ (cf. 0.2.2). Pour tout sous-espace de dimension finie W de V , soit $\mathcal{F}(W)$ l'ensemble des points fermés du k -schéma $\mathbb{V}(W) = \mathrm{Spec} S_k(W^*)$. Notons $\mathcal{F}(V)$ la limite inductive des $\mathcal{F}(W)$. Alors $\widehat{S}_k(E)$ est le produit pour $x \in \mathcal{F}(V)$ des k -algèbres pseudocompactes

$$\widehat{S}_k(E)_x = \varprojlim_W \widehat{\mathcal{O}}_{W,x}$$

où W parcourt les sous-espaces de V de dimension finie tels que $x \in \mathcal{F}(W)$, et $\widehat{\mathcal{O}}_{W,x}$ désigne le séparé complété de l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathbb{V}(W),x}$ pour la topologie définie par les idéaux de codimension finie (qui coïncide ici avec la topologie $\mathfrak{m}$ -adique). Si k est algébriquement clos et $(v_i)_{i \in I}$ une base de V , de sorte que E possède une pseudobase $(e_i)_{i \in I}$, chaque composante locale $\widehat{S}_k(E)_x$ est isomorphe à l'anneau des séries formelles $k[[e_i, i \in I]]$, muni de la topologie définie par les idéaux de codimension finie.

⁽⁵¹⁾N.D.E. : On a détaillé la suite de ce paragraphe.

$S_k^n(E)$ pour n assez grand, c.-à-d., si et seulement si $u(E)$ est contenu dans le radical $\mathfrak{r}(C)$ de C . Donc : pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$, on a des isomorphismes canoniques : 498

$$\mathbb{V}_k^{f,0}(E)(C) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/k}}(k[[E]], C) \simeq \mathrm{Hom}_c(E, \mathfrak{r}(C)).$$

1.2.6. — Une k -variété formelle V est dite de *longueur finie* si son algèbre affine l'est. De même, si S est un schéma, un S -schéma X est dit de *longueur finie* si X est fini sur S et si l'image directe de $\mathcal{O}_X$ sur S est un $\mathcal{O}_S$ -module de longueur finie. ⁽⁵²⁾ Donc, se donner un S -schéma de longueur finie X « est la même chose » que se donner un ensemble fini $\{s_1, \dots, s_n\}$ de points fermés de S , et en chacun de ces points une $\mathcal{O}_{S,s_i}$ -algèbre de longueur finie.

On voit donc que les S -schémas de longueur finie s'identifient aux variétés formelles de longueur finie sur le schéma formel $\widehat{S}$ qui suit. L'espace topologique sous-jacent à $\widehat{S}$ est l'ensemble des points fermés de S muni de la topologie discrète, si s est un tel point fermé, le faisceau structural $\mathcal{O}_{\widehat{S}}$ a pour tige $\mathcal{O}_{\widehat{S},s}$ en s le séparé complété $\widehat{\mathcal{O}_{S,s}}$ de $\mathcal{O}_{S,s}$ pour la topologie linéaire définie par les idéaux de colongueur finie ; on a donc $\widehat{S} = \mathrm{Spf} \mathcal{A}(\widehat{S})$, où $\mathcal{A}(\widehat{S})$ est le produit des $\widehat{\mathcal{O}_{S,s}}$, pour s parcourant les points fermés de S , muni de la topologie produit.

Définition. — Si X est un S -schéma, on note $\widehat{X}/\widehat{S}$ la variété formelle sur $k = \mathcal{A}(\widehat{S})$ définie comme suit. L'espace topologique sous-jacent est formé des points $x \in X$ tels que $[\kappa(x) : \kappa(s)] < \infty$, où s est l'image de x dans S ; l'anneau local $\mathcal{O}_{\widehat{X}/\widehat{S},x}$ est le séparé complété de $\mathcal{O}_{X,x}$ pour la topologie linéaire définie par les idéaux I de $\mathcal{O}_{X,x}$ tels que $\mathcal{O}_{X,x}/I$ soit de longueur finie comme $\mathcal{O}_{S,s}$ -module (N. B. puisque $[\kappa(x) : \kappa(s)] < \infty$, ceci équivaut à dire que $\mathcal{O}_{X,x}/I$ est de longueur finie comme $\mathcal{O}_{X,x}$ -module).

Soit $\mathbf{Vaf}_{/\widehat{S}}^{\ell f}$ la catégorie des variétés formelles de longueur finie sur $\widehat{S}$ (identifiée à celle des S -schémas de longueur finie). D'après 1.1 et 1.2.1, la catégorie $\mathbf{Vaf}_{/\widehat{S}}$ des variétés formelles sur $\widehat{S}$ est équivalente à celle des foncteurs contravariants exacts à gauche de $\mathbf{Vaf}_{/\widehat{S}}^{\ell f}$ dans $(\mathbf{Ens})$. En particulier, pour tout S -schéma X , le foncteur $T \mapsto \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Sch}_{/S})}(T, X)$, de $\mathbf{Vaf}_{/\widehat{S}}^{\ell f}$ vers $(\mathbf{Ens})$, est un tel foncteur exact à gauche, donc correspond à une variété formelle sur $\widehat{S}$. Celle-ci n'est autre que $\widehat{X}/\widehat{S}$: ⁽⁵³⁾

Proposition. — Pour tout S -schéma X , les foncteurs

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/\widehat{S}}}(-, \widehat{X}/\widehat{S}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Sch}_{/S})}(-, X)$$

ont même restriction à $\mathbf{Vaf}_{/\widehat{S}}^{\ell f}$. On obtient ainsi un foncteur $X \mapsto \widehat{X}/\widehat{S}$ de $(\mathbf{Sch}_{/S})$ vers $\mathbf{Vaf}_{/\widehat{S}}$, qui commute aux limites projectives finies.

⁽⁵²⁾N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

⁽⁵³⁾N.D.E. : On a amplifié la proposition qui suit, en y insérant le fait que le foncteur $X \mapsto \widehat{X}/\widehat{S}$ commute aux limites projectives finies (dans l'original, ceci figurait dans la démonstration de 1.3.4 – la démonstration donnée ici est plus directe que l'originale). De plus, ce résultat sera utile dans la Section 2 et dans 3.3.1.

En effet, on voit facilement que la variété formelle $\widehat{X}/\widehat{S}$ a la propriété requise, et que la correspondance $X \mapsto \widehat{X}/\widehat{S}$ est fonctorielle. Prouvons la seconde assertion.

Posons $\mathcal{S} = (\mathbf{Sch}/_S)$ et $\mathcal{V} = \mathbf{Vaf}/_{\widehat{S}}$, et notons $\widehat{X}$ au lieu de $\widehat{X}/\widehat{S}$. On sait (1.2.B) que $\mathcal{V}$ possède des limites projectives arbitraires. Soit $(X_i)_{i \in I}$ un système projectif dans $\mathcal{S}$ et supposons que $X = \varprojlim X_i$ existe dans $\mathcal{S}$ (ce qui est le cas si I est fini). Comme le foncteur qui associe à tout objet Y de $\mathcal{S}$ (resp. V de $\mathcal{V}$) le foncteur $\mathbf{h}_Y = \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(-, Y)$ (resp. $\mathbf{h}_V = \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(-, V)$) commute aux limites projectives, on a, pour tout S -schéma T de longueur finie, des isomorphismes fonctoriels :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(T, X) \simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(T, X_i) \simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(T, \widehat{X}_i) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(T, \varprojlim \widehat{X}_i).$$

Par conséquent, le foncteur $X \mapsto \widehat{X}/\widehat{S}$ commute aux limites projectives lorsqu'elles existent dans $(\mathbf{Sch}/_S)$; en particulier, il commute aux limites projectives finies.

499 **1.3. Proposition.** — Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés formelles sur k , A et B les algèbres affines de X et Y , $g : B \rightarrow A$ le morphisme induit par f . Alors f est un monomorphisme de $\mathbf{Vaf}/_k$ si et seulement si g est une surjection.

(54) D'après 1.1, $A \mapsto \mathrm{Spf}(A)$ est une anti-équivalence de $\mathbf{Alp}/_k$ sur $\mathbf{Vaf}/_k$, donc f est un monomorphisme si et seulement si g est un épimorphisme, et ceci est bien le cas si g est surjectif.

Réciproquement, supposons que g soit un épimorphisme et montrons qu'il est surjectif. Pour tout $\mathfrak{n} \in \Upsilon(B)$, posons $A_{\mathfrak{n}} = A \widehat{\otimes}_B B_{\mathfrak{n}}$; d'après 0.4, A est un B -module pseudocompact, donc est le produit des $A_{\mathfrak{n}}$ (cf. 0.3.6). Alors, g est le produit des morphismes $g_{\mathfrak{n}} : B_{\mathfrak{n}} \rightarrow A_{\mathfrak{n}}$ déduits de g par changement de base. Ceux-ci sont encore des épimorphismes, ce qui nous ramène à démontrer le résultat lorsque B est local, d'idéal maximal $\mathfrak{n}$. Posons $K = B/\mathfrak{n}$.

D'après le lemme de Nakayama 0.3.3, il suffit de montrer que le morphisme $g \widehat{\otimes}_B K$ est surjectif; il est déduit de g par changement de base, donc est un épimorphisme de $\mathbf{Alp}/_K$. On peut donc supposer que $B = K$ est un corps. Or f est un monomorphisme si et seulement si le morphisme diagonal $X \rightarrow X \times_Y X$ est un isomorphisme, c'est-à-dire si l'homomorphisme $x \widehat{\otimes}_K x' \rightarrow xx'$ est un isomorphisme de $A \widehat{\otimes}_K A$ sur A . Comme K est un corps, cela implique $A = K$.

Remarque. — (55) Il résulte de la proposition que tout monomorphisme $f : X \rightarrow Y$ de variétés formelles est un isomorphisme de X sur une sous-variété formelle (nécessairement fermée!) de Y .

1.3.1. — La proposition précédente entraîne en particulier que tout monomorphisme $f : X \rightarrow Y$ de $\mathbf{Vaf}/_k$ est effectif (cf. IV 1.3). (56) Il n'en va pas de même pour les épimorphismes, comme on le voit facilement en modifiant un peu le contreexemple

(54) N.D.E. : On a détaillé le début de la démonstration.

(55) N.D.E. : On a ajouté cette remarque.

(56) N.D.E. : c.-à-d., dans la catégorie opposée $(\mathbf{Vaf}/_k)^0 = \mathbf{Alp}/_k$, le morphisme $g : B \rightarrow A$ correspondant à f est un épimorphisme effectif. Ceci est bien le cas, car g est surjectif, donc induit (cf. la démonstration de 0.2.B) un isomorphisme de k -algèbres profinies $B/I \xrightarrow{\sim} A$, où $I = \mathrm{Ker} g$. Par

de l'Exp. V, § 2.c); ⁽⁵⁷⁾ c'est pourquoi nous allons considérer une classe sympathique d'épimorphismes effectifs.

Lemme. — ⁽⁵⁸⁾ Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de k -variétés formelles et soient A, B les algèbres affines de X, Y et $f^\sharp : B \rightarrow A$ le morphisme induit par f . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) Pour tout $x \in X$, l'homomorphisme $f_x^\sharp : \mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$ fait de $\mathcal{O}_{X, x}$ un $\mathcal{O}_{Y, f(x)}$ -module pseudocompact topologiquement libre.
- (ii) Pour tout $y \in Y$, la composante locale $A_y = \prod_{f(x)=y} \mathcal{O}_{X, x}$ est un B_y -module pseudocompact topologiquement libre.
- (iii) $f^\sharp : B \rightarrow A$ fait de A un B -module pseudocompact projectif.
- (iv) Le foncteur $\mathbf{PC}(B) \rightarrow \mathbf{PC}(A)$, $M \mapsto M \widehat{\otimes}_B A$ est exact.

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que f est topologiquement plat.

Les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) découlent de 0.2.F (iii) et 0.3.7. Réciproquement, supposons (ii) vérifié et soient $x \in X$ et $y = f(x)$. Comme $\mathcal{O}_{X, x}$ est un facteur direct de A_y , c'est un B_y -module pseudocompact projectif, donc topologiquement libre d'après 0.2.1 (puisque B_y est local).

D'autre part, un morphisme $f : X \rightarrow Y$ de k -variétés formelles est dit *surjectif* s'il induit une surjection des ensembles sous-jacents.

Proposition. — Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme surjectif et topologiquement plat de k -variétés formelles. Alors f est un épimorphisme effectif (cf. IV 1.3). 500

En effet, soient A, B les algèbres affines de X, Y et $g : B \rightarrow A$ le morphisme induit par f . Il s'agit de montrer que Y s'identifie au conoyau de $X \times_Y X \rightrightarrows X$, c.-à-d., que pour tout $\mathfrak{n} \in \mathfrak{T}(B)$, $B_{\mathfrak{n}}$ s'identifie au sous-anneau de $A_{\mathfrak{n}} = A \widehat{\otimes}_B B_{\mathfrak{n}}$ formé des a tels que $a \widehat{\otimes} 1 = 1 \widehat{\otimes} a$.

On peut donc supposer B local, d'idéal maximal $\mathfrak{n}$. Notre hypothèse signifie alors que g fait de A un B -module topologiquement libre et non nul. D'après le lemme de Nakayama 0.3.3, $A/\overline{\mathfrak{n}A}$ n'est pas nul, de sorte que le morphisme $g' : B/\mathfrak{n} \rightarrow A/\overline{\mathfrak{n}A}$ déduit de g est injectif. D'après le lemme 1.3.2 ci-dessous, B est un facteur direct de A comme B -module, disons $A = B \oplus A'$; il en résulte que B s'identifie à la partie de A formée des a tels que $a \widehat{\otimes}_B 1 = 1 \widehat{\otimes}_B a$.

conséquent, tout morphisme $\phi : B \rightarrow C$ de $\mathbf{Alp}/_k$, nul sur I , descend en un morphisme $\overline{\phi} : A \rightarrow C$ tel que $\phi = \overline{\phi} \circ g$.

⁽⁵⁷⁾N.D.E. : i.e. soient k un corps, $X = \mathrm{Spf}(k[[T]])$ et $Y = \mathrm{Spf}(B)$, où B est la sous- k -algèbre de $A = k[[T]]$ engendrée topologiquement par T^3 et T^4 (c.-à-d., B est formée des séries formelles $\sum a_n T^n$ telles que $a_n = 0$ pour $n = 1, 2, 5$). Alors $X \rightarrow Y$ est un épimorphisme qui n'est pas effectif; en effet, le conoyau de $X \times_Y X \rightrightarrows X$ est $\mathrm{Spf}(B')$, où B' est la sous- k -algèbre de A formée des a tels que $a \widehat{\otimes} 1 = 1 \widehat{\otimes} a$, et B' contient T^5 .

⁽⁵⁸⁾N.D.E. : On a ajouté ce lemme, qui explique la terminologie « topologiquement plat ».

1.3.2. Lemme. — Soient B un anneau pseudocompact local, $\mathfrak{n}$ son idéal maximal, M et N deux B -modules pseudocompacts projectifs et g un morphisme $M \rightarrow N$. Si $(B/\mathfrak{n}) \widehat{\otimes}_B g$ est injectif, g est un isomorphisme de M sur un facteur direct de N .

En effet, supposons que $g' = (B/\mathfrak{n}) \widehat{\otimes}_B g$ soit injectif. Comme $B/\mathfrak{n}$ est un corps, g' possède alors une rétraction r' . Notons p et q les projections canoniques de M et N sur $M/\mathfrak{n}M$ et $N/\mathfrak{n}N$; comme N est projectif, il existe un morphisme $r : N \rightarrow M$ tel que $p \circ r = r' \circ q$; par conséquent, r' est déduit de r par passage au quotient. Alors, puisque $r' \circ g'$ est un isomorphisme, il en est de même de $r \circ g$, d'après 0.3.4 (puisque M est projectif). Soit s l'isomorphisme réciproque de $r \circ g$, alors $s \circ r$ est une rétraction de g .

1.3.3. Proposition. — Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ des morphismes de k -variétés formelles.

- 501 (i) Si f et g sont topologiquement plats, $g \circ f$ l'est aussi.
 (ii) Si f et $g \circ f$ sont topologiquement plats et si f est surjectif, g est topologiquement plat.
 (iii) Si f est topologiquement plat, $f \times_Y Y'$ l'est pour tout changement de base $Y' \rightarrow Y$.

Les assertions (i) et (iii) sont claires. Pour prouver (ii), appelons A, B, C les algèbres affines de X, Y, Z , et $f' : B \rightarrow A$ et $g' : C \rightarrow B$ les morphismes induits par f et g . Comme $g \circ f$ est topologiquement plat, $f' \circ g'$ fait de A un C -module pseudocompact projectif; de même, f' fait de A un B -module pseudocompact projectif et fidèle. Lorsque P parcourt les C -modules pseudocompacts et N les B -modules pseudocompacts, les foncteurs $P \mapsto P \widehat{\otimes}_C A$ et $N \mapsto N \widehat{\otimes}_B A$ sont donc exacts; comme le deuxième est en outre fidèle, le foncteur $P \mapsto P \widehat{\otimes}_C B$ est exact; d'après 0.3.7, B est donc un C -module pseudocompact projectif.

1.3.4. Proposition. — Soient S un schéma, Y un S -schéma localement noethérien et $f : X \rightarrow Y$ un S -morphisme localement de type fini et fidèlement plat, de sorte que f est un épimorphisme effectif, i.e. la suite ci-dessous est exacte (cf. IV 6.3.1 (iv) et IV 1.3) :

$$(*) \quad X \times_Y X \xrightleftharpoons[\text{pr}_2]{\text{pr}_1} X \xrightarrow{f} Y.$$

Alors le morphisme de $\widehat{S}$ -variétés formelles $\widehat{f} : \widehat{X}/\widehat{S} \rightarrow \widehat{Y}/\widehat{S}$ (cf. 1.2.6) est surjectif et topologiquement plat, et la suite ci-dessous, déduite de (*), est exacte :

$$(\widehat{*}) \quad \widehat{X \times_Y X} / \widehat{S} \xrightleftharpoons[\widehat{\text{pr}_2}]{\widehat{\text{pr}_1}} \widehat{X} / \widehat{S} \xrightarrow{\widehat{f}} \widehat{Y} / \widehat{S}.$$

- 502 Soit en effet y un point de Y de projection s sur S et tel que $\kappa(y)$ soit une extension finie du corps résiduel $\kappa(s)$ de s . Comme f est surjectif et localement de type fini, $f^{-1}(y)$ est non vide et localement de type fini sur $\kappa(y)$; les points fermés de $f^{-1}(y)$ sont alors les points de $\widehat{X}/\widehat{S}$ se projetant sur y . Ceci montre que $\widehat{f}$ est surjectif.

(59) Soit x un point fermé de $f^{-1}(y)$. Comme Y est localement noethérien et f localement de type fini, l'anneau local $\mathcal{O}_{Y,y}$ (resp. $\mathcal{O}_{X,x}$) est noethérien, donc les puissances de l'idéal maximal sont de colongueur finie, de sorte que l'anneau local de $\widehat{Y}/\widehat{S}$ en y (resp. de $\widehat{X}/\widehat{S}$ en x) est le complété $\widehat{\mathcal{O}}_{Y,y}$ de $\mathcal{O}_{Y,y}$ (resp. $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ de $\mathcal{O}_{X,x}$) pour la topologie $\mathfrak{m}$ -adique. Alors, comme f est plat, $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ est plat sur $\widehat{\mathcal{O}}_{Y,y}$, d'après SGA 1, IV 5.8. Donc, d'après 0.3.8, $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ est un $\widehat{\mathcal{O}}_{Y,y}$ -module topologiquement libre. Ceci montre que $\widehat{f}$ est topologiquement plat.

Donc, d'après la proposition 1.3.1, $\widehat{f}$ est un épimorphisme effectif, i.e. la suite ci-dessous (où l'on a noté $\widehat{X}$ au lieu de $\widehat{X}/\widehat{S}$) est exacte :

$$\widehat{X} \times_{\widehat{Y}} \widehat{X} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{pr}_1} \\ \xrightarrow{\text{pr}_2} \end{array} \widehat{X} \xrightarrow{\widehat{f}} \widehat{Y}.$$

De plus, d'après 1.2.6, on a un isomorphisme naturel (en particulier, qui commute avec les projections sur $\widehat{X}$) :

$$\widehat{X \times_Y X} \simeq \widehat{X} \times_{\widehat{Y}} \widehat{X}.$$

Par conséquent, la suite $(*)$ est exacte.

1.3.5. — Soit k un anneau pseudocompact. Une variété formelle X sur k est dite *topologiquement plate* si son algèbre affine A est un k -module pseudocompact *projectif*, c.-à-d., si le morphisme structural $X \rightarrow \text{Spf}(k)$ est topologiquement plat.

(60) Notons d'abord que 0.2.2 et 0.3.6 entraînent le résultat suivant (analogue à VII_A, 3.1.1).

Lemme 1.3.5.A. — *Supposons k artinien. Les foncteurs $A \mapsto A^\dagger = \text{Hom}_c(A, k)$ et $C \mapsto C^* = \text{Hom}_k(C, k)$ définissent une anti-équivalence entre la catégorie des k -algèbres profinies topologiquement plates, et celle des k -coalgèbres plates.*

En effet, si A est une k -algèbre profinie topologiquement plate, alors, d'après 0.3.6, on a un *isomorphisme* de k -modules :

$$A^\dagger \otimes_k A^\dagger \xrightarrow{\sim} (A \widehat{\otimes} A)^\dagger,$$

de sorte que la multiplication $A \widehat{\otimes} A \rightarrow A$ induit par dualité une structure de k -coalgèbre sur $A^\dagger$. Le reste découle alors de la proposition 0.2.2.

Revenons au cas d'un anneau pseudocompact k arbitraire.

Définition 1.3.5.B. — À toute k -variété formelle X dont l'anneau affine A est un k -module pseudocompact *projectif*, on associe une $\mathbf{O}_k$ -coalgèbre plate $\mathbf{H}(X)$, définie comme suit.

Notons $\mathbf{H}(X)$ le $\mathbf{O}_k$ -module $\mathbf{V}_k^f(A)$ « dual de A » ; c'est un $\mathbf{O}_k$ -module plat, puisque le k -module pseudocompact sous-jacent à A est projectif (cf. 1.2.3.C). De plus, d'après

503

(59) N.D.E. : On a détaillé ce qui suit ; ensuite, on a tiré profit de l'ajout fait en 1.2.6.

(60) N.D.E. : On a ajouté le lemme suivant, utilisé implicitement dans l'original ; d'autre part, on a introduit la numérotation 1.3.5.A à 1.3.5.D, pour des références ultérieures.

0.3.6, l'on a :

$$\mathbf{V}_k^f(A \widehat{\otimes} A) \simeq \mathbf{V}_k^f(A) \otimes \mathbf{V}_k^f(A),$$

et donc la multiplication de A induit par transposition un morphisme diagonal :

$$\mathbf{H}(X) = \mathbf{V}_k^f(A) \longrightarrow \mathbf{V}_k^f(A \widehat{\otimes} A) = \mathbf{H}(X) \otimes \mathbf{H}(X)$$

qui fait de $\mathbf{H}(X)$ une $\mathbf{O}_k$ -coalgèbre plate. Nous dirons que $\mathbf{H}(X)$ est la *coalgèbre de X sur $\mathbf{O}_k$* .

Définition 1.3.5.C. — Réciproquement, à toute $\mathbf{O}_k$ -coalgèbre $\mathbf{C}$ on peut associer un k -foncteur (cf. 1.2.1) $\mathrm{Spf}^*(\mathbf{C})$, défini comme suit. Pour tout objet B de $\mathbf{AIf}_{/k}$, on pose (avec les notations de VII_A 3.1) :

$$(1) \quad \begin{aligned} \mathrm{Spf}^*(\mathbf{C})(B) &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{B-coalg.}}(B, \mathbf{C}(B)) \\ &= \{x \in \mathbf{C}(B) \mid \varepsilon_{\mathbf{C}(B)}(x) = 1 \quad \text{et} \quad \Delta_{\mathbf{C}(B)}(x) = x \otimes x\}. \end{aligned}$$

⁽⁶¹⁾ Supposons de plus que le $\mathbf{O}_k$ -module sous-jacent à $\mathbf{C}$ soit *admissible* (cf. 1.2.1), et posons

$$(2) \quad A = \Gamma^*(\mathbf{C}) = \varprojlim_{\mathbf{l}} \mathbf{C}(k/\mathbf{l})^*.$$

Alors, les structures d'algèbres sur chaque $\mathbf{C}(k/\mathbf{l})^*$ munissent A d'une structure de k -algèbre profinie. Pour tout objet B de $\mathbf{AIf}_{/k}$, on a :

$$(3) \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/k}}(\mathrm{Spf}(B), \mathrm{Spf}(A)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{AIf}_{/k}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{AIf}_{/B}}(A \widehat{\otimes} B, B).$$

Supposons enfin que $\mathbf{C}$ soit un $\mathbf{O}_k$ -module *plat*. Alors, d'après 1.2.3.E, $A = \Gamma^*(\mathbf{C})$ est un k -module pseudocompact *projectif*. De plus, on a vu dans la démonstration de *loc. cit.* que, si $\mathbf{l}_0$ est un idéal ouvert de k contenu dans le noyau de $k \rightarrow B$, on a des isomorphismes

$$(4) \quad A \widehat{\otimes} B = \varprojlim_{\mathbf{l}} \mathbf{C}(k/\mathbf{l})^* \widehat{\otimes}_k B \simeq \mathrm{Hom}_{k/\mathbf{l}_0}(\mathbf{C}(k/\mathbf{l}_0), B) \simeq \mathrm{Hom}_B(\mathbf{C}(B), B)$$

et nous noterons $\mathbf{C}(B)^*$ le terme de droite. Enfin, d'après le lemme 1.3.5.A appliqué à l'anneau artinien B , on a un isomorphisme naturel

$$(5) \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{B-coalg.}}(B, \mathbf{C}(B)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{AIf}_{/B}}(\mathbf{C}(B)^*, B).$$

Alors, en combinant (1), (5), (4), (3) et (2), on obtient, lorsque $\mathbf{C}$ est une $\mathbf{O}_k$ -coalgèbre *plate*, un isomorphisme de foncteurs :

$$(\star) \quad \mathrm{Spf}^*(\mathbf{C}) \simeq \mathrm{Spf}(A) = \mathrm{Spf}(\Gamma^*(\mathbf{C})).$$

Par conséquent, si l'on note $\mathscr{A}(X)$ l'algèbre affine d'une k -variété formelle X , on obtient, en tenant-compte de 1.2.3.E :

Proposition 1.3.5.D. — (i) Les foncteurs $X \mapsto \mathbf{H}(X) = \mathbf{V}_k^f(\mathscr{A}(X))$ et $\mathbf{C} \mapsto \mathrm{Spf}^*(\mathbf{C}) = \mathrm{Spf}(\Gamma^*(\mathbf{C}))$ définissent une équivalence entre la catégorie des k -variétés formelles topologiquement plates et celle des $\mathbf{O}_k$ -coalgèbres plates.

(ii) De plus, cette équivalence « commute au changement de base » : si $k \rightarrow K$ est un morphisme d'anneaux pseudocompacts, alors $X \widehat{\otimes}_k K$ correspond à $\mathbf{H}(X) \otimes_k K$.

⁽⁶¹⁾N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

1.3.6. — Dans la suite de cet exposé, nous définirons plusieurs fois une k -variété formelle topologiquement plate X en exhibant la coalgèbre $\mathbf{H}(X)$. Il nous faudra alors interpréter au moyen de $\mathbf{H}(X)$ certaines propriétés géométriques de X . Nous donnons ici un exemple de cette situation : supposons donnée une section σ du morphisme structural $X \rightarrow \mathrm{Spf}(k)$ et demandons-nous sous quelle condition σ induit un isomorphisme des espaces topologiques sous-jacents. ⁽⁶²⁾

Pour commencer, supposons k artinien. Soient (H, Δ, ε) une k -coalgèbre plate, $H^+ = \mathrm{Ker}(\varepsilon)$ et $A = H^*$ la k -algèbre profinie duale de H . Supposons donné un morphisme de k -coalgèbres $k \rightarrow H$, c.-à-d., un élément ϕ de H tel que $\varepsilon(\phi) = 1$ et $\Delta(\phi) = \phi \otimes \phi$. D'une part, ϕ définit un morphisme continu d'algèbres $\Phi : A \rightarrow k$, et donc une section $\sigma : \mathrm{Spf}(k) \rightarrow \mathrm{Spf}(A)$ de la projection $\mathrm{Spf}(A) \rightarrow \mathrm{Spf}(k)$.

D'autre part, on définit des sous- k -modules de H en posant $H_0 = k\phi$ et, pour $n \geq 1$, 504

$$H_n = \{x \in H \mid \Delta(x) - x \otimes \phi \in H_{n-1} \otimes H^+\};$$

ceci vaut aussi pour $n = 0$ si l'on pose $H_{-1} = (0)$. On voit, par récurrence sur n , que $H_{n-1} \subset H_n$. On dira que $H_0 \subset H_1 \subset \dots$ est la *filtration de H définie par ϕ* .

Remarque. — Comme $\Delta(H_n) \subset H_n \otimes H_0 \oplus H_{n-1} \otimes H^+$, on a $\Delta(H_n) \subset H_n \otimes H$. Puisque Δ est cocommutative (i.e. $\sigma \circ \Delta = \Delta$, où $\sigma(a \otimes b) = b \otimes a$), on a également $\Delta(H_n) \subset H \otimes H_n$. Lorsque H/H_n est *plat* sur k , il en résulte que H_n est une sous-coalgèbre de H (voir aussi 1.3.6.A (iii) ci-dessous). Mais en général, $\Delta : H_n \rightarrow H_n \otimes H$ ne se factorise pas à travers $H_n \otimes H_n$. ⁽⁶³⁾

Lemme 1.3.6.A. — Soient k un anneau artinien, H une k -coalgèbre plate, $A = H^*$ la k -algèbre profinie duale, ϕ un élément de H tel que $\varepsilon(\phi) = 1$ et $\Delta(\phi) = \phi \otimes \phi$. Soient $\Phi : A \rightarrow k$ le morphisme continu d'algèbres, $\sigma : \mathrm{Spf}(k) \rightarrow \mathrm{Spf}(A)$ la section de $\mathrm{Spf}(A) \rightarrow \mathrm{Spf}(k)$, et (H_n) la filtration de H définie par ϕ . Notons $I = \mathrm{Ker} \Phi$.

- (i) Pour tout $n \geq 1$, H_{n-1} est l'orthogonal dans H de l'adhérence $\overline{I^n}$ de I^n .
- (ii) Par conséquent, σ induit une bijection des ensembles sous-jacents si et seulement si $H = \bigcup_n H_n$. ⁽⁶⁴⁾
- (iii) Si de plus chaque H/H_n est plat sur k , alors, pour tout $n \geq 0$,

$$(*) \quad \Delta(H_n) \subset \sum_{i=0}^n H_i \otimes H_{n-i};$$

en particulier, chaque H_n est alors une sous-coalgèbre de H .

⁽⁶²⁾N.D.E. : Dans le lemme 1.3.6.A qui suit, on a détaillé la démonstration des points (i) et (ii), et l'on a ajouté le point (iii).

⁽⁶³⁾N.D.E. : Par exemple, soient k_0 un corps, $k = k_0[T]/(T^n)$, où $n \geq 4$, $H = k\phi \oplus kx$, avec $\varepsilon(x) = 0$ et $\Delta(x) = x \otimes \phi + \phi \otimes x + tx \otimes x$, où t est l'image de T dans k . Alors, $H_i = k\phi \oplus t^{n-i}x$ pour $i = 0, \dots, n$ mais, pour $2 \leq i \leq n-2$, $\Delta(t^{n-i}x)$ n'appartient pas à l'image de $H_i \otimes H_i$ dans $H \otimes H$.

⁽⁶⁴⁾N.D.E. : Dans ce cas, on dit que la coalgèbre H est *connexe*, cf. l'ajout 2.9.

Démonstration. Notons que, pour tout $x \in H$, l'application $A \rightarrow k$, $f \mapsto f(x)$ est continue, donc si I^n est annulé par x , il en est de même de son adhérence $\overline{I^n}$. On pose alors, pour tout $n \geq 1$,

$$(\overline{I^n})^\perp = \{x \in H \mid f(x) = 0, \text{ pour tout } f \in \overline{I^n}\}.$$

Supposons que $\sigma : \mathfrak{m} \mapsto \Phi^{-1}(\mathfrak{m})$ soit une bijection de $\text{Spf}(k)$ sur $\text{Spf}(A)$. Comme I est contenu dans l'intersection des $\Phi^{-1}(\mathfrak{m})$, il résulte de 0.1.2 que la suite des idéaux (I^n) tend vers 0. Soit alors $x \in H$; comme $J(x) = \{f \in A \mid f(x) = 0\}$ est un sous- k -module ouvert et fermé de A , il contient $\overline{I^n}$ pour n assez grand, autrement dit, $x \in (\overline{I^n})^\perp$ pour n assez grand.

Réciproquement, supposons que $H = \bigcup_n (\overline{I^n})^\perp$. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier ouvert de A ; d'après la définition de la topologie de A (0.2.2), $\mathfrak{p}$ contient un sous- k -module ouvert de la forme

$$\mathcal{V}(x_1, \dots, x_s) = \{f \in A \mid f(x_1) = \dots = f(x_s) = 0\}.$$

D'après l'hypothèse, il existe un entier n tel que $x_1, \dots, x_s \in (\overline{I^n})^\perp$, et donc $I^n \subset \mathfrak{p}$. De plus, comme k est artinien, $\text{Spf}(k)$ est un ensemble fini $\{\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r\}$ et il existe un entier $t \geq 1$ tel que $(\prod_i \mathfrak{m}_i)^t = 0$, d'où

$$\prod_i \Phi^{-1}(\mathfrak{m}_i)^t \subset I.$$

Donc $\mathfrak{p}$ contient le produit des $\Phi^{-1}(\mathfrak{m}_i)^{tn}$; puisque $\mathfrak{p}$ est premier, il en résulte que $\mathfrak{p}$ contient, donc égale, l'un des $\Phi^{-1}(\mathfrak{m}_i)$. On a ainsi démontré que :

$$\sigma \text{ est une bijection} \iff H = \bigcup_n (\overline{I^n})^\perp. \quad (65)$$

D'autre part, on a $H = k\phi \oplus H^+$; notons π la projection $H \rightarrow H^+$ de noyau $k\phi$. Pour tout $n \geq 0$, soient Δ^n la comultiplication « itérée » $H \rightarrow H^{\otimes(n+1)}$, $\overline{\Delta^n}$ la composée de Δ^n avec la projection $\pi^{\otimes(n+1)} : H^{\otimes(n+1)} \rightarrow (H^+)^{\otimes(n+1)}$, et

$$H'_n = \text{Ker}(\overline{\Delta^n}) = \{x \in H \mid \Delta^n(x) \in \sum_{i=0}^n H^{\otimes(n-i)} \otimes H_0 \otimes H^{\otimes i}\}.$$

(On pose $\Delta^0 = \text{id}_H$, d'où $H'_0 = H_0$). On voit facilement, par récurrence sur n , que

$$(*) \quad H_n \subset H'_n \subset (\overline{I^{(n+1)}})^\perp.$$

Jusqu'à présent, on n'a pas utilisé l'hypothèse que H soit plat sur k . Supposons maintenant H plat, donc *projectif* sur k , de sorte que $A^\dagger = H$, d'après 0.2.2, et montrons que $H_n = (\overline{I^{(n+1)}})^\perp$. C'est clair pour $n = 0$. Supposons-le donc vérifié pour $n < r$. Alors H_{r-1} est le noyau du morphisme $H \rightarrow (\overline{I^r})^\dagger$ et donc, puisque H^+ est plat, le morphisme

$$(H/H_{r-1}) \otimes H^+ \longrightarrow (\overline{I^r})^\dagger \otimes H^+$$

(65) N.D.E. : Ceci vaut également sans supposer H *cocommutative* (k restant un anneau commutatif artinien) : dans ce cas, une base de voisinages de 0 dans $A = H^*$ est donnée par les idéaux bilatères J tels que A/J soit de longueur finie sur k , et la démonstration précédente montre que $H = \bigcup_n (\overline{I^n})^\perp$ si et seulement si les $\Phi^{-1}(\mathfrak{m}_i)$ sont les seuls idéaux premiers ouverts de A .

est injectif. D'autre part, l'hypothèse entraîne que I est un k -module pseudocompact projectif (car facteur direct de $A = H^*$), d'où, d'après 0.3.6,

$$(\overline{I} \widehat{\otimes} I)^\dagger \simeq (\overline{I})^\dagger \otimes I^\dagger = (\overline{I})^\dagger \otimes H^+.$$

Alors, la suite exacte :

$$\overline{I} \widehat{\otimes} I \longrightarrow A \longrightarrow A/\overline{I^{r+1}} \longrightarrow 0$$

donne par dualité la suite exacte :

505

$$(1) \quad (\overline{I})^\dagger \otimes H^+ \xleftarrow{\delta} H \xleftarrow{\quad} (A/\overline{I^{r+1}})^\dagger \xleftarrow{\quad} 0,$$

où δ est obtenu en composant Δ_H avec la projection :

$$(2) \quad H \otimes H \longrightarrow H \otimes H^+ \longrightarrow (H/H_{r-1}) \otimes H^+ \hookrightarrow (\overline{I})^\dagger \otimes H^+.$$

Or, pour tout $u \in H$, la projection de $\Delta(u)$ sur $H \otimes H^+$ est $\Delta(u) - u \otimes \phi$. Alors, (1) et (2) montrent que si u appartient à $(A/\overline{I^{r+1}})^\dagger = (\overline{I^{r+1}})^\perp$, alors $\Delta(u) - u \otimes \phi$ appartient au noyau de l'application $H \otimes H^+ \rightarrow (H/H_{r-1}) \otimes H^+$, c'est-à-dire à $H_{r-1} \otimes H^+$, et donc $u \in H_r$. Ceci achève la démonstration des points (i) et (ii), et montre aussi que $H_n = \text{Ker}(\overline{\Delta^n})$.

Démontrons (iii). Pour tout $i \geq 0$, posons $H_i^+ = H_i \cap H^+$. Soit $n \geq 1$. Pour tout $x \in H_n$, $\overline{x} = x - \varepsilon(x)\phi$ appartient à H_n^+ et l'on a :

$$\Delta(x) = \varepsilon(x)\phi \otimes \phi + \overline{x} \otimes \phi + \phi \otimes \overline{x} + \overline{\Delta}(\overline{x}).$$

Donc, il suffit de montrer que :

$$\overline{\Delta}(H_n^+) \subset \sum_{i=1}^{n-1} H_i^+ \otimes H_{n-i}^+.$$

Pour tout $i = 0, \dots, n-1$, $\overline{\Delta^n}$ se factorise en :

$$\begin{array}{ccccc} H^+ & \xrightarrow{\overline{\Delta}} & H^+ \otimes H^+ & \xrightarrow{\overline{\Delta^i} \otimes \overline{\Delta^{n-i-1}}} & (H^+)^{\otimes(i+1)} \otimes (H^+)^{\otimes(n-i)} \\ & & \downarrow & & \uparrow g \\ & & \frac{H^+}{H_i^+} \otimes \frac{H^+}{H_{n-i-1}^+} & \xrightarrow{f} & \frac{H^+}{H_i^+} \otimes (H^+)^{\otimes(n-i)}. \end{array}$$

De plus, comme H^+/H_i^+ et $(H^+)^{\otimes(n-i)}$ sont plats, les applications f et g ci-dessus sont injectives. Il en résulte que $\overline{\Delta}(H_n^+)$ est contenu dans $H_i^+ \otimes H^+ + H^+ \otimes H_{n-i-1}^+$, pour tout $i = 0, \dots, n-1$. Le point (iii) découle alors du lemme ci-dessous, appliqué à $M = H^+$ et $E_i = H_{i-1}^+$.

Lemme 1.3.6.B. — Soient k un anneau, $0 = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_n \subset M$ des k -modules. On suppose M/E_i plat pour tout i . Alors on a l'égalité :

$$\bigcap_{i=0}^n (E_i \otimes M + M \otimes E_i) = \sum_{i=1}^n E_i \otimes E_{n-i+1}.$$

Notons K (resp. S) le terme de gauche (resp. droite). On voit facilement que $S \subset K$; montrons la réciproque. Pour $i = 0, \dots, n$, posons $K_i = K \cap (E_i \otimes M)$. Pour tout $i = 1, \dots, n$, comme M/E_{n-i+1} et E_i/E_{i-1} sont plats, l'application τ_i ci-dessous est injective, et l'application composée :

$$(E_i/E_{i-1}) \otimes M \longrightarrow (E_i/E_{i-1}) \otimes (M/E_{n-i+1}) \xhookrightarrow{\tau_i} (M/E_{i-1}) \otimes (M/E_{n-i+1})$$

a pour noyau $(E_i/E_{i-1}) \otimes E_{n-i+1}$. Comme l'image de K_i dans $(E_i \otimes M)/(E_{i-1} \otimes M)$ est contenue dans, et contient, ce noyau, on en déduit que

$$K_i = K_{i-1} + E_i \otimes E_{n-i+1},$$

d'où le lemme.

⁽⁶⁶⁾ Pour terminer ce paragraphe, revenons à un anneau pseudocompact arbitraire k . Soient $(\mathbf{H}, \Delta, \varepsilon)$ une $\mathbf{O}_k$ -coalgèbre plate, $\mathbf{H}^+ = \text{Ker}(\varepsilon)$, $A = \Gamma^*(\mathbf{H})$ la k -algèbre profinie duale, $X = \text{Spf}(A)$, de sorte que $\mathbf{H} = \mathbf{H}(X)$ (cf. 1.3.5). Supposons donné un morphisme de $\mathbf{O}_k$ -coalgèbres $\phi : \mathbf{O}_k \rightarrow \mathbf{H}$; il définit une morphisme continu de k -algèbres $A \rightarrow k$, et donc une section σ du morphisme structural $X \rightarrow \text{Spf}(k)$.

Pour tout objet B de $\mathbf{A}f/k$, on note $\mathbf{H}_0(B) = \phi(B) = B\phi_B$, où ϕ_B est l'élément $\phi(1_B)$ de $\mathbf{H}(B)$ et l'on définit des sous- $\mathbf{O}_k$ -modules $\mathbf{H}_n$ de $\mathbf{H}$, en posant, pour $n \geq 1$,

$$\mathbf{H}_n(B) = \{u \in \mathbf{H}(B) \mid \Delta(u) - u \otimes \phi_B \in \mathbf{H}_{n-1}(B) \otimes \mathbf{H}^+(B)\}.$$

On obtient ainsi une filtration $\mathbf{H}_0 \subset \mathbf{H}_1 \subset \dots$ de $\mathbf{H}(X)$. D'après ce qui précède, on a :

Proposition. — *Pour que σ induise un isomorphisme sur les espaces topologiques sous-jacents, il faut et il suffit que $\mathbf{H}(X)$ soit la réunion des $\mathbf{H}_n$.*

1.4. Théorème. — *Soient k un anneau pseudocompact et $d_0, d_1 : X_1 \rightrightarrows X$ un couple d'équivalence de $\mathbf{V}af/k$ (cf. Exp. V, § 2.b) tel que d_1 soit topologiquement plat.*

(i) *La projection canonique de X sur X/X_1 ($= \text{Coker}(d_0, d_1)$) est surjective et topologiquement plate, et le morphisme $X_1 \rightarrow X \times_{X/X_1} X$ de composantes d_0 et d_1 est un isomorphisme.*

(ii) *Si X est topologiquement plat sur k , il en est de même de X/X_1 .*

Notons d'abord que (ii) découle de (i), d'après 1.3.3 (ii). La démonstration de (i) occupe les paragraphes 1.4.1, 1.4.2 et 1.4.3.

1.4.1. — *Montrons d'abord qu'on peut se ramener au cas où X a un seul point.* Comme nous avons affaire à un couple d'équivalence, on voit comme dans l'Exp. V, § 3.e), qu'on définit une relation d'équivalence dans l'ensemble sous-jacent à X en déclarant que deux points x, y sont équivalents s'il existe un point z de X_1 tel que $d_0(z) = y$ et $d_1(z) = x$. On peut évidemment supposer sans inconvénient que X contient une seule classe d'équivalence pour cette relation, autrement dit que X/X_1 a un seul point (voir la construction de X/X_1 donnée en 1.2).

⁽⁶⁶⁾N.D.E. : On a ajouté ce qui suit; l'original se limitait au cas où k est artinien.

Dans ce cas, soient x un point quelconque de X et U la variété formelle qui a x pour seul point et qui a même anneau local que X en x . On voit alors comme dans l'Exp. V, § 6, que la relation d'équivalence induite par (d_0, d_1) sur U vérifie encore les hypothèses du théorème et qu'il suffit de faire la preuve pour cette dernière relation d'équivalence (U est une « quasi-section »).

Rappelons brièvement le principe de la démonstration faite dans l'Exp. V, § 6. Posons $V = d_0^{-1}(U) = U \times_{i, d_0} X_1$, où i est l'inclusion de U dans X ; soient u et v les morphismes de source V induits respectivement par d_0 et d_1 :

$$X \xleftarrow{v} V \xrightarrow{u} U.$$

Il est clair que u et v sont topologiquement plats et que u est surjectif; comme X contient une seule classe d'équivalence, v est surjectif. Si (v_0, v_1) est l'image réciproque du couple d'équivalence (d_0, d_1) par v (cf. V, 3.a)), il résulte de V, 3.c) et 3.d), que X/X_1 et le quotient de U par la relation d'équivalence induite par (d_0, d_1) s'identifient tous deux à $\text{Coker}(v_0, v_1)$. On voit alors, comme dans la démonstration de V, 6.1, que si la conclusion du théorème 1.4 est vérifiée pour U , elle l'est aussi pour X .

1.4.2. — On se trouve ainsi ramené au cas où X a un seul point. ⁽⁶⁷⁾ Considérons alors le diagramme commutatif suivant (cf. V, § 1, (0,1,2)) :

$$\begin{array}{ccccc} X_2 & \xrightleftharpoons[d'_0]{d'_1} & X_1 & \xrightarrow{d_0} & X \\ d'_2 \downarrow & & \downarrow d_1 & & \downarrow \\ X_1 & \xrightleftharpoons[d_0]{d_1} & X & \longrightarrow & X/X_1 \end{array}$$

où X_2 est le produit fibré $X_1 \times_{d_1, d_0} X_1$, et où d'_0, d'_1 et d'_2 sont respectivement les morphismes « $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ », « $(x, y, z) \mapsto (x, z)$ » et « $(x, y, z) \mapsto (y, z)$ ». ⁽⁶⁸⁾

Si B, A, A_1 et A_2 désignent respectivement les algèbres affines de $X/X_1, X, X_1$ et X_2 , le diagramme précédent induit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} A_2 & \xleftarrow{j_1} & A_1 & \xleftarrow{i_0} & A \\ j_2 \uparrow & & \uparrow i_1 & & \uparrow i \\ A_1 & \xleftarrow{i_1} & A & \xleftarrow{i} & B \end{array}$$

dans lequel les deux lignes sont exactes et les carrés déterminés par (i_0, j_0) et (i_1, j_1) cocartésiens. Comme le morphisme $X_1 \rightarrow X \times X$ de composantes d_0 et d_1 est un

⁽⁶⁷⁾N.D.E. : On peut donc supposer k local.

⁽⁶⁸⁾N.D.E. : cf. Exp. V, § 2.b).

monomorphisme par hypothèse, le morphisme $A \widehat{\otimes}_k A \rightarrow A_1$ de composantes i_0 et i_1 est surjectif, d'après la proposition 1.3.

Cela signifie que i_1 fait de A_1 un A -module pseudocompact (supposé topologiquement libre), engendré par $i_0(A)$. Comme A est local, le lemme 1.4.3 ci-dessous entraîne l'existence d'un k -module topologiquement libre V et d'un morphisme de k -modules pseudocompacts $f : V \rightarrow A$ tels que le morphisme

$$\alpha_1 : A \widehat{\otimes}_k V \longrightarrow A_1, \quad a \widehat{\otimes} v \mapsto i_1(a) \cdot i_0(f(v))$$

508 soit inversible. Soient $\alpha : B \widehat{\otimes}_k V \rightarrow A$ et $\alpha_2 : A_1 \widehat{\otimes}_k V \rightarrow A_2$ les morphismes :

$$b \widehat{\otimes} v \mapsto i(b) \cdot f(v) \quad \text{et} \quad \alpha_1 \widehat{\otimes} v \mapsto j_2(a_1) \cdot j_0 i_0(f(v)).$$

Dans le diagramme commutatif suivant, les deux lignes sont donc exactes et les deux carrés de gauche sont cocartésiens. Comme α_1 est inversible, il en va de même pour α_2 , donc pour α .

$$\begin{array}{ccccc} A_2 & \xleftarrow{j_1} & A_1 & \xleftarrow{i_0} & A \\ & \searrow j_0 & \uparrow \alpha_1 & & \uparrow \alpha \\ A_1 \widehat{\otimes}_k V & \xleftarrow{i_1 \widehat{\otimes} V} & A \widehat{\otimes}_k V & \xleftarrow{i \widehat{\otimes} V} & B \widehat{\otimes}_k V \\ & \searrow i_0 \widehat{\otimes} V & & & \end{array}$$

Ceci montre d'une part que A est topologiquement libre sur B , de pseudobase $f(V)$ (cf. 0.2.1), et qu'on obtient une pseudobase de A_1 sur A (où A_1 est considéré comme A -module au moyen de i_1) en prenant l'image par i_0 de $f(V)$; cela entraîne que le morphisme $A \widehat{\otimes}_B A \rightarrow A_1$ de composantes i_1 et i_0 est inversible :

$$A \widehat{\otimes}_B A \simeq A \widehat{\otimes}_B B \widehat{\otimes}_k V \simeq A \widehat{\otimes}_k V \simeq A_1.$$

Ceci prouve le théorème 1.4, modulo le lemme 1.4.3 qui suit.

1.4.3. Lemme. — Soient k un anneau pseudocompact, A une k -algèbre profinie locale, A_1 un A -module topologiquement libre et $i_0 : M \rightarrow A_1$ un morphisme de k -modules pseudocompacts. On suppose que l'application

$$A \widehat{\otimes}_k M \longrightarrow A_1, \quad a \widehat{\otimes} m \mapsto a \cdot i_0(m)$$

est surjective. Il existe alors un k -module topologiquement libre V et un morphisme de k -modules pseudocompacts $f : V \rightarrow M$, tels que l'application

$$A \widehat{\otimes}_k V \longrightarrow A_1, \quad a \widehat{\otimes} v \mapsto a \cdot i_0(f(v))$$

soit bijective.

509 Comme tout k -module pseudocompact est le quotient d'un k -module topologiquement libre (cf. N.D.E. (27)), on peut supposer sans inconvénient que M est topologiquement libre; prenons donc pour M le produit direct d'une famille $(M_i)_{i \in I}$ d'exemplaires de k . Dans ce cas, $A \widehat{\otimes}_k M$ n'est autre que le produit $\prod_{i \in I} A \widehat{\otimes}_k M_i$. Comme l'application $a \widehat{\otimes} m \mapsto a \cdot i_0(m)$ est surjective et que A_1 est projectif, le noyau de cette application est un facteur direct de $A \widehat{\otimes}_k M$; comme A est local, il

résulte du théorème d'échange (0.3.4) que ce noyau a pour supplémentaire un produit partiel $\prod_{i \in J} A \hat{\otimes}_k M_i$, où J désigne une certaine partie de I . On peut donc prendre $V = \prod_{i \in J} M_i$.

1.5. — Soit k un anneau pseudocompact.

Définition. — Nous dirons qu'une famille de morphismes $f_i : X_i \rightarrow X$ de $\mathbf{Vaf}/_k$ est une *famille surjective topologiquement plate* si le morphisme $\coprod_i X_i \rightarrow X$, induit par les f_i , est surjectif et topologiquement plat ; cela signifie que chaque f_i est topologiquement plat et que tout point de X appartient à l'image d'au moins l'un des X_i .

Il résulte de 1.3.3 que les familles surjectives, topologiquement plates définissent une *prétopologie* sur $\mathbf{Vaf}/_k$ (IV 4.2.5) ; la topologie correspondante sera appelée la *topologie plate* sur $\mathbf{Vaf}/_k$.

D'après IV, 4.3.5, un foncteur $F : (\mathbf{Vaf}/_k)^0 \rightarrow (\mathbf{Ens})$ est un faisceau pour la topologie plate si et seulement si F transforme toute somme directe en produit direct et si la suite

$$F(Y) \xrightarrow{F(f)} F(X) \xrightleftharpoons[F(\text{pr}_2)]{F(\text{pr}_1)} F(X \times_Y X)$$

est exacte pour tout morphisme surjectif topologiquement plat $f : X \rightarrow Y$.

⁽⁶⁹⁾ D'après IV, 4.5, la proposition 1.3.1 entraîne que la topologie plate est *moins fine* que la topologie canonique, c.-à-d., pour tout objet X de $\mathbf{Vaf}/_k$, le foncteur $\mathbf{h}_X : T \mapsto \text{Hom}_{\mathbf{Vaf}/_k}(T, X)$ est un *faisceau* pour la topologie plate. (Dans la suite, on identifiera, comme d'habitude (cf. Exp. I), X à $\mathbf{h}_X$.) 510

D'après IV, 4.6.5, on peut reformuler le théorème 1.4 comme suit.

Théorème. — Soient k un anneau pseudocompact, $d_0, d_1 : X_1 \rightrightarrows X$ un couple d'équivalence dans $\mathbf{Vaf}/_k$, et X/X_1 la variété formelle quotient (i.e. $\text{Coker}(d_0, d_1)$, cf. 1.2). Si d_1 est topologiquement plat, alors X/X_1 représente le faisceau quotient pour la topologie plate.

1.6. — Pour terminer ces généralités sur les variétés formelles, il nous reste à définir brièvement les variétés formelles étales sur k . ⁽⁷⁰⁾

⁽⁶⁹⁾ N.D.E. : On a modifié l'original dans ce qui suit. En particulier, on a remplacé l'énoncé : « si $d_0, d_1 : X_1 \rightrightarrows X$ est une relation d'équivalence telle que d_1 soit topologiquement plat, la formation du quotient commute avec $\mathbf{h}$ » par le théorème ci-dessous.

⁽⁷⁰⁾ N.D.E. : L'original continuait ainsi : « Une variété formelle X sur k est dite *étale*, si le morphisme diagonal $\Delta_X : X \rightarrow X \times X$ est un isomorphisme local, c'est-à-dire si Δ_X induit un isomorphisme de $\mathcal{O}_{X \times X, \Delta_X(x)}$ sur $\mathcal{O}_{X, x}$ pour tout point x de X . On voit facilement à l'aide de SGA I, que cette formulation est équivalente aux deux suivantes : la variété formelle X est topologiquement plate, et, pour tout point $x \in X$, de projection $s \in \text{Spf}(k)$, $\mathcal{O}_{X, x} \hat{\otimes}_k \kappa(s)$ est une extension finie séparable du corps résiduel $\kappa(s)$ de s ; ou encore, si A désigne l'algèbre affine de X , les composantes locales (0.1) de $A \hat{\otimes}_k (k/I)$ sont des algèbres finies et étales sur k/I , quel que soit l'idéal ouvert I de k . » Dans ce qui suit, on a rectifié l'omission de l'hypothèse de platitude dans la première condition ci-dessus, et détaillé l'équivalence desdites conditions.

Rappels 1.6.A. — (i) Rappelons d'abord (cf. EGA 0_{IV}, 19.10.2) qu'une k -algèbre topologique A est dite *formellement étale* sur k (pour les topologies données sur k et A , resp. pour les topologies discrètes) si, pour toute k -algèbre topologique *discrète* C (pas nécessairement artinienne), et tout idéal nilpotent J de C , tout morphisme continu de k -algèbres $A \rightarrow C/J$ se relève de façon unique en un morphisme continu $A \rightarrow C$ (A étant munie de la topologie donnée, resp. de la topologie discrète). On voit aussitôt que cette propriété est préservée par changement de base, c.-à-d., pour tout morphisme $k \rightarrow k'$ d'anneaux pseudocompacts, $A \hat{\otimes}_k k'$ est alors formellement étale sur k' . D'autre part, on voit facilement qu'il suffit de vérifier la condition de relèvement pour tout idéal J de carré nul, cf. EGA IV₄, 17.1.2 (ii). On dit que A est *étale* sur k si elle est formellement étale sur k pour les topologies discrètes, et si de plus A est une k -algèbre de présentation finie (cf. EGA IV₄, 17.3.2 (ii)). Dans la suite, k étant un anneau pseudocompact et A une k -algèbre profinie, on utilisera « formellement étale » au sens des topologies données (sauf mention du contraire).

(ii) Rappelons aussi que si $F \in k[T]$ est un polynôme unitaire de degré $d \geq 1$, *séparable* (i.e. tel que l'idéal engendré par F et son polynôme dérivé F' soit $k[T]$), alors la k -algèbre $B = k[T]/(F)$ (qui est libre de rang d sur k , et munie de la topologie produit) est formellement étale sur k . En effet, soient C une k -algèbre discrète (de sorte que le noyau de $k \rightarrow C$ est un idéal ouvert $\mathfrak{l}$ de k), J un idéal de C de carré nul, et $\phi : B \rightarrow C/J$ un morphisme continu de k -algèbres. Notons que, B étant un k -module libre de rang fini, $\mathfrak{l}B$ est un idéal ouvert de B , donc tout relèvement $\Phi : B \rightarrow C$ de ϕ est automatiquement continu. Soient t l'image de T dans B et u_0 un relèvement arbitraire de $\phi(t)$ dans C , alors $F(u_0) \in J$ (puisque $\phi(t)$ est racine de F) ; d'autre part il existe $G, H \in k[T]$ tels que $GF + HF' = 1$, d'où $H(u_0)F'(u_0) = 1 - G(u_0)F(u_0)$, et le terme de droite est inversible, puisque $F(u_0)$ est de carré nul, donc $F'(u_0)$ est inversible. Cherchons $h \in J$ tel que $x = x_0 + h$ soit racine de F ; ceci équivaut à $0 = F(u) = F(u_0) + F'(u_0)h$, et comme $F'(u_0)$ est inversible, ceci a pour unique solution $h = -F'(u_0)^{-1}F(u_0) \in J$. Bien entendu, la même démonstration (sans faire d'hypothèses de continuité pour les morphismes $k \rightarrow C$, ϕ et Φ) montre que B est aussi une k -algèbre étale.

(iii) Rappelons enfin que si A est un produit fini $A_1 \times \cdots \times A_n$, alors A est formellement étale sur k si et seulement si les A_i le sont. ⁽⁷¹⁾ En effet, il suffit de le voir pour $n = 2$, dans ce cas soit $e = 1_{A_1}$ l'idempotent tel que $A_1 = Ae$ et $A_2 = A(1 - e)$, et supposons donné un morphisme continu $A \rightarrow C/J$, où J est un idéal de carré nul. Comme le polynôme $F = X^2 - X$ est séparable (on a $F' = 2X - 1$ et $(F')^2 - 4F = 1$), l'idempotent $\phi(e)$ de C/J se relève de façon unique en un idempotent f de C , d'où $C = Cf \oplus C(1 - f)$, et alors se donner un relèvement de Φ équivaut à se donner deux morphismes $\Phi_1 : A_1 \rightarrow Cf$ et $\Phi_2 : A_2 \rightarrow C(1 - f)$, relevant les restrictions de ϕ à A_1 et A_2 . Le même argument montre que si e est un idempotent de k tel que $A = Ae$, alors A est formellement étale sur k si et seulement si elle l'est sur le localisé k_e (qui s'identifie à ke).

⁽⁷¹⁾N.D.E. : Signalons au passage que la démonstration donnée dans EGA 0_{IV}, 19.3.5 (v) est erronée.

Soient maintenant X une k -variété formelle et A son algèbre affine. Si x est un point de X (i.e. un idéal maximal ouvert $\mathfrak{m}$ de A), d'image s dans $\mathrm{Spf}(k)$, on notera $k_{\mathfrak{m}}$ ou k_s la composante locale de k correspondant à s .

Définition 1.6.B. — Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) A est *formellement étale* sur k .
- (b) Pour tout $\mathfrak{m} \in \Upsilon(A)$, $A_{\mathfrak{m}}$ est *formellement étale* sur k (ou sur $k_{\mathfrak{m}}$).
- (c) Pour tout idéal ouvert $\mathfrak{l}$ de k , $A \widehat{\otimes}_k (k/\mathfrak{l}) = A/\overline{A\mathfrak{l}}$ est formellement étale sur $k/\mathfrak{l}$.
- (d) Pour tout $\mathfrak{m} \in \Upsilon(A)$ et tout idéal ouvert $\mathfrak{l}$ de $k_{\mathfrak{m}}$, $A_{\mathfrak{m}}/\overline{A_{\mathfrak{m}}\mathfrak{l}}$ est formellement étale sur $k_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{l}$.

On dira que X est *étale* sur k si elle vérifie ces conditions, et on notera $\mathbf{Vaf}_{/k}^{\text{ét}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Vaf}_{/k}$ formée des variétés formelles étales sur k . ⁽⁷²⁾

Remarquons que si $\phi : A \rightarrow C/J$ un morphisme continu de k -algèbres, où C est une k -algèbre discrète et J un idéal de carré nul, alors $I = \mathrm{Ker}(\phi)$ est un idéal ouvert de A , donc A/I est artinien, donc I n'est contenu que dans un nombre fini d'idéaux maximaux ouverts $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r$, donc contient le produit des composantes $A_{\mathfrak{m}}$ pour $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_i$, qui égale $A(1 - e)$ où e désigne l'idempotent de A tel que $Ae = \prod_{i=1}^r A_{\mathfrak{m}_i}$. Donc $\phi(e) = 1_{C/J}$ et il revient au même de se donner un relèvement continu de ϕ ou du morphisme de $Ae \simeq A/A(1 - e)$ vers C/J , induit par ϕ .

D'autre part, on sait (cf. N.D.E. (24)) que $A \simeq \varprojlim_{\mathfrak{l}} A/\overline{A\mathfrak{l}}$. Compte-tenu de ces remarques et des rappels précédents, on obtient facilement l'équivalence des conditions indiquées.

Définitions 1.6.C. — Notons $\kappa(k) = \prod_{s \in \mathrm{Spf}(k)} \kappa(s)$, muni de la topologie produit, i.e. la variété formelle $\mathrm{Spf}(\kappa(k))$ est la somme directe des $\mathrm{Spec} \kappa(s)$, pour $s \in \mathrm{Spf}(k)$. D'autre part, on notera $S_{\kappa(k)}$ le *schéma* somme directe des $\mathrm{Spec} \kappa(s)$, pour $s \in \mathrm{Spf}(k)$.

Pour toute variété formelle X sur k , on notera $X_{\kappa} = X \widehat{\otimes}_k \kappa(k)$ la variété formelle sur $\kappa(k)$ obtenue par changement de base, i.e. X_{κ} a les mêmes points que X et pour tout $x \in X$, de projection s sur $\mathrm{Spf}(k)$, on a $\mathcal{O}_{X_{\kappa}, x} = \mathcal{O}_{X, x} \otimes_k \kappa(s)$. Ce foncteur de changement de base $\mathbf{Vaf}_{/k} \rightarrow \mathbf{Vaf}_{/\kappa(k)}$ envoie $\mathbf{Vaf}_{/k}^{\text{ét}}$ dans $\mathbf{Vaf}_{/\kappa(k)}^{\text{ét}}$ (cf. 1.6.A (i)).

On a alors (cf. SGA 1, I 6.2) :

Lemme 1.6.D. — Pour tout $Y \in \mathrm{Ob} \mathbf{Vaf}_{/k}^{\text{ét}}$ et $X \in \mathrm{Ob} \mathbf{Vaf}_{/k}$, l'application canonique :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/k}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/\kappa(k)}}(X_{\kappa}, Y_{\kappa})$$

est bijective. En particulier, le foncteur $\mathbf{Vaf}_{/k}^{\text{ét}} \rightarrow \mathbf{Vaf}_{/\kappa(k)}^{\text{ét}}$ est pleinement fidèle (et on verra plus bas que c'est une équivalence).

En effet, notons A (resp. B) l'algèbre affine de X (resp. Y) et $\mathfrak{r}$ le radical de k , supposons donné un morphisme $B \widehat{\otimes}_k \kappa(k) \rightarrow A \widehat{\otimes}_k \kappa(k)$ ou, ce qui revient au même, un morphisme $\phi : B \rightarrow A/\overline{\mathfrak{r}A}$.

⁽⁷²⁾N.D.E. : Notons que $\mathbf{Vaf}_{/k}^{\text{ét}}$ est stable par limites projectives finies.

Pour tout idéal ouvert I de k , il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathfrak{r}^n \subset I$, d'où $(\mathfrak{r}A)^n \subset IA \subset \overline{IA}$, et comme l'application de multiplication $m_{n-1} : A^n \rightarrow A$ est continue, on a donc aussi $(\overline{\mathfrak{r}A})^n \subset \overline{IA}$, i.e. $\overline{\mathfrak{r}A}/\overline{IA}$ est un idéal nilpotent de $A/\overline{IA}$. Par conséquent, ϕ se relève de façon unique en un morphisme $\phi_I : B \rightarrow A/\overline{IA}$. Par unicité, ces morphismes forment un système projectif, donc donnent un morphisme continu $\Phi : B \rightarrow \varprojlim_I A/\overline{IA} = A$. De plus, Φ est unique car si Φ' est un second relèvement de ϕ , alors Φ' et Φ coïncident modulo $\overline{IA}$ pour tout I , donc sont égaux.

Proposition 1.6.E. — (a) Soient X une variété formelle sur k et A son algèbre affine. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) X est étale sur k .
 - (ii) X est topologiquement plate sur k et le morphisme diagonal $\Delta : X \rightarrow X \times X$ est un isomorphisme local, i.e. Δ_X induit un isomorphisme $\mathcal{O}_{X \times X, \Delta(x)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X, x}$ pour tout point x de X .
 - (iii) Pour tout $x \in X$, de projection s sur $\mathrm{Spf}(k)$, $\mathcal{O}_{X, x}$ est isomorphe à $k_s[T]/(F)$, où $F \in k_s[T]$ est un polynôme unitaire séparable (cf. 1.6.A (ii)).
 - (iv) X est topologiquement plate sur k , et, pour tout point $x \in X$, de projection s sur $\mathrm{Spf}(k)$, $\mathcal{O}_{X, x} \otimes_k \kappa(s)$ est une extension finie séparable de $\kappa(s)$.
 - (v) Pour tout idéal ouvert I de k , chaque composante locale de $A \widehat{\otimes}_k (k/I)$ est une algèbre étale finie sur l'anneau artinien k/I .
- (b) $\mathbf{Vaf}_{/\kappa(k)}^{\mathrm{ét}}$ s'identifie à la catégorie des schémas étales sur $S_{\kappa(k)}$ (cf. 1.6.C), et le foncteur $X \mapsto X_{\kappa}$ induit une équivalence de catégories $\mathbf{Vaf}_{/k}^{\mathrm{ét}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Vaf}_{/\kappa(k)}^{\mathrm{ét}}$ (cf. SGA 1, I 6.1).

Démonstration. (a) Notons I le noyau du morphisme de multiplication $m : A \widehat{\otimes}_k A \rightarrow A$. Supposons X étale sur k , i.e. A formellement étale sur k . Alors, d'après EGA 0_{IV}, 20.7.4, le séparé complété de I/I^2 , pour la topologie quotient de celle de I , est nul, i.e. on a $I = \overline{I^2}$. Or, pour tout $x \in X$, I est contenu dans l'idéal maximal $\mathfrak{m}_{\Delta(x)}$ de $A \widehat{\otimes}_k A$, donc le localisé $I_{\mathfrak{m}_{\Delta(x)}}$ est contenu dans l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X \times X, \Delta(x)}$, et donc, d'après le lemme de Nakayama 0.3, on a $I_{\mathfrak{m}_{\Delta(x)}} = 0$, et donc $\Delta : X \rightarrow X \times X$ est un isomorphisme local.

Supposons maintenant que Δ soit un isomorphisme local et que k soit un corps κ , et montrons que chaque $\mathcal{O}_{X, x}$ est une κ -algèbre étale de dimension finie. Remplaçant X par $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{X, x})$, on peut supposer que $A = \mathcal{O}_{X, x}$ est locale. On procède alors comme dans la démonstration de EGA IV₄, 17.4.1, (b) $\Rightarrow$ (d''). Soit K une extension normale finie de κ contenant le corps résiduel $\kappa(x)$, et soient $B = A \otimes_{\kappa} K = A \widehat{\otimes}_{\kappa} K$ (comme $[K : \kappa] < \infty$ alors $-\widehat{\otimes}_{\kappa} K$ et $-\otimes_{\kappa} K$ coïncident) et $X_K = \mathrm{Spf}(B) = X \widehat{\otimes}_{\kappa} K$. Alors $\Delta_K : X_K \rightarrow X_K \widehat{\otimes}_K X_K$ est encore un isomorphisme local, donc pour tout $y \in X_K$, la multiplication $B_y \widehat{\otimes}_K B_y \rightarrow B_y$ induit un isomorphisme $(B_y \widehat{\otimes}_K B_y)_{\mathfrak{m}_{\Delta_K(y)}} \xrightarrow{\sim} B_y$. Or, comme le corps résiduel de B_y est K (cf. par exemple VI_A, 1.1.1, N.D.E. (11)), $C = B_y \widehat{\otimes}_K B_y$ est déjà un anneau local (en effet, $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_y \widehat{\otimes}_K B_y + B_y \widehat{\otimes}_K \mathfrak{m}_y$ est formé d'éléments topologiquement nilpotents, donc est contenu dans le radical de C , et $C/\mathfrak{n} = K \widehat{\otimes}_K K = K$ est un corps) donc on obtient que le morphisme de multiplication

$B_y \widehat{\otimes}_K B_y \rightarrow B_y$ est un isomorphisme. Prenant une pseudobase de B_y sur K contenant l'élément unité 1, on en déduit que $B_y = K$. Comme de plus B est finie sur A , X_K est un ensemble fini, donc $B = A \otimes_\kappa K$ est le produit d'un nombre fini de copies de K , et ceci entraîne que A est une κ -algèbre étale finie.

On obtient ainsi que, si κ est un corps, toute κ -algèbre profinie A étale sur κ est le produit d'extensions finies séparables K_i de κ , muni de la topologie produit, donc la variété formelle $\mathrm{Spf}(A)$ est la somme directe des $\mathrm{Spf}(K_i) = \mathrm{Spec}(K_i)$, et l'on en déduit que $\mathbf{Vaf}_{/\kappa}^{\mathrm{ét}}$ s'identifie à la catégorie des κ -schémas étales.

Ce qui précède montre l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iv) (puisque $\mathcal{O}_{X,x} \widehat{\otimes}_\kappa \kappa(s)$ est formellement étale sur $\kappa(s)$), et entraîne le point (b) de 1.6.E. En effet, soit à nouveau k un anneau pseudocompact arbitraire. D'après ce qui précède, $\mathbf{Vaf}_{/\kappa(k)}^{\mathrm{ét}}$ s'identifie à la catégorie des schémas étales sur $S_{\kappa(k)}$. Montrons que $X \mapsto X_\kappa$ induit une équivalence $\mathbf{Vaf}_{/k}^{\mathrm{ét}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Vaf}_{/\kappa(k)}^{\mathrm{ét}}$. Compte-tenu de 1.6.D, il suffit de montrer que pour tout $s \in \mathrm{Spf}(k)$ et toute extension finie séparable K de $\kappa(s)$, il existe une k_s -algèbre étale A telle que $A \widehat{\otimes}_k \kappa(s) \simeq K$. Soient ξ un élément primitif de l'extension $K/\kappa(s)$, n son degré, et $F \in k_s[T]$ un polynôme unitaire de degré n dont l'image $\overline{F}$ dans $\kappa(s)[T]$ est le polynôme minimal de ξ . Comme $\overline{F}'$ est inversible dans $\kappa(s)[T]/(\overline{F})$, il résulte du lemme de Nakayama que F' est inversible dans $k_s[T]/(F)$, donc F est un polynôme séparable et donc, d'après 1.6.A (ii), $A = k_s[T]/(F)$ est une k_s -algèbre étale telle que $A \widehat{\otimes}_k \kappa(s) \simeq K$. On obtient ainsi que toute k_s -algèbre profinie étale locale est libre de rang fini sur k_s (donc a fortiori topologiquement libre sur k), et donc toute k -algèbre profinie étale est topologiquement libre sur k .

Par ailleurs, la condition (v) implique la condition (d) de 1.6.B, donc implique (i). On a donc obtenu que (i), (iii) et (v) sont équivalentes, et impliquent (ii), qui implique (iv). Enfin, soit A une k -algèbre profinie vérifiant (iv), montrons que A est formellement étale sur k . Pour cela, on peut supposer A et k locaux, notons κ le corps résiduel de k ; par hypothèse, $K = A \widehat{\otimes}_k \kappa$ est une extension finie séparable de κ , disons de degré n . D'après ce qu'on a vu plus haut (et tenant compte du lemme 1.6.D), il existe alors une k -algèbre B libre de rang n , formellement étale sur k , et un morphisme continu $\phi : B \rightarrow A$ tel que $\phi \widehat{\otimes}_k \kappa$ soit un isomorphisme. Comme A est topologiquement plate sur k , ceci entraîne que $\mathrm{Coker}(\phi) \widehat{\otimes}_k \kappa = 0$ et aussi $\mathrm{Ker}(\phi) \widehat{\otimes}_k \kappa = 0$; d'après le lemme de Nakayama 0.3, on a donc $\mathrm{Coker}(\phi) = 0 = \mathrm{Ker}(\phi)$, donc ϕ est un isomorphisme (cf. la démonstration de 0.2.B). Ceci achève la démonstration de 1.6.E.

(73) Soit X une variété formelle sur k . Pour tout $x \in X$, de projection s sur $\mathrm{Spf}(k)$, le corps résiduel $\kappa(x)$ est une extension finie de $\kappa(s)$ et l'on note $\kappa_e(x)$ la clôture séparable de $\kappa(s)$ dans $\kappa(x)$.

Proposition 1.6.F. — (i) L'inclusion de $\mathbf{Vaf}_{/k}^{\mathrm{ét}}$ dans $\mathbf{Vaf}_{/k}$ possède un adjoint à gauche $X \mapsto X_e$: la variété X_e a les mêmes points que X , pour tout $x \in X$, de projection s sur $\mathrm{Spf}(k)$, soient ξ un élément primitif de $\kappa_e(x)$, n son degré, u un relèvement arbitraire

(73)N.D.E. : Dans ce qui suit, on a utilisé les ajouts précédents pour détailler la construction du foncteur $X \mapsto X_e$, et montrer qu'il commute aux produits finis (ceci est utilisé dans 2.5.1).

- 511 de ξ dans $\mathcal{O}_{X,x}$, et $F \in k[T]$ unitaire de degré n annulant u ; on pose $\mathcal{O}_{X_e,x} = k[T]/(F)$. Alors pour tout $Y \in \text{Ob } \mathbf{Vaf}_{/k}^{\text{ét}}$, les applications canoniques ci-dessous sont bijectives :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/k}}(X, Y) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/\kappa(k)}}(X_{\kappa}, Y_{\kappa}) \\ & & \downarrow \wr \\ \text{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/k}}(X_e, Y) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/\kappa(k)}}((X_e)_{\kappa}, Y_{\kappa}), \end{array}$$

la flèche verticale étant induite par les inclusions $\kappa_e(x) \hookrightarrow \kappa(x)$ pour tout $x \in X$. Ceci définit, en particulier, un morphisme $p : X \rightarrow X_e$, et tout morphisme de k -variétés formelles $\phi : X \rightarrow Y$, avec Y étale sur k , se factorise de façon unique à travers p .

(ii) Le foncteur $X \mapsto X_e$ commute aux produits finis.

En effet, (i) découle de 1.6.E(b) et 1.6.D. Prouvons (ii). Compte-tenu de l'équivalence de catégories 1.6.E(b), on peut supposer que k est un corps. Dans ce cas, on voit facilement que si X est une k -variété formelle semi-locale, i.e. dont l'algèbre affine A est semi-locale, alors l'algèbre affine de X_e est la plus grande sous-algèbre de A qui soit étale sur k , notons-la A_e . On se ramène ainsi à voir que si K, L sont deux extensions de degré fini de k , alors l'inclusion $K_e \otimes L_e \subset (K \otimes L)_e$ est une égalité. Soit p l'exposant caractéristique de k (i.e. $p = 1$ si $\text{car}(k) = 0$ et $p = \text{car}(k)$ sinon), alors pour tout $x \in K \otimes L$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^{p^n} \in K_e \otimes L_e$, donc toute sous-algèbre B de $K \otimes L$ est radicielle sur $K_e \otimes L_e$, et il en résulte que $K_e \otimes L_e = (K \otimes L)_e$.

Remarquons, en conservant les notations précédentes, que $\mathcal{O}_{X_e,x}$ n'est pas nécessairement une sous-algèbre de $\mathcal{O}_{X,x}$, mais c'est le cas lorsque X est topologiquement plat sur k , d'après la proposition suivante.

1.6.1. — Soient Y une k -variété formelle étale et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de $\mathbf{Vaf}_{/k}$. On a alors le carré cartésien ci-dessous, où Γ_f est le morphisme graphe $X \rightarrow X \times Y$, de composantes id_X et f ,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Gamma_f} & X \times Y \\ f \downarrow & & \downarrow f \boxtimes \text{id}_Y \\ Y & \xrightarrow{\Delta_Y} & Y \times Y. \end{array}$$

Il s'ensuit que Γ_f est un isomorphisme local, donc que $f = \text{pr}_Y \circ \Gamma_f$ est topologiquement plat si pr_Y l'est, par exemple si X est topologiquement plat sur k .

Réciproquement, comme $Y \rightarrow k$ est topologiquement plat, $X \rightarrow k$ le sera aussi si f l'est (cf. 1.3.3). Prenant en particulier pour f le morphisme canonique $p : X \rightarrow X_e$ de 1.6, on obtient :

Proposition. — Soit X une variété formelle sur k . Le morphisme $X \rightarrow X_e$ est topologiquement plat si et seulement si X est topologiquement plat sur k .

Remarque 1.6.2. — ⁽⁷⁴⁾ Lorsque k est un corps *parfait*, le foncteur $X \mapsto X_e$ est aussi *adjoint à droite* de l'inclusion $\mathbf{Vaf}_{/k}^{\text{ét}} \hookrightarrow \mathbf{Vaf}_{/k}$. En effet, dans ce cas on a $\mathcal{O}_{X_e, x} = \kappa(x)$ pour tout $x \in X$, et les projections canoniques $\mathcal{O}_{X, x} \rightarrow \kappa(x)$ définissent un morphisme $s : X_e \rightarrow X$, qui est une section de $p : X \rightarrow X_e$. Pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ les diagrammes ci-dessous sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{Y, f(x)} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X, x} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \kappa(f(x)) & \longrightarrow & \kappa(x) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ s_X \uparrow & & \uparrow s_Y \\ X_e & \xrightarrow{f_e} & Y_e \end{array}$$

donc s est fonctoriel en X , et il en résulte que $X \mapsto X_e$ est adjoint à droite de l'inclusion $\mathbf{Vaf}_{/k}^{\text{ét}} \hookrightarrow \mathbf{Vaf}_{/k}$. Donc, étant un adjoint à droite, $X \mapsto X_e$ commute aux limites projectives lorsqu'elles existent dans $\mathbf{Vaf}_{/k}^{\text{ét}}$ ⁽⁷⁵⁾, donc en particulier aux produits finis. (Ceci se vérifie aussi directement : pour toute k -variété formelle X , d'algèbre affine A , X_e a pour algèbre affine le quotient de A par son radical $\mathfrak{r}(A)$, et puisque k est parfait, le quotient de $\mathcal{O}_{X, x} \hat{\otimes} \mathcal{O}_{Y, y}$ par son radical est l'algèbre $\kappa(x) \otimes_k \kappa(y)$, puisque cette dernière est semi-simple.)

2. Généralités sur les groupes formels

512

2.1. — Soient k un anneau pseudocompact et G un k -groupe formel, c'est-à-dire un groupe de la catégorie $\mathbf{Vaf}_{/k}$ des variétés formelles sur k . Soit A l'algèbre affine de G . La loi de composition de G définit évidemment un *morphisme diagonal*, c.-à-d., un homomorphisme de k -algèbres profinies $\Delta_A : A \rightarrow A \hat{\otimes}_k A$; cet homomorphisme vérifie les conditions suivantes :

(i) le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Delta_A} & A \hat{\otimes}_k A \\ \Delta_A \downarrow & & \downarrow \Delta_A \hat{\otimes} \text{id}_A \\ A \hat{\otimes}_k A & \xrightarrow{\text{id}_A \hat{\otimes} \Delta_A} & A \hat{\otimes}_k A \hat{\otimes}_k A \end{array}$$

est commutatif.

(ii) il existe une *augmentation* (nécessairement unique), c'est-à-dire un homomorphisme de k -algèbres profinies $\varepsilon_A : A \rightarrow k$ tel que les applications composées

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{\Delta_A} A \hat{\otimes}_k A \xrightarrow{\varepsilon_A \hat{\otimes} \text{id}_A} k \hat{\otimes}_k A \simeq A \\ \text{et} \quad A &\xrightarrow{\Delta_A} A \hat{\otimes}_k A \xrightarrow{\text{id}_A \hat{\otimes} \varepsilon_A} A \hat{\otimes}_k k \simeq A \end{aligned}$$

soient les applications identiques de A .

⁽⁷⁴⁾N.D.E. : On a inséré ici cette remarque, qui dans l'original apparaissait en 2.5.2.

⁽⁷⁵⁾N.D.E. : c'est le cas pour les limites projectives finies.

(iii) il existe un *antipodisme* (nécessairement unique), c'est-à-dire un homomorphisme de k -algèbres profinies $c_A : A \rightarrow A$ tel que l'application composée

$$A \xrightarrow{\Delta_A} A \widehat{\otimes}_k A \xrightarrow{c_A \widehat{\otimes} \text{id}_A} A \widehat{\otimes}_k A \xrightarrow{m_A} A$$

513 soit égale à $\eta_A \circ \varepsilon_A$, si l'on note m_A l'application linéaire qui envoie $a \widehat{\otimes} b$ sur ab et η_A l'application $\lambda \mapsto \lambda 1_A$ de k dans A .

Réciproquement, la donnée de $(\Delta_A, \varepsilon_A, c_A)$ vérifiant (i)–(iii) munit G d'une structure de k -groupe formel. ⁽⁷⁶⁾ Explicitement, pour toute k -algèbre profinie B , l'ensemble $\text{Hom}_c(A, B)$ des morphismes continus de k -modules $\phi : A \rightarrow B$ est muni d'une structure de groupe, fonctorielle en B , définie par

$$\phi \cdot \phi' = m_B \circ (\phi \widehat{\otimes} \phi') \circ \Delta_A,$$

l'élément neutre étant $\eta_B \circ \varepsilon_A$ (où m_B est la multiplication de B et η_B l'application $\lambda \mapsto \lambda 1_B$ de k dans B), et $\phi \circ c_A$ étant l'inverse de ϕ ; et l'ensemble $\text{Hom}_{\mathbf{Alf}/k}(A, B)$ des morphismes continus de k -algèbres $A \rightarrow B$ en est un sous-groupe (car l'algèbre B est commutative).

Définition. — Un *morphisme* de k -groupes formels $\theta : K \rightarrow G$ est, par définition, un morphisme de k -variétés formelles qui respecte les structures de groupe. Si B (resp. A) est l'algèbre affine de K (resp. G) et si $f : A \rightarrow B$ est le morphisme correspondant à θ , ceci équivaut à dire que f est compatible avec les comultiplications, c.-à-d.,

$$(f \widehat{\otimes} f) \circ \Delta_A = \Delta_B \circ f$$

(les conditions $\varepsilon_B \circ f = \varepsilon_A$ et $c_B \circ f = f \circ c_A$ étant alors automatiquement vérifiées). On notera $\mathbf{Grf}/k$ la catégorie des k -groupes formels.

Notations. — Dans la suite, nous appellerons *idéal d'augmentation* de A l'idéal $I_A = \text{Ker}(\varepsilon_A)$, et nous noterons $\omega_{G/k}$ le k -module pseudocompact $I_A/\overline{I_A^2}$, c'est-à-dire le quotient de I_A par l'idéal fermé engendré par les produits xy , pour $x, y \in I_A$.

2.2. — Soit $\mathbf{H}$ un groupe de la catégorie des coalgèbres sur $\mathbf{O}_k$, i.e. pour tout objet C de $\mathbf{Alf}/k$, $\mathbf{H}(C)$ est muni d'une structure de C -coalgèbre en groupes (cf. VII_A 3.2; à la suite de Manin, nous dirons *bialgèbre* ⁽⁷⁷⁾ au lieu de coalgèbre en groupes); de plus, si $\varphi : C \rightarrow D$ est un morphisme de $\mathbf{Alf}/k$, l'application $D \otimes_C \mathbf{H}(C) \rightarrow \mathbf{H}(D)$ est un homomorphisme de D -bialgèbres.

Définition. — Nous résumerons les propriétés ci-dessus en disant que $\mathbf{H}$ est une *bialgèbre* sur $\mathbf{O}_k$.

⁽⁷⁶⁾N.D.E. : On dira aussi que A est un *cogroupe* dans la catégorie des k -algèbres profinies. D'autre part, on a détaillé ce qui suit; en particulier, on a explicité ce qu'est un morphisme de groupes formels $K \rightarrow G$, cf. la proposition 2.3.1.

⁽⁷⁷⁾N.D.E. : On dit aussi « bigèbre » (cf. [BALg], III §11.4); rappelons (cf. VII_A, 3.1, N.D.E. (26)) que toutes les « bialgèbres » considérées ici sont supposées cocommutatives et munies d'une antipode, i.e. ce sont en fait des *algèbres de Hopf cocommutatives*.

Il est clair que le foncteur $\mathbf{H} \mapsto \mathrm{Spf}^*(\mathbf{H})$ de 1.3.5 commute aux produits finis. Il transforme donc une bialgèbre sur $\mathbf{O}_k$ en un *k-foncteur en groupes*, c'est-à-dire, un foncteur (covariant) de $\mathbf{Alf}_{/k}$ dans la catégorie des groupes.

Et en effet, pour toute *k*-algèbre de longueur finie C , les éléments de

$$\mathrm{Spf}^*(\mathbf{H})(C) = \mathrm{Spf}^*(\mathbf{H}(C)) = \{x \in \mathbf{H}(C) \mid \varepsilon(x) = 1 \text{ et } \Delta(x) = x \otimes x\}$$

forment un groupe pour la multiplication de l'algèbre $\mathbf{H}(C)$ (cf. VII_A 3.2.2). Notons d'ailleurs que la condition $\Delta(x) = x \otimes x$ entraîne l'égalité $\varepsilon(x) = \varepsilon(x)^2$, donc aussi $\varepsilon(x) = 1$ si C est locale et $x \neq 0$.⁽⁷⁸⁾

2.2.1. — Une bialgèbre $\mathbf{H}$ sur $\mathbf{O}_k$ est dite *plate* si le module sous-jacent est plat 514 (cf. 1.2.1).⁽⁷⁹⁾ Si $\mathbf{H}$ est plate alors, d'après 1.3.5, $A = \Gamma^*(\mathbf{H})$ est une *k*-algèbre profinie topologiquement plate, et $\mathrm{Spf}^*(\mathbf{H})$ est isomorphe, comme foncteur de $(\mathbf{Alf}_{/k})^0 = \mathbf{Vaf}_{/k}$ vers $(\mathbf{Ens})$, au foncteur

$$\mathrm{Spf}(A) : C \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/k}}(\mathrm{Spf}(C), \mathrm{Spf}(A)).$$

La structure de groupe de $\mathrm{Spf}^*(\mathbf{H})$ munit donc $\mathcal{G}(\mathbf{H}) = \mathrm{Spf}(A)$ d'une structure de groupe formel, qui est décrite explicitement comme suit.

Pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$, comme le C -module sous-jacent à $\mathbf{H}(C)$ est projectif, on déduit du lemme 1.2.3.A, par récurrence sur n , des isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}(C)^*)^{\widehat{\otimes}(n+1)} &\simeq \mathrm{Hom}_C(\mathbf{H}(C), (\mathbf{H}(C)^*)^{\widehat{\otimes} n}) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_C(\mathbf{H}(C), (\mathbf{H}(C)^{\otimes n})^*) \simeq (\mathbf{H}(C)^{\otimes(n+1)})^*. \end{aligned}$$

On déduit de ceci (pour $n = 1, 2$) que la structure de C -algèbre de $\mathbf{H}(C)$ munit $\mathbf{H}(C)^*$ d'une application diagonale vérifiant les conditions 2.1 (i)–(iii), tout ceci de manière fonctorielle en C .

Par conséquent, $A = \Gamma^*(\mathbf{H}) = \varprojlim \mathbf{H}(k/\mathfrak{l})^*$ est munie d'une structure de cogroupe dans $\mathbf{Alp}_{/k}$, qui définit sur $\mathcal{G}(\mathbf{H})$ la structure de groupe formel annoncée.

Réciproquement, soit G un *k*-groupe formel topologiquement plat, d'algèbre affine A , et notons $\mathbf{H}(G)$ la $\mathbf{O}_k$ -coalgèbre $\mathbf{V}_k^f(A)$ (cf. 1.2.3). Le morphisme diagonal $\Delta_A : A \rightarrow A \widehat{\otimes}_k A$ induit alors, pour toute *k*-algèbre de longueur finie C , une application C -linéaire

$$\mathbf{V}_k^f(A)(C) \otimes_C \mathbf{V}_k^f(A)(C) \longrightarrow \mathbf{V}_k^f(A)(C)$$

qui fait de la coalgèbre $\mathbf{V}_k^f(A)(C)$ une C -bialgèbre. On dira que $\mathbf{H}(G)$ est la *bialgèbre covariante du groupe formel* G .⁽⁸⁰⁾ Donc, d'après la proposition 1.3.5.D :

Proposition. — (i) Les foncteurs $G \mapsto \mathbf{H}(G)$ et $\mathbf{H} \mapsto \mathcal{G}(\mathbf{H})$ définissent une équivalence entre la catégorie des *k*-groupes formels topologiquement plats et celle des $\mathbf{O}_k$ -bialgèbres plates.⁽⁸¹⁾

⁽⁷⁸⁾N.D.E. : Puisque $\Delta(x) = x \otimes x$ on a $x = \varepsilon(x)x$, donc $\varepsilon(x) = 0$ ne peut se produire que si $x = 0$.

⁽⁷⁹⁾N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

⁽⁸⁰⁾N.D.E. : On a ajouté l'adjectif « *covariant* » pour faire voir que le foncteur $G \mapsto \mathbf{H}(G)$ est covariant ; cette terminologie est utilisée dans [Di73], I § 2.14.

⁽⁸¹⁾N.D.E. : On rappelle que dans cet exposé, « bialgèbre » signifie « algèbre de Hopf cocommutative ».

(ii) Cette équivalence « commute au changement de base » : si $k \rightarrow K$ est un morphisme d'anneaux pseudocompacts, alors $\mathbf{H}(G \widehat{\otimes}_k K) = \mathbf{H}(G) \otimes_k K$ et $\mathcal{G}(\mathbf{H} \otimes_k K) = \mathcal{G}(\mathbf{H}) \widehat{\otimes}_k K$.

Lorsque k est un anneau artinien et G un k -groupe formel topologiquement plat, le foncteur $\mathbf{H}(G)$ est évidemment déterminé par sa valeur $\mathbf{H}(G) = \mathbf{H}(G)(k)$ en k . On dira aussi que $\mathbf{H}(G)$ est la *bialgèbre* (covariante) de G .⁽⁸²⁾ Par conséquent, notant $\mathcal{H}_k$ la catégorie des k -algèbres de Hopf et $\mathcal{H}_{\text{plat}/k}^{\text{cocom}}$ la sous-catégorie pleine formée des k -algèbres de Hopf plates sur k et cocommutatives, on obtient donc :

Corollaire. — Soit k un anneau artinien.

(i) Les foncteurs $G \mapsto \mathbf{H}(G)$ et $H \mapsto \mathcal{G}(H) = \text{Spf}^* \mathbf{H}(G)$ définissent une équivalence entre la catégorie des k -groupes formels topologiquement plats et $\mathcal{H}_{\text{plat}/k}^{\text{cocom}}$.

(ii) Cette équivalence « commute au changement de base » : si $k \rightarrow K$ est un morphisme d'anneaux artiniens, alors $\mathbf{H}(G \widehat{\otimes}_k K) = \mathbf{H}(G) \otimes_k K$ et $\mathcal{G}(H \otimes_k K) = \mathcal{G}(H) \widehat{\otimes}_k K$.

D'autre part, notons aussi $\mathcal{H}_{\text{plat}/k}^{\text{com}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}_k$ formée des k -algèbres de Hopf plates sur k et commutatives, et rappelons que le foncteur $K \mapsto \mathcal{O}(K)$ est une *anti-équivalence* de la catégorie des k -schémas en groupes affines sur $\mathcal{H}_{\text{plat}/k}^{\text{com}}$.

515 **2.2.2.** — Supposons pour simplifier k artinien et soit G un k -groupe formel topologiquement plat.⁽⁸³⁾ Alors G est *commutatif* si et seulement si son algèbre affine $\mathcal{A}(G)$ a une comultiplication cocommutative, ce qui équivaut à dire que la bialgèbre $\mathbf{H}(G)$ a une multiplication commutative. Dans ce cas, $\mathbf{H}(G)$ est une algèbre de Hopf commutative et cocommutative, plate sur k , donc si l'on pose $D'(G) = \text{Spec } \mathbf{H}(G)$, alors $D'(G)$ est un k -schéma en groupes commutatifs, affine et plat sur k . Réciproquement, si T est un tel k -schéma en groupes, son algèbre affine $\mathcal{O}(T)$ est un groupe commutatif dans la catégorie des k -coalgèbres cocommutatives plates sur k et donc, d'après 1.3.5.C, on obtient un k -groupe formel topologiquement plat $D(T)$ en posant :

$$D(T) = \text{Spf}^* \mathcal{O}(T) = \text{Spf}^*(\mathcal{A}), \quad \text{où} \quad \mathcal{A} = \mathcal{O}(T)^*.$$

Comme, d'après 1.3.5.D, on a des isomorphismes canoniques $G = \text{Spf}^* \mathbf{H}(G)$ et $\mathbf{H}(D(T)) = \mathcal{O}(T)$, on obtient des isomorphismes canoniques :

$$\begin{aligned} D(D'(G)) &= \text{Spf}^* \mathcal{O}(D'(G)) = \text{Spf}^* \mathbf{H}(G) = G, \\ D'(D(T)) &= \text{Spec } \mathbf{H}(D(T)) = \text{Spec } \mathcal{O}(T) = T. \end{aligned}$$

De plus, notant $k\text{-Gr.}$ la catégorie des k -schémas en groupes, on a, d'après le corollaire 2.2.1, des isomorphismes fonctoriels :

$$\text{Hom}_{\mathbf{Gr}/k}(G, D(T)) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{H}_k}(\mathbf{H}(G), \mathcal{O}(T)) \simeq \text{Hom}_{k\text{-Gr.}}(T, D'(G)),$$

On obtient donc la :

⁽⁸²⁾N.D.E. : On a introduit ici la notation $\mathcal{H}_{\text{plat}/k}^{\text{cocom}}$, qui sera utile plus bas.

⁽⁸³⁾N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit, afin d'introduire les notations $D'(G)$ et $D(K)$, cf. [Ca62], § 14.

Proposition (Dualité de Cartier). — Soit k un anneau artinien.

(i) Les foncteurs $G \mapsto D'(G) = \text{Spec } H(G)$ et $T \mapsto D(T) = \text{Spf}^* \mathcal{O}(T)$ induisent une anti-équivalence entre la catégorie $\mathcal{FC}_k$ des k -groupes formels commutatifs topologiquement plats et la catégorie $\mathcal{AC}_k$ des k -schémas en groupes commutatifs, affines et plats, i.e. G et $D'(G)$ (resp. T et $D(T)$) sont reliés par les égalités : ⁽⁸⁴⁾

$$H(G) = \mathcal{O}(D'(G)) \quad \text{et} \quad \mathcal{O}(T) = H(D(T)).$$

(ii) Cette anti-équivalence « commute au changement de base » : si $k \rightarrow K$ est un morphisme d'anneaux artiniens, alors $D'(G \hat{\otimes}_k K) = D'(G) \otimes_k K$ et $D(T \otimes_k K) = D(T) \hat{\otimes}_k K$.

(iii) En particulier, si k est un corps, on obtient une anti-équivalence entre la catégorie des k -groupes formels commutatifs et celle des k -schémas en groupes commutatifs affines, qui commute à l'extension du corps de base.

2.3. — Considérons maintenant un k -groupe formel arbitraire ⁽⁸⁵⁾ G , d'algèbre affine A . Notons toujours $\mathbf{H}(G)$ le $\mathbf{O}_k$ -module $\mathbf{V}_k^f(A)$ dual de A et désignons par φ_G l'homomorphisme fonctoriel

$$\varphi_G : \mathbf{H}(G) \otimes_k \mathbf{H}(G) \longrightarrow \mathbf{H}(G \times G)$$

qui est induit par l'application naturelle (0.3.6), pour tout objet C de $\mathbf{Alf}/_k$:

$$(A \hat{\otimes}_k C)^\dagger \otimes_C (A \hat{\otimes}_k C)^\dagger \longrightarrow ((A \hat{\otimes}_k C) \hat{\otimes}_C (A \hat{\otimes}_k C))^\dagger.$$

Si $m : G \times G \rightarrow G$ est la multiplication de G , l'application composée :

$$\mathbf{H}(G) \otimes_k \mathbf{H}(G) \xrightarrow{\varphi_G} \mathbf{H}(G \times G) \xrightarrow{\mathbf{H}(m)} \mathbf{H}(G)$$

fait de $\mathbf{H}(G)$ une algèbre sur $\mathbf{O}_k$; pour tout $C \in \mathbf{Alf}/_k$, l'élément unité de $\mathbf{H}(G)(C) = (A \hat{\otimes}_k C)^\dagger$ est l'augmentation de $A \hat{\otimes}_k C$ (cf. 2.1). ⁽⁸⁶⁾ Si G n'est pas topologiquement plat sur k , φ_G n'est pas nécessairement un isomorphisme, et donc le morphisme $\delta_G : \mathbf{H}(G) \rightarrow \mathbf{H}(G \times G)$ induit par le morphisme diagonal « $x \mapsto (x, x)$ » de G dans $G \times G$, ne se factorise pas nécessairement à travers $\mathbf{H}(G) \otimes_k \mathbf{H}(G)$, i.e. $\mathbf{H}(G)$ n'est pas nécessairement une $\mathbf{O}_k$ -bialgèbre.

Pour cette raison nous dirons simplement, dans le cas général, que $\mathbf{H}(G)$ est « l'al- 516
gèbre covariante » du groupe formel G .

Bien entendu, lorsque G est *topologiquement plat* sur k , φ_G est un isomorphisme, et l'on retrouve la structure de $\mathbf{O}_k$ -bialgèbre sur $\mathbf{H}(G)$ définie en 2.2.1.

⁽⁸⁴⁾N.D.E. : Si l'on note $\mathcal{FC}_k^f$ (resp. $\mathcal{AC}_k^f$) la sous-catégorie pleine de $\mathcal{FC}_k$ (resp. $\mathcal{AC}_k$) formée des objets G (resp. T) tels que $H(G)$ (resp. $\mathcal{O}(T)$) soit un k -module *fini* (et donc fini localement libre), alors $\mathcal{FC}_k^f$ et $\mathcal{AC}_k^f$ ont toutes deux les mêmes objets que la catégorie $\mathcal{C}$ des k -algèbres de Hopf commutatives et cocommutatives, finies et plates sur k , la correspondance $G \mapsto H(G)$ (resp. $T \mapsto \mathcal{O}(T)$) étant covariante (resp. contravariante), et l'on retrouve ainsi la « dualité de Cartier » de la catégorie $\mathcal{AC}_k$, déjà vue en VII_A, 3.3.1.

⁽⁸⁵⁾N.D.E. : c.-à-d., pas nécessairement topologiquement plat sur k

⁽⁸⁶⁾N.D.E. : On a modifié l'ordre des phrases dans ce qui suit.

2.3.1 Proposition. — Soient K et G deux k -groupes formels, d'algèbres affines B et A . On suppose K topologiquement plat sur k . Il existe alors une bijection canonique de $\text{Hom}_{\mathbf{Grf}/k}(K, G)$ sur l'ensemble des homomorphismes de $\mathbf{O}_k$ -algèbres unitaires $h : \mathbf{H}(K) \rightarrow \mathbf{H}(G)$ tels que le diagramme

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{H}(K) \otimes_k \mathbf{H}(K) & \xrightarrow{h \otimes h} & \mathbf{H}(G) \otimes_k \mathbf{H}(G) \\ \Delta_{\mathbf{H}(K)} \uparrow & & \searrow \varphi_G \\ \mathbf{H}(K) & \xrightarrow{h} & \mathbf{H}(G) \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \delta_G \\ \rightarrow \end{array} \mathbf{H}(G \times G)$$

soit commutatif.

Comme K est topologiquement plat, $\mathbf{H}(K)$ est muni d'une structure de bialgèbre (cf. 2.2) et $\Delta_{\mathbf{H}(K)}$ en est le morphisme diagonal ; autrement dit, avec les notations de 2.3, on a $\Delta_{\mathbf{H}(K)} = \varphi_K^{-1} \circ \delta_K$. Lorsque G est aussi topologiquement plat sur k , notre proposition résulte de l'équivalence de catégories établie en 2.2.1.

517 Dans le cas général, on peut supposer k artinien et raisonner sur les algèbres $\mathbf{H}(K) = B^\dagger$ et $\mathbf{H}(G) = A^\dagger$. Soient $\text{Hom}_c(A, B)$ l'ensemble des applications k -linéaires continues de A dans B et $\text{Hom}_k(B^\dagger, A^\dagger)$ l'ensemble des applications k -linéaires de $B^\dagger$ dans $A^\dagger$.

(87) D'après 0.3.6.A, on sait que si M, P sont des k -modules pseudocompacts, et si P est *projectif*, l'application canonique

$$\text{Hom}_c(M, P) \longrightarrow \text{Hom}_k(P^\dagger, M^\dagger), \quad f \mapsto {}^t f$$

(où ${}^t f$ désigne la transposée de f) est bijective. (On appliquera ceci à $M = A \widehat{\otimes} A$ et $P = B$, ou bien $M = A$ et $P = B \widehat{\otimes} B$).

Soit $f \in \text{Hom}_c(A, B)$. Considérons les diagrammes ci-dessous, où les carrés (0) sont commutatifs, et où les deux flèches verticales non nommées sont ${}^t(f \widehat{\otimes} f)$.

$$\begin{array}{ccccccc} A \widehat{\otimes} A & \xrightarrow{m_A} & A & \xrightarrow{\Delta_A} & A \widehat{\otimes} A \\ f \widehat{\otimes} f \downarrow & (1) & \downarrow f & (2) & \downarrow f \widehat{\otimes} f \\ B \widehat{\otimes} B & \xrightarrow{m_B} & B & \xrightarrow{\Delta_B} & B \widehat{\otimes} B \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} A^\dagger \otimes A^\dagger & \xrightarrow{\varphi_G} & (A \widehat{\otimes} A)^\dagger & \xleftarrow{\delta_G = m_A^t} & A^\dagger & \xleftarrow{\Delta_A^t} & (A \widehat{\otimes} A)^\dagger & \xleftarrow{\varphi_G} & A^\dagger \otimes A^\dagger \\ {}^t f \otimes {}^t f \uparrow & (0) & \uparrow & (1') & \uparrow {}^t f & (2') & \uparrow & (0) & \uparrow {}^t f \otimes {}^t f \\ B^\dagger \otimes B^\dagger & \xlongequal{\quad} & (B \widehat{\otimes} B)^\dagger & \xleftarrow{\delta_K = m_B^t} & B^\dagger & \xleftarrow{\Delta_B^t} & (B \widehat{\otimes} B)^\dagger & \xlongequal{\quad} & B^\dagger \otimes B^\dagger \end{array}$$

(87) N.D.E. : On a détaillé la suite de la démonstration.

Si $f : A \rightarrow B$ correspond à un morphisme de groupes formels $K \rightarrow G$, alors les carrés (1) et (2) sont commutatifs, et $\varepsilon_B \circ f = \varepsilon_A$; par conséquent, les carrés (1') et (2') sont commutatifs et ${}^t f$ envoie l'unité de $B^\dagger = H(K)$ sur celle de $A^\dagger = H(G)$, i.e. ${}^t f$ est un morphisme de k -algèbres unitaires $H(K) \rightarrow H(G)$ tel que le diagramme (*) de la proposition soit commutatif.

Réciproquement, si ${}^t f$ vérifie ces conditions, alors $\varepsilon_B \circ f = \varepsilon_A$ et les carrés (1') et (2') sont commutatifs. Comme, pour $M = A \widehat{\otimes} A$ et $P = B$ (resp. $M = A$ et $P = B \widehat{\otimes} B$), l'application $g \mapsto {}^t g$ est injective, on en déduit que les carrés (1) et (2) sont commutatifs, donc f est compatible avec les multiplications et les morphismes diagonaux de A et B . Il reste à voir que $f(1_A) = 1_B$. Or, il résulte de ce qui précède que $\varepsilon_B f(1) = 1$, $\Delta_B f(1) = f(1) \widehat{\otimes} f(1)$ et $f(1) \cdot f(1) = f(1)$. Les deux premières conditions entraînent, d'après 2.1 (iii), que $f(1)$ admet $c_B f(1)$ pour inverse dans B ; par conséquent $f(1) \cdot f(1) = f(1)$ entraîne $f(1) = 1$. Donc $f : A \rightarrow B$ est un morphisme de $\mathbf{Alp}_{/k}$, compatible avec les comultiplications de A et B .

518

2.3.2. — *Supposons maintenant pour simplifier l'anneau k artinien.* Lorsque G est topologiquement plat sur k , l'algèbre $H(G) = \mathbf{H}(G)(k)$ peut être caractérisée par une propriété universelle (due à Cartier). Rappelons (cf. 1.2.1) que si U est un k -module, on note $\mathbf{W}(U)$ le foncteur qui à toute k -algèbre de longueur finie C associe le C -module $U \otimes_k C$.⁽⁸⁸⁾ Si U est une k -algèbre (associative, avec élément unité), il en est de même de $U \otimes_k C$; nous noterons $\mathbf{W}(U)^\times$ le k -foncteur en groupes qui associe à tout $C \in \text{Ob } \mathbf{Alf}_{/k}$ le groupe multiplicatif des éléments inversible de l'algèbre $U \otimes_k C$:

$$\mathbf{W}(U)^\times(C) = (U \otimes_k C)^\times.$$

De plus, identifions G au k -foncteur en groupes $C \mapsto \text{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/k}}(\text{Spf}(C), G)$ et notons $\text{Hom}_{k\text{-Gr.}}(G, \mathbf{W}(U)^\times)$ l'ensemble des homomorphismes de k -foncteurs en groupes de G dans $\mathbf{W}(U)^\times$. On a la

Proposition. — *Soit k un anneau artinien. Pour tout groupe formel G topologiquement plat sur k et pour toute k -algèbre U , il y a un isomorphisme canonique*

$$\text{Hom}_{k\text{-Gr.}}(G, \mathbf{W}(U)^\times) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{k\text{-Alg.}}(H(G), U).$$

Notons A l'algèbre affine de G , par hypothèse c'est un objet projectif de $\mathbf{PC}(k)$, et $H(G) = A^\dagger$. Pour tout objet P de $\mathbf{PC}(k)$, notons $U \widehat{\otimes}_k P$ la limite projective des k -modules $U \otimes_k (P/N)$, où N parcourt les sous-modules ouverts de P . On a des applications linéaires

$$U \otimes_k (P/N) \longrightarrow \text{Hom}_k((P/N)^*, U)$$

qui envoient $u \otimes x$ sur l'application k -linéaire $f \mapsto f(x)u$ et qui forment un système projectif filtrant. On obtient donc, par passage à la limite projective, un morphisme

519

$$(1) \quad U \widehat{\otimes}_k P \xrightarrow{\psi_P} \text{Hom}_k(P^\dagger, U).$$

⁽⁸⁸⁾N.D.E. : On a ajouté la phrase qui précède, et dans ce qui suit on a noté $\mathbf{W}(U)^\times$ au lieu de U_m . Rappelons d'autre part (cf. 1.2.1) qu'on appelle « k -foncteur » un foncteur covariant $\mathbf{Alf}_{/k} \rightarrow (\mathbf{Ens})$.

Lorsque $P = k$, ψ_k est évidemment un isomorphisme ; de plus, les deux membres de (1), considérés comme foncteurs en P , commutent aux produits infinis (tout produit étant limite projective filtrante de produits finis). On obtient donc que (1) est un isomorphisme lorsque P est un produit de copies de k , puis lorsque P est un objet projectif de $\mathbf{PC}(k)$ (les deux membres de (1) commutant aux sommes directes finies).

Notons maintenant $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(G, \mathbf{W}(U))$ l'ensemble des morphismes de k -foncteurs de G dans $\mathbf{W}(U)$. Comme $G = \text{Spf}(A) = \varprojlim \text{Spf}(A/\mathfrak{l})$, où $\mathfrak{l}$ parcourt les idéaux ouverts de A , on a des isomorphismes canoniques

$$\text{Hom}_{\mathcal{F}}(G, \mathbf{W}(U)) = \varprojlim \text{Hom}_{\mathcal{F}}(\text{Spf}(A/\mathfrak{l}), \mathbf{W}(U)) = \varprojlim U \otimes_k (A/\mathfrak{l}) = U \hat{\otimes}_k A.$$

D'après ce qui précède, on obtient donc un isomorphisme canonique :

$$(2) \quad \text{Hom}_{\mathcal{F}}(G, \mathbf{W}(U)) = U \hat{\otimes}_k A \xrightarrow{\psi_A} \text{Hom}_k(H(G), U).$$

Pour toute k -algèbre de longueur finie C , la multiplication fait de $U \otimes_k C$ un monoïde à élément unité, et tout morphisme de monoïdes à élément unité $G(C) \rightarrow U \otimes_k C$ est nécessairement un morphisme de *groupes* $G(C) \rightarrow (U \otimes_k C)^\times$. Par conséquent, on obtient que $\text{Hom}_{k\text{-Gr.}}(G, \mathbf{W}(U)^\times)$ est la partie de $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(G, \mathbf{W}(U))$ formée des morphismes de k -foncteurs en monoïdes à élément unité.

Il reste à voir que ces morphismes correspondent aux applications k -linéaires de $H(G)$ dans U qui préservent la multiplication et les éléments unité. ⁽⁸⁹⁾ Pour simplifier l'écriture, $H(G) = A^\dagger$ sera noté H et l'on écrira $\hat{\otimes}$ au lieu de $\hat{\otimes}_k$. Notons Δ_A , m_A et ε_A (resp. Δ_H , m_H et ε_H) la comultiplication, la multiplication et l'augmentation de A (resp. H). Soit $\theta \in \text{Hom}_{\mathcal{F}}(G, \mathbf{W}(U))$, notons γ son image dans $U \hat{\otimes} A$ et $\phi : H \rightarrow U$ l'application k -linéaire associée. Alors θ envoie la section unité $s \in G(k)$ sur un élément u de U , et comme s correspond à l'augmentation $\varepsilon : A \rightarrow k$, qui est l'élément unité 1_H de H , on voit que $\theta(s) = 1_U$ si et seulement si $\phi(1_H) = 1_U$.

Par ailleurs, le morphisme $\theta \circ m_G : G \times G \rightarrow \mathbf{W}(U)$ correspond à l'élément $(\text{id}_U \hat{\otimes} \Delta_A)(\gamma)$, et celui-ci correspond, par dualité, à l'application $\phi \circ m_H : H \otimes H \rightarrow U$.

D'autre part, le morphisme $\theta \circ \text{pr}_1 : G \times G \rightarrow \mathbf{W}(U)$ correspond à l'élément $\gamma \hat{\otimes} 1_A$ de $U \hat{\otimes} A \hat{\otimes} A$, qui correspond par dualité à $\phi \circ (\text{id}_H \otimes \varepsilon) : H \otimes H \rightarrow U$. De même, $\theta \circ \text{pr}_2$ correspond à l'élément $\tau(\gamma \hat{\otimes} 1_A)$ de $U \hat{\otimes} A \hat{\otimes} A$ (où $\tau(u \hat{\otimes} a \hat{\otimes} b) = u \hat{\otimes} b \hat{\otimes} a$), qui correspond par dualité à $\phi \circ (\varepsilon \otimes \text{id}_H) : H \otimes H \rightarrow U$. Enfin, l'application de multiplication $\mu = m_{U \hat{\otimes} A \hat{\otimes} A}$ ci-dessous :

$$(U \hat{\otimes} A \hat{\otimes} A) \times (U \hat{\otimes} A \hat{\otimes} A), \quad (u \hat{\otimes} a_1 \hat{\otimes} a_2, u' \hat{\otimes} a_3 \hat{\otimes} a_4) \mapsto uu' \hat{\otimes} a_1 a_3 \hat{\otimes} a_2 a_4$$

peut être vue comme la composée de l'endomorphisme σ_{23} de $(U \otimes U) \hat{\otimes} A^{\hat{\otimes} 4}$ qui « échange les facteurs a_2 et a_3 », et de l'application

$$(U \otimes U) \hat{\otimes} A^{\hat{\otimes} 2} \hat{\otimes} A^{\hat{\otimes} 2} \xrightarrow{m_U \hat{\otimes} m_A \hat{\otimes} m_A} U \hat{\otimes} A \hat{\otimes} A.$$

⁽⁸⁹⁾N.D.E. : L'original indiquait que : « (cela) résulte du caractère fonctoriel de ψ_A ». On a détaillé cela dans ce qui suit.

On en déduit que l'application $\mu \circ (\phi \circ \text{pr}_1, \phi \circ \text{pr}_2) : G \times G \rightarrow \mathbf{W}(U)$ correspond à l'application composée β ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc}
 & H \otimes H & \xrightarrow{\beta} U \\
 \text{id}_H \circ \sigma_{23} \circ \text{id}_H \swarrow & & \uparrow m_U \\
 H \otimes H \otimes H \otimes H & & U \otimes U \\
 (\text{id}_H \otimes \varepsilon_H) \otimes (\varepsilon_H \otimes \text{id}_H) \searrow & \nearrow \phi \otimes \phi & \\
 & H \otimes H & .
 \end{array}$$

Enfin, θ est compatible avec les lois de G et de $\mathbf{W}(U)^\times$ si et seulement si $\theta \circ m_G$ égale $\mu \circ (\phi \circ \text{pr}_1, \phi \circ \text{pr}_2)$ ce qui équivaut, d'après ce qui précède, à $\phi \circ m_H = \beta$. Or il est clair que $(\phi \circ m_H)(x \otimes y) = \phi(xy)$, et l'on voit facilement que $\beta(x \otimes y) = \phi(x)\phi(y)$.

2.4. — Revenons maintenant à un anneau pseudocompact quelconque k pour appliquer aux groupes formels les résultats de 1.4–1.5 sur le passage au quotient par une relation d'équivalence topologiquement plate.

⁽⁹⁰⁾ Soient $u : H \rightarrow G$ un *monomorphisme* de k -groupes formels, $\mu : G \times G \rightarrow G$ le morphisme « multiplication » de G et λ le morphisme composé

520

$$\lambda : G \times H \xrightarrow{\text{id}_G \times u} G \times G \xrightarrow{\mu} G.$$

Comme u est un monomorphisme, le couple

$$G \times H \xrightleftharpoons[\lambda]{\text{pr}_1} G$$

est un couple d'équivalence dans $\mathbf{Vaf}/_k$ (cf. V, 2.b)). Rappelons (cf. 1.2.C) que le conoyau G/H de ce couple est défini comme suit.

Soient $\mathcal{O}(G)$ et $\mathcal{O}(H)$ les algèbres affines de G et H , $\Delta : \mathcal{O}(G) \rightarrow \mathcal{O}(G) \hat{\otimes}_k \mathcal{O}(G)$ le morphisme diagonal de $\mathcal{O}(G)$, et I le noyau du morphisme $u^\sharp : \mathcal{O}(G) \rightarrow \mathcal{O}(H)$. (On sait, d'après la proposition 1.3, que $u^\sharp$ induit un isomorphisme $\mathcal{O}(G)/I \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(H)$). Alors, l'algèbre affine $\mathcal{O}(G/H)$ de G/H est le noyau du couple de morphismes :

$$\mathcal{O}(G) \xrightleftharpoons[(\text{id} \hat{\otimes} u^\sharp) \Delta]{\tau_1} \mathcal{O}(G) \hat{\otimes}_k \mathcal{O}(H),$$

où $\tau_1(x) = x \hat{\otimes} 1$, c.-à-d.,

$$\mathcal{O}(G/H) = \{x \in \mathcal{O}(G) \mid \Delta(x) - x \hat{\otimes} 1 \in \mathcal{O}(G) \hat{\otimes} I\}.$$

Si, de plus, H est *topologiquement plat* sur k , alors pr_1 est topologiquement plat et l'on déduit du théorème 1.4 le théorème suivant.

⁽⁹⁰⁾N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

Théorème. — Soit $u : H \rightarrow G$ un monomorphisme de k -groupes formels. On suppose H topologiquement plat sur k . Alors, la projection $p : G \rightarrow G/H$ est surjective et topologiquement plate, on a un isomorphisme

$$(*) \quad G \times H \xrightarrow{\sim} G \times_{G/H} G$$

et G/H représente le faisceau-quotient pour la topologie plate.

Par conséquent, G/H est muni d'une structure canonique d'objet à groupe d'opérateurs G , telle que $p : G \rightarrow G/H$ soit un morphisme d'objets à opérateurs. Si de plus u identifie H à un sous-groupe invariant de G , alors G/H est muni d'une structure canonique de k -groupe formel, telle que $p : G \rightarrow G/H$ soit un morphisme de k -groupes formels, et H est le noyau de p .

En effet, la première assertion découle de 1.4; les deux autres de IV, corollaires 5.2.2 et 5.2.4.

Corollaire. — ⁽⁹¹⁾ Soient G un k -groupe formel, H un sous-groupe formel de G , A (resp. A/J , B) l'algèbre affine de G (resp. H , G/H), I_A l'idéal d'augmentation de A , et $I_B = B \cap I_A$. On suppose H topologiquement plat sur k . Alors J égale $\overline{AI_B}$, l'idéal fermé engendré par I_B .

En effet, la projection $B \rightarrow B/I_B$ correspond à la « section unité » $e : \mathrm{Spf}(k) \rightarrow G/H$ de G/H . D'après (*), H s'identifie au produit fibré $\mathrm{Spf}(k) \times_{G/H} G$, et donc son algèbre affine A/J s'identifie à $(B/I_B) \hat{\otimes}_B A \simeq A/\overline{AI_B}$.

2.4.A. — ⁽⁹²⁾ Soient G, Q des k -groupes formels topologiquement plats; on suppose qu'il existe des homomorphismes $\sigma : Q \rightarrow G$ et $\pi : G \rightarrow Q$ tels que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_Q$. En particulier, σ est un monomorphisme, donc Q est un sous-groupe formel de G (cf. la remarque 1.3). Soient $N = \mathrm{Ker}(\pi)$ et σ' l'inclusion $N \hookrightarrow G$. Alors G est le produit semi-direct de N par Q (cf. I, 2.3.8), i.e. pour tout $B \in \mathrm{Ob} \mathbf{AIf}_k$, identifiant $N(B)$ et $Q(B)$ à leurs images dans $G(B)$ par σ' et σ , $N(B)$ est un sous-groupe invariant de $G(B)$ et l'application

$$(1) \quad \mu : N(B) \times Q(B) \longrightarrow G(B), \quad (x, q) \mapsto xq$$

est bijective. Alors le morphisme de k -variétés formelles

$$(2) \quad \theta : G(B) \longrightarrow N(B), \quad g \mapsto g \cdot \sigma\pi(g^{-1})$$

est une rétraction de σ' , l'inverse de μ est l'application

$$(3) \quad g \mapsto (\theta(g), \pi(g))$$

et $\theta \circ \sigma' : N \rightarrow G/Q$ est un isomorphisme de k -variétés formelles. En particulier, N est topologiquement plat sur k , d'après 1.4 (ii). Notons α (resp. β) l'application de

⁽⁹¹⁾N.D.E. : On a explicité ce corollaire, qui est utilisé, par exemple, en 5.2.1/5.2.3.

⁽⁹²⁾N.D.E. : On a ajouté les paragraphes 2.4.A et 2.4.B, qui seront utiles en 5.1.3, resp. en 2.9.

$Q \times N$ (resp. $G \times N = N \times Q \times N$) vers N définie ensemblistement par $\alpha(q, y) = qyq^{-1}$ (resp. $\beta(x, q, y) = x\alpha(q, y)$). Alors on a le diagramme commutatif ci-dessous :

$$(4) \quad \begin{array}{ccccc} G \times G & \xrightarrow{\text{id} \times \theta} & G \times N & \xrightarrow{\theta \times \text{id}} & N \times N \\ m_G \downarrow & & \downarrow \beta & \nearrow m_N & \\ G & \xrightarrow{\theta} & N & & \end{array} .$$

Ceci peut s'exprimer comme suit en termes des algèbres affines A , A_0 et A' de G , Q et N (cf. 5.1.3 plus loin). Soient $\rho' : A \rightarrow A'$, $\rho : A \rightarrow A_0$ et $\tau : A_0 \rightarrow A$ les homomorphismes de k -bialgèbres correspondant à σ' , σ et π , et soit $I = \text{Ker}(\rho)$. Alors, d'après le corollaire précédent, A' s'identifie à $A/\overline{A\tau(J_0)}$, où J_0 désigne l'idéal d'augmentation de A_0 .

D'autre part, soit B l'algèbre affine de G/Q , c'est le noyau du couple de morphismes :

$$A \xrightleftharpoons[(\text{id} \otimes \rho)\Delta_A]{\tau_1} A \widehat{\otimes}_k A_0,$$

i.e. $B = \{x \in A \mid \Delta_A(x) - x \widehat{\otimes} 1 \in A \widehat{\otimes} I\}$. Notons γ le morphisme continu de k -algèbres $\theta^\natural : A' \rightarrow A$; c'est une section de ρ' et un isomorphisme de k -algèbres profinies de A' sur B . D'autre part, $\tau = \pi^\natural$ identifie A_0 à une sous-bialgèbre de A , qui n'est autre que l'algèbre affine du quotient $N \backslash G$. On déduit alors de (1) et (3) que l'on a un isomorphisme de k -algèbres profinies

$$(*) \quad A' \widehat{\otimes}_k A_0 \xrightarrow{\sim} A, \quad a' \widehat{\otimes} a_0 \mapsto \gamma(a')\tau(a_0),$$

dont l'inverse est l'application $a \mapsto (\rho' \otimes \rho)\Delta_A(a)$.

Enfin, identifions A' à son image dans A par γ , de sorte que la projection $A \rightarrow A'$ est alors $\gamma\rho'$. Notant $\Delta_{A'}$ la comultiplication de A' , on déduit alors de (4) que $\Delta_A(A') \subset A \widehat{\otimes} A'$ et que le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{\Delta_A} & A \widehat{\otimes} A' \\ \parallel & & \downarrow \gamma\rho' \otimes \text{id} \\ A' & \xrightarrow{\Delta_{A'}} & A' \widehat{\otimes} A' \end{array}$$

(on a donc aussi $\gamma\rho' \circ c_A = c_{A'}$, où c_A (resp. $c_{A'}$) est l'antipode de A (resp. A')). D'autre part, notant m_A la multiplication de A , on déduit de (2) que, pour tout $a \in A$,

$$\gamma\rho'(a) = (m_A \circ (\text{id} \otimes \tau\rho c_A) \circ \Delta_A)(a).$$

2.4.B. — ⁽⁹²⁾ Supposons, pour simplifier, k artinien. Alors ce qui précède s'exprime plus simplement en termes des bialgèbres covariantes de G, Q, N . En effet, comme

$G = N \times Q$ comme k -variétés formelles, alors $H(G) = H(N) \otimes_k H(Q)$ comme k -coalgèbres. De plus, comme la multiplication de G est donnée par

$$(x, q) \cdot (x', q') = (x\alpha(q, x'), qq'), \quad \text{où } \alpha(q, x') = qxq^{-1},$$

alors la multiplication de $H(G)$ est donnée comme suit : pour tout $x \in H(N)$, $q \in H(Q)$,

$$(x \otimes q) \cdot (x' \otimes q') = x\phi(q, x') \otimes qq',$$

où $\phi : H(Q) \otimes_k H(N)$ est le morphisme de k -coalgèbres induit par α . Comme α est le morphisme composé ci-dessous (où δ_G (resp. m_G) est le morphisme diagonal (resp. la multiplication) de G , c_Q le morphisme d'inversion de Q et $v(q \otimes q' \otimes x) = q \otimes x \otimes q'$) :

$$Q \times N \xrightarrow{v \circ (\delta_G \times \text{id})} Q \times N \times Q \xrightarrow{\text{id} \times \text{id} \times c_Q} Q \times N \times Q \xrightarrow{m_G} G,$$

on obtient, notant encore c_Q l'antipode de $H(Q)$, que

$$(*) \quad \phi(q \otimes x') = \sum_i q_i x' c_Q(q'_i) \quad \text{si} \quad \Delta_{H(Q)}(q) = \sum_i q_i \otimes q'_i.$$

En particulier, si M est un groupe abstrait et si $H(Q)$ est l'algèbre de groupe kM (i.e. $Q = \text{Spf}^* kM$ est le k -groupe formel constant M_k), alors pour tout $\gamma \in M$ et $x' \in H(N)$ on a $\phi(\gamma \otimes x') = \gamma x' \gamma^{-1}$, et ceci définit une action de M sur $H(N)$ par automorphismes d'algèbre de Hopf.

2.4.1 Proposition. — Soit $f : G \rightarrow K$ un morphisme de k -groupes formels. Si $H = \text{Ker}(f)$ est topologiquement plat sur k , l'homomorphisme $f' : G/H \rightarrow K$, qui est induit par f , est un monomorphisme.

C'est une conséquence des résultats de l'exposé IV⁽⁹³⁾ ; nous en donnons cependant une démonstration directe. Soient T une variété formelle de longueur finie sur k et t un élément de $(G/H)(T)$ tel que $f' \circ t$ soit l'élément unité de $K(T)$. Nous devons montrer que t est l'élément unité de $(G/H)(T)$. Notons p la projection $G \rightarrow G/H$ et X le produit fibré $T \times_{G/H} G$.

D'après 2.4, p est surjectif et topologiquement plat, donc il en est de même du morphisme $\text{pr}_1 : X \rightarrow T$, donc pr_1 est un épimorphisme d'après la proposition 1.3.1, donc il suffit de montrer que $t \circ \text{pr}_1$ est l'élément unité de $(G/H)(X)$. Notons pr_2 la projection $X \rightarrow G$, on a $t \circ \text{pr}_1 = p \circ \text{pr}_2$, d'où l'égalité $1 = f' \circ t \circ \text{pr}_1 = f' \circ p \circ \text{pr}_2 = f \circ \text{pr}_2$; alors la suite exacte

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow G \xrightarrow{f} K$$

montre que pr_2 se factorise à travers H , donc $p \circ \text{pr}_2$ est le morphisme nul. Comme $p \circ \text{pr}_2 = t \circ \text{pr}_1$, ceci prouve la proposition.

On déduit de la proposition le corollaire suivant. Notons $\mathcal{O}(G)$, $\mathcal{O}(K)$ et $\mathcal{O}(G/H)$ les algèbres affines de G , K et G/H ; on a vu (2.4) que p induit une injection de $\mathcal{O}(G/H)$ dans $\mathcal{O}(G)$. De plus, d'après la proposition 1.3, comme $f' : G/H \rightarrow K$ est un monomorphisme, le morphisme $\mathcal{O}(K) \rightarrow \mathcal{O}(G/H)$ est surjectif, d'où :

⁽⁹³⁾N.D.E. : cf. IV, 5.2.6.

Corollaire. — Soient $f : G \rightarrow K$ un morphisme de k -groupes formels et $H = \text{Ker}(f)$. Si H est topologiquement plat sur k , alors $\mathcal{O}(G/H)$ est l'image de $\mathcal{O}(K)$ dans $\mathcal{O}(G)$.

2.4.2. — Gardons les notations précédentes et supposons H et G topologiquement plats sur k . Alors G est topologiquement plat sur k et sur G/H , donc, d'après 1.3.3, G/H est topologiquement plat sur k . Par conséquent, d'après 2.4, la projection canonique q de K sur $\text{Coker}(f')$ est topologiquement plate et f' est un isomorphisme de G/H sur $\text{Ker}(q)$. Il est clair d'autre part qu'on a $\text{Coker}(f) = \text{Coker}(f')$. Donc, sous l'hypothèse que G et $H = \text{Ker}(f)$ soient topologiquement plats sur k , on a obtenu un isomorphisme entre $\text{Ker}(q)$, l'image de f , et $G/\text{Ker}(f)$, la coimage de f . Ceci entraîne le théorème ci-dessous.

Théorème. — Soit k un corps. Les k -groupes formels commutatifs forment une catégorie abélienne. 522

Corollaire. — Soit k un corps. Les k -schémas en groupes affines commutatifs forment une catégorie abélienne. ⁽⁹⁴⁾

Ceci résulte du théorème et de l'équivalence de catégories 2.2.2.

2.5. — Un k -groupe formel est dit *étale* si la variété formelle sous-jacente est étale (cf. 1.6); ces groupes formels ont une structure très simple. En effet, supposons k local; soient κ le corps résiduel de k , κ_s une clôture séparable de κ et Γ le groupe de Galois topologique de κ_s sur κ . Appelons Γ -ensemble la donnée d'un ensemble E et d'une opération continue de Γ sur E (i.e. le groupe d'isotropie de tout élément $x \in E$ est un sous-groupe ouvert de Γ).

Pour toute k -variété formelle X , on pose :

$$X(\kappa_s) = \varinjlim_{\ell} X(\ell),$$

où ℓ parcourt les extensions finies de κ contenues dans κ_s . ⁽⁹⁵⁾ Alors Γ opère continûment sur chaque $X(\ell)$, donc aussi sur $X(\kappa_s)$. De plus, soit $X_\kappa = X \hat{\otimes}_k \kappa$ (cf. 1.6.C); pour tout ℓ on a $X(\ell) = X_\kappa(\ell)$, d'où $X(\kappa_s) = X_\kappa(\kappa_s)$.

Supposons maintenant X étale sur k , alors X_κ est la κ -variété formelle somme directe des $\text{Spec } \kappa(x)$, pour $x \in X$, et si l'on note X'_κ le κ -schéma somme directe des $\text{Spec } \kappa(x)$, on voit que $X_\kappa(\kappa_s)$ n'est autre que $X'_\kappa(\kappa_s) = \text{Hom}_{(\mathbf{Sch}/\kappa)}(\text{Spec } \kappa_s, X'_\kappa)$.

Notons $\mathcal{C} = (\mathbf{Sch}_{/\kappa}^{\text{ét}})$ la sous-catégorie pleine de $(\mathbf{Sch}/\kappa)$ formée des κ -schémas étales. On sait que le foncteur $X' \mapsto X'(\kappa_s)$ est une équivalence de $\mathcal{C}$ sur la catégorie $\mathcal{C}'$ des Γ -ensembles (cf. SGA 1, V §§ 7-8 ou [DG70], § I.4 6.4), il induit donc une équivalence entre la catégorie des $\mathcal{C}$ -groupes et celle des $\mathcal{C}'$ -groupes, or on voit aussitôt qu'un $\mathcal{C}'$ -groupe est la même chose qu'un groupe abstrait G muni d'une opération continue de Γ par automorphismes de groupes (on dira alors que G est un Γ -groupe).

⁽⁹⁴⁾N.D.E. : voir aussi les remarques suivant VI_A, 5.4.3.

⁽⁹⁵⁾N.D.E. : Noter que si $[\kappa_s : \kappa] = \infty$, κ_s n'est pas une κ -algèbre profinie, donc l'écriture précédente est un abus de notation. D'autre part, on a détaillé l'original dans ce qui suit.

Compte-tenu des équivalences $\mathbf{Vaf}_{/k}^{\text{ét}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Vaf}_{/\kappa}^{\text{ét}} \xrightarrow{\sim} (\mathbf{Sch}_{/\kappa}^{\text{ét}})$ de 1.6.E, on obtient donc la :

Proposition. — Soient k un anneau pseudocompact local, κ son corps résiduel, κ_s une clôture séparable de κ et $\Gamma = \text{Gal}(\kappa_s/\kappa)$.

(i) Le foncteur $X \mapsto X(\kappa_s)$ est une équivalence de la catégorie des k -variétés formelles étales sur celle des Γ -ensembles.

(ii) Il induit une équivalence de la catégorie des k -groupes formels étales sur celle des Γ -groupes.

Remarque 2.5.A. — ⁽⁹⁶⁾ Soient k un corps, k_s une clôture séparable de k , G un k -groupe formel étale et M le groupe abstrait $G(k_s)$. Notons X un ensemble de représentants des orbites de $\Gamma = \text{Gal}(k_s/k)$ dans M , et pour tout $x \in X$ soient Γ_x son stabilisateur, qui est un sous-groupe de Γ d'indice fini, et $L_x = k_s^{\Gamma_x}$, qui est une extension de k de degré $[\Gamma : \Gamma_x]$ (voir, par exemple, [BAL], V § 10.10). Alors, d'après l'équivalence de catégories ci-dessus, l'algèbre affine $\mathcal{A}(G)$ de G est le produit des L_x , muni de la topologie produit, et donc les L_x sont exactement les quotients simples $\mathcal{A}(G)/\mathfrak{m}$, où $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal ouvert de $\mathcal{A}(G)$. Comme ceux-ci correspondent par dualité aux sous-cogèbres de $H(G)$, on obtient que $H(G)$ est *pointée* (i.e. $\dim_k(C) = 1$ pour toute sous-cogèbre simple C) si et seulement si $L_x = k$ pour tout x , et dans ce cas $\mathcal{A}(G)$ est l'algèbre topologique k^M , donc $H(G)$ est l'algèbre de groupe kM , et l'on a donc $M = \{x \in H(G) \mid \varepsilon(x) = 1 \text{ et } \Delta(x) = x \otimes x\} = G(k)$.

2.5.I. — Supposons de nouveau l'anneau pseudocompact k quelconque. Comme le foncteur $X \mapsto X_e$ de 1.6.F commute aux produits finis, il transforme tout groupe formel G en un groupe formel étale G_e , et comme le morphisme $p : X \rightarrow X_e$ de *loc. cit.* est fonctoriel en X , alors $p : G \rightarrow G_e$ est dans ce cas un morphisme de groupes formels.

⁽⁹⁷⁾ Considérons le noyau $\text{Ker}(p)$, c'est le produit fibré du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & & G \\ & & \downarrow p \\ \text{Spf}(k) & \xrightarrow{\varepsilon} & G_e \end{array}$$

où ε est la section unité de G_e . Comme p induit une bijection sur les ensembles sous-jacents, on en déduit (cf. 1.2, N.D.E. (41)) que $\text{Ker}(p)$ a pour ensemble sous-jacent l'image de $\text{Spf}(k)$ par ε et que pour tout point s de $\text{Spf}(k)$, l'algèbre locale de $\text{Ker}(p)$ au point $\varepsilon(s)$ est $\mathcal{O}_{G,\varepsilon(s)} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{G_e,\varepsilon(s)}} k_s$. De plus, en chaque point $\varepsilon(s)$, le corps résiduel de $\mathcal{O}_{G,\varepsilon(s)}$ est $\kappa(s)$, et donc $\mathcal{O}_{G_e,\varepsilon(s)} = k_s$, d'où $\mathcal{O}_{\text{Ker}(p),\varepsilon(s)} = \mathcal{O}_{G,\varepsilon(s)}$. Pour ces raisons

⁽⁹⁶⁾N.D.E. : On a ajouté cette remarque.

⁽⁹⁷⁾N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

nous dirons que $\text{Ker}(p)$ est le *voisinage infinitésimal de l'origine* de G et nous écrirons $\text{Ker}(p) = G_0$, obtenant ainsi une suite exacte :

$$1 \longrightarrow G_0 \xrightarrow{\text{incl.}} G \xrightarrow{p} G_e .$$

Dans la suite, nous dirons que G est *infinitésimal* si $G = G_0$.⁽⁹⁸⁾ Ceci équivaut à dire que pour tout $s \in \text{Spf}(k)$, ou encore pour tout morphisme continu $k \rightarrow \kappa$, où κ est un corps muni de la topologie discrète, l'élément unité est l'unique élément de $G(\kappa(s))$ resp. de $G(\kappa)$.

Supposons de plus que G soit *topologiquement plat* sur k .⁽⁹⁹⁾ Alors, d'après 1.6.1, le morphisme $p : G \rightarrow G_e$ est topologiquement plat, et comme il est bijectif, c'est donc un épimorphisme effectif d'après la proposition 1.3.1. Par conséquent, G_e s'identifie au quotient G/G_0 . On a donc obtenu :

Corollaire. — Soit G un groupe formel topologiquement plat sur k . Alors G_e s'identifie au quotient G/G_0 ; c.-à-d., on a une suite exacte de groupes formels :

$$1 \longrightarrow G_0 \xrightarrow{\text{incl.}} G \xrightarrow{p} G_e \longrightarrow 1.$$

2.5.2. — Supposons que k soit un *corps parfait*. Dans ce cas, on a vu (cf. 1.6.2) que le morphisme $p : X \mapsto X_e$ possède une section $s : X_e \rightarrow X$ qui dépend fonctoriellement de X ; cette section est donc un morphisme de groupes formels lorsque X est un groupe formel. On obtient donc la :

524

Proposition. — Lorsque k est un corps parfait, tout k -groupe formel G est canoniquement isomorphe au produit semi-direct d'un groupe infinitésimal G_0 et d'un groupe étale G_e opérant sur G_0 .⁽¹⁰⁰⁾

Si, de plus, G est *commutatif*, alors G est le produit de G_0 et de G_e . D'après 2.2.2, cette décomposition canonique des k -groupes formels commutatifs correspond à une décomposition analogue des k -schémas affines en groupes commutatifs, voir le paragraphe 2.5.3 ci-dessous.

Remarque 2.5.2.A. —⁽¹⁰¹⁾ La suite exacte $1 \rightarrow G_0 \rightarrow G \rightarrow G_e \rightarrow 1$ n'est pas nécessairement scindée lorsque k n'est pas parfait : donnons l'exemple suivant, tiré de [DG70], § III.6, 8.6. Soit k un corps non parfait, de caractéristique $p > 0$. Soit $\lambda \in k - k^p$, soit L_λ la p -algèbre de Lie abélienne de base (x, y) , la puissance p -ième symbolique (cf. VII_A, 5.2) étant donnée par $x^{(p)} = x$ et $y^{(p)} = \lambda x$, soit $U_p(L_\lambda) = k[x, y]/(x^p - x, y^p - \lambda x)$ l'algèbre enveloppante restreinte de L_λ (cf. VII_A, 5.3), et soit G_λ le k -groupe formel

⁽⁹⁸⁾N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

⁽⁹⁹⁾N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

⁽¹⁰⁰⁾N.D.E. : Le même argument montre aussi que, pour un corps k arbitraire, si tous les corps résiduels de G égalent k , alors G_e est le k -groupe *constant* $(M)_k$, où $M = G(k) = \text{Spf}^* H(G)$, et $H(G)$ est le produit semi-direct de $H(G_0)$ par l'algèbre de groupe kM , cf. l'ajout 2.9 plus loin.

⁽¹⁰¹⁾N.D.E. : On a ajouté cette remarque.

commutatif d'algèbre affine $U_p(L_\lambda)$. Alors G_λ est une extension non-scindée du k -groupe étale constant $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k$ par le k -groupe infinitésimal $\alpha_{p,k} = \mathrm{Spf} k[x]/(x^p - x)$, i.e. on a une suite exacte non-scindée de k -groupes formels commutatifs : ⁽¹⁰²⁾

$$0 \longrightarrow \alpha_{p,k} \longrightarrow G_\lambda \longrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k \longrightarrow 0.$$

Elle correspond par dualité à une suite exacte non-scindée de k -groupes algébriques commutatifs :

$$0 \longrightarrow \mu_{p,k} \longrightarrow D'(G_\lambda) \longrightarrow \alpha_{p,k} \longrightarrow 0$$

où $\mu_{p,k} = \mathrm{Spec} k[t]/(t^p - 1)$ (et l'on obtient ainsi toutes les extensions de $\alpha_{p,k}$ par $\mu_{p,k}$, cf. [DG70], § III.6, 8.6).

2.5.3. — ⁽¹⁰³⁾ Soit k un corps.

Définition 2.5.3.A. — On dira qu'un k -schéma en groupes commutatifs est *unipotent* s'il est isomorphe à $\mathrm{Spec} H(G)$, où G est un k -groupe formel commutatif *infinitésimal*. ⁽¹⁰⁴⁾

⁽¹⁰⁵⁾ D'autre part, suivant l'Exp. IX, Définition 1.1, on dit qu'un k -schéma en groupes H est *de type multiplicatif* s'il existe un schéma S , fidèlement plat et quasi-compact au-dessus de $\mathrm{Spec} k$, tel que H_S soit un S -groupe diagonalisable, i.e. soit isomorphe à $D_S(M)$ pour un certain groupe abélien « abstrait » M . Par descente (fpqc), ceci entraîne que H est *affine* et commutatif. D'autre part, comme on peut remplacer S par le corps résiduel d'un de ses points, on voit que H est de type multiplicatif si et seulement si il existe une extension K de k telle que H_K soit un K -groupe diagonalisable.

Proposition 2.5.3.B. — Soit T un k -schéma en groupes commutatifs affine et soit k_s une clôture séparable de k .

(i) Pour que T soit de type multiplicatif, il faut et il suffit que son dual $D(T)$ soit un k -groupe formel commutatif étale.

(ii) Par conséquent, T est de type multiplicatif si et seulement si $T \otimes_k k_s$ est diagonalisable.

Démonstration. Notons $\mathcal{A}$ l'algèbre affine de $D(T)$ et $\mathcal{A}_0$ sa composante locale en l'élément neutre ; alors $D(T)$ est étale sur k si et seulement si $\mathcal{A}_0 = k$. Si K est une extension de k , alors l'algèbre $\mathcal{A}_0 \hat{\otimes}_k K$ est locale (car limite projective d'anneaux artiniens locaux), donc coïncide avec la composante locale $(\mathcal{A} \hat{\otimes}_k K)_0$; de plus, comme

⁽¹⁰²⁾ N.D.E. : $\alpha_{p,k}$, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k$ et G_λ sont aussi des k -groupes algébriques finis et plats sur k , cf. la N.D.E. (84) dans 2.2.2.

⁽¹⁰³⁾ N.D.E. : On a introduit la numérotation 2.5.3 et 2.5.3.A à 2.5.3.C.

⁽¹⁰⁴⁾ N.D.E. : Cela coïncide avec la notion « usuelle » de k -schéma en groupes unipotent, cf. l'ajout 2.8 à la fin de la Section 2.

⁽¹⁰⁵⁾ N.D.E. : L'original indiquait : « disons qu'un k -schéma en groupes commutatifs est de type multiplicatif s'il est isomorphe à $\mathrm{Spec} H(G)$, où G est un k -groupe formel commutatif étale ». On a donné ici la définition « usuelle », tirée de l'Exp. IX, 1.1, et l'on a montré l'équivalence avec la condition précédente ; voir aussi [DG70], § IV.1, Th. 2.2.

la formation de $D(T)$ commute au changement de base (cf. 2.2.2), on a aussi $\mathcal{A} \widehat{\otimes}_k K \simeq D(T_K)$.

Supposons T de type multiplicatif, alors il existe une extension K de k telle que $\mathcal{O}(T) \otimes_k K$ soit isomorphe, comme K -algèbre de Hopf, à l'algèbre de groupe K^M , pour un certain groupe abélien M . Alors $\mathcal{A} \widehat{\otimes}_k K$ est isomorphe à l'algèbre K^M , munie de la topologie produit, donc on a $K = (\mathcal{A} \widehat{\otimes}_k K)_0 = \mathcal{A}_0 \widehat{\otimes}_k K$ et ceci entraîne que $\mathcal{A}_0 = k$, donc $D(T)$ est étale.

Réciproquement, supposons que $D(T)$ soit étale. Alors $D(T) \widehat{\otimes}_k k_s = D(T_{k_s})$ est un k_s -groupe constant M , donc sa bigèbre covariante est l'algèbre de groupe $k_s M$ (cf. la remarque 2.5.A), donc $\mathcal{O}(T) \otimes_k k_s = k_s M$, ce qui prouve que T est de type multiplicatif, et déployé par l'extension $k \rightarrow k_s$. La proposition en découle.

D'après 2.2.2, 2.5.1, et 2.5, on obtient :

Corollaire 2.5.3.C. — Soit k un corps et soit G un k -schéma en groupes commutatifs affine.

- (i) G contient un sous-groupe de type multiplicatif G_m tel que G/G_m soit unipotent.
- (ii) Lorsque k est parfait, il existe en outre une rétraction canonique de G sur G_m , de sorte que G est le produit d'un groupe unipotent et d'un groupe de type multiplicatif.
- (iii) ⁽¹⁰⁶⁾ Soient k_s une clôture séparable de k et $\Gamma = \text{Gal}(k_s/k)$. La catégorie des k -schémas en groupes de type multiplicatif est anti-équivalente à la catégorie des Γ -modules continus.

2.6. — Nous allons maintenant étudier les groupes formels infinitésimaux, auxquels sont consacrés les paragraphes suivants. Dans cette étude, les *algèbres de Lie* jouent un rôle primordial.

Supposons d'abord l'anneau de base k artinien et soit G un groupe formel sur k . On peut donner de l'algèbre de Lie de G trois interprétations différentes que nous utiliserons toutes :

- a) Soient D l'algèbre $k[d]/(d^2)$ des nombres duaux sur k et δ l'homomorphisme de D dans k qui annule d . Pour tout groupe formel G sur k , $\text{Lie}(G)$ est le noyau de $G(\delta)$, de sorte qu'on a par définition une *suite exacte de groupes*

$$1 \longrightarrow \text{Lie}(G) \longrightarrow G(D) \xrightarrow{G(\delta)} G(k) \longrightarrow 1.$$

- b) Soit A l'algèbre affine de G et $I_A = \text{Ker } \varepsilon_A$ son idéal d'augmentation. Le groupe $G(D)$ a pour éléments les morphismes de k -algèbres profinies $f : A \rightarrow D$. La condition $G(\delta)(f) = 1$ équivaut à $\delta \circ f = \varepsilon_A$. Comme $x - \varepsilon_A(x) \cdot 1_A \in I_A$, pour tout $x \in A$, ceci équivaut à $f(I_A) \subset k \cdot d$, donc $\text{Ker}(f)$ contient I_A^2 et donc aussi $\overline{I_A^2}$, donc f induit une application linéaire continue f' de $I_A/\overline{I_A^2} = \omega_{G/k}$ dans k telle que, pour tout $x \in A$, on ait l'égalité

$$f(x) = \varepsilon_A(x) \cdot 1_D + f'(\overline{x}) \cdot d,$$

⁽¹⁰⁶⁾ N.D.E. : On a ajouté le point (iii), conséquence de la proposition 2.5.

où $\bar{x}$ désigne l'image de $x - \varepsilon_A(x) \cdot 1_A$ dans $I_A / \overline{I_A^2}$. On voit alors que l'application $f \mapsto f'$ définit une bijection de $\text{Lie}(G)$ sur le dual topologique $\omega_{G/k}^\dagger$ de $\omega_{G/k}$ (cf. 0.2.2).

Cette bijection respecte les structures de groupe. En effet, soient f et g deux éléments de $\text{Lie}(G)$; leur produit $f \cdot g$ est l'application composée $h \circ \Delta_A$, où $h : A \widehat{\otimes} A \rightarrow D$ est tel que $h(b \widehat{\otimes} b') = f(b)g(b')$. Or, si $a \in I_A$ on a, d'après 2.1 (ii), $\Delta_A(a) - a \widehat{\otimes} 1 - 1 \widehat{\otimes} a \in I_A \widehat{\otimes} I_A$, d'où $(f \cdot g)(a) = f(a) + g(a)$ (cf. aussi II 3.10).

Dans la suite, nous identifions $\text{Lie}(G)$ à $\omega_{G/k}^\dagger$ au moyen de la bijection $f \mapsto f'$ décrite ci-dessus. Le groupe $\text{Lie}(G)$ est donc muni d'une structure de k -module.

526 c) Soient $A^\dagger$ et $D^\dagger$ les k -modules duaux de A et D , $\{1_D^\dagger, d^\dagger\}$ la base duale de la base $\{1_D, d\}$ de D sur k (on a $1_D^\dagger = \delta$). Comme D est libre de rang fini sur k , l'application canonique

$$\text{Hom}_c(A, D) \longrightarrow \text{Hom}_k(D^\dagger, A^\dagger), \quad f \mapsto {}^t f$$

est bijective. D'un autre côté, ${}^t f$ est déterminé par les valeurs ${}^t f(1_D^*)$ et ${}^t f(d^*) = x$. La condition $G(\delta)(f) = 1$ équivaut à l'égalité ${}^t f(1_D^*) = \varepsilon_A$. On voit aisément d'autre part que f est compatible avec la multiplication si et seulement si l'on a (cf. 2.3) :

$$(*) \quad \delta_G(x) = \varphi_G(x \otimes 1 + 1 \otimes x).$$

Enfin, il est clair qu'une application linéaire continue $f : A \rightarrow D$, qui est compatible avec la multiplication et telle que $\delta \circ f = \varepsilon_A$, envoie l'élément unité de A sur celui de D . ⁽¹⁰⁷⁾ L'application $f \mapsto x$ nous permet donc d'identifier $\text{Lie}(G)$ à l'ensemble des « éléments primitifs » de $H(G)$ (i.e. les $x \in H(G)$ vérifiant la relation (*)). Si x et y sont deux tels éléments, on a

$$\begin{aligned} \delta_G(xy) &= \delta_G(x)\delta_G(y) = \varphi_G((x \otimes 1 + 1 \otimes x)(y \otimes 1 + 1 \otimes y)) \\ &= \varphi_G(xy \otimes 1 + x \otimes y + y \otimes x + 1 \otimes xy), \end{aligned}$$

d'où $\delta_G(xy - yx) = \varphi_G((xy - yx) \otimes 1 + 1 \otimes (xy - yx))$.

Ceci montre que le k -module $\text{Lie}(G)$ est identifié à une sous-algèbre de Lie de $H(G)$: nous dirons que $\text{Lie}(G)$ est l'algèbre de Lie de G . ⁽¹⁰⁸⁾

527 **2.6.1.** — Lorsque k est un anneau pseudocompact arbitraire et G un groupe formel sur k , nous appelons $\mathbf{O}_k$ -algèbre de Lie de G le foncteur $\mathbf{Lie}(G)$ qui associe à tout objet C de $\mathbf{Alf}_k$ la C -algèbre de Lie du C -groupe formel $G' = G \widehat{\otimes}_k C$: ⁽¹⁰⁹⁾ posons $A' = A \widehat{\otimes}_k C$, comme I_A est facteur direct de A , alors $I_{A'}$ égale $I_A \widehat{\otimes}_k C = I_A \widehat{\otimes}_A A'$,

⁽¹⁰⁷⁾ N.D.E. : En effet, $\delta \circ f = \varepsilon_A$ entraîne que $f(1) = 1 + \lambda d$, avec $\lambda \in k$, et alors $f(1) = f(1)^2 = 1 + 2\lambda d$ donne $\lambda = 0$.

⁽¹⁰⁸⁾ N.D.E. : En comparant avec VII_A 2.5, on voit que si K est un k -schéma en groupes de type fini et si G est le complété formel de K à l'origine (i.e. $\mathcal{A}(G)$ est le complété de l'anneau local $\mathcal{O}_{K,e}$ pour la topologie $\mathfrak{m}$ -adique, où $\mathfrak{m}$ est le noyau de l'augmentation $\varepsilon : \mathcal{O}_{K,e} \rightarrow k$) alors $H(G)$ s'identifie à l'algèbre des distributions $U(K)$, et $\text{Lie}(G)$ à $\text{Lie}(K)$. (La condition que K soit de type fini sur k est utilisée pour assurer que $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est un k -module de longueur finie, donc discret, de sorte que son dual topologique coïncide avec son dual ordinaire.) En particulier, lorsque G est un k -groupe formel fini (i.e. tel que $\mathcal{A}(G)$ soit un k -module fini), auquel cas G peut aussi être considéré comme le k -schéma en groupes $\text{Spec } \mathcal{A}(G)$, les deux définitions de $\text{Lie}(G)$ coïncident.

⁽¹⁰⁹⁾ N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

et puisque $\omega_{G/k} = I_A \widehat{\otimes}_A k$ et de même $\omega_{G'/C} = I_{A'} \widehat{\otimes}_{A'} C$, on obtient que $\omega_{G'/C} = \omega_{G/k} \widehat{\otimes}_A C$ et donc

$$\mathbf{Lie}(G)(C) = \mathrm{Hom}_c(\omega_{G/k} \widehat{\otimes}_A C, C) \quad \text{i.e.} \quad \mathbf{Lie}(G) = \mathbf{V}_k^f(\omega_{G/k})$$

(avec les notations de 1.2.3.B). Donc, d'après la proposition 1.2.3.E, $\mathbf{Lie}(G)$ est plate sur $\mathbf{O}_k$ si et seulement si $\omega_{G/k}$ est un k -module pseudocompact projectif.

2.6.2. — Réciproquement, toute algèbre de Lie $\mathbf{L}$ sur $\mathbf{O}_k$ définit un k -foncteur en groupes. Désignons en effet par $\mathbf{U}(\mathbf{L})$ le foncteur qui associe à tout objet C de $\mathbf{Alf}/_k$ l'algèbre enveloppante $U(\mathbf{L}(C))$ de la C -algèbre de Lie $\mathbf{L}(C)$. D'après VII_A, 3.2.2, $\mathbf{U}(\mathbf{L})$ est une bialgèbre sur $\mathbf{O}_k$ et détermine donc, d'après 2.2, un k -foncteur en groupes $\mathrm{Spf}^* \mathbf{U}(\mathbf{L})$ que nous noterons désormais $\mathcal{G}(\mathbf{L})$. Ainsi, $\mathcal{G}(\mathbf{L})(C)$ est le groupe des éléments $z \in U(\mathbf{L}(C))$ d'augmentation 1 et tels que $\Delta_{U(\mathbf{L}(C))}(z) = z \otimes z$.

De plus, lorsque $\mathbf{L}$ est plate sur $\mathbf{O}_k$, on a la proposition suivante.

Proposition. — ⁽¹¹⁰⁾ Soit $\mathbf{L}$ une $\mathbf{O}_k$ -algèbre de Lie plate.

(i) $\mathcal{G}(\mathbf{L})$ est un groupe formel topologiquement plat sur k , qui a $\mathbf{U}(\mathbf{L})$ pour $\mathbf{O}_k$ -bialgèbre.

(ii) $\mathcal{G}(\mathbf{L})$ est infinitésimal.

(iii) Pour tout objet C de $\mathbf{Alf}/_k$, $\mathbf{Lie}(\mathcal{G}(\mathbf{L}))(C)$ s'identifie à l'ensemble

$$\mathrm{Prim} U(\mathbf{L}(C)) = \{x \in U(\mathbf{L}(C)) \mid \varepsilon(x) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x\}$$

des éléments primitifs de $U(\mathbf{L}(C))$. En particulier, on a un morphisme naturel de $\mathbf{O}_k$ -algèbres de Lie $\tau_{\mathbf{L}} : \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{Lie}(\mathcal{G}(\mathbf{L}))$.

En effet, l'hypothèse que $\mathbf{L}$ soit plate sur $\mathbf{O}_k$ signifie que pour tout morphisme $C \rightarrow D$ de $\mathbf{Alf}/_k$, on a $\mathbf{L}(D) = \mathbf{L}(C) \otimes_C D$, et que pour chaque composante locale C' de C , $\mathbf{L}(C')$ est un C' -module libre. La première condition entraîne que $U(\mathbf{L}(D)) = U(\mathbf{L}(C)) \otimes D$ (d'après la propriété universelle du produit tensoriel et celle du foncteur $\mathbf{L} \mapsto U(\mathbf{L})$), et la seconde condition entraîne, d'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt (cf. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, I 2.7), que $U(\mathbf{L}(C'))$ est un C' -module libre. Donc la bialgèbre $\mathbf{U}(\mathbf{L})$ est plate sur $\mathbf{O}_k$.

Pour démontrer (ii) et (iii), on peut supposer que k est artinien. Posons alors $L = \mathbf{L}(k)$, $U = U(L)$, $U_0 = k \cdot 1_U$ et soit U^+ l'idéal bilatère de U engendré par l'image de L . Posons en outre, pour tout $n \geq 1$,

$$U_n = \{u \in U \mid \Delta_U(u) - u \otimes 1 \in U_{n-1} \otimes U^+\}.$$

D'après 1.3.6, il suffit de montrer que U est la réunion des U_n . Or, si l'on identifie L à son image canonique dans U , L est évidemment contenu dans U_1 . Si $x_1, \dots, x_n$ sont des éléments de L , on a donc $\Delta_U(x_1 \cdots x_n) = (x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_1) \cdots (x_n \otimes 1 + 1 \otimes x_n)$, ce qui montre, par récurrence sur n , que le produit $x_1 \cdots x_n$ appartient à U_n , donc que $U = \bigcup_n U_n$. Ceci prouve (ii). 528

⁽¹¹⁰⁾N.D.E. : On a mis en évidence les points (i) et (ii), et l'on a ajouté le point (iii), qui sera utile en 2.6.3 et 3.3.2.

D'autre part, soit $D = k[d]/(d^2)$ l'algèbre des nombres duaux sur k . Par hypothèse, on a $\mathbf{L}(D) \simeq \mathbf{L} \otimes D$, d'où $U(\mathbf{L}(D)) \simeq U \otimes D$, d'après les propriétés universelles du produit tensoriel et de l'algèbre enveloppante. Il en résulte que $\mathbf{Lie}(\mathcal{G}(\mathbf{L}))(k)$ s'identifie à l'ensemble des éléments $z = 1 + xd$ de $U \oplus Ud$ (où $x \in U$) tels que $\varepsilon(z) = 1$ et $\Delta(z) = z \otimes z$, ce qui équivaut à $\varepsilon(x) = 0$ et $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$, c.-à-d., à $x \in \text{Prim } U$. En particulier, l'application $\tau_L : x \mapsto 1 + dx$ est un morphisme de $\mathbf{O}_k$ -algèbres de Lie, de $\mathbf{L}$ vers $\mathbf{Lie}(\mathcal{G}(\mathbf{L}))$.

2.6.3. — Si $\mathbf{L}$ est une algèbre de Lie plate sur $\mathbf{O}_k$, le groupe formel $\mathcal{G}(\mathbf{L})$ peut être caractérisé par une propriété universelle. ⁽¹¹¹⁾ En effet, tout morphisme ϕ de $\mathcal{G}(\mathbf{L})$ dans un groupe formel G induit un morphisme $\mathbf{Lie}(\phi) : \mathbf{Lie}(\mathcal{G}(\mathbf{L})) \rightarrow \mathbf{Lie}(G)$; composant celui-ci avec le morphisme $\tau_L : \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{Lie}(\mathcal{G}(\mathbf{L}))$ (cf. 2.6.2), on obtient un morphisme $\phi' : \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{Lie}(G)$, et l'on a :

Proposition. — Si G est un k -groupe formel et $\mathbf{L}$ une $\mathbf{O}_k$ -algèbre de Lie plate, l'application $\phi \mapsto \phi'$ définie ci-dessus est une bijection

$$\text{Hom}_{\mathbf{Grf}/k}(\mathcal{G}(\mathbf{L}), G) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbf{Lie}}(\mathbf{L}, \mathbf{Lie}(G))$$

où le terme de droite désigne l'ensemble des morphismes de $\mathbf{O}_k$ -algèbres de Lie de $\mathbf{L}$ dans $\mathbf{Lie}(G)$.

On se ramène en effet tout de suite au cas où k est artinien. Posons $L = \mathbf{L}(k)$. D'après 2.3.1, $\text{Hom}_{\mathbf{Grf}/k}(\mathcal{G}(\mathbf{L}), G)$ est en bijection avec l'ensemble des morphismes d'algèbres unitaires $\phi : U(L) \rightarrow H(G)$ tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} U(L) & \xrightarrow{h} & H(G) \\ \Delta_{U(L)} \downarrow & & \searrow \delta_G \\ U(L) \otimes U(L) & \xrightarrow{h \otimes h} & H(G) \otimes H(G) \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \nearrow \varphi_G \\ H(G \times G) \end{array}$$

529 Or h est défini par sa restriction à L , qui est un morphisme d'algèbres de Lie de L dans l'algèbre de Lie sous-jacente à $H(G)$, et la commutativité du diagramme signifie que h applique L dans la partie de $H(G)$ formée des x tels que $\delta_G(x) = \varphi_G(x \otimes 1 + 1 \otimes x)$, qui n'est autre que $\mathbf{Lie}(G)$, cf. 2.6 c).

2.7. — Nous terminons ces généralités sur un énoncé qui remonte à S. Lie et qui nous servira au paragraphe 5.1. Un *monoïde formel sur k* est par définition un couple (M, m) formé d'une variété formelle M et d'un morphisme $m : M \times M \rightarrow M$ tel que $m(C)$ fasse de $M(C)$ un monoïde pour tout objet C de $\mathbf{AIf}/k$. ⁽¹¹²⁾ En particulier, la « section unité », qui associe à tout objet C l'élément unité de $M(C)$, définit une

⁽¹¹¹⁾ N.D.E. : On a modifié ce qui suit, en tirant profit de l'ajout fait dans 2.6.2.

⁽¹¹²⁾ N.D.E. : Ici et dans ce qui suit, on a écrit « monoïde » au lieu de « monoïde à élément unité » (on rappelle qu'un monoïde est par définition un ensemble muni d'une loi de composition associative et possédant un élément unité).

section ε_M de la projection canonique $M \rightarrow \mathrm{Spf}(k)$. Nous dirons que le monoïde formel M est *infinitésimal* si ε_M induit une bijection des ensembles sous-jacents.

Proposition. — *Tout k -monoïde formel M topologiquement plat et infinitésimal est un k -groupe formel.* ⁽¹¹³⁾

Nous devons montrer que $M(C)$ est un groupe pour tout objet C de $\mathbf{Aif}/_k$. On se ramène donc de suite au cas où k est artinien. Soit alors $U = H(M)$ la coalgèbre de M (1.3.5) ; la multiplication $m : M \times M \rightarrow M$ induit un morphisme de coalgèbres $m_U : U \otimes U \rightarrow U$, qui fait de U une algèbre associative sur k ; cette algèbre a pour élément unité l'image de l'élément unité de k par l'application de k dans U qui est induite par la section unité ε_M de M . De même, la projection $M \rightarrow \mathrm{Spf}(k)$ induit un homomorphisme ε_U de U dans k ; nous noterons U^+ le noyau de ε_U . 530

Nous devons montrer qu'il existe un antipodisme, c'est-à-dire un morphisme de coalgèbres $c_U : U \rightarrow U$ tel qu'on ait, pour tout $u \in U$:

$$(*) \quad (m_U \circ (c_n \otimes \mathrm{id}_U) \circ \Delta_U)(x) = \varepsilon_U(u) \cdot 1_U.$$

Soit (U_n) la filtration de U définie en 1.3.6, posons $U_n^+ = U^+ \cap U_n$. Comme M est infinitésimal, U^+ est la réunion des sous-modules U_n^+ . ⁽¹¹⁴⁾ On pose alors $c_0(1) = 1$ et $c_1(x) = -x$ si $x \in U_1^+$, i.e. si x est un élément primitif. Supposons $c_{n-1} : U_{n-1} \rightarrow U$ construite de façon à vérifier $(*)$ pour tout $x \in U_{n-1}$, et soit $x \in U_n^+$. D'après la démonstration du lemme 1.3.6.A, on a $\Delta_U(x) - x \otimes 1 \in U_{n-1} \otimes U^+$ (c'est ici qu'intervient l'hypothèse que U soit plate sur k), donc on peut écrire $\Delta_U(x) = x \otimes 1 + \sum_i y_i \otimes z_i$, avec $y_i \in U_{n-1}$; on pose alors $c_n(x) = -\sum_i c_{n-1}(y_i)z_i$. On obtient ainsi une application k -linéaire $c : U \rightarrow U$, qui est l'inverse à gauche de id_U pour la loi de monoïde sur $\mathrm{End}_k(U)$, définie par $f \cdot g = m_U \circ (f \otimes g) \circ \Delta_U$ (l'élément unité étant l'application $\eta : u \mapsto \varepsilon(u) \cdot 1_U$). Il en résulte que c est uniquement déterminé, et est aussi l'inverse à droite de id_U , i.e. on a aussi $m_U \circ (c_n \otimes \mathrm{id}_U) \circ \Delta_U = \eta$ (sans supposer U cocommutative).

2.8. Schémas en groupes unipotents sur un corps. — ⁽¹¹⁵⁾ Soit k un corps. « Rappelons » qu'un k -schéma en groupes G est dit *unipotent* s'il vérifie les deux conditions suivantes (cf. [DG70], §IV.2, Prop. 2.5) :

⁽¹¹³⁾ N.D.E. : D'après l'équivalence de catégories de 1.3.5.D, un monoïde dans la catégorie des k -variétés formelles topologiquement plates « est la même chose » qu'un monoïde dans la catégorie des $\mathbf{O}_k$ -coalgèbres cocommutatives plates, c.-à-d. une $\mathbf{O}_k$ -bigèbre cocommutative (au sens usuel, c.-à-d., pas nécessairement munie d'une antipode). De plus, d'après 1.3.6, l'hypothèse que M soit *infinitésimal* équivaut à dire que la bigèbre correspondante est *connexe*. Donc, si k est un anneau artinien, la proposition équivaut à dire que : *toute k -bigèbre cocommutative connexe, plate sur k , est une k -algèbre de Hopf, i.e. possède une antipode* (et l'hypothèse de cocommutativité est en fait superflue, cf. la démonstration).

⁽¹¹⁴⁾ N.D.E. : L'original continuait ainsi : « on montre alors facilement, par récurrence sur n , qu'il existe une et une seule application linéaire $c_n : U_n \rightarrow U_n$ telle que l'application composée $m_U \circ (c_n \otimes \mathrm{id}_U) \circ \Delta_U : U_n^+ \rightarrow U$ soit nulle » ; on a détaillé la démonstration, qui repose sur celle du lemme 1.3.6.A.

⁽¹¹⁵⁾ N.D.E. : On a ajouté cette sous-section.

(a) G est affine.

(b) Tout $\mathcal{O}(G)$ -comodule simple est trivial, c.-à-d., si $\rho : V \rightarrow V \otimes_k \mathcal{O}(G)$ est une structure de $\mathcal{O}(G)$ -comodule sur un k -espace vectoriel $V \neq 0$, et s'il n'existe pas de sous-espace non nul $W \neq V$ tel que $\rho(W) \subset W \otimes_k \mathcal{O}(G)$, alors V est de dimension 1 et $\rho(v) = v \otimes 1$ pour tout $v \in V$.

D'après *loc. cit.*, lorsque G est de type fini sur k , ceci équivaut à la définition donnée dans l'Exp. XVII, § 1, à savoir que G possède une suite de composition finie dont les quotients successifs sont isomorphes à des k -sous-groupes de $\mathbb{G}_{a,k}$.

Or, pour tout k -schéma en groupes affine G , la comultiplication de $\mathcal{O}(G)$ munit le k -module pseudocompact $A = \mathcal{O}(G)^*$ d'une structure de k -algèbre profinie, non nécessairement commutative, l'élément unité 1_A étant l'augmentation $\varepsilon : \mathcal{O}(G) \rightarrow k$. D'autre part, soit $I = \{f \in A \mid f(1_{\mathcal{O}(G)}) = 0\}$; c'est un idéal bilatère de A , et l'on a $A = k \cdot 1_A \oplus I$, cf. 1.3.6.

Soit V un sous-espace de A de codimension finie, considérons l'application k -bilinéaire continue $\varphi : A \times A \rightarrow A/V$, $(a, b) \mapsto ab + V$; d'après le lemme 0.3.1, il existe deux sous-espaces L_1, L_2 de codimension finie dans A tels que V contienne AL_2 et L_1A , alors $L = L_1 \cap L_2$ est un sous-espace de codimension finie de A , et V contient l'idéal bilatère ALA , qui est de codimension finie. Ceci montre que les idéaux bilatères de codimension finie forment une base de voisinages de 0. On en déduit qu'un $\mathcal{O}(G)$ -comodule « est la même chose » qu'un A -module continu, i.e. un A -module V tel que l'application $A \times V \rightarrow V$ soit continue, V étant muni de la topologie discrète. Un tel module est évidemment réunion de sous-modules V_i de dimension finie sur k , chacun étant un module sur une k -algèbre quotient A_i de A , de dimension finie sur k . Il en résulte que si M est un module continu simple, il est de dimension finie sur k , et est un module fidèle simple sur la k -algèbre de dimension finie $A/\text{Ann}(M)$; cette dernière est donc une k -algèbre de dimension finie simple, i.e. $\text{Ann}(M)$ est un idéal maximal ouvert de A . Réciproquement, soit P un idéal premier ⁽¹¹⁶⁾ ouvert de A , alors A/P est une k -algèbre de dimension finie dans laquelle l'idéal (0) est premier, donc c'est une k -algèbre de dimension finie simple, donc il existe à isomorphisme près un unique A -module continu simple dont l'annulateur est P . Il en résulte que l'application $M \mapsto \text{Ann}(M)$ définit une bijection entre les classes d'isomorphisme de A -modules continus simples et les idéaux premiers ouverts de A . En particulier, on appelle « module trivial » le A -module A/I , qui est de dimension 1 sur k ; il correspond au $\mathcal{O}(G)$ -comodule V de dimension 1 trivial, i.e. tel que $\rho(v) = v \otimes 1_{\mathcal{O}(G)}$ pour tout $v \in V$. On obtient donc la proposition suivante :

Proposition 2.8.1. — Soient k un corps, G un k -schéma en groupes affine et $A = \mathcal{O}(G)^*$.

⁽¹¹⁶⁾N.D.E. : On rappelle qu'un idéal bilatère P d'un anneau A est dit premier si dans A/P le produit de deux idéaux bilatères non nuls est non nul.

(i) Alors G est unipotent si et seulement si I est l'unique idéal premier ouvert de A . ⁽¹¹⁷⁾

(ii) En particulier, si G est commutatif, de sorte que $\mathcal{O}(G) = H(D(G))$, où $D(G) = \text{Spf}(A)$ désigne le dual de Cartier de G , alors G est unipotent si et seulement si $D(G)$ est infinitésimal.

2.9. Algèbres de Hopf cocommutatives pointées sur un corps. — ⁽¹¹⁸⁾ Soient k un corps, C une k -cogèbre, A l'algèbre C^* munie de la structure de k -algèbre profinie, non nécessairement commutative, décrite en 2.8 ; d'après 0.2.2, on a $C = A^\dagger = \text{Hom}_c(A, k)$. On en déduit que l'application $D \mapsto D^\perp = \{f \in A \mid f(D) = 0\}$ est une bijection de l'ensemble des sous-cogèbres de C sur celui des idéaux bilatères (dans la suite, on dira simplement « idéaux ») fermés de A ; la bijection réciproque étant donnée par $I \mapsto I^\perp = \{x \in C = A^\dagger \mid x(I) = 0\}$. Comme tout idéal fermé maximal est un idéal maximal ouvert (cf. 0.2.1), toute sous-cogèbre contient donc une sous-cogèbre simple, nécessairement de dimension finie.

Rappelons qu'une sous-cogèbre D de C est dite *irréductible* si elle ne contient qu'une seule sous-cogèbre simple S_0 , ce qui équivaut à dire que $\mathfrak{m}_0 = S_0^\perp$ est l'unique idéal maximal ouvert contenant $D^\perp$, i.e. que $D^\perp + \mathfrak{m} = A$ pour tout idéal maximal ouvert $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_0$. C'est en particulier le cas si $D = S_0$. Alors la somme Σ_0 de toutes les sous-cogèbres irréductibles C_i contenant S_0 est évidemment une sous-cogèbre, et elle est irréductible car, pour tout $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_0$, on a, d'après 0.2.D :

$$\mathfrak{m} + \bigcap_i C_i^\perp = \bigcap_i (\mathfrak{m} + C_i^\perp) = A.$$

On dit que Σ_0 est la *composante irréductible* de C correspondant à C_0 .

D'autre part, on dit que C est *pointée* si toute sous- k -cogèbre simple de C est de dimension 1 ; ceci équivaut à dire que pour tout idéal maximal ouvert $\mathfrak{m}$ de A , on a $A/\mathfrak{m} = k$. Rappelons aussi que C est dite *connexe* si elle est irréductible et pointée. (Remarquons au passage que si C est une bigèbre, elle est connexe si et seulement si elle est irréductible, puisque $k \cdot 1_C$ est une sous-cogèbre simple.)

Supposons désormais que C soit *cocommutative*. Alors A est commutative et est donc le produit de ses composantes locales $A_{\mathfrak{m}}$, pour $\mathfrak{m} \in \Upsilon(A)$ (cf. 0.1.1) ; notons $S_{\mathfrak{m}}$ la sous-cogèbre simple $\mathfrak{m}^\perp \simeq (A/\mathfrak{m})^*$ et $\Sigma_{\mathfrak{m}}$ sa composante irréductible. On peut décrire $\Sigma_{\mathfrak{m}}$ comme suit. Notons $J_{\mathfrak{m}}$ le noyau de la projection $A \rightarrow A_{\mathfrak{m}}$, il est contenu dans $\mathfrak{m}$ et c'est le plus petit idéal fermé I de $\mathfrak{m}$ tel que $I + \mathfrak{m}' = A$ pour tout $\mathfrak{m}' \neq \mathfrak{m}$. En effet, si I a cette propriété, alors I contient $A_{\mathfrak{m}'}$ pour tout $\mathfrak{m}' \neq \mathfrak{m}$, donc contient $J_{\mathfrak{m}}$. Comme $A = J_{\mathfrak{m}} \oplus A_{\mathfrak{m}}$, il en résulte que $\Sigma_{\mathfrak{m}} = J_{\mathfrak{m}}^\perp$ s'identifie à $A_{\mathfrak{m}}^\dagger$. On peut maintenant démontrer la :

Proposition 2.9.1. — *Soit k un corps.*

⁽¹¹⁷⁾N.D.E. : Ceci équivaut aussi à dire que $k \cdot 1_{\mathcal{O}(G)}$ est l'unique k -sous-cogèbre simple de $\mathcal{O}(G)$; voir par exemple [Ab80], 3.1.4 ; signalons au passage une coquille dans *loc. cit.*, p. 130, ligne 4 : $M \simeq C^*/\text{ann } M$ est à remplacer par $C^*/\text{ann } M \simeq \text{End}_k(M)$.

⁽¹¹⁸⁾N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe, pour traduire dans le langage des algèbres de Hopf cocommutatives la proposition 2.5.2, ainsi que la variante signalée dans la N.D.E. (100).

(i) Soit G un k -groupe formel tel que tous les corps résiduels de G égalent k . Alors G_e est le k -groupe constant M_k , où $M = G(k) = \{x \in H(G) \mid \varepsilon(x) = 1 \text{ et } \Delta(x) = x \otimes x\}$, et $H(G)$ est le produit semi-direct de $H(G_0)$ par kM (cf. 2.4.B).

(ii) De façon équivalente : soit H une k -algèbre de Hopf cocommutative pointée. Alors H est le produit semi-direct de la composante irréductible H_0 de l'élément unité 1_H par kM , où $M = \{x \in H \mid \varepsilon(x) = 1 \text{ et } \Delta(x) = x \otimes x\}$.

Démontrons (i). Comme tous les corps résiduels de G égalent k , alors la projection $\pi : G \rightarrow G_e$ admet la section $s : G_e \rightarrow G$ définie par $\mathcal{O}_{G,g} \rightarrow \kappa(g) = k$, pour tout $g \in G$; de plus, pour tout $g, h \in G$, $\mathcal{O}_{G,g} \hat{\otimes}_k \mathcal{O}_{G,h}$ est local de corps résiduel k , et l'on obtient donc que $s \times s$ est une section de la projection $\pi \times \pi : G \times G \rightarrow (G \times G)_e = G_e \times G_e$. Comme π est un morphisme de groupes, il en résulte que $\pi \circ m_G \circ (s \times s) = m_{G_e} = \pi \circ s \circ m_{G_e}$, et comme π est un épimorphisme ceci entraîne que s est un morphisme de groupes. On obtient donc que $G = G_0 \rtimes G_e$, et donc $H(G)$ est le produit semi-direct de $H(G_0)$ par $H(G_e)$. De plus, comme tous les corps résiduels de G égalent k , alors $H(G_e)$ est l'algèbre de groupe kM , où $M = G_e(k)$ (cf. 2.5.A). Enfin, comme G_0 est infinitésimal, le morphisme $G(k) \rightarrow G_e(k)$ est injectif; il est donc bijectif (puisqu'il admet une section), donc $M = G(k)$. Le point (i) en découle.

Pour prouver (ii), il reste juste à voir que H_0 égale $H(G_0)$. Or l'élément unité 1_H de H n'est autre que l'augmentation $\varepsilon_A : A \rightarrow k$, qui est la section unité de $G(k)$, donc la composante locale de $\mathcal{A}(G)$ correspondant à H_0 n'est autre que $\mathcal{A}(G_0)$ et donc, d'après ce qu'on a vu plus haut, on a $H_0 = \mathcal{A}(G_0)^\dagger = H(G_0)$. Ceci prouve la proposition.

Remarques 2.9.2. — (a) La proposition ci-dessus, contenue implicitement dans 2.5.2, a été obtenue indépendamment par B. Kostant (cf. [Sw69], Preface). Combiné avec le théorème de Cartier 3.3 plus bas (cf. [Ca62], § 12, Th. 3), aussi obtenu par Kostant (cf. [Sw69], *loc. cit.*), ce résultat est souvent appelé « théorème de Cartier-Gabriel-Kostant ».

(b) Sous la forme (ii), 2.9.1 a été étendu par R. G. Heyneman et M. E. Sweedler au cas où l'on suppose que H est pointée et somme directe de ses composantes irréductibles (mais n'est pas nécessairement cocommutative), cf. [HS69], Th. 3.5.8.

3. Phénomènes particuliers à la caractéristique 0

531

Dans toute la Section 3, nous supposons que l'anneau pseudocompact k contient le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$.

3.1. Lemme. — Soient C une $\mathbb{Q}$ -algèbre commutative unitaire, L une algèbre de Lie sur C dont le C -module sous-jacent est libre. Alors l'application canonique $L \rightarrow U(L)$ est un isomorphisme de L sur l'ensemble des éléments primitifs de $U(L)$.

En effet, identifions L à son image canonique dans $U(L)$; soient I un ensemble totalement ordonné et $(x_i)_{i \in I}$ une base de L indexée par I ; désignons par $\mathbb{N}^{(I)}$ l'ensemble des familles $n = (n_i)_{i \in I}$ d'entiers naturels telles que n_i soit nul sauf peut-être pour

un nombre fini d'indices $i_1 < i_2 < \dots < i_s$ (ces indices dépendent de n) ; posons enfin $x^n = x_{i_1}^{n_{i_1}} x_{i_2}^{n_{i_2}} \dots x_{i_s}^{n_{i_s}}$ et $n! = (n_{i_1}!)(n_{i_2}!) \dots (n_{i_s}!)$.

On sait alors que les x^n forment une base de $U(L)$ (théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt) et on voit facilement qu'on a

$$(*) \quad \Delta_{U(L)} \left(\frac{x^n}{n!} \right) = \sum \frac{x^m}{m!} \otimes \frac{x^{n-m}}{(n-m)!}$$

la somme étant étendue à tous les éléments m de $\mathbb{N}^{(I)}$ tels que $0 \leq m \leq n$ (i.e. tels que $0 \leq m_i \leq n_i$ pour tout i). Il s'ensuit évidemment qu'on a $\Delta_{U(L)}(u) = u \otimes 1 + 1 \otimes u$ si et seulement si u est une combinaison linéaire des x_i .

3.2. — Supposons maintenant C *artinien*, de radical $\mathfrak{r}$. Pour toute C -algèbre U (associative, unitaire), l'idéal $\mathfrak{r}U$ est donc formé d'éléments nilpotents ; si x appartient à $\mathfrak{r}U$, nous poserons 532

$$\exp_U x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \quad (119)$$

On obtient ainsi une bijection de $\mathfrak{r}U$ sur $1 + \mathfrak{r}U$; la bijection réciproque applique un élément $1 + y$ de $1 + \mathfrak{r}U$ sur

$$\log_U(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \dots$$

De plus, il est clair que l'application $\exp_U$ est fonctorielle en U . ⁽¹²⁰⁾

L'anneau C étant toujours artinien, supposons U muni d'une structure de bialgèbre sur C (cf. 2.2). Pour tout élément primitif x de $\mathfrak{r}U$ (cf. VII_A 3.2.3), on a alors

$$\begin{aligned} \Delta_U(\exp_U x) &= \exp_{U \otimes U}(\Delta_U(x)) \\ &= \exp_{U \otimes U}(x \otimes 1 + 1 \otimes x) \\ &= \exp_{U \otimes U}(x \otimes 1) \cdot \exp_{U \otimes U}(1 \otimes x) \\ &= ((\exp_U x) \otimes 1) \cdot (1 \otimes (\exp_U x)) \\ &= (\exp_U x) \otimes (\exp_U x). \end{aligned}$$

On voit donc que la bijection $\exp_U$ transforme un élément primitif de $\mathfrak{r}U$ en un élément z de $1 + \mathfrak{r}U$ tel que $\Delta_U(z) = z \otimes z$. Réciproquement, si z vérifie ces conditions alors, posant $x = \log_U(z)$, le calcul précédent montre que $\exp_{U \otimes U}(x \otimes 1 + 1 \otimes x)$ égale $z \otimes z = \Delta(\exp_U x) = \exp_{U \otimes U}(\Delta_U(x))$, d'où $x \otimes 1 + 1 \otimes x = \Delta_U(x)$. ⁽¹²¹⁾ Notons de plus que si $z \in 1 + \mathfrak{r}U$ vérifie $\Delta_U(z) = z \otimes z$, alors $\varepsilon_U(z)^2 = \varepsilon_U(z)$ et comme $\varepsilon_U(z)$ est inversible (puisque z l'est, $\mathfrak{r}$ étant nilpotent), il en résulte que $\varepsilon_U(z) = 1$.

Considérons en particulier une algèbre de Lie L *plate* sur C , prenons pour U l'algèbre enveloppante $U(L)$ de L sur C et identifions L à son image canonique dans U . D'après le lemme 3.1, L est donc l'ensemble des éléments primitifs de U (en effet L est un produit de modules libres sur les composantes locales de C). Considérons alors 533

⁽¹¹⁹⁾ N.D.E. : Si $x, x' \in \mathfrak{r}U$ *commutent*, on a donc $\exp_U(x + x') = (\exp_U x)(\exp_U x')$.

⁽¹²⁰⁾ N.D.E. : c.-à-d., pour tout morphisme $\phi : U \rightarrow V$ de C -algèbres, on a $\phi(\exp_U(x)) = \exp_V \phi(x)$.

⁽¹²¹⁾ N.D.E. : On a détaillé ce qui précède et ajouté la phrase qui suit.

le C-groupe formel $\mathcal{G}(\mathbf{L}) = \mathrm{Spf}^* \mathbf{U}(\mathbf{L})$, qui a $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{L})$ pour bialgèbre covariante (cf. 2.6.2). Soient $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de C et $\overline{C} = C/\mathfrak{m}$. Comme $\mathcal{G}(\mathbf{L})$ est infinitésimal (*loc. cit.*), l'élément unité de $\overline{\mathbf{U}} = \mathbf{U} \otimes_C \overline{C}$ est le seul élément $\overline{z}$ de $\overline{\mathbf{U}}$ tel que ⁽¹²²⁾ $\varepsilon_{\overline{\mathbf{U}}}(\overline{z}) = 1$ et $\Delta_{\overline{\mathbf{U}}}(\overline{z}) = \overline{z} \otimes \overline{z}$. Il s'ensuit que les éléments z de $\mathbf{U}$ tels que $\varepsilon_{\mathbf{U}}(z) = 1$ et $\Delta_{\mathbf{U}}(z) = z \otimes z$ appartiennent nécessairement à $1 + \mathfrak{r}\mathbf{U}$.

Enfin, comme $\mathbf{L} \cap \mathfrak{r}\mathbf{U}$ s'identifie à $\mathfrak{r}\mathbf{L} = \mathbf{L} \otimes_C \mathfrak{r}$, on voit finalement que : $\exp_{\mathbf{U}}$ définit une bijection de $\mathbf{L} \otimes_C \mathfrak{r}$ sur le groupe $\mathcal{G}(\mathbf{L})(C)$. Nous résumons :

Proposition. — Soient k un anneau pseudocompact contenant $\mathbb{Q}$ et $\mathbf{L}$ une $\mathbf{O}_k$ -algèbre de Lie plate.

(i) Pour tout objet C de $\mathbf{A} \mathbf{f}_{/k}$, notons $\mathfrak{r}(C)$ son radical ; alors l'application

$$\exp_{\mathbf{U}(\mathbf{L}(C))} : \mathbf{L}(C) \otimes_C \mathfrak{r}(C) \longrightarrow \mathcal{G}(\mathbf{L})(C)$$

est bijective et fonctorielle en C et $\mathbf{L}$.

(ii) Le morphisme naturel $\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{Lie}(\mathcal{G}(\mathbf{L}))$ (cf. 2.6.2) est un isomorphisme de $\mathbf{O}_k$ -algèbres de Lie. ⁽¹²³⁾

3.2.1. — La bijection $\exp_{\mathbf{U}(\mathbf{L}(C))}$ permet de définir par transport de structure une loi de groupe sur l'ensemble $\mathbf{L}(C) \otimes_C \mathfrak{r}(C)$ (qu'on identifie à une partie de $\mathbf{U}(\mathbf{L}(C))$ comme en 3.2). Si x et y sont deux éléments de $\mathbf{L}(C) \otimes_C \mathfrak{r}(C)$, cette loi est telle que

$$\begin{aligned} x \cdot y &= \log((\exp x)(\exp y)) = \log\left(1 + \sum_{p+q>0} \frac{x^p y^q}{p! q!}\right) = \\ &= \sum_{m \geq 1} \sum_{p_i+q_i>0} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \frac{x^{p_1}}{p_1!} \frac{y^{q_1}}{q_1!} \cdots \frac{x^{p_m}}{p_m!} \frac{y^{q_m}}{q_m!} = \sum_{\ell \geq 1} P_{\ell}(x, y) \end{aligned}$$

534 où $P_{\ell}(x, y)$ désigne la somme des monômes de degré total ℓ en x et y . On a par exemple :

$$P_1(x, y) = x + y$$

$$P_2(x, y) = \underbrace{\frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2}}_{m=1} - \underbrace{\frac{1}{2}(x^2 + xy + yx + y^2)}_{m=2} = \frac{1}{2}(xy - yx) = \frac{1}{2}[x, y]$$

et $P_3(x, y)$ est la somme des trois termes suivants :

$$\begin{aligned} &\underbrace{\frac{x^3}{6} + \frac{x^2 y}{2} + \frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{6}}_{m=1} - \underbrace{\frac{1}{2}\left(x^3 + \frac{3}{2}x^2 y + \frac{1}{2}yx^2 + xyx + yxy + \frac{1}{2}y^2 x + \frac{3}{2}xy^2 + y^3\right)}_{m=2} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{3}(x^3 + x^2 y + yx^2 + xyx + yxy + y^2 x + xy^2 + y^3)}_{m=3} \end{aligned}$$

⁽¹²²⁾N.D.E. : On a ajouté la condition $\varepsilon_{\overline{\mathbf{U}}}(\overline{z}) = 1$, omise dans l'original.

⁽¹²³⁾N.D.E. : On a ajouté le point (ii), conséquence immédiate de 3.1.

d'où $P_3(x, y) = \frac{1}{12}(x^2y + yx^2 - 2xyx - 2yxy + y^2x + xy^2) = \frac{1}{12}([y, x], x) + [y, [y, x]]$.

On peut montrer plus généralement qu'on a la *formule de Campbell-Hausdorff* :
(124)

$$P_\ell(x, y) = \sum_{m=1}^{\ell} \frac{(-1)^{m-1}}{m \cdot \ell} \sum_{\substack{p_1, \dots, p_m \\ q_1, \dots, q_{m-1}}} \left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{(\operatorname{ad} x)^{p_i}}{p_i!} \frac{(\operatorname{ad} y)^{q_i}}{q_i!} \right) \frac{(\operatorname{ad} x)^{p_m}}{p_m!}(y) \\ + \sum_{m=1}^{\ell} \frac{(-1)^{m-1}}{m \cdot \ell} \sum_{\substack{p_1, \dots, p_{m-1} \\ q_1, \dots, q_{m-1}}} \left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{(\operatorname{ad} x)^{p_i}}{p_i!} \frac{(\operatorname{ad} y)^{q_i}}{q_i!} \right) (x)$$

où les $p_j, q_i \in \mathbb{N}$ vérifient $p_i + q_i \geq 1$ pour $i = 1, \dots, m-1$ et $p_m + \sum_{i=1}^{m-1} (p_i + q_i) = \ell - 1$ (i.e. dans les sommes ci-dessus, chaque « monôme de Lie » non nul est de degré total ℓ) ; pour une démonstration, voir N. Jacobson, *Lie Algebras* (Interscience, 1962), § V.5, ou [BLie], II § 6.4, Th. 2.

3.3. — Si G est un k -groupe formel d'algèbre affine A , rappelons qu'on note I_A l'idéal d'augmentation de A et $\omega_{G/k}$ le k -module pseudocompact $I_A/\overline{I_A^2} \simeq I_A \widehat{\otimes}_A k$.

Théorème (Cartier). — Soient k un anneau pseudocompact ⁽¹²⁵⁾ contenant $\mathbb{Q}$ et G un k -groupe formel. Les assertions suivantes sont équivalentes : 535

(i) Il existe une $\mathbf{O}_k$ -algèbre de Lie plate $\mathbf{L}$ telle que G soit isomorphe à $\mathcal{G}(\mathbf{L})$ (et dans ce cas $\mathbf{L} = \mathbf{Lie}(G)$ d'après 3.2).

(ii) Il existe un k -module pseudocompact projectif ω tel que la variété formelle sous-jacente à G soit isomorphe à la variété formelle $\mathbb{V}_k^{f,0}(\omega)$ (cf. 1.2.5) d'algèbre affine $k[[\omega]]$ (et dans ce cas $\omega \simeq \omega_{G/k}$).

(iii) G est infinitésimal et $\omega_{G/k}$ est un k -module pseudocompact projectif.

(iv) G est infinitésimal et topologiquement plat sur k .

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Soit $\omega = \Gamma^*(\mathbf{L})$ le k -module pseudocompact dual de $\mathbf{L}$ (cf. 1.2.3.D). Pour tout objet C de $\mathbf{A}lf_k$, nous devons exhiber un isomorphisme de $\mathbb{V}_k^{f,0}(\omega)(C)$ sur $\mathcal{G}(\mathbf{L})(C)$ qui soit fonctoriel en C . D'après 1.2.5, $\mathbb{V}_k^{f,0}(\omega)(C)$ s'identifie à l'ensemble $\operatorname{Hom}_c(\omega, \mathfrak{r}(C))$ des applications k -linéaires continues de ω dans le radical de C . Cet ensemble est naturellement isomorphe à l'ensemble $\operatorname{Hom}_c(\omega \widehat{\otimes}_k C, \mathfrak{r}(C))$ des applications C -linéaires continues de $\omega \widehat{\otimes}_k C$ dans $\mathfrak{r}(C)$; enfin, comme $\omega \widehat{\otimes}_k C$ est un C -module pseudocompact projectif, l'application canonique

$$(\omega \widehat{\otimes}_k C)^\dagger \otimes_C \mathfrak{r}(C) \longrightarrow \operatorname{Hom}_c(\omega \widehat{\otimes}_k C, \mathfrak{r}(C))$$

est bijective (cf. 0.3.6.A). Comme, d'après 1.2.3.E, $\mathbf{L}(C)$ s'identifie à $\mathbf{V}_k^f(\Gamma^*(\mathbf{L}))(C) = (\omega \widehat{\otimes}_k C)^\dagger$, on obtient que $\mathbb{V}_k^{f,0}(\omega)(C)$ est canoniquement isomorphe à $\mathbf{L}(C) \otimes_C \mathfrak{r}(C)$, lequel est canoniquement isomorphe à $\mathcal{G}(\mathbf{L})(C)$ d'après la proposition 3.2. Ceci prouve 536

⁽¹²⁴⁾N.D.E. : On a corrigé la formule donnée, qui était erronée, et ajouté la référence [BLie].

⁽¹²⁵⁾N.D.E. : On a supprimé l'hypothèse que k soit *local* (la démonstration se ramène à ce cas).

l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Soient ω un objet projectif de $\mathbf{PC}(k)$ et h un isomorphisme de $k[[\omega]]$ sur l'algèbre affine A de G . Composant h avec l'augmentation $\varepsilon_A : A \rightarrow k$, on obtient un homomorphisme $\varepsilon_A \circ h : k[[\omega]] \rightarrow k$, qui est déterminé par sa restriction λ à ω ; celle-ci envoie ω dans le radical $\mathfrak{r}$ de k . Donc l'application $x \mapsto x - \lambda(x)$, de ω dans le radical de $k[[\omega]]$, se prolonge d'après la propriété universelle de $k[[\omega]]$ (cf. 1.2.5) en un endomorphisme ℓ_λ de $k[[\omega]]$. Les égalités $\ell_\lambda \circ \ell_{-\lambda} = \ell_{-\lambda} \circ \ell_\lambda = \text{id}$ montrent que ℓ_λ est un automorphisme de $k[[\omega]]$. Par conséquent, $h \circ \ell_\lambda$ est, comme h , un isomorphisme de $k[[\omega]]$ sur A et de plus $\varepsilon_A \circ h \circ \ell_\lambda$ applique ω sur 0. Quitte à remplacer h par $h \circ \ell_\lambda$, on peut donc supposer que $\varepsilon_A \circ h$ s'annule sur l'idéal fermé I de $k[[\omega]]$ qui est engendré par ω . Dans ce cas, h induit un isomorphisme de $I/\overline{I^2}$ sur $I_A/\overline{I_A^2}$; comme $I/\overline{I^2} \simeq \omega$, il en résulte que $\omega_{G/k} = I_A/\overline{I_A^2}$ est isomorphe à ω , donc projectif. Il est clair d'autre part que $\mathbb{V}_k^{f,0}(\omega)$ est infinitésimal, de même que G .

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Supposons que G soit infinitésimal et que $\omega_{G/k}$ soit projectif. Soit $\mathbf{L}$ la $\mathbf{O}_k$ -algèbre de Lie de G ; le $\mathbf{O}_k$ -module sous-jacent est $\mathbf{V}_k^f(\omega_{G/k})$, d'après 2.6.1. Par conséquent, $\mathbf{L}$ est plate sur $\mathbf{O}_k$, et $\Gamma^*(\mathbf{L}) \simeq \omega_{G/k}$, d'après la proposition 1.2.3.E. Donc, d'après la démonstration de (i) $\Rightarrow$ (ii), l'algèbre affine du k -groupe formel $\mathcal{G}(\mathbf{L})$ s'identifie à $k[[\omega_{G/k}]]$. D'autre part, d'après 2.6.3, le morphisme identique de $\mathbf{L}$ est associé canoniquement à un morphisme de groupes formels $\mathcal{G}(\mathbf{L}) \rightarrow G$, donc à un morphisme continu de k -algèbres

$$\phi : A \longrightarrow k[[\omega_{G/k}]].$$

Soit I l'idéal fermé de $k[[\omega_{G/k}]]$ engendré par $\omega_{G/k}$, filtrons $k[[\omega_{G/k}]]$ (resp. A) par les adhérences des idéaux I^n (resp. I_A^n). Il s'agit de montrer que ϕ , qui induit par définition l'identité sur $\omega_{G/k} = I_A/\overline{I_A^2} = I/\overline{I^2}$, est un isomorphisme.

537 Comme $\omega_{G/k}$ est un objet projectif de $\mathbf{PC}(k)$, il existe une section τ de la projection canonique $I_A \rightarrow \omega_{G/k}$. D'après la propriété universelle de $k[[\omega_{G/k}]]$ (cf. 1.2.5), τ définit un morphisme continu d'algèbres

$$\psi : k[[\omega_{G/k}]] \longrightarrow A$$

et $\phi \circ \psi$ induit l'application identique sur $\omega_{G/k}$, donc aussi sur le gradué associé à $k[[\omega_{G/k}]]$. Il en résulte que $\phi \circ \psi$ est un isomorphisme, d'après [CA], § V.7, Lemme 1. (126)

De plus, ψ induit un isomorphisme de $I/\overline{I^2}$ sur $I_A/\overline{I_A^2}$, donc une *surjection* des gradués associés à $k[[\omega_{G/k}]]$ et A . D'autre part, comme G est radiciel, I_A est contenu dans le radical de A , de sorte que l'intersection des $\overline{I_A^n}$ est nulle. Donc, d'après *loc. cit.*, ψ est surjectif. Alors, comme $\phi \circ \psi$ est un isomorphisme et ψ une surjection, ψ et ϕ sont des isomorphismes. Ceci prouve que (iii) $\Rightarrow$ (i).

Notons enfin qu'il est clair que (i) ou (ii) entraînent (iv), de sorte qu'il reste à prouver l'implication (iv) $\Rightarrow$ (ii). Pour cela, on peut supposer k local, de corps résiduel

(126) N.D.E. : cf. 5.1.5 plus loin; voir aussi [BAC], III, § 2.8, Th. 1 et corollaires. D'autre part, on a détaillé l'original dans ce qui suit.

k_0 . Posons alors $G_0 = G \widehat{\otimes}_k k_0$, $\omega = \omega_{G/k}$, $\omega_0 = \omega \widehat{\otimes}_k k_0$, etc. ⁽¹²⁷⁾ Comme k_0 est un corps, le k_0 -module pseudocompact ω_0 possède une pseudobase $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$; notant ω' le k -module topologiquement libre produit de copies k_λ de k , pour $\lambda \in \Lambda$, et relevant chaque y_λ en un élément x_λ de ω , on obtient une application k -linéaire continue $f : \omega' \rightarrow \omega$ telle que $f_0 = f \widehat{\otimes}_k k_0$ soit inversible. ⁽¹²⁸⁾ Comme ω' est un k -module pseudocompact projectif, f se relève en une application k -linéaire continue $g : \omega' \rightarrow I_A$ telle que $\pi \circ g = f$, où π est la projection $I_A \rightarrow \omega$. D'après la propriété universelle de $k[[\omega']]$ (cf. 1.2.5), g induit un morphisme d'algèbres topologiques $\phi : k[[\omega']] \rightarrow A$.

538

Or $\omega' \widehat{\otimes}_k k_0$ s'identifie à $\omega \widehat{\otimes}_k k_0 = \omega_{G_0/k_0}$ et donc $k[[\omega']] \widehat{\otimes}_k k_0$ s'identifie à $k_0[[\omega_{G_0/k_0}]]$. Comme les hypothèses (iii) sont vérifiées pour k_0 et G_0 , la démonstration de (iii) $\Rightarrow$ (i) montre que $\phi_0 = \phi \widehat{\otimes}_k k_0$ est inversible. Comme, d'autre part, $k[[\omega']]$ et A sont des k -modules pseudocompacts projectifs, alors ϕ est inversible d'après 0.3.4. (En particulier, notant I l'idéal d'augmentation de $k[[\omega']]$, ϕ induit un isomorphisme de $\omega' = I/\overline{I^2}$ sur $I_A/\overline{I_A^2} = \omega$.)

3.3.1. Corollaire. — Soient S un schéma localement noethérien sur $\mathbb{Q}$ et G un S -schéma en groupes plat et localement de type fini. ⁽¹²⁹⁾ Si $\omega_{G/S}$ est un $\mathcal{O}_S$ -module localement libre, G est lisse sur S en tout point de la section unité.

En effet, soient x un point de la section unité, s son image dans S , $\mathcal{O}_x$ et $\mathcal{O}_s$ les algèbres locales de x et s . ⁽¹³⁰⁾ Comme, par hypothèse, $\mathcal{O}_s$ et $\mathcal{O}_x$ sont des anneaux locaux *noethériens*, alors la topologie $\mathfrak{m}$ -adique sur chacun de ces anneaux coïncide avec la topologie « pseudocompacte » définie par les idéaux de codimension finie. Notons alors $\widehat{\mathcal{O}}_x$ et $\widehat{\mathcal{O}}_s$ les complétés pour cette topologie. D'après EGA IV₄, 17.5.3, G est lisse sur S au point x si et seulement si $\widehat{\mathcal{O}}_x$ est formellement lisse sur $\widehat{\mathcal{O}}_s$, ces deux algèbres étant munies de la topologie $\mathfrak{m}$ -adique; il suffit donc de montrer cette dernière propriété. Or $\widehat{\mathcal{O}}_x$ et $\widehat{\mathcal{O}}_s$ sont les anneaux locaux de x et s dans les variétés formelles $\widehat{G}/\widehat{S}$ et $\widehat{S}$ définies en 1.2.6. Posons $k = \widehat{\mathcal{O}}_s$ et $H = \mathrm{Spf}(\widehat{\mathcal{O}}_x)$, alors H est une k -variété formelle infinitésimale et, comme la formation de $\widehat{G}/\widehat{S}$ commute au produit (*loc. cit.*), H est un k -groupe formel infinitésimal. Notons I l'idéal d'augmentation de $\mathcal{O}_x$. D'après les hypothèses, $\omega_{G/S,x} = I/I^2$ est un $\mathcal{O}_s$ -module localement libre de rang fini n . Comme $\mathcal{O}_s$ est noethérien, il en résulte que $\omega_{H/k}$, qui est le complété de $\omega_{G/S,x}$, s'identifie à $\omega_{G/S} \otimes_{\mathcal{O}_s} \widehat{\mathcal{O}}_s$, donc est un k -module topologiquement libre de rang n . Donc, d'après l'implication (iv) $\Rightarrow$ (ii) de 3.3, $\widehat{\mathcal{O}}_x$ est isomorphe à $k[[\omega_{H/k}]]$, i.e. à une algèbre de séries formelles $k[[t_1, \dots, t_n]]$. Enfin, celle-ci est formellement lisse sur k , d'après EGA 0_{IV}, 19.3.3. Ceci prouve le corollaire.

Nous retrouvons donc ainsi un résultat obtenu par ailleurs pour les schémas en groupes *localement de présentation finie* sur un schéma *arbitraire* S , cf. VI_B, 1.6.

⁽¹²⁷⁾ N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

⁽¹²⁸⁾ N.D.E. : On ne sait pas *a priori* que ω est un k -module pseudocompact *projectif*, mais cela va résulter de ce qui suit : comparer avec la démonstration de (iv) $\Rightarrow$ (iii) dans VII_A, 7.4.

⁽¹²⁹⁾ N.D.E. : On a ajouté l'hypothèse de platitude, omise dans l'original.

⁽¹³⁰⁾ N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

3.3.2. Corollaire. — Soit k un corps de caractéristique 0. Le foncteur $L \mapsto \mathcal{G}(L)$ est une équivalence de la catégorie des k -algèbres de Lie sur celle des k -groupes formels infinitésimaux. ⁽¹³¹⁾

539

En effet, quand G parcourt les k -groupes formels infinitésimaux, le foncteur $G \mapsto \mathcal{G}(\text{Lie } G)$ est isomorphe, d'après le théorème 3.3, au foncteur identique de la catégorie des k -groupes infinitésimaux. De même, d'après 3.2 (ii), le foncteur $L \mapsto \text{Lie}(\mathcal{G}(L)) = \text{Prim } U(L)$ est isomorphe au foncteur identique de la catégorie des k -algèbres de Lie.

3.3.3. — Supposons toujours que k est un corps de caractéristique 0. Soient $\bar{k}$ une clôture algébrique de k et Γ le groupe de Galois topologique de $\bar{k}$ sur k .

Pour tout k -groupe formel G , nous notons $\underline{\text{Aut}}_k(G)$ le k -foncteur en groupes qui associe à toute k -algèbre commutative de dimension finie C le groupe des automorphismes du C -groupe formel $G \widehat{\otimes}_k C$. ⁽¹³²⁾ Comme G est topologiquement plat sur k (puisque k est un corps), i.e. son algèbre affine $A = A(G)$ est topologiquement plate sur k , ou, de façon équivalente, sa bialgèbre covariante $H = H(G)$ est plate sur k , alors ce k -foncteur est un k -groupe formel. En effet, comme $\underline{\text{Aut}}_k(G)$ s'identifie au produit fibré du diagramme suivant (cf. Exp. I, 1.7.3) :

$$\begin{array}{ccc} & \underline{\text{End}}_k(G) \times \underline{\text{End}}_k(G) & \\ & \downarrow & \\ \text{Spf}(k) \longrightarrow & \underline{\text{End}}_k(G) \times \underline{\text{End}}_k(G) & \end{array}$$

où la flèche verticale (resp. horizontale) est donnée par $(\phi, \psi) \mapsto (\phi \circ \psi, \psi \circ \phi)$ (resp. est la section unité), il suffit de voir que le k -foncteur $\underline{\text{End}}_k(G)$ est représenté par un élément de $\mathbf{Vaf}_k$, c.-à-d., (cf. 1.1 et 0.4.2) qu'il est *exact à gauche*, i.e. commute aux produits fibrés de k -algèbres. Or se donner un élément de $\underline{\text{End}}_k(G)(C)$ équivaut à se donner, disons, un morphisme de k -algèbres $\phi : H \rightarrow H \otimes_k C$ qui respecte aussi la structure de coalgèbre, i.e. tel que les diagrammes bien connus soient commutatifs ; comme H est plat sur k , alors $H \otimes_k -$ commute aux produits fibrés de k -algèbres, et

⁽¹³¹⁾N.D.E. : Comme, d'après 2.7, 2.2.1 et 1.3.6, un k -groupe formel *infinitésimal* G est « la même chose » qu'une k -bigèbre cocommutative *connexe* H (cf. 2.9), cet énoncé est équivalent au théorème ci-dessous, obtenu indépendamment par Kostant (cf. 2.9.2). Ce théorème avait été obtenu auparavant par J. W. Milnor et J. C. Moore ([MM65]), sous l'hypothèse additionnelle que H soit engendrée comme algèbre par ses éléments primitifs (bien que paru en 1965, ce texte avait circulé avant 1960, cf. l'analyse [Ja65]), de sorte qu'il est souvent appelé « théorème de Cartier-Kostant-Milnor-Moore ».

Théorème (Cartier-Kostant-Milnor-Moore). — Soit k un corps de caractéristique 0. Les foncteurs $L \mapsto U(L)$ et $H \mapsto \text{Prim}(H)$ définissent une équivalence entre la catégorie des k -algèbres de Lie et celle des k -bigèbres cocommutatives connexes.

D'autre part, si k est un anneau artinien contenant $\mathbb{Q}$, alors 3.2 (ii) et 3.3 (combinés avec 2.7, 2.2.1 et 1.3.6) montrent de même que le foncteur $L \mapsto \mathcal{G}(L)$ (resp. $L \mapsto U(L)$) est une équivalence de la catégorie des k -algèbres de Lie *plates* sur celle des k -groupes formels infinitésimaux *topologiquement plats* (resp. sur celle des k -bigèbres cocommutatives connexes *plates*).

⁽¹³²⁾N.D.E. : L'original indiquait : « Ce k -foncteur est manifestement exact à gauche (H est topologiquement plat sur k !) ». On a détaillé cela dans ce qui suit.

on en déduit que le k -foncteur $\underline{\text{End}}_k(G)$ est exact à gauche, de sorte que nous pouvons le traiter comme un k -groupe formel.

Si L est une k -algèbre de Lie et G le groupe formel $\mathcal{G}(L)$, le théorème 3.3 montre que $\underline{\text{Aut}}_k(G)$ est isomorphe au k -foncteur en groupes $\underline{\text{Aut}}_k(L)$ qui associe à une k -algèbre de dimension finie C le groupe des automorphismes de la C -algèbre de Lie $C \otimes_k L$.

Si G est un k -groupe formel arbitraire, nous avons vu en 2.5.2 que G se décompose canoniquement en un produit semi-direct d'un groupe formel étale G_e et d'un groupe formel infinitésimal G_0 . Ce produit semi-direct est déterminé par la donnée de $L = \text{Lie}(G) = \text{Lie}(G_0)$, du Γ -groupe $M = G_e(\bar{k}) = G(\bar{k})$ et d'un morphisme de k -groupes formels

$$\Phi : G_e \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_k(G_0) \simeq \underline{\text{Aut}}_k(L).$$

Un tel morphisme envoie G_e dans la « partie étale » $\underline{\text{Aut}}_k(L)_e$ de $\underline{\text{Aut}}_k(L)$, cf. 2.5.1. Il est donc déterminé par la donnée d'un morphisme de Γ -groupes :

$$\phi = \Phi(\bar{k}) : M \longrightarrow (\underline{\text{Aut}}_k L)(\bar{k}) = \text{Aut}_k(L \otimes_k \bar{k}).$$

Si l'on fait opérer Γ dans $L \otimes_k \bar{k}$ au moyen de la formule $\gamma(\ell \otimes t) = \ell \otimes \gamma(t)$, alors ϕ fait opérer M dans $L \otimes_k \bar{k}$ par automorphismes de k -algèbre de Lie de telle façon qu'on ait $\phi(\gamma(m)) = \gamma \circ \phi(m) \circ \gamma^{-1}$, c.-à-d. :

$$\gamma(m)(\ell \otimes t) = \gamma(m(\ell \otimes \gamma^{-1}(t)))$$

pour tout $m \in M$, $\gamma \in \Gamma$ et $\ell \otimes t \in L \otimes_k \bar{k}$. Nous exprimons cette dernière condition en disant que M opère dans $L \otimes_k \bar{k}$ de manière compatible avec Γ .

On peut résumer la situation à l'aide d'un énoncé « savant » : appelons Γ -algèbre de Lie sur k la donnée d'un triplet (L, M, ϕ) formé d'une k -algèbre de Lie L , d'un Γ -groupe M et d'une opération ϕ de M dans $L \otimes_k \bar{k}$ qui soit « compatible avec l'action de Γ dans M et dans $L \otimes_k \bar{k}$ ».

Si (L, M, ϕ) et (L', M', ϕ') sont deux telles Γ -algèbres de Lie, un morphisme de la première dans la seconde est un couple (f, θ) formé d'un morphisme $f : L \rightarrow L'$ de k -algèbres de Lie et d'un morphisme $\theta : M \rightarrow M'$ de Γ -groupes tels que

$$(f \otimes 1)(m \cdot x) = \theta(m) \cdot (f \otimes 1)(x)$$

pour tout $x \in L \otimes_k \bar{k}$ et $m \in M$. On obtient alors :

Théorème. — Soit k un corps de caractéristique 0. Alors le foncteur qui associe à G le triplet $(\text{Lie}(G), G(\bar{k}), \Phi(\bar{k}))$ est une équivalence de la catégorie des k -groupes formels sur celle des Γ -algèbres de Lie. ⁽¹³³⁾

4. Phénomènes particuliers à la caractéristique $p > 0$

541

Dans toute la Section 4, nous désignons par p un nombre premier, par k un anneau pseudocompact de caractéristique p , par π l'endomorphisme continu $x \mapsto x^p$ de k .

⁽¹³³⁾N.D.E. : En particulier, lorsque $k = \bar{k}$, on retrouve ainsi le « théorème de Cartier-Gabriel-Kostant » signalé en 2.9.2.

4.1. — Soit X une k -variété formelle d'algèbre affine A , on note $X^{(p/k)}$ ou $X^{(p)}$ la k -variété formelle $X \widehat{\otimes}_{\pi} k$ obtenue par le changement de base $\pi : k \rightarrow k$ (cf. 1.2.D), elle a pour algèbre affine le produit tensoriel complété $A \widehat{\otimes}_{\pi} k$. Alors, le morphisme continu $A \widehat{\otimes}_{\pi} k \rightarrow A$ qui applique $a \widehat{\otimes}_{\pi} \lambda$ sur $a^p \lambda$ induit un morphisme de k -variétés formelles

$$\mathrm{Fr}(X/k) : X \longrightarrow X^{(p/k)}.$$

Dans la suite, nous dirons que $\mathrm{Fr}(X/k)$ est le *morphisme de Frobenius de X relativement à k* et nous écrirons souvent Fr au lieu de $\mathrm{Fr}(X/k)$.

4.1.1. — ⁽¹³⁴⁾ Considérons maintenant un schéma S sur le corps premier $\mathbb{F}_p$ et un S -schéma $\eta : X \rightarrow S$; soit $\mathrm{fr}(S)$ le morphisme de Frobenius « absolu » de S (il induit l'identité sur l'espace topologique sous-jacent et applique toute section f du faisceau structural sur f^p ; cf. VII_A 4.1) et soit $X^{(p)}$ le S -schéma $X \times_{\mathrm{fr}(S)} S$ (VII_A, *loc. cit.*), i.e. le morphisme structural $X^{(p)} \rightarrow S$ est $\mathrm{fr}(S) \circ \eta$.

Soit $\widehat{S}$ le schéma formel dont l'espace topologique sous-jacent est l'ensemble des points fermés de S , muni de la topologie discrète, l'anneau local $\mathcal{O}_{\widehat{S},s}$ en un tel point fermé s étant le séparé complété $\widehat{\mathcal{O}}_{S,s}$ de $\mathcal{O}_{S,s}$ pour la topologie linéaire définie par les idéaux de colongueur finie (cf. 1.2.6); son algèbre affine $k = \mathcal{A}(\widehat{S})$ est donc le produit des $\widehat{\mathcal{O}}_{S,s}$, pour s parcourant les points fermés de S . Rappelons (*loc. cit.*) qu'on note $\widehat{X}/\widehat{S}$ la k -variété formelle formée des points $x \in X$ tels que $[\kappa(x) : \kappa(s)] < \infty$, où s est l'image de x dans S , l'anneau local $\mathcal{O}_{\widehat{X}/\widehat{S},x}$ étant le séparé complété $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ de $\mathcal{O}_{X,x}$ pour la topologie linéaire définie par les idéaux I tels que $\mathcal{O}_{X,x}/I$ soit de longueur finie comme $\mathcal{O}_{X,x}$ -module (et donc aussi comme $\mathcal{O}_{S,s}$ -module). On peut donc former, par changement de base, la k -variété formelle $(\widehat{X}/\widehat{S})^{(p)} = (\widehat{X}/\widehat{S}) \widehat{\otimes}_{\pi} k$.

On peut considérer aussi la k -variété formelle $\widehat{X^{(p)}}/\widehat{S}$: l'ensemble sous-jacent est formé des $x \in X^{(p)} = X$ tels que, notant s l'image de x dans S , le morphisme

$$\kappa(s) \xrightarrow{\mathrm{fr}} \kappa(s) \xrightarrow{\eta^{\sharp}} \kappa(x)$$

fasse de $\kappa(x)$ une extension de degré fini de $\kappa(s)$; dans ce cas, il en est de même de $\eta^{\sharp} : \kappa(s) \rightarrow \kappa(x)$, i.e. x est un point de $\widehat{X}/\widehat{S}$, et l'on a alors

$$\mathcal{O}_{\widehat{X^{(p)}}/\widehat{S},x} = \widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \widehat{\otimes}_{\pi} \widehat{\mathcal{O}}_{S,s} = \widehat{\mathcal{O}}_{X^{(p)},x}$$

542 (la deuxième égalité puisque $X \mapsto \widehat{X}/\widehat{S}$ commute aux produits, cf. 1.2.6). On voit donc que : $\widehat{X^{(p)}}/\widehat{S}$ s'identifie à une sous-variété formelle de $(\widehat{X}/\widehat{S})^{(p)}$. De plus, on a l'égalité si et seulement si pour tout point fermé s de S , $\kappa(s)$ est de degré fini sur $\kappa(s)^p$, ce qui est le cas par exemple si S est un schéma localement de type fini sur un corps κ tel que $[\kappa : \kappa^p] < +\infty$.

⁽¹³⁴⁾ N.D.E. : On a corrigé l'original, qui donnait l'inclusion $(\widehat{X}/\widehat{S})^{(p)} \subset \widehat{X^{(p)}}/\widehat{S}$ au lieu de l'inclusion inverse. Signalons d'autre part que ce paragraphe n'est pas utilisé dans la suite.

4.1.2. — Soit G un k -groupe formel. Comme le foncteur $X \mapsto X^{(p)} = X \widehat{\otimes}_\pi k$ commute aux produits finis, il transforme un k -groupe formel en un k -groupe formel. En outre, comme $\text{Fr}(X/k)$ est fonctoriel en X , le morphisme

$$\text{Fr} : G \longrightarrow G^{(p)}$$

est un homomorphisme de k -groupes formels. Si l'on pose $G^{(p^{n+1})} = (G^{(p^n)})^{(p)}$ il en va de même pour le morphisme composé

$$\text{Fr}^n = \text{Fr}^n(G/k) : G \xrightarrow{\text{Fr}} G^{(p)} \xrightarrow{\text{Fr}} G^{(p^2)} \xrightarrow{\text{Fr}} \dots \xrightarrow{\text{Fr}} G^{(p^n)}.$$

Notons A l'algèbre affine de G et I_A son idéal d'augmentation.

Définitions. — (a) Le noyau de Fr^n sera noté ${}_{\text{Fr}^n}G$. Il résulte directement des définitions que ${}_{\text{Fr}^n}G$ est *infinitésimal* et a pour algèbre affine le quotient $A/I_A^{\{p^n\}}$, où $I_A^{\{p^n\}}$ désigne l'idéal fermé de A engendré par les puissances p^n -ièmes des éléments de I_A .

(b) On dit que G est de *hauteur* $\leq n$ si $I_A^{\{p^n\}} = 0$, c'est-à-dire si l'on a ${}_{\text{Fr}^n}G = G$.

4.2. — Il est clair que l'algèbre de Lie $\mathbf{Lie}(G)$ d'un k -groupe formel G est une p -sous-543
algèbre de Lie de l'algèbre $\mathbf{H}(G)$ (cf. 2.3). En effet, on se ramène tout de suite au cas où k est artinien ; dans ce cas, $\mathbf{Lie}(G)$ est la partie de $\mathbf{H}(G)$ formée des éléments x tels que $\varphi_G(x \otimes 1 + 1 \otimes x) = \Delta_G(x)$ avec les notations de 2.3 et 2.6 (c). On a alors

$$\begin{aligned} \varphi_G(x^p \otimes 1 + 1 \otimes x^p) &= \varphi_G((x \otimes 1 + 1 \otimes x)^p) \\ &= \varphi_G(x \otimes 1 + 1 \otimes x)^p = \Delta_G(x)^p = \Delta_G(x^p). \end{aligned}$$

4.2.1. — Réciproquement, toute p -algèbre de Lie $\mathbf{L}$ sur $\mathbf{O}_k$ définit un k -foncteur en groupes. Désignons en effet par $\mathbf{U}_p(\mathbf{L})$ le foncteur qui associe à tout objet C de $\mathbf{Alf}/_k$ l'algèbre enveloppante restreinte $\mathbf{U}_p(\mathbf{L}(C))$ de la p -algèbre de Lie $\mathbf{L}(C)$ sur C (VII_A 5.3). D'après VII_A 5.4, $\mathbf{U}_p(\mathbf{L})$ est une $\mathbf{O}_k$ -bialgèbre et détermine donc, d'après 2.2, un k -foncteur en groupes $\text{Spf}^* \mathbf{U}_p(\mathbf{L})$ que nous noterons désormais $\mathcal{G}_p(\mathbf{L})$.

Ainsi, $\mathcal{G}_p(\mathbf{L})(C)$ est le groupe des éléments $z \in \mathbf{U}_p(\mathbf{L}(C))$ d'augmentation 1 et tels que $\Delta_{\mathbf{U}_p(\mathbf{L}(C))}(z) = z \otimes z$.

4.2.2. — Supposons que $\mathbf{L}$ soit une p -algèbre de Lie *plate* sur $\mathbf{O}_k$. Alors, tenant compte de VII_A 5.3.3, on montre comme dans le point (i) de la proposition 2.6.2 que $\mathbf{U}_p(\mathbf{L})$ est plate sur $\mathbf{O}_k$; donc $\mathcal{G}_p(\mathbf{L})$ est un k -groupe formel *topologiquement plat* qui a $\mathbf{U}_p(\mathbf{L})$ pour $\mathbf{O}_k$ -bialgèbre covariante.

⁽¹³⁵⁾ D'après la démonstration de 2.6.2 (iii), pour toute k -algèbre C de longueur finie, $\mathbf{Lie}(\mathcal{G}_p(\mathbf{L}))(C)$ est l'ensemble des éléments primitifs de $\mathbf{U}_p(\mathbf{L})(C) = \mathbf{U}_p(\mathbf{L}(C))$ (voir aussi VII_A 3.2.3) ; de plus, d'après VII_A 5.5.3, le morphisme canonique $\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{U}_p(\mathbf{L})$ induit un isomorphisme de p -algèbres de Lie

$$\tau_{p,\mathbf{L}} : \mathbf{L} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Lie}(\mathcal{G}_p(\mathbf{L}))$$

(comparer avec 3.1 en caractéristique 0).

⁽¹³⁵⁾ N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

Le groupe formel $\mathcal{G}_p(\mathbf{L})$ peut être caractérisé par une propriété universelle. En effet, tout morphisme h de $\mathcal{G}_p(\mathbf{L})$ dans un groupe formel G induit un morphisme $\mathbf{Lie}(h) : \mathbf{Lie}(\mathcal{G}_p(\mathbf{L})) \rightarrow \mathbf{Lie}(G)$. Composant celui-ci avec l'isomorphisme $\tau_{p,\mathbf{L}}$, on obtient un morphisme $h' : \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{Lie}(G)$.

544 Proposition. — Si k est un anneau pseudocompact de caractéristique $p > 0$, G un k -groupe formel et $\mathbf{L}$ une p -algèbre de Lie plate sur $\mathbf{O}_k$, l'application $h \mapsto h'$ définie ci-dessus est une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grf}/k}(\mathcal{G}_p(\mathbf{L}), G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{p\text{-Lie}}(\mathbf{L}, \mathbf{Lie}(G))$$

où le terme de droite désigne l'ensemble des morphismes de p -algèbres de Lie de $\mathbf{L}$ dans $\mathbf{Lie}(G)$.

⁽¹³⁶⁾ On se ramène en effet tout de suite au cas où k est artinien. Posons $L = \mathbf{L}(k)$. D'après 2.3.1, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grf}/k}(\mathcal{G}_p(\mathbf{L}), G)$ est en bijection avec l'ensemble des morphismes d'algèbres unitaires $h : U_p(L) \rightarrow H(G)$ tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} U_p(L) & \xrightarrow{h} & H(G) & \xrightarrow{\delta_G} & H(G \times G) \\ \Delta_{U_p(L)} \downarrow & & & & \uparrow \varphi_G \\ U_p(L) \otimes U_p(L) & \xrightarrow{h \otimes h} & H(G) \otimes H(G) & & \end{array} .$$

Or h est défini par sa restriction à L , qui est un morphisme de p -algèbres de Lie de L dans la p -algèbre de Lie sous-jacente à $H(G)$, et la commutativité du diagramme signifie que h applique L dans la partie de $H(G)$ formée des x tels que $\delta_G(x) = \varphi_G(x \otimes 1 + 1 \otimes x)$, qui n'est autre que $\mathbf{Lie}(G)$, cf. 2.6 (c).

4.3. — Nous nous proposons maintenant d'étudier de façon plus détaillée le k -groupe formel $\mathcal{G}_p(\mathbf{L})$ lorsque $\mathbf{L}$ est une p -algèbre de Lie plate sur $\mathbf{O}_k$.

545 Pour cela, nous considérons d'abord un anneau C de caractéristique p et une p -algèbre de Lie L sur C dont le module sous-jacent est libre de base $(x_i)_{i \in I}$. Désignons en outre par P l'ensemble des familles $n = (n_i)_{i \in I}$ formées d'entiers naturels tels que $0 \leq n_i < p$ et que les n_i soient nuls hormis peut-être un nombre fini d'entre eux. Si nous munissons I d'un ordre total et si nous appelons $i_1, i_2, \dots, i_r$ ($i_1 < i_2 < \dots < i_r$) les indices i tels que $n_i \neq 0$, nous pouvons donc poser $|n| = n_{i_1} + \dots + n_{i_r}$ et

$$x^n = x_{i_1}^{n_{i_1}} \cdot x_{i_2}^{n_{i_2}} \cdots x_{i_r}^{n_{i_r}}, \quad n! = (n_{i_1}!) \cdots (n_{i_r}!).$$

On sait que les monômes $x^n/n!$ forment une base de $U_p(L)$ (VII_A 5.3.3) et il est clair qu'on a

$$(*) \quad \Delta \left(\frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{m \leq n} \frac{x^m}{m!} \otimes \frac{x^{n-m}}{(n-m)!}$$

⁽¹³⁶⁾ N.D.E. : La démonstration est identique à celle de 2.6.3.

la somme étant étendue à tous les $m \in P$ tels qu'on ait $m \leq n$ (i.e. $m_i \leq n_i$ pour tout $i \in I$).

La formule (*) permet une détermination aisée de la filtration naturelle de $U_p(L)$ (cf. 1.3.6). Posons $U = U_p(L)$, soit U^+ l'idéal bilatère engendré par L et soit $U_0 = C \cdot 1_U$. Comme en 1.3.6, on définit une filtration de U (par des sous- C -coalgèbres) en posant, pour $n \geq 1$:

$$U_n = \{u \in U \mid \Delta_U(u) - u \otimes 1 \in U_{n-1} \otimes U^+\}.$$

La formule (*) entraîne alors que U_n est le C -module libre qui a pour base les monômes x^m tels que $|m| \leq n$.

4.3.1. — Avec les notations de 4.3, déterminons les éléments ξ de $U = U_p(L)$ tels que $\varepsilon_U(\xi) = 1$ et $\Delta_U(\xi) = \xi \otimes \xi$. Tout élément ξ de U s'écrit $\xi = \sum_{n \in P} \xi_n (x^n/n!)$, avec $\xi_n \in C$. La condition $\varepsilon_U(\xi) = 1$ entraîne l'égalité $\xi_0 = 1$, où 0 désigne l'élément de P dont toutes les composantes sont nulles. La condition $\Delta_{U_p(L)}(\xi) = \xi \otimes \xi$ entraîne :

$$\sum_{m \leq n} \xi_n \frac{x^m}{m!} \otimes \frac{x^{n-m}}{(n-m)!} = \sum_{q,r} \xi_q \xi_r \frac{x^q}{q!} \otimes \frac{x^r}{r!}$$

c'est-à-dire

$$\xi_{q+r} = \xi_q \xi_r \quad \text{si} \quad q_i + r_i < p \quad \text{et} \quad \xi_q \xi_r = 0 \quad \text{sinon.}$$

Si l'on note ξ_i la valeur de ξ_n lorsque $n_i = 1$ et $n_j = 0$ pour $j \neq i$, ces conditions signifient que l'on a

$$\xi_n = \prod_i \xi_i^{n_i} \quad \text{si} \quad n \in P \quad \text{et} \quad \xi_i^p = 0 \quad \forall i \in I.$$

On tire de là :

Proposition. — Soient k un anneau pseudocompact local ⁽¹³⁷⁾ de caractéristique $p > 0$, L une p -algèbre de Lie plate sur O_k , C un objet de $\mathbf{A}lf/k$ et $\sqrt[p]{0_C}$ l'idéal de C formé des éléments x tels que $x^p = 0$. Il existe une bijection « fonctorielle en C » :

$$L(C) \otimes_C \sqrt[p]{0_C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_p(L)(C)$$

D'après la remarque 1.2.3.F, on peut en effet choisir une base $({}^C x_i)_{i \in I}$ de $L(C)$ sur C de telle façon que, pour tout morphisme $\varphi : C \rightarrow D$ de $\mathbf{A}lf/k$, $L(\varphi)$ applique ${}^C x_i$ sur ${}^D x_i$. D'après ce qui précède, l'application

$$\sum_i {}^C x_i \otimes \xi_i \mapsto \sum_{n \in P} \left(\prod_i \xi_i^{n_i} \right) \frac{{}^C x^n}{n!}$$

est une bijection fonctorielle de $L(C) \otimes_C \sqrt[p]{0_C}$ sur $\mathcal{G}_p(L)(C)$.

⁽¹³⁷⁾ N.D.E. : On a ajouté l'hypothèse que k soit local, afin que tout k -module pseudocompact topologiquement plat soit topologiquement libre, cf. la démonstration.

4.3.2. — « Il n'y a pas de formule de Campbell-Hausdorff en caractéristique $p > 0$ ». Expliquons-nous : l'isomorphisme fonctoriel de 4.3.1 dépend du choix des bases $({}^C x_i)_{i \in I}$. À la différence de ce qui se passe en 3.2 (cas de la caractéristique 0), il n'y a pas, en général, de bijection de $\mathbf{L}(C) \otimes_C \sqrt[p]{0_C}$ sur $\mathcal{G}_p(\mathbf{L})(C)$ qui soit « fonctorielle à la fois en C et en $\mathbf{L}$ ». L'argument qui suit montre par exemple qu'un tel isomorphisme n'existe pas lorsque k est un corps contenant les racines $(p^2 - 1)$ -ièmes de l'unité.

Choisissons en effet $\mathbf{L}$ de telle façon que, pour tout $C \in \mathbf{A} \mathbf{f}_{/k}$, $\mathbf{L}(C)$ soit la p -algèbre de Lie abélienne sur C qui est engendrée par un élément x soumis à la relation $x^{(p^2)} = 0$. On a donc

$$\mathbf{L}(C) = Cx \oplus Cx^{(p)}, \quad U_p(\mathbf{L}(C)) \cong k[x]/(x^{p^2}).$$

Nous allons montrer que le seul morphisme fonctoriel

$$\chi_C : \mathbf{L}(C) \otimes_C \sqrt[p]{0_C} \longrightarrow U_p(\mathbf{L}(C))$$

qui soit compatible avec les endomorphismes de $\mathbf{L}$ et qui applique $\mathbf{L}(C) \otimes_C \sqrt[p]{0_C}$ dans $\mathcal{G}_p(\mathbf{L})(C)$, est le morphisme constant de valeur 1.

548 Soit en effet ψ_C la bijection de $\mathbf{L}(C) \otimes_C \sqrt[p]{0_C}$ sur $\mathcal{G}_p(\mathbf{L})(C) = \text{Prim } U_p(\mathbf{L}(C))$ donnée par 4.3.1, c.-à-d.,

$$x \otimes a + x^{(p)} \otimes b \mapsto \sum_{0 \leq i, j < p} a^i b^j x^{i+pj}.$$

En composant χ_C avec ψ_C^{-1} , on obtient un morphisme fonctoriel (en C) :

$$\begin{aligned} \theta_C : \mathbf{L}(C) \otimes_C \sqrt[p]{0_C} &\rightarrow \mathbf{L}(C) \otimes_C \sqrt[p]{0_C} \\ x \otimes a + x^{(p)} \otimes b &\mapsto x \otimes P(a, b) + x^{(p)} \otimes Q(a, b). \end{aligned}$$

La fonctorialité en C implique que $P(a, b)$ et $Q(a, b)$ sont les valeurs en (a, b) de deux polynômes $P, Q \in k[x, y]$ qu'on peut supposer de degré $< p$ en X ainsi qu'en Y .⁽¹³⁸⁾ Soit α un élément de k et ℓ_α l'endomorphisme de p -algèbre de Lie de $\mathbf{L}$ qui applique x sur αx (et donc $x^{(p)}$ sur $\alpha^p x^{(p)}$). Alors $U_p(\ell_\alpha)$ est l'endomorphisme d'algèbre qui envoie x sur αx (et donc chaque x^i sur $\alpha^i x^i$, pour $i < p^2$), et l'on voit facilement que le carré ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{L}(C) \otimes_C \sqrt[p]{0_C} & \xrightarrow{\psi_C} & U_p(\mathbf{L}(C)) \\ \downarrow \ell_\alpha(C) \otimes_C \text{id} & & \downarrow U_p(\ell_\alpha)(C) \\ \mathbf{L}(C) \otimes_C \sqrt[p]{0_C} & \xrightarrow{\psi_C} & U_p(\mathbf{L}(C)) \end{array}$$

est commutatif. L'hypothèse $\chi_C \circ (\ell_\alpha(C) \otimes \text{id}) = U_p(\ell_\alpha)(C) \circ \chi_C$ entraîne alors les égalités :

$$P(\alpha a, \alpha^p b) = \alpha P(a, b) \quad \text{et} \quad Q(\alpha a, \alpha^p b) = \alpha^p Q(a, b).$$

Écrivant $P = \sum_{i, j < p} \lambda_{ij} X^i Y^j$ et $Q = \sum_{i, j < p} \mu_{ij} X^i Y^j$, et prenant pour C l'algèbre $k[X, Y]/(X^p, Y^p)$, on en déduit que si $\lambda_{ij} \neq 0$ (resp. $\mu_{ij} \neq 0$) alors $\alpha^{i-1+pj} = 1$

⁽¹³⁸⁾ N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

(resp. $\alpha^{i+p(j-1)} = 1$). Donc, prenant pour α une racine primitive de l'unité d'ordre $p^2 - 1$, on en déduit que $P = \lambda X$ et $Q = \mu Y$, avec $\lambda, \mu \in k$. Par conséquent, on a :

$$\chi_C(x \otimes a + x^{(p)} \otimes b) = \sum_{0 \leq i, j < p} (\lambda a)^i (\mu b)^j x^{i+pj}.$$

⁽¹³⁸⁾ Considérons enfin l'endomorphisme f de $\mathbf{L}$ qui envoie x sur $x + x^{(p)}$; prenant $C = k[a]/(a^3)$ et comparant les coefficients de x^p et x^{p+1} dans $(\chi_C \circ f(C))(x \otimes a)$ et dans $(U_p(f)(C) \circ \chi_C)(x \otimes a)$, on obtient que $\lambda = \mu$ et $\lambda^2 a^2 = 0$, d'où $\lambda = \mu = 0$.

4.4. Théorème. — Soient k un anneau pseudocompact de caractéristique $p > 0$ et G 549
un k -groupe formel. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe une p -algèbre de Lie $\mathbf{L}$ plate sur $\mathbf{O}_k$ telle que G soit isomorphe à $\mathcal{G}_p(\mathbf{L})$ (et dans ce cas $\mathbf{L} = \mathbf{Lie}(G)$ d'après 4.2.2).
- (ii) Il existe un k -module pseudocompact projectif ω tel que l'algèbre affine de G soit isomorphe au quotient de $k[[\omega]]$ par l'idéal fermé engendré par les x^p , pour $x \in \omega$ (et dans ce cas $\omega \simeq \omega_{G/k}$).
- (iii) G est de hauteur ≤ 1 et $\omega_{G/k}$ est un k -module pseudocompact projectif.
- (iv) G est de hauteur ≤ 1 et est topologiquement plat sur k .

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Soient $\omega = \Gamma^*(\mathbf{L})$ (cf. 1.2.3.D) et A le quotient de $k[[\omega]]$ par l'idéal fermé engendré par les x^p , pour $x \in \omega$. Tout morphisme continu $h : A \rightarrow C$, où C est un objet de $\mathbf{AIf}_{/k}$, est déterminé par sa restriction h' à ω ; cette restriction h' envoie ω dans $\sqrt[p]{\overline{0_C}}$. On obtient ainsi une bijection canonique de $\text{Hom}_{\mathbf{AIf}_{/k}}(A, C)$ sur l'ensemble $\text{Hom}_c(\omega, \sqrt[p]{\overline{0_C}})$ des applications k -linéaires continues de ω dans $\sqrt[p]{\overline{0_C}}$. Ce dernier ensemble est canoniquement isomorphe à $\mathbf{L}(C) \otimes_C \sqrt[p]{\overline{0_C}}$ (voir la démonstration de 3.3). L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) résulte donc de la bijection fonctorielle $\mathbf{L}(C) \otimes_C \sqrt[p]{\overline{0_C}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_p(\mathbf{L})(C)$ établie en 4.3.1.

Pour les autres implications, consulter les démonstrations des théorèmes 3.3 et VII_A 7.4.1, qui sont analogues.

Remarque 4.4.A. — ⁽¹³⁹⁾ Soit G un k -groupe formel infinitésimal, d'algèbre affine A , tel que $\omega_{G/k} = I_A/\overline{I_A^2}$ soit un k -module pseudocompact *projectif*. Alors il existe une section $\tau : \omega_{G/k} \rightarrow I_A$ de la projection $I_A \rightarrow \omega_{G/k}$, et τ induit un morphisme continu d'algèbres $\psi : k[[\omega_{G/k}]] \rightarrow A$ qui est *surjectif*, cf. la démonstration de l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) dans 3.3.

4.4.1 Corollaire. — Si k est un corps de caractéristique $p > 0$, le foncteur $L \mapsto \mathcal{G}_p(L)$ est une équivalence de la catégorie des p -algèbres de Lie sur k sur celle des k -groupes 550
formels de hauteur ≤ 1 .

⁽¹³⁹⁾ N.D.E. : On a ajouté cette remarque, utilisée en 4.4.2.

En effet, quand G parcourt les groupes formels de hauteur ≤ 1 , le foncteur $G \mapsto \mathcal{G}_p(\text{Lie } G)$ est isomorphe au foncteur identique d'après le théorème 4.4 ; de même, nous avons vu en 4.2.2 que le foncteur $L \mapsto \text{Lie } \mathcal{G}_p(L)$ est isomorphe au foncteur identique (voir aussi VII_A, 5.5.3). ⁽¹⁴⁰⁾

4.4.2. — Prenons toujours pour k un corps de caractéristique p . Soit G un k -groupe formel infinitésimal G , d'algèbre affine A . Comme G est infinitésimal, tout idéal ouvert de A contient $I_A^{\{p^n\}}$ pour n assez grand, donc G est la limite projective des algèbres affines $A/I_A^{\{p^n\}}$ des groupes ${}_{\text{Fr}^n}G$ (cf. 4.1.2). *Tout k -groupe formel infinitésimal est donc une limite inductive de k -groupes formels de hauteur finie.*

Supposons G de hauteur $\leq n$ et notons $H = G/{}_{\text{Fr}}G$. ⁽¹⁴¹⁾ D'après 2.4 et 2.4.1, $\text{Fr} : G \rightarrow G^{(p)}$ se factorise en un épimorphisme $\pi : G \rightarrow H$ suivi d'un monomorphisme $i : H \rightarrow G^{(p)}$. On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{\pi} & H & \xrightarrow{\text{Fr}^{n-1}} & H^{(p^{n-1})} \\ & \searrow \text{Fr} & \downarrow i & & \downarrow i^{(p^{n-1})} \\ & & G^{(p)} & \xrightarrow{\text{Fr}^{n-1}} & G^{(p^n)} \end{array}$$

et comme le foncteur $X \mapsto X^{(p)}$ commute aux produits fibrés, $i^{(p^{n-1})}$ est encore un monomorphisme. Comme $\text{Fr}^n(G/k)$ est nul et comme π est un épimorphisme, alors $\text{Fr}^{n-1}(G^{(p)}/k) \circ i = i^{(p^{n-1})} \circ \text{Fr}^{n-1}(H/k)$ est nul et donc, puisque $i^{(p^{n-1})}$ est un monomorphisme, $\text{Fr}^{n-1}(H/k)$ est nul, donc H est de hauteur $\leq n-1$. On voit donc que : *tout k -groupe formel de hauteur finie possède une suite de composition dont les quotients sont de hauteur ≤ 1 , donc peuvent être décrits par des p -algèbres de Lie sur k .*

Enfin, l'algèbre affine A de G est un quotient de $k[[\omega_{G/k}]]$, cf. 4.4.A, donc si $\omega_{G/k}$ est de dimension finie sur k , alors toutes les algèbres $A/I_A^{\{p^n\}}$ sont des k -espaces vectoriels de dimension finie. On voit donc que : *tout groupe formel infinitésimal G sur un corps de caractéristique $p > 0$, tel que $\omega_{G/k}$ soit de dimension finie sur k , est une limite inductive de groupes formels finis* (i.e. de longueur finie, cf. 1.2.6).

5. Espaces homogènes de groupes formels infinitésimaux sur un corps

551

5.0. — ⁽¹⁴²⁾ Supposons, pour simplifier, que k soit un corps. Soit G un k -groupe formel d'algèbre affine $A = \mathcal{A}(G)$. Soit A^+ l'idéal d'augmentation de A ; pour tout $a \in A$ on notera $\bar{a} = a - \varepsilon_A(a)1_A$ sa projection sur A^+ . Soit F un sous-groupe formel

⁽¹⁴⁰⁾N.D.E. : Si k est un anneau artinien de caractéristique $p > 0$, la même démonstration donne une équivalence entre la catégorie des p -algèbres de Lie plates sur k et celle des k -groupes formels de hauteur ≤ 1 , *topologiquement plats* sur k .

⁽¹⁴¹⁾N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

⁽¹⁴²⁾N.D.E. : On a ajouté la sous-section 5.0, pour exprimer dans le langage des algèbres de Hopf cocommutatives la proposition 5.1 qui va suivre, et citer les résultats obtenus depuis dans cette direction.

de G , défini par l'idéal fermé J de A , et soit π (resp. $\bar{\pi}$) la projection $A \rightarrow A/J$ (resp. la composée des projections $A \rightarrow A^+ \rightarrow A^+/J$). Remarquons que, pour tout $a \in A$, la projection de $\Delta_A(a)$ sur $A \hat{\otimes} A^+$ est $\Delta_A(a) - a \hat{\otimes} 1$.

D'après le théorème 2.4, on peut former la k -variété formelle quotient $X = G/F$, son algèbre affine B est

$$\begin{aligned} B &= \text{Ker} \left(A \xrightarrow[(\text{id}_A \hat{\otimes} \pi) \Delta_A]{\tau_1} A \hat{\otimes}_k (A/J) \right) \\ &= \{a \in A \mid (\text{id}_A \hat{\otimes} \pi) \Delta_A(a) = a \hat{\otimes} \pi(1)\} \\ &= \text{Ker} \left((\text{id}_A \hat{\otimes} \bar{\pi}) \Delta_A \right). \end{aligned}$$

C'est aussi la sous-algèbre de A formée des éléments ϕ tels que, pour tout $C \in \text{Ob } \mathbf{AIf}_k$ et $g \in G(C)$, $h \in F(C)$, on ait $\phi(gh) = \phi(g)$. Pour tout $g, g' \in G(C)$ et $h \in F(C)$, on a $\phi(gg'h) = \phi(gg')$, donc $\Delta(\phi)$ appartient au noyau de $\text{id}_A \hat{\otimes}_k (\text{id}_A \hat{\otimes} \bar{\pi}) \Delta_A$, qui égale $A \hat{\otimes}_k B$ puisque A est topologiquement plate sur k . On a donc $\Delta_A(B) \subset A \hat{\otimes}_k B$, i.e. la sous-algèbre fermée B est aussi un *coidéal à gauche*.

D'autre part, B détermine F puisque, d'après le corollaire 2.4.1, on a $J = \overline{AB^+}$, i.e. J est l'idéal fermé engendré par $B^+ = B \cap A^+$. On obtient donc ainsi une application *injective* $\mathcal{Q}$ de l'ensemble $\mathcal{F}$ des sous-groupes formels de G dans l'ensemble $\mathcal{B}$ des sous-algèbres fermées B de A qui sont des coidéaux à gauche. Se pose alors la question de déterminer l'image de cette application, et la proposition 5.1 ci-dessous montre que $\mathcal{Q}$ est bijective lorsque G est *infinitésimal*. En fait, ceci est vrai pour *tout* k -groupe formel G .

En effet, rappelons (cf. 2.2.1) que le foncteur $G \rightarrow H(G)$ est une *équivalence* entre la catégorie des k -groupe formels et celle des k -algèbre de Hopf cocommutatives ; si F est un sous-groupe formel de G , défini par l'idéal fermé J de A , alors la sous-algèbre de Hopf $H(F)$ de $H = H(G)$ est l'orthogonal de J pour la dualité entre $A = H^*$ et $H = A^\dagger$ (cf. 0.2.2). D'autre part, si B est une sous-algèbre fermée de A qui est aussi un coidéal à gauche, alors son orthogonal $I = B^\perp$ est un coidéal de H (i.e. $\Delta_H(I) \subset I \otimes H + H \otimes I$ et $\varepsilon_H(I) = 0$) et un idéal à gauche. Notons $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{I}$) l'ensemble des sous-algèbres de Hopf (resp. idéaux à gauche qui sont des coidéaux) de H . Pour tout $I \in \mathcal{I}$, on notera π_I (resp. $\bar{\pi}_I$) la projection $H \rightarrow H/I$ (resp. la composée des projections $H \rightarrow H^+ \rightarrow H^+/I$), où H^+ est l'idéal d'augmentation de H .

Soient K une sous-algèbre de Hopf de H et $K^+ = K \cap H^+$. Si F est le sous-groupe formel correspondant à K , alors $J = K^\perp$ et A^+/J s'identifie au dual de K^+ , et comme $B = \mathcal{Q}(F)$ est le noyau de l'application

$$A \xrightarrow{\Delta_A} A \hat{\otimes}_k A \xrightarrow{\text{id} \hat{\otimes} \bar{\pi}} A \hat{\otimes}_k (A^+/J)$$

on obtient que $\mathcal{Q}$ correspond par dualité à l'application Φ qui à K associe l'image de

$$H \xleftarrow{m_H} H \otimes_k H \xleftarrow{\text{id} \hat{\otimes} \text{can.}} H \otimes_k K^+$$

i.e. l'idéal à gauche HK^+ , qui est aussi un coidéal. On voit de même que l'application qui à $B \in \mathcal{B}$ associe $\overline{AB^+}$ correspond par dualité à l'application Ψ qui à tout $I \in \mathcal{I}$

associe le noyau de $(\text{id} \otimes_k \bar{\pi}_I) \circ \Delta_H$, i.e. on a

$$\Psi(I) = \{x \in H \mid (\text{id} \otimes_k \pi_I) \Delta_H(x) = x \otimes \pi_I(1)\}.$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 5.0.1. — *Soient k un corps et H une algèbre de Hopf cocommutative. Alors les applications Φ et Ψ ci-dessus sont des bijections réciproques entre l'ensemble des sous-algèbres de Hopf de H et celui des idéaux à gauche qui sont des coidéaux.*

Ce théorème a d'abord été démontré par K. Newman, cf. [Ne75], Th. 4.1 (où le mot « cocommutative » a été oublié). Sa démonstration utilise « le théorème de Cartier-Gabriel-Kostant » (cf. 2.9) pour se ramener au cas où H est connexe, puis l'existence dans ce cas d'une « base de Sweedler » (cf. [Sw67], Th. 3), un résultat dual du théorème de Dieudonné-Cartier 5.2.2 ci-dessous. Une autre démonstration, plus courte, a été donnée par H. J. Schneider [Sch90], Th. 4.15. Une généralisation a ensuite été obtenue par A. Masuoka lorsqu'on suppose seulement que le coradical H_0 de H (i.e. la somme des sous-cogèbres simples) est commutatif [Ma91], Th. 1.3 (3).

Signalons enfin que pour une k -algèbre de Hopf commutative, correspondant donc à un k -schéma en groupes affine G , on ne peut s'attendre à un analogue de 5.0.1 sans hypothèses additionnelles, puisque pour un k -sous-groupe F de G , le quotient G/F n'est pas nécessairement affine. Mais M. Takeuchi a établi dans [Tak72], Th. 4.3 (resp. [Tak79], Th. 3), une bijection analogue entre l'ensemble des k -sous-groupes F de G qui sont invariants (resp. tels que G/F soit affine), et celui des sous-algèbres B de $\mathcal{O}(G)$ telles que $\Delta(B) \subset A \otimes B$ et qui sont stables par l'antipode (resp. et telles que $B \rightarrow A$ soit fidèlement plat).

5.1. — Soit k un anneau pseudocompact. ⁽¹⁴³⁾ Soient G un k -groupe formel infinitésimal topologiquement plat, A son algèbre affine, B une sous-algèbre fermée de A , $X = \text{Spf}(B)$ et $r : G \rightarrow X$ l'épimorphisme induit par l'inclusion de B dans A . On se propose de voir sous quelle condition r fait de X le quotient à droite de G par un sous-groupe H (cf. 2.4). ⁽¹⁴⁴⁾

Proposition. — *Soient G un k -groupe formel infinitésimal topologiquement plat, A son algèbre affine, I_A l'idéal d'augmentation de A , B une sous-algèbre fermée de A , et $J_B = \overline{AI_B}$, où $I_B = B \cap I_A$. On suppose que A est topologiquement plate sur k , ainsi que $\overline{J_B^n}/\overline{J_B^{n+1}}$ pour tout $n \geq 0$. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Pour tout $x \in B$, $\Delta_A(x) - x \hat{\otimes} 1$ appartient à $A \hat{\otimes}_k J_B$.*

⁽¹⁴³⁾N.D.E. : Dans l'original, il est supposé en 5.1 que k est un corps. En fait, cette hypothèse peut être remplacée par des hypothèses de platitude ; on a modifié en conséquence les n^{os} 5.1 à 5.1.5.

⁽¹⁴⁴⁾N.D.E. : On a remplacé « gauche » par « droite » et l'on a modifié l'énoncé de la proposition 5.1, afin de faire apparaître plus clairement, d'une part, les conditions équivalentes (i), (ii), et, d'autre part, la conclusion $\text{Spf}(B) \simeq G/H$.

(ii) La suite ci-dessous (où $\tau_1(a) = a \hat{\otimes} 1$ et π est la projection $A \rightarrow A/J_B$) est exacte :

$$(*) \quad B \longrightarrow A \xrightleftharpoons[(\pi \hat{\otimes} \text{id}_A)\Delta_A]{\tau_1} A \hat{\otimes}_k (A/J_B)$$

c.-à-d., B est l'ensemble de tous les $x \in A$ tels que $\Delta_A(x) - x \hat{\otimes} 1$ appartienne à $A \hat{\otimes}_k J_B$.

Dans ce cas, $H = \text{Spf}(A/J_B)$ est un sous-groupe formel de G , et la suite ci-dessous (où λ est la restriction à $G \times H$ de la multiplication de G) est exacte :

$$(**) \quad G \times H \xrightleftharpoons[\lambda]{\text{pr}_1} G \longrightarrow \text{Spf}(B)$$

c.-à-d., $\text{Spf}(B)$ est isomorphe à G/H .

Posons $\bar{A} = A/J_B$ et $H = \text{Spf}(\bar{A})$; alors H est une sous-variété formelle de G . Comme $J_B \subset I_A$, l'augmentation ε_A induit un morphisme continu de k -algèbres $\bar{\varepsilon} : \bar{A} \rightarrow k$.

Si (i) est satisfaite, alors $\Delta_A(I_B) \subset I_B \hat{\otimes} 1 + A \hat{\otimes} J_B$, et donc Δ_A induit par passage au quotient un morphisme diagonal $\bar{\Delta}$. Alors $\bar{\Delta}$ et $\bar{\varepsilon}$ munissent H d'une structure de sous-monoïde formel de G . Comme G est infinitésimal, il en est de même de H ; donc, d'après la proposition 2.7, H est un sous-groupe formel de G . Il résulte alors de la définition de G/H (cf. 2.4), que (ii) entraîne la dernière assertion de la proposition.

D'autre part, il est clair que (ii) implique (i). La démonstration de la réciproque occupe les paragraphes 5.1.1 à 5.1.5.

5.1.1. — Considérons d'abord la catégorie $\mathcal{C}$ qui suit : un objet de $\mathcal{C}$ est un couple 552
(A, J) formé d'une k -algèbre profinie A et d'un idéal fermé J de A ; un morphisme $\psi : (A, J) \rightarrow (A', J')$ de $\mathcal{C}$ est un homomorphisme continu de k -algèbres $A \rightarrow A'$ qui applique J dans J' . Si l'on associe à (A, J) le couple $(\text{Spf}(A/J), \text{Spf}(A))$, on obtient évidemment une anti-équivalence de $\mathcal{C}$ sur la catégorie des couples (Z, Y) formés d'une k -variété formelle Y et d'une sous-variété formelle Z , un morphisme $\phi : (Z, Y) \rightarrow (Z', Y')$ étant un morphisme de k -variétés formelles $Y \rightarrow Y'$ qui applique Z dans Z' .

Une structure de *cogroupe* sur un objet (A, J) de $\mathcal{C}$ consiste en la donnée d'une structure de groupe formel sur $\text{Spf}(A)$ telle que les conditions suivantes soient réalisées (notations de 2.1) :

- (1) $\Delta_A(J) \subset J \hat{\otimes}_k A + A \hat{\otimes}_k J$;
- (2) $\varepsilon_A(J) = 0$;
- (3) $c_A(J) \subset J$.

Ces conditions signifient aussi que $H = \text{Spf}(A/J)$ est un sous-groupe formel de $G = \text{Spf}(A)$. ⁽¹⁴⁵⁾

⁽¹⁴⁵⁾ N.D.E. : Notons que si (A', J') est un second cogroupe de $\mathcal{C}$, correspondant à un couple $H' \subset G'$ de k -groupes formels, alors se donner un morphisme de cogroupes $(A', J') \rightarrow (A, J)$ équivaut à se donner un morphisme de k -groupes formels $G \rightarrow G'$ qui applique H dans H' .

Supposons de plus que A soit *locale*, i.e. que $\mathrm{Spf}(A)$ soit un groupe formel *infinitésimal*. Alors, si $J \neq A$, les conditions (2) et (3) sont conséquence de (1). En effet, si J est un idéal fermé distinct de A , il est contenu dans l'idéal d'augmentation I_A , donc (2) est vérifiée, et $M = \mathrm{Spf}(A/J)$ est un sous-monoïde formel de G . Comme G est infinitésimal, il résulte de 2.7 que M est un sous-groupe formel de G , i.e. la condition (3) est vérifiée.

5.1.2. — Désignons par $\mathbf{Alpg}_k$ la catégorie des k -algèbres « *profinies graduées* » : un objet de cette catégorie consiste en la donnée d'une suite $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ de k -modules pseudocompacts et d'une structure d'algèbre profinie sur le produit $\prod_{n \geq 0} A_n$ telle qu'on ait $A_n \cdot A_m \subset A_{m+n}$ (A_n est identifié à une partie de $\prod_{i \geq 0} A_i$ au moyen de l'injection canonique); un morphisme $\psi : (A_n) \rightarrow (B_n)$ est une suite d'applications linéaires continues $\psi_n : A_n \rightarrow B_n$ telles qu'on ait $\psi_{m+n}(a \cdot a') = \psi_m(a) \cdot \psi_n(a')$ si $a \in A_m$ et $a' \in A_n$.

Définitions. — Il est clair que deux k -algèbres profinies graduées (A_n) et (B_n) ont un *coproduit* ⁽¹⁴⁶⁾ dans $\mathbf{Alpg}_k$, qui a pour n -ième composante le produit $\prod_{i=0}^n A_i \hat{\otimes}_k B_{n-i}$ des k -modules pseudocompacts $A_i \hat{\otimes}_k B_{n-i}$. Ce coproduit sera noté $(A_n) \hat{\otimes}_k (B_n)$.

Alors, une structure de cogroupe sur un objet (A_n) de $\mathbf{Alpg}_k$ est la donnée d'applications k -linéaires continues $\Delta_n : A_n \rightarrow \prod_{i=0}^n A_i \hat{\otimes}_k A_{n-i}$ et $\varepsilon : A_0 \rightarrow k$, qui induisent sur $\prod_{n \geq 0} A_n$ (posant $\varepsilon(A_i) = 0$ pour $i \geq 1$) une structure de cogroupe dans $\mathbf{Alpg}_k$.

Enfin, pour tout objet (A, J) de $\mathcal{C}$, on note $\mathrm{Gr}_J(A)$ l'algèbre profinie graduée associée à la filtration de A par les adhérences $\overline{J^n}$ des puissances de J ; on a donc $\mathrm{Gr}_J(A)_n = \overline{J^n} / \overline{J^{n+1}}$ et la multiplication de $\mathrm{Gr}_J(A)$ est induite par celle de A .

Lemme. — ⁽¹⁴⁷⁾ Soient U, V deux k -modules pseudocompacts, avec U topologiquement plat, et soient $U = U_0 \supset U_1 \supset \dots$ et $V = V_0 \supset V_1 \supset \dots$ deux suites décroissantes de sous- k -modules fermés. Filtrons le produit tensoriel complété $W = U \hat{\otimes}_k V$ à l'aide des sous-modules fermés

$$W_n = U_n \hat{\otimes}_k V_0 + U_{n-1} \hat{\otimes}_k V_1 + \dots + U_0 \hat{\otimes}_k V_n.$$

On suppose que chaque U_i/U_{i+1} est topologiquement plat sur k (de sorte que U/U_n et donc U_n le sont aussi, pour tout n). Alors, pour tout n , on a un isomorphisme

$$W_n/W_{n+1} \simeq \bigoplus_{i+j=n} (U_i/U_{i+1}) \hat{\otimes}_k (V_j/V_{j+1}).$$

Démonstration. Posons $W_{i,j} = U_i \hat{\otimes}_k V_j$ et $\overline{W}_{i,j} = (U_i/U_{i+1}) \hat{\otimes}_k (V_j/V_{j+1})$, pour tout $i, j \geq 0$. Montrons par récurrence sur n que l'application naturelle

$$\pi_n : W_n \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} \overline{W}_{i,j}$$

⁽¹⁴⁶⁾N.D.E. : On a remplacé « *somme directe* » par « *coproduit* ».

⁽¹⁴⁷⁾N.D.E. : Dans l'original, le lemme est énoncé lorsque k est un *corps*, la démonstration étant dans ce cas laissée au lecteur.

est surjective et que l'inclusion $W_{n+1} \subset \text{Ker}(\pi_n)$ est une égalité. Pour $n = 0$, la projection

$$\pi_0 : U_0 \widehat{\otimes}_k V_0 \longrightarrow (U_0/U_1) \widehat{\otimes}_k (V_0/V_1)$$

est surjective et, comme U_0 , U_0/U_1 et donc U_1 sont topologiquement plats sur k , on voit que $\text{Ker}(\pi_0) = U_0 \widehat{\otimes}_k V_1 + U_1 \widehat{\otimes}_k V_0$ et que, de plus, $U_0 \widehat{\otimes}_k V_1 \cap U_1 \widehat{\otimes}_k V_0 = U_1 \widehat{\otimes}_k V_1$.

Supposons donc $n > 0$ et le résultat établi pour $n - 1$. Posons $M_0 = U_0 \widehat{\otimes}_k V_n$ et $S_0 = \sum_{i=1}^n U_i \widehat{\otimes}_k V_{n-i}$. On a $S_0 \subset U_1 \widehat{\otimes}_k V_0$ et donc, d'après ce qui précède appliqué à $V_0 \supset V_n$ au lieu de $V_0 \supset V_1$, on a

$$M_0 \cap S_0 \subset U_0 \widehat{\otimes}_k V_n \cap U_1 \widehat{\otimes}_k V = U_1 \widehat{\otimes}_k V_n$$

d'où l'on déduit que $M_0 \cap S_0 = U_1 \widehat{\otimes}_k V_n$. Comme $W_n = M_0 + S_0$, on obtient un diagramme commutatif à lignes exactes, où l'on a posé $U'_i = U_{i+1}$ et $\overline{W}'_{i,n-1-i} = \overline{W}_{i+1,n-1-i}$ pour $i = 0, \dots, n-1$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S_0 & \longrightarrow & W_n & \longrightarrow & (U_0/U_1) \widehat{\otimes}_k V_n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \pi'_{n-1} & & \downarrow \pi_n & & \downarrow p \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{i=0}^{n-1} \overline{W}'_{i,n-1-i} & \longrightarrow & \bigoplus_{i=0}^n \overline{W}_{i,n-1} & \longrightarrow & \overline{W}_{0,n} \longrightarrow 0. \end{array}$$

Alors p est surjectif, de noyau $(U_0/U_1) \widehat{\otimes}_k V_{n+1}$. De plus, d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à la suite (U'_i) , π'_{n-1} est surjectif, de noyau égal à $W'_n = \sum_{i=1}^n W_{i,n+1-i}$. Il en résulte que π_n est surjectif, et que l'inclusion $W_{n+1} \subset \text{Ker}(\pi_n)$ est une égalité. Ceci prouve le lemme.

Revenons à un objet (A, J) de $\mathcal{C}$ et notons que, d'après 0.2.G, l'hypothèse que chaque $\overline{J}^n/\overline{J}^{n+1}$ soit topologiquement plat sur k équivaut à dire que $\text{Gr}_J(A)$ est topologiquement plate sur k .

Corollaire. — Soit $\mathcal{P}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ formée des objets (A, J) tels que A et $\text{Gr}_J(A)$ soient topologiquement plats sur k . Alors le foncteur $\mathcal{P} \rightarrow \mathbf{Alpg}_k$, $(A, J) \mapsto \text{Gr}_J(A)$ commute aux coproduits finis, donc transforme un cogroupe de $\mathcal{P}$ en un cogroupe de $\mathbf{Alpg}_k$.

En particulier, si k est un corps alors, pour tout cogroupe (A, J) de $\mathcal{C}$, $\text{Gr}_J(A)$ est un cogroupe de $\mathbf{Alpg}_k$.⁽¹⁴⁸⁾

5.1.3. — Identifions toute k -algèbre profinie Γ à la k -algèbre profinie graduée $(\Gamma_n)_{n \geq 0}$ telle que $\Gamma_0 = \Gamma$ et $\Gamma_n = 0$ si $n > 0$. En particulier, si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une k -algèbre profinie graduée, nous considérerons indifféremment A_0 comme une k -algèbre profinie ou bien comme une k -algèbre profinie graduée. Nous désignerons alors par $\rho : (A_n) \rightarrow$

⁽¹⁴⁸⁾N.D.E. : À un couple $H \subset G$ de k -groupes formels, on associe donc le « complété formel $\widehat{G}_H$ de G le long de H », qui est un k -groupe formel; de plus on va voir en 5.1.3-5.1.4 que l'inclusion $\sigma : H \hookrightarrow \widehat{G}_H$ possède une rétraction $\pi : \widehat{G}_H \rightarrow H$ et que le k -groupe formel $N = \text{Ker}(\pi)$ s'identifie, comme variété formelle, au complété de l'espace homogène G/H le long de la section unité. Ceci sera utile en 5.2.2.

A_0 le morphisme de $\mathbf{Alpg}_{/k}$ tel que $\rho_0 = \text{id}_{A_0}$ et $\rho_n = 0$ si $n > 0$. De même, $\tau : A_0 \rightarrow (A_n)$ désignera la section de ρ telle que $\tau_0 = \text{id}_{A_0}$ et $\tau_n = 0$ si $n > 0$.

Toute structure de cogroupe sur $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ induit une structure de cogroupe sur A_0 telle que ρ et τ soient des homomorphismes de cogroupes. Dans ce cas, notons I_0 l'idéal d'augmentation de A_0 et posons $A'_n = A_n / \overline{I_0 A_n}$ pour tout $n \geq 0$ (de sorte que $A'_0 = k$).

Alors, $(A'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un cogroupe dans $\mathbf{Alpg}_{/k}$ (noter que, comme $A_0 = I_0 \oplus k \cdot 1$, alors $I_0 \widehat{\otimes}_k A_n \simeq \overline{I_0 A_n}$ est facteur direct de A_n , pour tout n). Puisque τ est une section de ρ alors, d'après 2.4.A, le cogroupe $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est le « coproduit semi-direct » de A_0 et du cogroupe $(A'_n)_{n \in \mathbb{N}}$. De façon précise, $(A'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est isomorphe, comme objet de $\mathbf{Alpg}_{/k}$, au noyau du couple :

$$(A_n) \xrightarrow[\text{(id} \widehat{\otimes} \rho) \Delta]{\tau_1} (A_n) \widehat{\otimes}_k A_0$$

(où $\Delta : (A_n) \rightarrow (A_n) \widehat{\otimes} (A_n)$ est la comultiplication de (A_n) et $\tau_1(x) = x \widehat{\otimes} 1$), et, identifiant A'_n à son image dans A_n , l'application

$$(A'_n \widehat{\otimes}_k A_0) \longrightarrow (A_n), \quad a'_n \widehat{\otimes} a_0 \mapsto a'_n a_0$$

est un isomorphisme de $\mathbf{Alpg}_{/k}$. (N. B. Ce n'est pas un isomorphisme de cogroupes, mais $\Delta(A') \subset A \widehat{\otimes} A'$ et $(\gamma \rho' \widehat{\otimes} \text{id}) \circ \Delta|_{A'} = \Delta'$, où Δ' est la comultiplication de A' et $\gamma \rho'$ la projection $A \rightarrow A'$, cf. 2.4.A.)

555 **5.1.4.** — Soient (A, J) un objet de $\mathcal{C}$ et $(A_n) = \text{Gr}_J(A)$ l'objet de $\mathbf{Alpg}_{/k}$ associé, i.e. $A_n = \overline{J^n} / \overline{J^{n+1}}$ pour tout $n \geq 0$. Il est clair que l'algèbre $\mathcal{A} = \prod_{n \geq 0} A_n$ est engendrée par A_0 et A_1 , c'est-à-dire que, pour $n \geq 1$, l'application

$$(1) \quad A_1 \widehat{\otimes}_{A_0} A_1 \widehat{\otimes}_{A_0} \cdots \widehat{\otimes}_{A_0} A_1 \longrightarrow A_n$$

définie par la multiplication est surjective.

Supposons de plus que (A, J) soit un cogroupe de $\mathcal{C}$ et que A et les quotients $\overline{J^n} / \overline{J^{n+1}}$ soient plats sur k . Alors, d'après le corollaire 5.1.2, $\text{Gr}_J(A)$ est un cogroupe de $\mathbf{Alpg}_{/k}$. Donc, d'après 5.1.3, si l'on pose

$$(2) \quad A'_n = \{x \in \overline{J^n} / \overline{J^{n+1}} \mid \Delta(x) - x \widehat{\otimes} 1 \in \bigoplus_{i=1}^n (\overline{J^{n-i}} / \overline{J^{n-i+1}}) \widehat{\otimes} (\overline{J^i} / \overline{J^{i+1}})\},$$

alors l'application $(A'_n \widehat{\otimes} A_0) \rightarrow (A_n)$, $a'_n \widehat{\otimes} a'_0 \mapsto a'_n a_0$ est un isomorphisme de $\mathbf{Alpg}_{/k}$. ⁽¹⁴⁹⁾

⁽¹⁴⁹⁾ N.D.E. : Soient G, H et $\widehat{G}_H$ les k -groupes formels correspondant à $A, A_0 = A/J$ et $\text{Gr}_J(A)$; alors $\tau : A_0 \hookrightarrow \text{Gr}_J(A)$ correspond à une rétraction $\pi : \widehat{G}_H \rightarrow H$ de l'inclusion $H \hookrightarrow \widehat{G}_H$, et ce qui précède signifie que $\widehat{G}_H$ est le produit semi-direct de $N = \text{Ker}(\pi)$ par H .

Notant I_0 l'idéal d'augmentation de A_0 , on déduit de (1) et du diagramme commutatif ci-dessous, où $A_1' \widehat{\otimes}^n$ désigne $A_1' \widehat{\otimes}_k \cdots \widehat{\otimes}_k A_1'$ (n facteurs) :

$$\begin{array}{ccccc}
 A_1 \widehat{\otimes}_{A_0} \cdots \widehat{\otimes}_{A_0} A_1 & \xleftarrow{\sim} & A_1' \widehat{\otimes}^n \widehat{\otimes}_k A_0 & \xleftarrow{\sim} & (A_1' \widehat{\otimes}^n \widehat{\otimes}_k I_0) \oplus A_1' \widehat{\otimes}^n \\
 \downarrow m & & \downarrow m' \widehat{\otimes} \text{id} & & \downarrow m' \widehat{\otimes} \text{id} \oplus m' \\
 A_n & \xleftarrow{\sim} & A_n' \widehat{\otimes}_k A_0 & \xleftarrow{\sim} & (A_n' \widehat{\otimes}_k I_0) \oplus A_n'
 \end{array}$$

que l'application

$$(3) \quad m' : A_1' \widehat{\otimes}_k \cdots \widehat{\otimes}_k A_1' \longrightarrow A_n'$$

induite par la multiplication est surjective ; autrement dit, la k -algèbre profinie $\mathcal{A}' = \prod_{n \geq 0} A_n'$ est engendrée par ses termes de degré 1.

⁽¹⁵⁰⁾ Revenons maintenant à l'hypothèse (i) de la proposition 5.1 : soient G un k -groupe formel infinitésimal topologiquement plat, A son algèbre affine, I_A l'idéal d'augmentation de A , B une sous-algèbre fermée de A , et $J = \overline{AI_B}$, où $I_B = B \cap I_A$. On note H le sous-groupe formel $\text{Spf}(A/J)$ et π la projection $A \rightarrow A/J$. On suppose que $A/\overline{J^n}$ est topologiquement plat sur k , pour tout $n \geq 1$, et que B est contenue dans le noyau $\tilde{B}$ du couple :

$$A \xrightarrow[\text{(id}_A \widehat{\otimes}_k \pi) \Delta_A]{\tau_1} A \widehat{\otimes}_k (A/J) .$$

Soit $(A_n) = \text{Gr}_J(A)$, soit $I_0 = I_A/J$ l'idéal d'augmentation de $A_0 = A/J$, et définissons $(A_n')_{n \in \mathbb{N}}$ comme en (2) plus haut. On note $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $(\tilde{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$) l'objet de $\mathbf{Alpg}_k$ associé à la filtration de B (resp. $\tilde{B}$) induite par celle de A , i.e. définie par les idéaux $B \cap \overline{J^n}$ (resp. $\tilde{B} \cap \overline{J^n}$). Alors, il est clair que $B_n \subset \tilde{B}_n \subset A_n'$ pour tout n , et que

$$\mathcal{B} = \prod_{n \geq 0} B_n \subset \tilde{\mathcal{B}} = \prod_{n \geq 0} \tilde{B}_n$$

sont des sous-algèbres de $\mathcal{A}' = \prod_{n \geq 0} A_n'$.

D'autre part, J (resp. $\overline{J^2}$) est l'image dans A de $I_B \widehat{\otimes}_k A$ (resp. de $\overline{I_B^2} \widehat{\otimes}_k A$). Par conséquent, l'application

$$(I_B/\overline{I_B^2}) \widehat{\otimes}_k A \longrightarrow J/\overline{J^2} = A_1 \simeq A_1' \widehat{\otimes}_k A_0$$

⁽¹⁵⁰⁾ N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit, et l'on a mis à la fin le « supplément » $\overline{I_B^2} = B \cap \overline{J^n}$ (qui n'est pas nécessaire pour établir la proposition 5.1).

est surjective, et elle se factorise par $(I_B/\overline{I_B^2}) \hat{\otimes}_k A_0$. Comme $A_0 = k \cdot 1 \oplus I_0$, on déduit du diagramme commutatif et exact :

$$\begin{array}{ccc} (I_B/\overline{I_B^2}) \hat{\otimes}_k A_0 & \xleftarrow{\sim} & (I_B/\overline{I_B^2}) \hat{\otimes}_k I_0 \oplus (I_B/\overline{I_B^2}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ J/\overline{J^2} & \xleftarrow{\sim} & A'_1 \hat{\otimes}_k I_0 \oplus A'_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

que A'_1 est l'image de $I_B/\overline{I_B^2}$, de sorte qu'on a $B_1 = A'_1$. Comme $\mathcal{A}'$ est engendrée par A'_1 , il en résulte que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$A'_n \subset B_n \subset \tilde{B}_n \subset A'_n,$$

556 d'où $B_n = \tilde{B}_n = A'_n$. ⁽¹⁵¹⁾

Enfin, comme le groupe formel G est *infinitésimal*, on a $\mathfrak{r}(A) = I_A$ et donc les idéaux $\overline{I_A^n}$ tendent vers 0 (cf. 0.1.2); a fortiori, les idéaux $\overline{J^n}$ tendent vers 0, et donc les filtrations induites sur $\tilde{B}$ et B sont séparées. De plus, comme B est une sous-algèbre *fermée* de A , elle est complète pour la topologie définie par les idéaux $B \cap \overline{J^n}$. Par conséquent, il résulte de [CA], § V.7, Lemme 1 (voir aussi 5.1.5 ci-dessous) que $B = \tilde{B}$. Ceci achève la démonstration de la proposition 5.1.

On a de plus le supplément suivant. Pour tout n , $\overline{J^n} = \overline{A I_B^n}$ est l'image dans A de $A \hat{\otimes}_B \overline{I_B^n}$ et aussi de $A \hat{\otimes}_B (B \cap \overline{J^n})$. Or, d'après hypothèse, l'algèbre affine A/J du sous-groupe formel H est topologiquement plate sur k . Donc, d'après le théorème 2.4, le morphisme $G = \mathrm{Spf}(A) \rightarrow G/H = \mathrm{Spf}(B)$ est *surjectif et topologiquement plat*; on a donc

$$A \hat{\otimes}_B \overline{I_B^n} = \overline{J^n} = A \hat{\otimes}_B (B \cap \overline{J^n}),$$

et ceci entraîne que $\overline{I_B^n} = B \cap \overline{J^n}$ pour tout n . Ceci découle aussi du fait que les applications

$$\overline{I_B^n}/\overline{I_B^{n+1}} \longrightarrow A'_i = (B \cap \overline{J^n})/(B \cap \overline{J^{n+1}})$$

sont surjectives, et de 5.1.5 (ii) ci-dessous, appliqué à $B'_n = \overline{I_B^n}$ et $B_n = B \cap \overline{J^n}$.

5.1.5. Lemme. — ⁽¹⁵²⁾ (i) Soient M et N deux groupes abéliens filtrés par des suites décroissantes de sous-groupes $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(N_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. On suppose que la réunion des M_n (resp. N_n) égale M (resp. N), que l'intersection des M_n (resp. N_n) est nulle, et que M est complet pour la topologie définie par les M_n . Soit $f : M \rightarrow N$ un morphisme de groupes filtrés.

⁽¹⁵¹⁾ N.D.E. : Avec les notations de la N.D.E. (149), ceci entraîne que le complété formel de G/H le long de la section unité (qui a $\prod_n B_n$ pour algèbre affine) est isomorphe, comme variété formelle, au k -groupe formel N .

⁽¹⁵²⁾ N.D.E. : L'original énonçait uniquement le point (ii); pour la commodité du lecteur, on a énoncé en (i) le lemme 1 de [CA], § V.7.

a) Si f induit une surjection des gradués associés, alors f est une surjection et N est complet pour la topologie définie par les N_n .

b) Si f induit une injection des gradués associés, alors f est une injection.

(ii) Soient B un groupe abélien, $B = B'_0 \supset B'_1 \supset \dots$ et $B = B_0 \supset B_1 \supset \dots$ deux filtrations séparées de B par des sous-groupes tels que $B'_n \subset B_n$ pour tout n . On suppose B complet pour la topologie définie par la filtration (B'_n) .

Si l'application $B'_i/B'_{i+1} \rightarrow B_i/B_{i+1}$ est surjective pour tout i , alors $B'_n = B_n$ pour tout n .

En effet, (i) est le lemme 1 de [CA], § V.7 (voir aussi [BAC], III, § 2.8), et (ii) en découle en prenant $M = B'_n \supset B'_{n+1} \supset \dots$ et $N = B_n \supset B_{n+1} \supset \dots$.

5.2. — Dans toute la suite de la Section 5, k désigne un corps parfait de caractéristique $p > 0$.

Nous posons $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si B est une k -algèbre profinie et si $r \in \mathbb{N}$, nous notons $((x^{p^r}))_{x \in \mathfrak{r}(B)}$ l'idéal fermé de B qui est engendré par les éléments x^{p^r} , où x parcourt le radical $\mathfrak{r}(B)$ de B . Si $r = \infty$, nous utilisons la même notation en convenant que $((x^{p^\infty}))_{x \in \mathfrak{r}(B)}$ est l'idéal nul. Dans les deux cas, B_r désigne le quotient $B/((x^{p^r}))_{x \in \mathfrak{r}(B)}$.

Nous disons que B est de hauteur $\leq r$ si $((x^{p^r}))_{x \in \mathfrak{r}(B)}$ est l'idéal nul ; si cela a lieu et si r est fini, nous disons que B est de hauteur finie.

Considérons en particulier le cas où B est de la forme $k[[\omega]]$, ω étant un k -espace vectoriel pseudocompact (cf. 1.2.5). ⁽¹⁵³⁾ Nous disons alors que B est une algèbre de séries formelles et que B_r est une algèbre de séries formelles tronquée ($r \in \overline{\mathbb{N}}$; nous convenons donc de dire que $B = B_\infty$ est également « tronquée »). Si $B = k[[\omega]]$, nous écrivons aussi $((x^{p^r}))_{x \in \omega}$ au lieu de $((x^{p^r}))_{x \in \mathfrak{r}(B)}$.

557

Notations. — Soit ω un k -espace vectoriel pseudocompact filtré par une suite croissante de sous-espaces vectoriels fermés

$$0 = \omega_0 \subset \omega_1 \subset \omega_2 \subset \omega_3 \subset \dots$$

(a) L'idéal fermé de $k[[\omega]]$ qui est engendré par les éléments x^{p^r} , où r parcourt $\mathbb{N}$ et x parcourt ω_r , sera noté $((x^{p^r}))_{r \in \omega_r}$.

(b) D'autre part, nous désignerons par ${}_r\omega$ l'espace vectoriel pseudocompact filtré tel que

$${}_r\omega_i = \omega_i \quad \text{si} \quad i < r \quad \text{et} \quad {}_r\omega_i = \omega \quad \text{si} \quad i \geq r.$$

Théorème (Dieudonné-Cartier). — Soit $H \rightarrow G$ un monomorphisme de groupes formels infinitésimaux sur un corps parfait k de caractéristique $p > 0$. Soit B l'algèbre affine de l'espace homogène G/H et supposons vérifiée l'une des trois conditions suivantes : ⁽¹⁵⁴⁾

⁽¹⁵³⁾ N.D.E. : Dans l'original, l'auteur utilise « espace vectoriel linéairement compact », ce qui équivaut à « espace vectoriel pseudocompact » (cf. [BAC], § III.2, Exercices 15 a), 19 a) et 20 d)). On a préféré conserver la terminologie « pseudocompact », utilisée jusqu'ici.

⁽¹⁵⁴⁾ N.D.E. : D'une part, on a remplacé $H \setminus G$ par G/H , et de même dans la démonstration ; d'autre part, on a ajouté la condition (iii).

- (i) B est de hauteur finie (ceci a lieu en particulier si G est de hauteur finie).
- (ii) B est un anneau local noethérien complet.
- (iii) B est un anneau réduit.

Alors B est isomorphe au produit tensoriel complété d'une famille finie d'algèbres de séries formelles tronquées.

558

La démonstration de ce théorème occupe les paragraphes 5.2.1 à 5.2.5.

5.2.1. — Soient A l'algèbre affine de G , I_A son idéal d'augmentation, et $I = B \cap I_A$. D'après 2.4, on a $H = \text{Spf}(A/\overline{AI})$ et $B = \{x \in A \mid \Delta(x) - 1 \otimes x \in A \otimes \overline{AI}\}$. Posons $\omega = I/\overline{I^2}$. On désigne par I_r le sous-idéal fermé de I formé des x tels $x^{p^r} = 0$, par ω_r l'image canonique de I_r dans ω . Nous allons démontrer :

Proposition. — *S'il existe une section continue $\sigma : \omega \rightarrow I$ de la projection $I \rightarrow I/\overline{I^2}$, telle que $\sigma(\omega_r) \subset I_r$ pour tout r , alors B est isomorphe à $k[[\omega]]/((x^{p^r}))_{x \in \omega_r}$.*

Une telle section se prolonge en effet en un morphisme continu $k[[\omega]] \rightarrow B$, qui se factorise à travers $B' = k[[\omega]]/((x^{p^r}))_{x \in \omega_r}$. Nous prouvons de 5.2.2 à 5.2.5 que le morphisme

$$\phi : B' = k[[\omega]]/((x^{p^r}))_{x \in \omega_r} \longrightarrow B$$

ainsi obtenu est un isomorphisme.

5.2.1.A. — ⁽¹⁵⁵⁾ Pour chaque $r \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{I}_r = \overline{I^2} + I_r$, de sorte que $\mathcal{I}_r/\overline{I^2} \simeq \omega_r$; on a alors un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_{r-1} & \longrightarrow & \mathcal{I}_r & \longrightarrow & \mathcal{I}_r/\mathcal{I}_{r-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \wr \\ 0 & \longrightarrow & \omega_{r-1} & \longrightarrow & \omega_r & \longrightarrow & \omega_r/\omega_{r-1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

et puisque k est un corps, les lignes sont scindées : on peut compléter une pseudobase $\mathcal{B}_{r-1}$ de $\mathcal{I}_{r-1}$ en une pseudobase $\mathcal{B}_{r-1} \cup \mathcal{B}'_r$ de $\mathcal{I}_r$, et alors le sous-espace fermé S_r de pseudobase $\mathcal{B}'_r$ est un supplémentaire de $\mathcal{I}_{r-1}$ dans $\mathcal{I}_r$, et la projection $\pi : I \rightarrow \omega$ induit un isomorphisme de S_r sur un supplémentaire ω'_r de ω_{r-1} dans ω_r . Notons $\mathcal{I}_\infty$ l'idéal fermé $\bigcup_r \mathcal{I}_r$, il admet de même un supplémentaire S_∞ dans I , et π induit un isomorphisme de $\mathcal{I}_\infty/\overline{I^2}$ (resp. de S_∞) sur l'adhérence ω_∞ de la réunion des ω_r (resp. sur un supplémentaire ω'_∞ de ω_∞ dans ω). Notons η l'isomorphisme $S_\infty \xrightarrow{\sim} \omega'_\infty$. On obtient alors des applications linéaires continues :

$$\begin{array}{ccc} \overline{I^2} \times S_\infty \times \widehat{\bigoplus_r S_r} & \xrightarrow{\phi} & I \\ \eta \downarrow \times \theta & & \\ \omega = \omega'_\infty \times \omega_\infty & & \end{array}$$

⁽¹⁵⁵⁾ N.D.E. : On a ajouté les paragraphes 5.2.1.A et 5.2.1.B.

où $\widehat{\bigoplus_r S_r}$ est la somme directe des S_r dans $\mathbf{PC}(k)$, i.e. $(\prod_r S_r^\dagger)^*$ (cf. N.D.E. (16) de 0.2.2) et où $\theta : \widehat{\bigoplus_r S_r} \rightarrow \omega_\infty$ est induite par les applications $S_r \xrightarrow{\sim} \omega'_r \hookrightarrow \omega_\infty$. On voit donc qu'une condition *suffisante* (mais non nécessaire, voir ci-dessous) pour obtenir une section $\sigma : \omega \rightarrow \mathbf{I}$ comme désiré, est que θ soit un *isomorphisme*. Par dualité (cf. 0.2.2), ceci équivaut à dire que l'application linéaire $\omega_\infty^\dagger \rightarrow \prod_r S_r^\dagger$ est *bijective*.

5.2.1.B. — Notons comme précédemment $\omega_\infty = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \omega_n}$. Un second cas où une section $\sigma : \omega \rightarrow \mathbf{I}$ comme désiré existe, est le cas où ω_∞ possède une pseudobase $\mathcal{B}_\infty$ qui est réunion de pseudobases des ω_n/ω_{n-1} , pour $n \in \mathbb{N}^*$ (on peut alors la compléter par une pseudobase $\mathcal{B}'_\infty$ de ω/ω_∞ pour obtenir une pseudobase de ω compatible avec la filtration). Posant $V = \omega_\infty^\dagger$ et notant V_n l'orthogonal dans V de ω_n , ceci équivaut à dire que, dans la catégorie des k -espaces vectoriels « ordinaires », la filtration décroissante séparée

$$V = V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \dots$$

est scindée, i.e. que V est la somme directe, pour $n \in \mathbb{N}$, de sous-espaces F_n tels que $F_n \simeq V_n/V_{n+1}$. Ceci n'est pas nécessairement le cas : par exemple si V est l'espace $\mathcal{S} = k^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de k et $\mathcal{S}_n$ le sous-espace des suites (u_i) telles que $u_i = 0$ pour $i < n$, de sorte que $\dim \mathcal{S}_n/\mathcal{S}_{n+1} = 1$, alors $\mathcal{S}$ n'est pas isomorphe à la somme directe des $\mathcal{S}_n/\mathcal{S}_{n+1}$ puisque $\mathcal{S}$ n'est pas de dimension dénombrable (par contre, $\mathcal{S}$ est ici le *produit* des $\mathcal{S}_n/\mathcal{S}_{n+1}$, cf. 5.2.1.A). C'est cependant le cas si V est de dimension dénombrable. ⁽¹⁵⁶⁾ En effet, soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base de V , on va construire par récurrence sur n une fonction croissante $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et des sous-espaces F_i , pour $i = 0, \dots, g(n)$, tels que $F_i \simeq V_i/V_{i+1}$ et que $F_{\leq g(n)} = \bigoplus_{i=0}^{g(n)} F_i$ soit un supplémentaire de $V_{g(n)+1}$ contenant $e_0, \dots, e_n$; on aura alors $V = \bigoplus_{i \geq 0} F_i$. Soit $n+1 \in \mathbb{N}$, on peut supposer l'assertion établie pour n (l'assertion étant vide pour $n = -1$). Si $e_{n+1} \in F_{\leq g(n)}$, on pose $g(n+1) = g(n)$, sinon on écrit $e_{n+1} = f + x$ avec $f \in F_{\leq g(n)}$ et $x \in V_{g(n)+1}$ non nul. Soit alors j le plus petit entier tel que $x \in V_j - V_{j+1}$; pour $i = g(n) + 1, \dots, j$, choisissons un supplémentaire F_i de V_{i+1} dans V_i , de sorte que $e_{n+1} \in F_j$, on pose alors $g(n+1) = j$.

5.2.1.C. — ⁽¹⁵⁷⁾ En particulier, les deux conditions précédentes (5.2.1.A et B) sont vérifiées quand la filtration de ω est *stationnaire*, i.e. quand il existe un entier n_0 tel que $\omega_n = \omega_{n_0}$ pour $n_0 \leq n < +\infty$. Dans ce cas, on obtient un isomorphisme de $k[[\omega]]/((x^{p^r}))_{x \in \omega_r}$ sur le produit tensoriel complété :

$$\frac{k[[\omega_1]]}{((x^p))_{x \in \omega_1}} \widehat{\otimes} \frac{k[[\omega'_2]]}{((x^{p^2}))_{x \in \omega'_2}} \widehat{\otimes} \dots \widehat{\otimes} \frac{k[[\omega'_{n_0}]]}{((x^{p^{n_0}}))_{x \in \omega'_{n_0}}} \widehat{\otimes} k[[\omega'_\infty]]$$

où ω'_n (resp. ω'_∞) est un supplémentaire de ω_{n-1} dans ω_n (resp. de $\omega_\infty = \omega_{n_0}$ dans ω). La filtration de ω est évidemment stationnaire dans le cas (i), i.e. si $\omega_r = \omega$ pour r assez grand, et dans le cas (ii), i.e. si ω est de dimension finie, et aussi dans le cas (iii), i.e. si $\mathbf{I}_r = 0$ pour tout r (et dans ce cas B sera isomorphe à l'algèbre de séries

⁽¹⁵⁶⁾N.D.E. : Ce paragraphe est le fruit de discussions avec J.-M. Fontaine et E. Bouscaren ; en particulier Bouscaren nous a indiqué la démonstration qui suit.

⁽¹⁵⁷⁾N.D.E. : On revient ici à l'original, qu'on a raccourci en tenant compte des ajouts précédents.

formelles $k[[\omega]]$). Les remarques ci-dessus impliquent donc notre théorème, modulo les points 5.2.2–5.2.5 ci-dessous.

559 5.2.2. — *Supposons d'abord B de hauteur ≤ 1 , c.-à-d., que $x^p = 0$ si $x \in I$. D'après 5.1.4, le gradué $\text{Gr}_I(B)$ associé à B pour la filtration $I \supset \overline{I}^2 \supset \overline{I}^3 \supset \dots$ est muni d'une structure de cogroupe dans la catégorie $\mathbf{Alpg}_{/k}$, i.e. l'algèbre profinie $C = \prod_{n \geq 0} \text{Gr}_I(B)_n$ est l'algèbre affine d'un k -groupe formel N. Il est clair qu'on a $\omega_{N/k} = I/\overline{I}^2$ et que N est infinitésimal de hauteur ≤ 1 . D'après 4.4, l'application identique de $\omega_{N/k}$ induit donc un isomorphisme de $B' = k[[\omega_{N/k}]]/((x^p))_{x \in \omega_{N/k}}$ sur C. Ceci implique en particulier que l'application ϕ de 5.2.1 induit un isomorphisme des gradués associés à B' et B lorsqu'on filtre B' et B par les puissances de l'idéal d'augmentation. Donc ϕ est un isomorphisme, d'après [CA], § V.7, Lemme 1 (voir aussi 5.1.5).*

5.2.3. — *Supposons maintenant B de hauteur finie $\leq r$. Soit π l'isomorphisme $x \mapsto x^p$ de k sur k . L'application linéaire de $B \widehat{\otimes}_{\pi} k$ dans B qui envoie $b \widehat{\otimes}_{\pi} x$ sur $b^p x = (bx^{1/p})^p$ a une image fermée qui n'est autre que la sous-algèbre fermée $B^p = \{b^p \mid b \in B\}$ de B. Posons $J = B^p \cap I = B^p \cap I_A$.*

⁽¹⁵⁸⁾ Notons G_1 le noyau du morphisme de Frobenius $\text{Fr} : G \rightarrow G^{(p)}$ et HG_1 le sous-groupe formel de G image réciproque du sous-groupe formel $H^{(p)}$ de $G^{(p)}$. Alors HG_1 est défini par l'idéal fermé engendré par les puissances p -ièmes d'éléments de $\overline{AI}$, qui égale $\overline{AJ}$. D'autre part, comme la formation de G/H commute au changement de base (puisque G/H représente le *faisceau-quotient* pour la topologie plate, cf. 2.4), alors $(G/H)^{(p)} = G^{(p)}/H^{(p)}$ et l'on a donc des diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\text{Fr}} & G^{(p)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G/H & \xrightarrow{\text{Fr}} & G^{(p)}/H^{(p)} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{a \widehat{\otimes} 1 \mapsto a^p} & A \widehat{\otimes}_{\pi} k \\ \uparrow & & \uparrow \\ B & \xleftarrow{b \widehat{\otimes} 1 \mapsto b^p} & B \widehat{\otimes}_{\pi} k \end{array}$$

dont on déduit que B^p est l'algèbre affine du quotient G/HG_1 . ⁽¹⁵⁹⁾ Notons provisoirement C l'algèbre affine du quotient HG_1/H . Comme la formation de G/H commute au changement de base, on a un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} HG_1 & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ HG_1/H & \longrightarrow & G/H \end{array}$$

d'où un isomorphisme $A \widehat{\otimes}_B C \simeq A/\overline{AJ} = A \widehat{\otimes}_B (B/\overline{BJ})$, et comme A est topologiquement libre sur B (d'après 2.4, puisque A et B sont locales), il en résulte que le

⁽¹⁵⁸⁾N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.

morphisme naturel $B/\overline{BJ} \rightarrow C$ est un isomorphisme, donc $B/\overline{BJ}$ est l'algèbre affine de HG_1/H ⁽¹⁵⁹⁾ et bien sûr $B/\overline{BJ} = B_1$ est de hauteur ≤ 1 puisque $J = ((x^p))_{x \in \mathfrak{r}(B)}$.

Soient $B' = k[[\omega]]/((x^{p^r}))_{x \in \omega_r}$, $\phi : B' \rightarrow B$ le morphisme introduit en 5.2.1, B'^p la sous-algèbre $\{x^p \mid x \in B'\}$, et J' l'idéal d'augmentation de B'^p . Alors, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} B' & \xrightarrow{\phi} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ B'_1 = B'/\overline{B'J'} & \xrightarrow{\phi_1} & B_1 = B/\overline{BJ} \end{array}$$

et, d'après 5.2.2, ϕ_1 est un isomorphisme.

560

D'autre part, d'après 2.4, A est topologiquement plat sur $B = \mathcal{A}(G/H)$ et sur $B^p = \mathcal{A}(G/HG_1)$ donc, d'après 1.3.3, B est topologiquement plat sur B^p . De plus, d'après 5.2.4 ci-dessous, le morphisme $B'^p \rightarrow B^p$ induit par ϕ est un isomorphisme. On peut alors appliquer 0.3.4 à l'anneau pseudocompact $B'^p = B^p$ et aux B^p -modules pseudocompacts $M = B'$, $N = B$: d'après ce qui précède, $\phi_1 = \phi \hat{\otimes}_{B^p} k$ est un isomorphisme, et il en résulte que ϕ est un isomorphisme. Ceci prouve 5.2 lorsque B est de hauteur finie, modulo le point 5.2.4 ci-dessous.

5.2.4. — Pour tout espace vectoriel pseudocompact V sur k , nous notons πV l'espace $V \hat{\otimes}_{\pi} k$ déduit de V par l'extension $x \mapsto x^p$ du corps des scalaires. ⁽¹⁶⁰⁾ On a alors un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \pi \overline{I^2} & \xrightarrow{\alpha} & \pi I & \xrightarrow{\beta} & \pi \omega & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \\ 0 & \longrightarrow & \overline{J^2} & \xrightarrow{\gamma} & J & \xrightarrow{\delta} & \overline{\omega} & \longrightarrow & 0 \end{array},$$

où l'on a posé $\overline{\omega} = J/\overline{J^2}$ et où les applications u, v, w sont induites par l'application linéaire $x \otimes a \mapsto x^p a$ de πB dans B^p . Comme u et v sont des surjections, w est une surjection et a pour noyau l'image $\pi \omega_1$ de $\pi I_1 = \text{Ker}(v)$.

Alors, posant $J_n = \{x \in J \mid x^{p^n} = 0\}$ et $\overline{\omega}_n = \delta(I_n)$, on a $J_n = v(\pi I_{n+1})$ et $\overline{\omega}_n = w(\pi \omega_{n+1})$, pour tout $n \geq 0$. La section $\pi \sigma : \pi \omega \rightarrow \pi I$, qui est induite par la section σ de 5.2.1, définit donc par passage au quotient une section $\tau : \overline{\omega} \rightarrow J$ qui est compatible avec les filtrations de J et $\overline{\omega}$. Comme B^p est de hauteur $\leq r-1$, cette section induit, par hypothèse de récurrence, un isomorphisme

$$\psi : B'' = k[[\overline{\omega}]]/((x^{p^n}))_{x \in \overline{\omega}_n} \xrightarrow{\sim} B^p.$$

Or B'' s'identifie à B'^p et ψ au morphisme $B'^p \rightarrow B^p$ induit par ϕ , et donc *notre* 561

⁽¹⁵⁹⁾N.D.E. : Comme indiqué dans l'original, ceci se déduit aussi de la proposition 5.1, mais on a préféré indiquer l'argument ci-dessus, qui n'utilise pas l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) de *loc. cit.*.

⁽¹⁶⁰⁾N.D.E. : Comme k est parfait, on peut identifier πV au groupe abélien V sur lequel k agit par $\lambda \cdot v = \lambda^{1/p} v$.

théorème est démontré quand B est de hauteur finie.

Remarque 5.2.4.A. — ⁽¹⁶¹⁾ Supposons B de hauteur $\leq r + 1$ (avec $r \in \mathbb{N}^*$), alors $I_{r+1} = I$ et l'on a un isomorphisme

$$(1) \quad B \simeq \frac{k[[S_1]]}{((x_1^p))_{x_1 \in S_1}} \widehat{\otimes}_k \cdots \widehat{\otimes}_k \frac{k[[S_r]]}{((x_r^{p^r}))_{x_r \in S_r}} \widehat{\otimes}_k \frac{k[[S_{r+1}]]}{((x_{r+1}^{p^{r+1}}))_{x_{r+1} \in S_{r+1}}}$$

où chaque S_n est un supplémentaire de $\overline{I^2} + I_{n-1}$ dans $\overline{I^2} + I_n$. Alors $\omega = I/\overline{I^2}$ s'identifie à $\prod_{i=1}^{r+1} S_i$, et l'on voit facilement que, pour $n = 1, \dots, r + 1$, l'image ω_n de I_n dans ω s'identifie à $\prod_{i=1}^n S_i$.

Ceci a la conséquence suivante. Soit $B_r = B/J_r$, où $J_r = ((x^{p^r}))_{x \in \tau(B)}$, et soit $\mathfrak{m} = I/J_r$ l'idéal d'augmentation de B_r ; comme $J_r \subset \overline{I^2}$, alors $\omega(r) = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ s'identifie à ω . Pour $n = 1, \dots, r$, notons $\omega(r)_n$ l'image dans $\omega(r)$ de $\mathfrak{m}_n$; c'est aussi l'image dans ω de $\{x \in I \mid x^{p^n} \in J_r\}$, donc $\omega(r)_n$ contient ω_n . D'autre part, il résulte de l'isomorphisme (1) que l'on a $J_r = ((x_{r+1}^{p^r}))_{x_{r+1} \in S_{r+1}}$, d'où

$$(2) \quad B_r \simeq \frac{k[[S_1]]}{((x_1^p))_{x_1 \in S_1}} \widehat{\otimes}_k \cdots \widehat{\otimes}_k \frac{k[[S_r]]}{((x_r^{p^r}))_{x_r \in S_r}} \widehat{\otimes}_k \frac{k[[S_{r+1}]]}{((x_{r+1}^{p^r}))_{x_{r+1} \in S_{r+1}}}$$

et donc, d'après ce qui précède, $\omega(r)_n$ s'identifie à $\prod_{i=1}^n S_i$ pour $n = 1, \dots, r - 1$. On obtient donc que l'inclusion $\omega_n \subset \omega(r)_n$ est une *égalité*, pour $n = 1, \dots, r - 1$.

5.2.5. — *Il reste à considérer le cas où B est de hauteur infinie*, et où la projection $I \rightarrow \omega$ possède une section σ compatible avec les filtrations de ω et I . Considérons le morphisme

$$\phi : B' = k[[\omega]]/((x^{p^n}))_{x \in \omega_n} \longrightarrow B$$

induit par σ ; il suffit de montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'application $\phi_r : B'_r \rightarrow B_r$ induite par ϕ est inversible. ⁽¹⁶²⁾

Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, notons G_r le noyau du morphisme de Frobenius itéré $G \rightarrow G^{(p^r)}$ et HG_r le sous-groupe formel de G image réciproque du sous-groupe formel $H^{(p^r)}$ de $G^{(p^r)}$, de sorte que HG_r est défini par l'idéal fermé engendré par les puissances p^r -ièmes d'éléments de $\overline{AI}$, qui égale $\overline{AJ_r}$, où $J_r = \{x^{p^r} \mid x \in I\}$. On obtient alors, exactement comme en 5.2.3, que $B_r = B/\overline{BJ_r}$ est l'algèbre affine de HG_r/H (et est bien sûr de hauteur $\leq r$).

Notons $\mathfrak{m}(r) = I/\overline{BJ_r}$ l'idéal d'augmentation de B_r ; la projection canonique de B sur B_r induit évidemment un isomorphisme de $\omega = I/\overline{I^2}$ sur $\omega(r) = \mathfrak{m}(r)/\overline{\mathfrak{m}(r)^2}$, qui nous permet d'identifier ces deux espaces. Soit $\omega(r)_n$ l'image dans $\omega(r)$ de l'idéal fermé $\mathfrak{m}(r)_n = \{y \in \mathfrak{m}(r) \mid y^{p^n} = 0\}$; c'est aussi l'image dans ω de l'idéal fermé

⁽¹⁶¹⁾ N.D.E. : On a ajouté cette remarque, utilisée en 5.2.5.

⁽¹⁶²⁾ N.D.E. : En effet, B' (resp. B) est la limite projective des B'_r (resp. B_r). D'autre part, on a modifié l'original dans ce qui suit, en tenant compte de l'ajout fait dans 5.2.3.

$I(r)_n = \{x \in I \mid x^{p^n} \in \overline{BJ_r}\}$. ⁽¹⁶³⁾ Il est clair que $\omega_n(r) = \omega$ si $n \geq r$; montrons que $\omega_n(r) = \omega_n$ si $n < r$. Pour tout r, n , la suite ci-dessous est exacte :

$$0 \longrightarrow I(r)_n \cap \overline{I^2} \longrightarrow I(r)_n \longrightarrow \omega(r)_n \longrightarrow 0.$$

De plus, pour n fixé, on a $\bigcap_r I(r)_n = I_n$, puisque $\bigcap_r \overline{BJ_r} = 0$. Comme dans $\mathbf{PC}(k)$ les limites projectives filtrantes sont exactes (cf. 0.2), il en résulte que, pour tout n , on a

$$(*) \quad \omega_n = \bigcap_r \omega(r)_n.$$

D'autre part, d'après la remarque 5.2.4.A, on a $\omega(r)_n = \omega(r+1)_n$ si $n < r$. Combiné avec (*), ceci entraîne que $\omega(r)_n = \omega_n$ si $n < r$.

Par conséquent, l'espace vectoriel ω filtré par les sous-espaces $(\omega(r)_n)_{n \geq 0}$ n'est autre que ${}_r\omega$ (Notations 5.2). A fortiori, l'application $\sigma(r)$ composée de $\sigma : \omega \rightarrow I$ et de la projection $I \rightarrow \mathfrak{m}(r)$ est compatible avec les filtrations $(\omega(r)_n)$ et $(\mathfrak{m}(r)_n)$ de ω et $\mathfrak{m}(r)$. Comme $k[[{}_r\omega]]/((x^{p^n}))_{x \in {}_r\omega_n}$ n'est autre que B'_r et que $\phi_r : B'_r \rightarrow B_r$ est le morphisme induit par $\sigma(r)$, le résultat déjà établi pour les algèbres de hauteur finie montre que ϕ_r est un isomorphisme.

5.2.6. Définition. — ⁽¹⁶⁴⁾ Soit $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de k -algèbres profinies, chacune munie d'une augmentation $\varepsilon_\lambda : A_\lambda \rightarrow k$ (c'est le cas, en particulier, si chaque A_λ est locale de corps résiduel k). On définit alors le produit tensoriel complété infini $\mathcal{A} = \widehat{\bigotimes}_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ comme la limite projective dans $\mathbf{Alp}_k$ des $A_F = \widehat{\bigotimes}_{\lambda \in F} A_\lambda$, pour F parcourant les parties finies de Λ , les morphismes de transition $A_{F'} \rightarrow A_F$, pour $F' = F \cup \{\lambda\}$, étant $\text{id} \widehat{\otimes} \varepsilon_\lambda$. En particulier, si $\Lambda = \mathbb{N}^*$ et si l'on note X_n la k -variété formelle $\text{Spf}(A_n)$, alors $\text{Spf}(\mathcal{A})$ représente le foncteur qui à tout $C \in \mathbf{Alf}_k$ associe l'ensemble des suites « finies » d'éléments de $\prod_{n \geq 1} X_n(C)$, i.e. des suites

$$(x_1, x_2, \dots) \in \prod_{n \geq 1} X_n(C)$$

telles que $x_n = \varepsilon_n$ pour n assez grand, où ε_n désigne par abus de notation la composée de $\varepsilon_n : A_n \rightarrow k$ et du morphisme structural $k \rightarrow C$. (Si de plus chaque A_n est un quotient d'une algèbre $k[[\omega'_n]]$, on peut noter 0 l'unique morphisme $A_n \rightarrow C$ qui s'annule sur ω'_n , et l'on obtient donc l'ensemble des suites telles que « $x_n = 0$ » pour n assez grand.)

5.3. Remarques. — (a) Appelons stationnaire toute k -algèbre profinie qui est le produit tensoriel complété d'une famille d'algèbres de séries formelles tronquées. ⁽¹⁶⁵⁾

⁽¹⁶³⁾ N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

⁽¹⁶⁴⁾ N.D.E. : On a ajouté cet numéro, afin de définir les produits tensoriels infinis utilisés en 5.3 (a).

⁽¹⁶⁵⁾ N.D.E. : L'auteur pensait sans doute à un produit tensoriel $A = \widehat{\bigotimes}_{n \in \mathbb{N}^*} k[[\omega'_n]]/((x^{p^n}))_{x \in \omega'_n}$, où les ω'_n sont des k -espaces vectoriels pseudocompacts arbitraires. Dans ce cas, on voit sans difficultés que $\omega = \omega_{A/k}$ s'identifie au produit des ω'_n , et la filtration $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donnée par $\omega_n = \prod_{i=1}^n \omega'_i$, i.e. on est dans le cas 5.2.1.B. Pour cette raison, il serait préférable de nommer ces algèbres *stables* (plutôt que « stationnaires »), cf. [Di73], II § 2.9, p.75. Si par exemple $\dim \omega'_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors A représente le foncteur qui à tout $C \in \mathbf{Alf}_k$ associe l'ensemble des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments

Si G est un k -groupe formel infinitésimal et B l'algèbre affine d'un espace homogène de G , il résulte du théorème 5.2 que l'algèbre $B/((x^{p^r}))_{x \in \mathfrak{t}(B)}$ est stationnaire pour tout entier $r \in \mathbb{N}$. Cela implique en particulier que B est une limite projective d'algèbres stationnaires. ⁽¹⁶⁶⁾

(b) Je ne sais pas si, avec les notations de 5.2.1, on peut choisir A et B de telle façon qu'il n'existe pas de section $\sigma : \omega \rightarrow I$ compatible avec les filtrations. ⁽¹⁶⁷⁾ On remarquera cependant qu'on peut avoir pour ω n'importe quel espace vectoriel pseudocompact filtré par une suite croissante de sous-espaces fermés. En effet, si $\omega_1 \subset \omega_2 \subset \dots \subset \omega$ est un tel espace filtré, on peut définir dans l'algèbre $B = A = k[[\omega]]/((x^{p^r}))_{x \in \omega_r}$ un morphisme diagonal $\Delta_A : A \rightarrow A \hat{\otimes}_k A$ vérifiant les conditions (i), (ii), (iii) de 2.1 ; il suffit de poser $\Delta_A(y) = y \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} y$ lorsque y est l'image dans A d'un élément de ω .

563 5.4. Corollaire. — Soient G un groupe algébrique sur un corps parfait k de caractéristique $p > 0$, H un sous-groupe algébrique de G , e l'image de l'élément neutre de G dans G/H et A l'algèbre locale de G/H en e . Alors $\hat{A}$ est isomorphe à une algèbre de la forme

$$k[[X_1, \dots, X_r, \dots, X_s]]/(X_1^{p^{n_1}}, \dots, X_r^{p^{n_r}}).$$

En effet, considérons les groupes formels infinitésimaux $\hat{G} = \mathrm{Spf}(\hat{\mathcal{O}}_{G,e})$ et $\hat{H} = \mathrm{Spf}(\hat{\mathcal{O}}_{H,e})$; d'après 1.3.4, le complété $\hat{A}$ de $A = \mathcal{O}_{G/H,e}$ est isomorphe à $\mathcal{A}(\hat{G}/\hat{H})$, et le corollaire découle donc du théorème 5.2 (ii). ⁽¹⁶⁸⁾

5.5. Compléments. — ⁽¹⁶⁹⁾ Rappelons les définitions suivantes. D'une part, on dit qu'un anneau local noethérien A est *intersection complète* si le complété $\hat{A}$ est quotient d'un anneau local noethérien complet régulier B par un idéal I engendré par une suite régulière d'éléments de B (cf. EGA IV₄, 19.3.1). D'autre part, soit $\tau : Y \hookrightarrow X$ une immersion fermée de schémas. Si $y \in Y$, on dit que τ est une *immersion régulière au point* y si le noyau de $\mathcal{O}_{X,y} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$ est engendré par une suite régulière ; si de plus X est localement noethérien et si τ est une immersion régulière en tout point, on dit que τ est une immersion régulière (cf. *loc. cit.*, Prop. 16.9.10 et Déf. 16.9.2).

de C tels que $x_n^{p^n} = 0$, et $x_n = 0$ pour n assez grand. Notons enfin que ce cas (i.e. le cas où $\omega = \prod_{n \in \mathbb{N}^*} \omega'_n$) correspond au cas étudié, dans la situation duale des algèbres de Hopf cocommutatives connexes, par M. E. Sweedler, cf. [Sw67], Th. 3.

⁽¹⁶⁶⁾ N.D.E. : Mais une telle limite projective n'est pas nécessairement une k -algèbre profinie *stable* (au sens de la N.D.E. précédente). Par exemple, soit $\mathcal{S}$ le k -espace vectoriel « ordinaire » des suites $(u_1, u_2, \dots)$ d'éléments de k et soit $\omega = \mathcal{S}^*$, alors ω est la somme directe dans $\mathbf{PC}(k)$ de copies k_n de k , pour $n \in \mathbb{N}^*$, i.e. on est dans le cas 5.2.1.A. Si l'on note x_n l'élément de ω défini par $x_n(\mathbf{u}) = u_n$, pour toute suite $\mathbf{u} = (u_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, alors la k -algèbre $A = k[[\omega]]/((x_n^{p^n}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est telle que $\omega_{A/k} = \omega$ et $\omega_n = \prod_{i=1}^n kx_i$, mais n'est pas stable : $\mathrm{Spf}(A)$ représente le foncteur qui à tout $C \in \mathbf{AIf}_k$ associe l'ensemble des suites « infinies » $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de C tels que $x_n^{p^n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

⁽¹⁶⁷⁾ N.D.E. : Les éditeurs ne le savent pas non plus, en dehors des cas considérés en 5.2.1.A et B.

⁽¹⁶⁸⁾ N.D.E. : Voir aussi [DG70], § III.3, Th. 6.1.

⁽¹⁶⁹⁾ N.D.E. : On a ajouté cette sous-section, pour donner quelques conséquences de 5.4, mentionnées dans les exposés III et VI_A.

Corollaire 5.5.1. — Si G est un groupe algébrique sur un corps k , l'anneau local $\mathcal{O}_{G,e}$ est intersection complète.

En effet, d'après EGA IV₄, 19.3.4, on peut supposer k algébriquement clos. Si $\text{car}(k) = 0$, on sait déjà que G est lisse (cf. 3.3.1 ou VI_B, 1.6.1) et donc $\mathcal{O}_{G,e}$ est une k -algèbre de séries formelles, d'après EGA IV₄, 17.5.3 (d''). Si $\text{car}(k) = p > 0$, il résulte de 5.4, appliqué à $H = \{e\}$, que $\mathcal{O}_{G,e}$ est intersection complète.

Remarques 5.5.2. — Soient k un corps, G un k -groupe algébrique lisse, et H un sous-groupe fermé de G .

a) On a vu dans l'Exp. III, 4.15, que l'immersion $H \hookrightarrow G$ est régulière ; ceci peut aussi se déduire de 5.4, comme suit. Comme dans *loc. cit.*, on peut supposer k algébriquement clos, et il suffit de montrer que le noyau I de $\mathcal{O}_{G,e} \rightarrow \mathcal{O}_{H,e}$ est engendré par une suite régulière. Posons $A = \mathcal{O}_{G,e}$, $\hat{A} = \text{Spf}(\hat{A})$ et $\hat{H} = \text{Spf}(\hat{\mathcal{O}}_{H,e})$. Comme A est noethérien, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow I \otimes_A \hat{A} \longrightarrow \hat{A} \xrightarrow{\pi} \mathcal{A}(H) \rightarrow 0$$

et $\hat{A}$ est fidèlement plat sur A . Donc, d'après EGA IV₄, 16.9.10 (ii) et 19.1.5 (ii), il suffit de montrer que le noyau $\hat{I} = I \otimes_A \hat{A}$ de π est engendré par une suite régulière d'éléments de $\hat{A}$.

Or, comme G est lisse, $\hat{A}$ est réduit ; d'après 5.4, la sous-algèbre $B = \mathcal{A}(\hat{G}/\hat{H})$ est donc isomorphe à une algèbre de séries formelles $k[[x_1, \dots, x_n]]$, et donc la section unité de $\hat{G}/\hat{H}$ est définie dans B par la suite régulière $(x_1, \dots, x_n)$. Comme $\hat{A}$ est noethérien, l'idéal J de $\hat{A}$ engendré par $x_1, \dots, x_n$ est fermé donc égal à $\hat{I}$, d'après le corollaire 1.4. De plus, comme $\hat{A}$ est topologiquement plat, donc plat sur B (cf. 0.3.8), alors $(x_1, \dots, x_n)$ est une suite régulière dans $\hat{A}$, d'après EGA IV₄, 19.1.5 (ii).

b) On peut aussi déduire de 5.2 (ii) le résultat plus précis suivant. Supposons k parfait. D'après 5.2 (ii) appliqué à l'algèbre $C = \mathcal{A}(H)$, il existe une base $(y_1, \dots, y_{r+s})$ de ω_H et des entiers $1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_r$ tels que $\mathcal{A}(H)$ soit isomorphe au quotient de $k[[y_1, \dots, y_{r+s}]]$ par l'idéal engendré par les $y_i^{p^{n_i}}$ pour $i = 1, \dots, r$. Relevons les y_i en des éléments x_i de ω_G et complétons $(x_1, \dots, x_{r+s})$ en une base $(x_1, \dots, x_n)$ de ω_G . Puisque $\mathcal{A}(G)$ est réduit, le morphisme $k[[x_1, \dots, x_n]] \rightarrow \mathcal{A}(G)$ est un isomorphisme, d'après 5.2 (iii). On obtient donc : *il existe un « système de coordonnées » $(x_1, \dots, x_n)$ de G (i.e. un isomorphisme $\mathcal{A}(G) \simeq k[[x_1, \dots, x_n]]$) tel que H soit défini par les équations $x_i^{p^{n_i}} = 0$ pour $i = 1, \dots, r$ et $x_i = 0$ pour $i > r + s$ (« théorème de Dieudonné », comparer avec [Di55], § 19, Th. 6 et [Di73], II § 3.2, Prop. 3 et ce qui la précède).*

Bibliographie

[CA] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 323-448. ⁽¹⁷⁰⁾

⁽¹⁷⁰⁾N.D.E. : On a ajouté à cette référence, figurant dans l'original, les références qui suivent.

- [Ab80] E. Abe, *Hopf algebras*, Cambridge Univ. Press, 1980.
- [Br00] C. Breuil, *Groupes p -divisibles, groupes finis et modules filtrés*, Ann. of Math. **152** (2000), n°2, 489-549.
- [BAlg] N. Bourbaki, *Algèbre*, Chap. I-III et IV-VII, Hermann, 1970, et Masson, 1981.
- [BAC] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Chap. I-IV, Masson, 1985.
- [BEs] N. Bourbaki, *Théorie des ensembles*, Chap. I-IV, Hermann, 1970.
- [BLie] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. II-III, Hermann, 1970.
- [Ca62] P. Cartier, *Groupes algébriques et groupes formels*, pp. 87–111 in : Colloque sur la théorie des groupes algébriques (Bruxelles, 1962), Gauthier-Villars, 1962.
- [DG70] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Masson & North-Holland, 1970.
- [De72] M. Demazure, *Lectures on p -divisible groups*, Lect. Notes Math. **302**, Springer-Verlag, 1972.
- [Di55] J. Dieudonné, *Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caractéristique $p > 0$* , Comm. Math. Helv. **28** (1955), 87-118.
- [Di73] J. Dieudonné, *Introduction to the theory of formal groups*, Marcel Dekker, 1973.
- [Fo77] J.-M. Fontaine, *Groupes p -divisibles sur les corps locaux*, Astérisque **47-48**, Soc. Math. France, 1977.
- [Gr57] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku Math. J. **9** (1957), 119-221.
- [Gr74] A. Grothendieck, *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux de Dieudonné*, Presses Univ. Montréal, 1974.
- [HS69] R. G. Heyneman, M. E. Sweedler, *Affine Hopf Algebras I*, J. Algebra **13** (1969), 194-241.
- [Il85] L. Illusie, *Déformations de groupes de Barsotti-Tate, d'après A. Grothendieck*, pp. 151-198 in : Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell, Astérisque **127**, Soc. Math. France, 1985.
- [Ja65] I. M. James, analyse de [MM65] dans Math. Reviews, MR0174052.
- [La75] M. Lazard, *Commutative formal groups*, Lect. Notes Math. **443**, Springer-Verlag, 1975.
- [LT65] J. Lubin, J. Tate, *Formal complex multiplication in local fields*, Ann. of Math. **81** (1965), 380-387.
- [LT66] J. Lubin, J. Tate, *Formal moduli for one-parameter formal Lie groups*, Bull. Soc. Math. France **94** (1966), 49-60.
- [Ma91] A. Masuoka, *On Hopf algebras with cocommutative coradicals*, J. Algebra **144** (1991), 451-466.
- [Me72] W. Messing, *The crystals associated with Barsotti-Tate Groups : with applications to abelian schemes*, Lect. Notes Math. **264**, Springer-Verlag, 1972.
- [MM65] J. W. Milnor, J. C. Moore, *On the structure of Hopf algebras*, Ann. of Math. **81** (1965), 211-264.
- [Mi65] B. Mitchell, *Theory of categories*, Academic Press, 1965.

- [Ne75] K. Newman, *A correspondence between bi-ideals and sub-Hopf algebras in cocommutative Hopf algebras*, J. Algebra **36** (1975), 1-15.
- [Po73] N. Popescu, *Abelian categories with applications to rings and modules*, Academic Press, 1973.
- [Sch90] H. J. Schneider, *Principal homogeneous spaces for arbitrary Hopf algebras*, Israel J. Math. **72** (1990), n^{os} 1-2, 167-195.
- [Sw67] M. Sweedler, *Hopf algebras with one grouplike element*, Trans. Amer. Math. Soc. **127** (1967), n°3, 515-526.
- [Sw69] M. Sweedler, *Hopf algebras*, Benjamin, 1969.
- [Tak72] M. Takeuchi, *A correspondence between Hopf ideals and sub-Hopf algebras*, Manuscripta Math. **7** (1972), 251-270.
- [Tak79] M. Takeuchi, *Relative Hopf modules—Equivalence and freeness criteria*, J. Algebra **60** (1979), 452-471.
- [Ta67] J. Tate, *p-divisible groups*, pp. 158-183 in : Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966) (éd. T. A. Springer), Springer-Verlag, 1967.
- [We95] C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Univ. Press, 1995.