

## EXPOSÉ XXIII

### GROUPES RÉDUCTIFS : UNICITÉ DES GROUPES ÉPINGLÉS

par M. DEMAZURE

Le but de cet exposé est la démonstration du théorème d'unicité (Théorème 4.1). 263  
Celui-ci a été démontré par Chevalley dans le cas d'un corps algébriquement clos ; la méthode de réduction au rang deux utilisée ici est également due à Chevalley (voir *Bible*, exp. 23 et 24). Chemin faisant, nous obtenons une description explicite des groupes réductifs par générateurs et relations (3.5).

#### 1. Épinglages

**Définition 1.1.** — Soient  $S$  un schéma,  $(G, T, M, R)$  un  $S$ -groupe déployé (XXII, 1.13). On appelle *épinglage* <sup>(1)</sup> de ce groupe déployé la donnée d'un système  $\Delta$  de *racines simples* de  $R$  et pour chaque  $\alpha \in \Delta$  d'une section  $X_\alpha \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$ .

Autrement dit, un épinglage du groupe réductif  $G$  sur le schéma non vide  $S$  est la donnée :

- (i) d'un tore maximal  $T$ ,
- (ii) d'un groupe abélien  $M$  et d'un isomorphisme  $T \simeq D_S(M)$ ,
- (iii) d'un système de racines  $R$  de  $G$  par rapport à  $T$ ,
- (iv) d'un système de racines simples  $\Delta$  de  $R$ ,
- (v) d'un  $X_\alpha \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$  pour tout  $\alpha \in \Delta$ , c'est-à-dire d'un

$$u_\alpha = \exp_\alpha(X_\alpha) \in U_\alpha^\times(S) \quad \text{pour tout } \alpha \in \Delta,$$

vérifiant la condition (D 1) de Exp. XXII, 1.13 (en effet la condition (D 2) de *loc. cit.* 264 est automatiquement vérifiée <sup>(2)</sup>).

---

<sup>(1)</sup>N.D.E. : Demazure nous indique que, derrière cette terminologie, il y a l'image du papillon (que lui a fournie Grothendieck) : le corps est un tore maximal  $T$ , les ailes sont deux sous-groupes de Borel opposés par rapport à  $T$ , on déploie le papillon en étalant les ailes, puis on fixe des éléments dans les groupes additifs (des *épingles*) pour rigidifier la situation (c.-à-d., pour éliminer les automorphismes).

<sup>(2)</sup>N.D.E. : Elle est impliquée par la condition (v), i.e. l'existence d'une section  $X_\alpha \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$ .

Tout groupe déployé possède un épinglage; en particulier, tout groupe réductif est localement épinglable pour la topologie étale.

**1.2.** Si  $G$  est un  $S$ -groupe *épinglé*, c'est-à-dire un  $S$ -groupe déployé muni d'un épinglage, il est muni canoniquement du système de racines positives  $R_+$  défini par  $\Delta$ , du sous-groupe de Borel  $B = B_{R_+}$  correspondant, du sous-groupe de Borel opposé  $B^- = B_{R^-}$ , des groupes unipotents  $U = B^u$ ,  $U^- = (B^-)^u$ , de l'ouvert  $U^- \cdot T \cdot U$ , etc. De même, pour chaque  $\alpha \in \Delta$ , on a un isomorphisme canonique de groupes vectoriels

$$p_\alpha : \mathbb{G}_{a,S} \xrightarrow{\sim} U_\alpha, \quad x \mapsto \exp_\alpha(xX_\alpha) = u_\alpha^x,$$

normalisé par  $T$  avec le multiplicateur  $\alpha$ , et dont la donnée équivaut à celle de  $X_\alpha$  (Exp. XXII, 1.1).

Par dualité, on en déduit un  $X_{-\alpha} \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^{-\alpha})^\times$  et un isomorphisme

$$p_{-\alpha} : \mathbb{G}_{a,S} \xrightarrow{\sim} U_{-\alpha}$$

qui est le contragrédient du précédent (Exp. XXII, 1.3). On posera (Exp. XX, 3.1)

$$w_\alpha = w_\alpha(X_\alpha) = p_\alpha(1)p_{-\alpha}(-1)p_\alpha(1) = p_{-\alpha}(-1)p_\alpha(1)p_{-\alpha}(-1).$$

On a alors (*loc. cit.* 3.1, 3.7)

$$w_\alpha^2 = \alpha^*(-1), \quad \text{int}(w_\alpha)t = s_\alpha(t) = t \cdot \alpha^*(\alpha(t)^{-1}),$$

$$\begin{cases} \text{int}(w_\alpha)p_\alpha(x) = p_{-\alpha}(-x) = p_{-\alpha}(x)^{-1}, \\ \text{Ad}(w_\alpha)X_\alpha = -X_{-\alpha}, \\ \text{int}(w_\alpha)p_{-\alpha}(x) = p_\alpha(-x) = p_\alpha(x)^{-1}, \\ \text{Ad}(w_\alpha)X_{-\alpha} = -X_\alpha. \end{cases}$$

**265** Nous utiliserons systématiquement les notations précédentes dans la suite.

**Définition 1.3.** — Soient  $S$  un schéma,  $(G, T, M, R, \Delta, (X_\alpha))$  et  $(G', T', M', \dots)$  deux  $S$ -groupes épinglés. On dit que le morphisme de groupes déployés (Exp. XXII, 4.2.1)

$$f : G \longrightarrow G'$$

est compatible avec les épinglages, ou définit un *morphisme de groupes épinglés* si la bijection  $d : R \rightarrow R'$  qui lui est associée (cf. *loc. cit.*) vérifie  $d(\Delta) = \Delta'$  et si, pour tout  $\alpha \in \Delta$ , on a

$$f(\exp_\alpha(X_\alpha)) = \exp_{d(\alpha)}(X'_{d(\alpha)}), \quad \text{i.e.} \quad f(u_\alpha) = u'_{d(\alpha)}. \quad (3)$$

<sup>(3)</sup>N.D.E. : On a noté  $d$  la bijection  $R \xrightarrow{\sim} R'$  (au lieu de  $u$ ), pour éviter la notation  $u'_{u(\alpha)}$ .

1.4. Si on note  $q(\alpha)$  l'entier de *loc. cit.*, on a donc

$$f(p_\alpha(x)) = p'_{d(\alpha)}(x^{q(\alpha)}) \quad \text{pour } \alpha \in \Delta,$$

donc aussi

$$f(p_{-\alpha}(x)) = p'_{-d(\alpha)}(x^{q(\alpha)}), \quad f(w_\alpha) = w'_{d(\alpha)}.$$

Rappelons (Exp. XXII, 4.2) que l'on a pour tout  $\alpha \in R$ , et tous  $z \in \mathbb{G}_m(S')$ ,  $t \in T(S')$  :

$$f(\alpha^*(z)) = (d(\alpha)^*(z))^{q(\alpha)} = d(\alpha)^*(z^{q(\alpha)}), \quad d(\alpha)(f(t)) = \alpha(t)^{q(\alpha)}.$$

1.5. Appelons *donnée radicielle épinglée* une donnée radicielle munie d'un système de racines simples, et *p-morphisme de données radicielles épinglées* un *p*-morphisme de données radicielles (Exp. XXI, 6.8) transformant racines simples en racines simples. 266

Si  $G$  est un  $S$ -groupe épinglé, on note  $\mathcal{R}(G)$  la donnée radicielle *épinglée* correspondante (c'est la donnée radicielle de Exp. XXII, 1.14 munie de  $\Delta$ ). Soit  $p$  l'entier défini en Exp. XXII, 4.2.2. On a alors

**Scholie 1.6.** — La correspondance  $G \mapsto \mathcal{R}(G)$  définit un *foncteur* de la catégorie des  $S$ -groupes réductifs épinglés dans celle des données radicielles épinglées (avec pour morphismes les *p*-morphismes).

### 1.7. Les groupes épinglés $Z_{\Delta_1}$

Soit  $\Delta_1$  une partie du système de racines simples  $\Delta$  du groupe épinglé  $G$ . Soit  $T_{\Delta_1}$  le tore maximal de  $\bigcap_{\alpha \in \Delta_1} \text{Ker}(\alpha)$ ; posons

$$Z_{\Delta_1} = \text{Centr}_G(T_{\Delta_1}).$$

Notons  $R' = \mathbb{Z} \cdot \Delta_1 \cap R$ ; on sait (Exp. XXII, 5.10.7) que  $Z_{\Delta_1}$  est un  $S$ -groupe réductif, de radical  $T_{\Delta_1}$ , que  $(T, M, R')$  en est un déploiement et  $\Delta_1$  un système de racines simples. Il en résulte que  $(Z_{\Delta_1}, T, M, R', \Delta_1, (X_\alpha)_{\alpha \in \Delta_1})$  est un  $S$ -groupe *épinglé*. Nous munirons toujours  $Z_{\Delta_1}$  de cet épinglage. En particulier, on considérera les groupes

$$Z_\alpha = Z_{\{\alpha\}}, \quad Z_{\alpha\beta} = Z_{\{\alpha, \beta\}}.$$

On note  $B_{\Delta_1} = B \cap Z_{\Delta_1}$ ; on sait (*loc. cit.*) que c'est le sous-groupe de Borel canonique <sup>(4)</sup> de  $Z_{\Delta_1}$ , et que sa partie unipotente est  $U_{\Delta_1} = U \cap Z_{\Delta_1}$ . En particulier, on a

$$B_\alpha = T \cdot U_\alpha.$$

On notera

$$U_{\alpha\beta} = U_{\{\alpha, \beta\}} = U \cap Z_{\alpha\beta} = \prod_{\gamma \in R_{\alpha\beta}^+} U_\gamma,$$

où  $R_{\alpha\beta}^+$  désigne l'ensemble des racines positives combinaison linéaire de  $\alpha$  et de  $\beta$ . 267

Soit maintenant  $f : G \rightarrow G'$  un morphisme de  $S$ -groupes *épinglés*. Si  $d : R \rightarrow R'$  est la bijection correspondante et si  $\Delta_1$  est une partie de  $\Delta$ , alors  $d(\Delta_1) = \Delta'_1$  est une partie de  $\Delta'$ , et il est clair que  $f$  envoie  $T_{\Delta_1}$  dans  $T'_{\Delta'_1}$ , donc  $Z_{\Delta_1}$  dans  $Z'_{\Delta'_1}$ . Le  $S$ -morphisme correspondant :

<sup>(4)</sup>N.D.E. : c.-à-d., le sous-groupe de Borel de  $Z_{\Delta_1}$  correspondant à  $R'_+ = R' \cap R_+$ .

$$f_{\Delta_1} : Z_{\Delta_1} \longrightarrow Z'_{d(\Delta'_1)}$$

est compatible avec les épingleages canoniques ; il définit un morphisme de données radicielles épingleées

$$\mathcal{R}(f_{\Delta_1}) : \mathcal{R}(Z_{\Delta_1}, T, M, \dots) \longrightarrow \mathcal{R}(Z_{\Delta'_1}, T', M', \dots)$$

et les morphismes  $M' \rightarrow M$  sous-jacents à  $\mathcal{R}(f)$  et  $\mathcal{R}(f_{\Delta_1})$  coïncident.

**1.8. Étude du groupe  $\underline{\text{Norm}}_G(T)$**

Pour chaque couple  $(\alpha, \beta)$  de racines simples, notons  $n_{\alpha\beta}$  l'ordre de l'élément  $s_\alpha s_\beta$  du groupe de Weyl  $W$ . En particulier, on a  $n_{\alpha\alpha} = 1$ . On a donc  $(w_\alpha w_\beta)^{n_{\alpha\beta}} \in T(S)$ .

**Définition 1.8.1.** — Pour tout  $(\alpha, \beta) \in \Delta \times \Delta$ , on pose

$$t_{\alpha\beta} = (w_\alpha w_\beta)^{n_{\alpha\beta}} \in T(S).$$

De plus, on pose (Exp. XX, 3.1)

$$t_\alpha = t_{\alpha\alpha} = w_\alpha^2 = \alpha^*(-1) \in T(S).$$

**268 Proposition 1.8.2.** — Soit  $H$  un  $S$ -foncteur en groupes transformant sommes directes de schémas en produits (par exemple un faisceau pour la topologie de Zariski). Soient

$$f_T : T \longrightarrow H$$

un morphisme de groupes et  $h_\alpha$  ( $\alpha \in \Delta$ ) des éléments de  $H(S)$ . Pour qu'il existe un morphisme de groupes (nécessairement unique)

$$f_N : \underline{\text{Norm}}_G(T) \longrightarrow H$$

qui induise  $f_T$  sur  $T$  et tel que  $f(w_\alpha) = h_\alpha$  pour  $\alpha \in \Delta$ , il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

(i) Pour tout  $\alpha \in \Delta$ , on a

$$f_T(s_\alpha(t)) = h_\alpha f_T(t) h_\alpha^{-1}$$

pour tout  $t \in T(S')$ ,  $S' \rightarrow S$  (i.e.  $f_T \circ s_\alpha = \text{int}(h_\alpha) \circ f_T$ ).

(ii) Pour tout  $(\alpha, \beta) \in \Delta \times \Delta$ , on a

$$f_T(t_{\alpha\beta}) = (h_\alpha h_\beta)^{n_{\alpha\beta}}.$$

Munissons en effet (**Sch**) de la topologie  $\mathcal{C}$  engendrée par la prétopologie dont les familles couvrantes sont les sommes directes ; l'hypothèse de l'énoncé dit que  $H$  est un  $\mathcal{C}$ -faisceau. Soit  $L$  le groupe libre de générateurs  $(m_\alpha)_{\alpha \in R}$  et  $L_1$  le sous-groupe invariant engendré par les éléments  $(m_\alpha m_\beta)^{n_{\alpha\beta}}$ ,  $(\alpha, \beta) \in \Delta \times \Delta$ . Soit  $g : L \rightarrow W$  le morphisme défini par  $g(m_\alpha) = s_\alpha$  ; on sait (Exp. XXI, 5.1) que  $g$  induit un isomorphisme  $\bar{g}$  de  $L/L_1$  sur  $W$ . Faisons opérer  $L$  sur  $T$  par l'intermédiaire de  $g$  (ou, ce qui revient au même, par  $m_\alpha \cdot t = s_\alpha(t)$ ). Soit  $L_S$  le groupe constant défini par  $L$ , considérons le produit semi-direct  $T \cdot L_S = N$  pour l'opération précédente. On a un morphisme de  $S$ -groupes

$$h : T \cdot L_S = N \longrightarrow \underline{\text{Norm}}_G(T)$$

unique tel que  $h(m_\alpha) = w_\alpha$ ,  $h(t) = t$  pour tout  $t \in T(S')$ ,  $S' \rightarrow S$ . Soit  $N_1$  le sous-faisceau en groupes distingué de  $N$  engendré par les **269**

$$t_{\alpha\beta}^{-1} \cdot (m_\alpha m_\beta)^{n_{\alpha\beta}}, \quad (\alpha, \beta) \in \Delta \times \Delta.$$

On a évidemment  $N_1 \subset \text{Ker } h$ ; considérons le morphisme induit

$$h_1 : N/N_1 \longrightarrow \underline{\text{Norm}}_G(T).$$

Prouvons que  $h_1$  est un *isomorphisme*. Comme  $h$  induit sur  $T$  l'immersion canonique qui est un monomorphisme, le morphisme canonique

$$T \longrightarrow N/N_1.$$

est également un monomorphisme, donc induit un isomorphisme de  $T$  sur  $TN_1/N_1$ . Pour la même raison  $h_1$  induit un isomorphisme de  $TN_1/N_1$  sur  $T$ ; pour prouver que  $h_1$  est un isomorphisme, il suffit donc de vérifier que le morphisme correspondant

$$h_2 : N/TN_1 \longrightarrow \underline{\text{Norm}}_G(T)/T$$

est un isomorphisme. Or  $TN_1$  est le sous- $\mathcal{L}$ -faisceau en groupes distingué de  $N$  engendré par  $T$  et les  $(m_\alpha m_\beta)^{n_{\alpha\beta}}$ , c'est-à-dire le sous- $\mathcal{L}$ -faisceau engendré par  $T$  et  $L_1$ , c'est-à-dire  $T \cdot (L_1)_S$ . Le morphisme  $h_2$  s'identifie donc au morphisme

$$\bar{g} : L_S/(L_1)_S \longrightarrow W_S$$

qui est un isomorphisme par construction.

La démonstration de 1.8.2 est maintenant facile; les conditions sont évidemment nécessaires; prouvons qu'elles sont suffisantes. La condition (i) montre qu'il existe un morphisme

$$u : N \longrightarrow H$$

tel que  $u(m_\alpha) = h_\alpha$  pour  $\alpha \in \Delta$ , et  $u|_T = f_T$ . La condition (ii) dit que  $u$  s'annule sur  $N_1$ , ce qui entraîne aussitôt le résultat.

### 1.9. Fidélité du foncteur $\mathcal{R}$

270

**Proposition 1.9.1.** — *Le foncteur  $\mathcal{R}$  de 1.6 est fidèle : si*

$$f, g : G \rightrightarrows G'$$

*sont deux morphismes de groupes épinglés tels que  $\mathcal{R}(f) = \mathcal{R}(g)$ , alors  $f = g$ .*

En effet,  $f$  et  $g$  coïncident sur  $T$ ,  $U_\alpha$  ( $\alpha \in \Delta$ ) et  $U_{-\alpha}$  ( $\alpha \in \Delta$ ); il suffit donc d'appliquer :

**Lemme 1.9.2.** — *Soient  $S$  un schéma,  $G$  un  $S$ -groupe réductif épinglé,  $H$  un  $S$ -préfaisceau en groupes, séparé pour (fppf). Soient*

$$f, g : G \rightrightarrows H$$

*deux morphismes de  $S$ -groupes. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $f = g$ .
- (ii)  $f$  et  $g$  coïncident sur  $T$ , sur chaque  $U_\alpha$  ( $\alpha \in \Delta$ ), sur chaque  $U_{-\alpha}$  ( $\alpha \in \Delta$ ).
- (iii)  $f$  et  $g$  coïncident sur  $T$ , sur chaque  $U_\alpha$  ( $\alpha \in \Delta$ ) et  $f(w_\alpha) = g(w_\alpha)$  pour chaque  $\alpha \in \Delta$ .

En effet, (i)  $\Rightarrow$  (ii) est trivial, (ii)  $\Rightarrow$  (iii) résulte aussitôt de la définition de  $w_\alpha$  (1.2). Reste à prouver (iii)  $\Rightarrow$  (i). Si  $\alpha \in R$ , il existe une suite  $\{\alpha_i\} \subset \Delta$  avec  $\alpha = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \cdots s_{\alpha_n}(\alpha_{n+1})$  donc

$$U_\alpha = \text{int}(w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n})U_{\alpha_{n+1}},$$

ce qui prouve que  $f$  et  $g$  coïncident sur chaque  $U_\alpha$ . Il s'ensuit que  $f$  et  $g$  coïncident sur  $\Omega$ , donc coïncident (Exp. XXII, 4.1.11).

**Remarque 1.9.3.** — Si  $G$  est semi-simple, on peut, dans (ii) et (iii) supprimer l'hypothèse que  $f$  et  $g$  coïncident sur  $T$ . En effet,  $G$  est engendré comme faisceau (fppf) par les  $U_\alpha$ ,  $\alpha \in R$  (Exp. XXII, 6.2.2 (a)).

271 **2. Générateurs et relations pour un groupe épinglé**

Dans cette section, on se fixe un  $S$ -groupe épinglé  $G$ . Si  $\alpha, \beta \in \Delta$ , on emploiera les notations  $Z_\alpha, Z_{\alpha\beta}, U_{\alpha\beta}, R_{\alpha\beta}^+$  de 1.7.

**Théorème 2.1.** — Soient  $S$  un schéma,  $G$  un  $S$ -groupe épinglé,  $H$  un  $S$ -faisceau en groupes pour (fppf). Soient

$$f_N : \text{Norm}_G(T) \longrightarrow H, \quad f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow H, \quad \alpha \in R,$$

des morphismes de groupes. Pour qu'il existe un morphisme de groupes (nécessairement unique)

$$\bar{f} : G \longrightarrow H$$

prolongeant  $f_N$  et les  $f_\alpha$  ( $\alpha \in R$ ), il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :

(i) Pour tout  $\alpha \in \Delta$  et tout  $\beta \in R$ , on a

$$\text{int}(f_N(w_\alpha)) \circ f_\beta = f_{s_\alpha(\beta)} \circ \text{int}(w_\alpha).$$

(ii) Pour tout  $\alpha \in \Delta$ , il existe un morphisme de groupes

$$F_\alpha : Z_\alpha \longrightarrow H$$

prolongeant  $f_\alpha, f_{-\alpha}$  et  $f_N|_{\text{Norm}_{Z_\alpha}(T)}$ .

(iii) Pour tout couple  $(\alpha, \beta) \in \Delta \times \Delta$ , il existe un morphisme de groupes  $U_{\alpha\beta} \rightarrow H$  induisant  $f_\gamma$  sur  $U_\gamma$  pour tout  $\gamma \in R_{\alpha\beta}^+$  (i.e.  $U_\gamma \subset U_{\alpha\beta}$ ).

272 **2.1.1.** — *Démonstration.* Les conditions de l'énoncé sont évidemment nécessaires. Choisissons d'autre part une structure de groupe totalement ordonné sur  $\Gamma_0(R)$  de manière que les racines  $> 0$  soient les éléments de  $R_+$  (Exp. XXI, 3.5.6); tout produit indexé par une partie de  $R$  sera pris relativement à cet ordre. Notons  $f_T$  la restriction de  $f_N$  à  $T$  et considérons le morphisme

$$f : \Omega \longrightarrow H$$

défini ensemblistement par

$$f \left( \prod_{\alpha \in \mathbb{R}_-} y_\alpha \cdot t \cdot \prod_{\alpha \in \mathbb{R}_+} x_\alpha \right) = \prod f_\alpha(y_\alpha) \cdot f_T(t) \cdot \prod f_\alpha(x_\alpha).$$

Tout morphisme vérifiant les conditions de l'énoncé doit prolonger  $f$ ; d'autre part tout morphisme de groupes  $\bar{f} : G \rightarrow H$  prolongeant  $f$  prolonge aussi  $f_N$ : en effet, prolongeant  $f_\alpha$  et  $f_{-\alpha}$ , il vérifie  $\bar{f}(w_\alpha) = F_\alpha(w_\alpha) = f_N(w_\alpha)$  et il prolonge  $f_T$  par hypothèse. Par Exp. XXII, 4.1.11 (ii), on est donc ramené à prouver :

**Proposition 2.1.2.** — *Le morphisme  $f : \Omega \rightarrow H$  défini ci-dessus est « génériquement multiplicatif »; plus précisément, pour tout  $S' \rightarrow S$  et tous  $x, y \in \Omega(S')$  tels que  $xy \in \Omega(S')$ , on a  $f(xy) = f(x)f(y)$ .*

**Lemme 2.1.3.** — *Soit  $n \in \text{Norm}_G(T)(S')$ ,  $S' \rightarrow S$ , et soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que  $\text{int}(n)U_\alpha = U_\beta$  (i.e.  $\bar{n}(\alpha) = \beta$ ), alors on a*

$$\text{int}(f_N(n)) \circ f_\alpha = f_\beta \circ \text{int}(n).$$

En effet, il suffit de vérifier la formule pour un système de générateurs du faisceau  $\text{Norm}_G(T)$ ; elle est vraie pour chaque  $w_\alpha$ ,  $\alpha \in \Delta$  (par 2.1 (i)), il suffit donc de le faire pour  $n \in T(S')$ . C'est trivial par 2.1 (ii) si  $\alpha$  est simple; sinon, on prend un  $w \in W$  tel  $w^{-1}(\alpha) \in \Delta$ ; écrivant  $w$  comme produit de réflexions simples,<sup>(5)</sup> on est ramené à prouver que si la formule est vraie pour  $\alpha$  et pour tout  $n$ , elle l'est aussi pour  $w_{\alpha_0}(\alpha)$  et  $t \in T(S')$ , où  $\alpha_0 \in \Delta$ . Or, par 2.1 (i), on a :

$$\begin{aligned} \text{int}(f_N(t)) \circ f_{w_{\alpha_0}(\alpha)} &= \text{int}(f_N(tw_{\alpha_0})) \circ f_\alpha \circ \text{int}(w_{\alpha_0}^{-1}) \\ &= f_{w_{\alpha_0}(\alpha)} \circ \text{int}(tw_{\alpha_0}) \circ \text{int}(w_{\alpha_0}^{-1}). \end{aligned}$$

**Lemme 2.1.4.** — *La restriction de  $f$  à  $U$  (resp.  $U^-$ ) est un morphisme de groupes. En particulier, cette restriction est indépendante de l'ordre choisi sur les racines.* 273

Il suffit de faire la démonstration pour  $U$ . En vertu de Exp. XXII, 5.5.8, il suffit de vérifier que pour tout couple  $\alpha < \beta$  de racines positives, on a pour tous  $x_\alpha \in U_\alpha(S')$ ,  $x_\beta \in U_\beta(S')$ ,  $S' \rightarrow S$ ,

$$f_\beta(x_\beta)f_\alpha(x_\alpha)f_\beta(x_\beta^{-1}) = f(x_\beta x_\alpha x_\beta^{-1}).$$

D'après Exp. XXII, 5.5.2 il existe des  $x_\gamma \in U_\gamma(S')$  ( $\gamma = i\alpha + j\beta \in \mathbb{R}$ ,  $i > 0, j \geq 0$ )<sup>(6)</sup> tels que

$$x_\beta x_\alpha x_\beta^{-1} = \prod_{\gamma} x_\gamma,$$

et on doit donc vérifier la relation

$$f_\beta(x_\beta)f_\alpha(x_\alpha)f_\beta(x_\beta^{-1}) = \prod_{\substack{\gamma=i\alpha+j\beta \\ i>0, j\geq 0}} f_\gamma(x_\gamma).$$

<sup>(5)</sup>N.D.E. : On a remplacé « symétries fondamentales » par « réflexions simples ».

<sup>(6)</sup>N.D.E. : On a corrigé  $i, j > 0$  en  $i > 0, j \geq 0$  (puisque  $x_\alpha$  apparaît dans le produit de droite).

Par Exp. XXI, 3.5.4, il existe un  $w \in W$  tel que  $w(\alpha) = \alpha_0 \in \Delta$ ,  $w(\beta) \in A_{\alpha_0\beta_0}$  (notations de 1.7), où  $\beta_0 \in \Delta$ . Relevant  $w$  en un  $n \in \underline{\text{Norm}}_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})(\mathbb{S})$  (par Exp. XXII, 3.8) il suffit de vérifier la relation précédente après conjugaison par  $f_{\mathbb{N}}(n)$ . Par 2.1.3, on est donc ramené au cas où  $\alpha, \beta \in R_{\alpha_0\beta_0}^+$ , cas où on conclut par la condition 2.1 (iii).

**Lemme 2.1.5.** — Soit  $n \in \underline{\text{Norm}}_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})(\mathbb{S})$  tel que  $\text{int}(n)\mathbb{U} = \mathbb{U}^-$  (i.e. que  $\bar{n}$  soit la symétrie du groupe de Weyl <sup>(7)</sup> (Exp. XXI, 3.6.14)). Pour tout  $u \in \mathbb{U}(S')$ ,  $S' \rightarrow S$  (resp.  $u \in \mathbb{U}^-(S')$ ,  $S' \rightarrow S$ ), on a

$$f(nun^{-1}) = f_{\mathbb{N}}(n)f(u)f_{\mathbb{N}}(n^{-1}).$$

Immédiat par 2.1.3 et 2.1.4.

**274 Lemme 2.1.6.** — Soient  $u \in \mathbb{B}(S')$ ,  $v \in \mathbb{B}^-(S')$ ,  $g \in \Omega(S')$ ,  $S' \rightarrow S$ . Alors

$$f(vgu) = f(v)f(g)f(u).$$

En effet, posons  $v = v_1t_1$ ,  $g = v_2t_2u_2$ ,  $u = t_3u_3$ , avec  $v_i \in \mathbb{U}^-(S')$ ,  $t_i \in \mathbb{T}(S')$ ,  $u_i \in \mathbb{U}(S')$ . On a

$$f(v)f(g)f(u) = f(v_1)f_{\mathbb{T}}(t_1)f(v_2)f_{\mathbb{T}}(t_2)f(u_2)f_{\mathbb{T}}(t_3)f(u_3),$$

d'une part et

$$\begin{aligned} f(vgu) &= f(v_1t_1v_2t_1^{-1}t_1t_2t_3t_3^{-1}u_2t_3u_3) \\ &= f(v_1 \cdot t_1v_2t_1^{-1})f_{\mathbb{T}}(t_1t_2t_3)f(t_3^{-1}u_2t_3 \cdot u_3). \end{aligned}$$

Utilisant 2.1.4 pour décomposer les deux termes extrêmes de cette dernière expression, on obtient

$$f(vgu) = f(v_1)f(t_1v_2t_1^{-1})f_{\mathbb{T}}(t_1t_2t_3)f(t_3^{-1}u_2t_3)f(u_3).$$

On est alors ramené aux formules évidentes

$$f(t_1v_2t_1^{-1}) = f_{\mathbb{T}}(t_1)f(v_2)f_{\mathbb{T}}(t_1)^{-1}, \quad f(t_3^{-1}u_2t_3) = f_{\mathbb{T}}(t_3)^{-1}f(u_2)f_{\mathbb{T}}(t_3),$$

qui résultent de la définition de  $f$  et de 2.1.3.

**Lemme 2.1.7.** — Soient  $\alpha \in \Delta$  et  $g \in \Omega(S') \cap \text{int}(w_\alpha)^{-1}\Omega(S')$ ,  $S' \rightarrow S$ . Alors

$$f(w_\alpha gw_\alpha^{-1}) = f_{\mathbb{N}}(w_\alpha)f(g)f_{\mathbb{N}}(w_\alpha)^{-1}.$$

En effet, soit  $g \in \Omega(S')$ ,  $S' \rightarrow S$ . Écrivons, par Exp. XXII, 5.6.8

$$f = ax_{-\alpha}tx_\alpha b,$$

**275** avec  $a \in \mathbb{U}_{-\hat{\alpha}}(S')$ ,  $x_{-\alpha} \in \mathbb{U}_{-\alpha}(S')$ ,  $t \in \mathbb{T}(S')$ ,  $x_\alpha \in \mathbb{U}_\alpha(S')$ ,  $b \in \mathbb{U}_{\hat{\alpha}}(S')$ . Par 2.1.3, 2.1.4 et le fait que  $s_\alpha$  permute les racines positives  $\neq \alpha$  (cf. Exp. XXI, 3.3.2), on a

$$\text{int}(w_\alpha)a \in \mathbb{U}_{-\hat{\alpha}}(S'), \quad \text{int}(w_\alpha)b \in \mathbb{U}_{\hat{\alpha}}(S')$$

et la formule à démontrer est vraie pour  $g = a$  ou  $g = b$ . Par 2.1.6, on est donc ramené à démontrer l'assertion cherchée lorsque  $g = x_{-\alpha}tx_\alpha \in Z_\alpha(S')$ . Mais alors « tout se passe dans  $Z_\alpha$  » et on conclut par la condition (ii) de 2.1.

<sup>(7)</sup>N.D.E. : relativement à  $\Delta$ .



**Lemme 2.1.8.** — Soit  $n \in \underline{\text{Norm}}_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})(\mathbb{S})$ . Pour tout  $S' \rightarrow \mathbb{S}$  et tout  $g \in \Omega(S')$  tel que  $\text{int}(n)g \in \Omega(S')$ , on a

$$f(ngn^{-1}) = f_{\mathbb{N}}(n)f(g)f_{\mathbb{N}}(n)^{-1}.$$

C'est trivial si  $n \in \mathbb{T}(\mathbb{S})$  (par 2.1.3). Les deux membres de la formule précédente définissent des morphismes de  $\Omega \cap \text{int}(n)^{-1}\Omega$  dans  $\mathbb{H}$ ; pour vérifier qu'ils coïncident, il suffit de vérifier qu'il existe un ouvert  $V_n$  de  $\Omega$ , contenant la section unité tel que  $\text{int}(n)V_n \subset \Omega$ , et que  $f \circ \text{int}(n)$  et  $\text{int}(f_{\mathbb{N}}(n)) \circ f$  coïncident sur  $V_n$ . En vertu de la structure de  $\underline{\text{Norm}}_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})$ , il suffit de prouver que si l'assertion précédente est vraie pour un  $n' \in \underline{\text{Norm}}_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})(\mathbb{S})$  et si  $\alpha \in \Delta$ , elle est vraie pour  $n = n'w_{\alpha}$ . Posons

$$V_n = \Omega \cap \text{int}(w_{\alpha})^{-1}V_{n'}.$$

On a  $\text{int}(n)V_n \subset \text{int}(n')V_{n'} \subset \Omega$ . Si  $g \in V_n(S')$ , on a

$$\text{int}(n)g = \text{int}(n')\text{int}(w_{\alpha})g.$$

Or  $\text{int}(w_{\alpha})g \in V_{n'}(S')$ , donc par hypothèse

$$f(\text{int}(n')\text{int}(w_{\alpha})g) = \text{int}(f_{\mathbb{N}}(n'))f(\text{int}(w_{\alpha})g);$$

comme  $\text{int}(w_{\alpha})g \in \Omega(S')$ , on peut appliquer 2.1.7, qui donne

$$f(\text{int}(w_{\alpha})g) = \text{int}(f_{\mathbb{N}}(w_{\alpha}))f(g),$$

et on conclut aussitôt. 276

Démontrons maintenant 2.1.2. Soient  $x, x' \in \Omega(S')$ ; écrivons comme d'habitude

$$x = vtu, \quad x' = v't'u',$$

d'où

$$xx' = vt(wv')t'u'.$$

Par 2.1.6 et la relation  $U^-(S')\Omega(S')U(S') = \Omega(S')$ , on est ramené à prouver que si  $uv' \in \Omega(S')$ , on a  $f(uv') = f(u)f(v')$ . Soit  $n \in \underline{\text{Norm}}_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})(S')$  comme dans 2.1.5 (ii). On a

$$f(u) = f_{\mathbb{N}}(n)^{-1}f(nun^{-1})f_{\mathbb{N}}(n), \quad f(v') = f_{\mathbb{N}}(n)^{-1}f(nv'n^{-1})f_{\mathbb{N}}(n),$$

par *loc. cit.*, d'où

$$f(u)f(v') = f_{\mathbb{N}}(n)^{-1}f(nun^{-1})f(nv'n^{-1})f_{\mathbb{N}}(n).$$

Mais  $nun^{-1} \in U^-(S')$ ,  $nv'n^{-1} \in U(S')$ , de sorte que

$$f(nun^{-1})f(nv'n^{-1}) = f((nun^{-1})(nv'n^{-1})) = f(nuv'n^{-1}),$$

ce qui donne

$$f(u)f(v') = f_{\mathbb{N}}(n)^{-1}f(nuv'n^{-1})f_{\mathbb{N}}(n).$$

Si  $uv' \in \Omega(S')$ , on peut appliquer 2.1.8 et on a terminé.

**Remarque 2.2.** — Au lieu de se donner  $f_{\mathbb{N}}$ , on peut se donner un morphisme de groupes  $f_{\mathbb{T}} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{H}$ , des sections  $h_{\alpha} \in \mathbb{H}(\mathbb{S})$  ( $\alpha \in \Delta$ ), vérifiant les conditions de 1.8.2. Il faut alors remplacer la condition (ii) du théorème par

(ii') Il existe un morphisme de groupes  $F_{\alpha} : Z_{\alpha} \rightarrow \mathbb{H}$  qui prolonge 277

$$f_{\alpha}, f_{-\alpha}, f_{\mathbb{T}} \quad \text{et vérifie} \quad F_{\alpha}(w_{\alpha}) = h_{\alpha}.$$

Nous allons maintenant donner au théorème précédent une forme plus explicite. Gardons les notations précédentes.

**Théorème 2.3.** — Soient  $S$  un schéma,  $G$  un  $S$ -groupe épinglé. Soient  $H$  un  $S$ -faisceau en groupes pour (fppf),

$$f_T : T \longrightarrow H, \quad f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow H, \quad \alpha \in \Delta,$$

des morphismes de groupes et

$$h_\alpha \in H(S), \quad (\alpha \in \Delta),$$

des sections de  $H$ . Pour qu'il existe un morphisme de groupes

$$f : G \longrightarrow H$$

(nécessairement unique) induisant  $f_T$  et les  $f_\alpha$  ( $\alpha \in \Delta$ ) et vérifiant  $f(w_\alpha) = h_\alpha$  pour tout  $\alpha \in \Delta$ , il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

(i) Pour tout  $S' \rightarrow S$ , tout  $t \in T(S')$ , tout  $\alpha \in \Delta$  et tout  $x \in U_\alpha(S')$ , on a

$$(1) \quad f_T(t)f_\alpha(x)f_T(t)^{-1} = f_\alpha(\text{int}(t)x).$$

(ii) Pour tout  $\alpha \in \Delta$ , tout  $S' \rightarrow S$ , tout  $t \in T(S')$ , on a

$$(2) \quad h_\alpha f_T(t)h_\alpha^{-1} = f_T(s_\alpha(t)) = f_T(t \cdot \alpha^* \alpha(t)^{-1}).$$

(iii) Pour tout  $(\alpha, \beta) \in \Delta \times \Delta$ , on a

$$(3) \quad (h_\alpha h_\beta)^{n_{\alpha\beta}} = f_T(t_{\alpha\beta}).$$

278 (iv) Pour tout  $\alpha \in \Delta$ , on a (rappelons qu'on note  $u_\alpha = \exp_\alpha(X_\alpha)$ )

$$(4) \quad (h_\alpha f_\alpha(u_\alpha))^3 = e.$$

(v) Pour tout  $(\alpha, \beta) \in \Delta \times \Delta$ ,  $\alpha \neq \beta$ , il existe un morphisme de groupes

$$f_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow H$$

vérifiant les deux conditions suivantes :

a) On a

$$(5) \quad f_{\alpha\beta}|_{U_\alpha} = f_\alpha, \quad f_{\alpha\beta}|_{U_\beta} = f_\beta,$$

b) Pour tout  $\gamma \in R_{\alpha\beta}^+$ ,  $\gamma \neq \alpha$  (resp.  $\gamma \neq \beta$ ), et tout  $x \in U_\gamma(S')$ ,  $S' \rightarrow S$ , on a

$$(6) \quad \begin{aligned} \text{int}(h_\alpha)f_{\alpha\beta}(x) &= f_{\alpha\beta}(\text{int}(w_\alpha)x), \\ (\text{resp. } \text{int}(h_\beta)f_{\alpha\beta}(x) &= f_{\alpha\beta}(\text{int}(w_\alpha)x)). \end{aligned}$$

*Démonstration.* L'unicité est claire par 1.9.2. Prouvons l'existence.

**Lemme 2.3.1.** — Il existe un morphisme de groupes

$$f_N : \underline{\text{Norm}}_G(T) \longrightarrow H$$

prolongeant  $f_T$  et vérifiant  $f_N(w_\alpha) = h_\alpha$ .

279 C'est en effet ce qu'affirme 1.8.2, compte tenu des conditions (2) et (3).

**Lemme 2.3.2.** — *Il existe un morphisme de groupes*

$$F_\alpha : Z_\alpha \longrightarrow H, \quad \alpha \in \Delta,$$

prolongeant  $f_T, f_\alpha$  et vérifiant  $F_\alpha(w_\alpha) = h_\alpha$ , donc prolongeant  $f_N|_{\text{Norm}_{Z_\alpha}(\mathbb{T})}$ .

C'est clair par Exp. XX, 6.2 et les conditions (1), (3) et (4).

**Lemme 2.3.3.** — *Pour tout  $(\alpha, \beta) \in \Delta \times \Delta$ ,  $\alpha \neq \beta$ , tout  $n \in \text{Norm}_{Z_{\alpha\beta}}(\mathbb{T})(\mathbb{S})$  tel que  $\bar{n}(\alpha) = \alpha$  (resp.  $\bar{n}(\alpha) = \beta$ ), i.e.  $\text{int}(n)U_\alpha = U_\alpha$  (resp.  $\text{int}(n)U_\alpha = U_\beta$ ), tout  $S' \rightarrow \mathbb{S}$  et tout  $x \in U_\alpha(S')$ , on a*

$$\begin{aligned} \text{int}(f_N(n))f_\alpha(x) &= f_\alpha(\text{int}(n)x) \\ \text{resp. } \text{int}(f_N(n))f_\alpha(x) &= f_\beta(\text{int}(n)x). \end{aligned}$$

En effet, il existe un  $t \in \mathbb{T}(\mathbb{S})$  et une suite  $\{\alpha_i\} \subset \{\alpha, \beta\}$  tels que  $n = tw_{\alpha_k} \cdots w_{\alpha_1}$ . La condition est vérifiée pour  $n = t$  par la condition (1). On peut donc supposer  $n = w_{\alpha_k} \cdots w_{\alpha_1}$ . Faisons la démonstration par récurrence sur  $k$ , i.e. supposons l'assertion prouvée pour tout  $n$  qui s'écrit comme un produit de moins de  $k-1$  réflexions simples (et vérifie les hypothèses du lemme). Considérons les racines

$$\gamma_i = s_{\alpha_i} \cdots s_{\alpha_1}(\alpha).$$

Si tous les  $\gamma_i$  sont positifs, i.e. appartiennent à  $R_{\alpha\beta}^+$ , on peut appliquer la condition (v) de 2.3.; prenant les notations de 2.3 (v), on conclut aussitôt par récurrence que

$$\text{int}(f_N(w_{\alpha_i} \cdots w_{\alpha_1}))f_\alpha(x) = f_{\alpha\beta}(\text{int}(w_{\alpha_i} \cdots w_{\alpha_1})x),$$

soit pour  $i = k$  la propriété cherchée. Si tous les  $\gamma_i$  ne sont pas positifs, il existe un indice  $j < k$  tel que **280**

$$\gamma_j \in R_+, \quad \gamma_{j+1} \notin R_+.$$

Comme  $\gamma_{j+1} = s_{\alpha_j}(\gamma_j)$ , il s'ensuit aussitôt que  $\gamma_j = \alpha_j$ , par Exp. XXI, 3.3.2, donc que  $\gamma_j$  est  $\alpha$  ou  $\beta$ , et on peut décomposer  $n$  en

$$\begin{aligned} n &= n' \cdot n'', \\ n' &= w_{\alpha_k} \cdots w_{\alpha_{j+1}}, \\ n'' &= w_{\alpha_j} \cdots w_{\alpha_1}, \end{aligned}$$

$n'$  et  $n''$  vérifiant les hypothèses du lemme et étant produit de moins de  $k-1$  réflexions, donc vérifiant par l'hypothèse de récurrence la conclusion du lemme.

**Lemme 2.3.4.** — *Soit  $\alpha \in R$ . Si  $n, n' \in \text{Norm}_G(\mathbb{T})(\mathbb{S})$  et  $\beta, \beta' \in \Delta$  vérifient  $\bar{n}(\alpha) = \beta$  et  $\bar{n}'(\alpha) = \beta'$ , on a*

$$\text{int}(f_T(n)^{-1})f_\beta(nxn^{-1}) = \text{int}(f_T(n')^{-1})f_{\beta'}(n'xn'^{-1}),$$

pour tout  $x \in U_\alpha(S')$ ,  $S' \rightarrow \mathbb{S}$ .

Il suffit de vérifier que si  $\bar{n}(\alpha) = \beta$ ,  $\alpha, \beta \in \Delta$ , alors  $\text{int}(f_T(n)) \circ f_\alpha = f_\beta \circ \text{int}(n)$ . Or d'après le lemme de Tits (Exp. XXI, 5.6), il existe une suite de racines simples  $\alpha_0 = \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_m = \beta$ , et une suite d'éléments  $w_i \in W$ ,  $i = 0, 1, \dots, m-1$ , avec

$$\begin{aligned}\bar{n} &= w_{m-1} \cdots w_0, \\ w_i(\alpha_i) &= \alpha_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1,\end{aligned}$$

281 la condition suivante étant en outre vérifiée : pour tout  $i = 0, 1, \dots, m-1$ , il existe une racine simple  $\beta_i$  telle que

$$w_i \in W_{\alpha_i \beta_i}, \quad \alpha_{i+1} = \alpha_i \quad \text{ou} \quad \beta_i.$$

On est alors ramené par récurrence au cas traité dans le lemme précédent.

**Lemme 2.3.5.** — *Il existe une famille de morphismes de groupes  $f'_\gamma : U_\gamma \rightarrow H$ ,  $\gamma \in R$ , vérifiant*

- (i) *Pour  $\alpha \in \Delta$ , on a  $f'_\alpha = f_\alpha$  et  $f'_{-\alpha} = F_\alpha|_{U_{-\alpha}}$  où  $F_\alpha$  est défini dans 2.3.2.*
- (ii) *Pour  $\alpha, \beta \in \Delta$  et  $\gamma \in R_{\alpha\beta}^+$ , on a  $f'_\gamma = f_{\alpha\beta}|_{U_\gamma}$ .*
- (iii) *Pour tout  $n \in \underline{\text{Norm}}_G(\mathbb{T})(S)$  et  $\alpha, \beta \in R$  tels que  $\bar{n}(\alpha) = \beta$ , on a*

$$\text{int}(f_N(n))f'_\alpha(x) = f'_\beta(\text{int}(n)x)$$

pour tout  $x \in U_\alpha(S')$ ,  $S' \rightarrow S$ .

Pour toute racine  $\alpha \in R$ , il existe un  $n \in \underline{\text{Norm}}_G(\mathbb{T})(S)$  tel que  $\bar{n}(\alpha) \in \Delta$ . Définissons alors  $f'_\alpha(x)$  comme l'expression de 2.3.4. Celle-ci est indépendante du choix de  $n$  et  $f'_\alpha$  est bien un morphisme de groupes. La propriété (iii) est vérifiée par construction. La première assertion de (i) est claire (prendre  $n = e$ ), la seconde aussi (prendre  $n = w_\alpha$  et appliquer 2.3.2); si  $\gamma \in R_{\alpha\beta}^+$ , ( $\alpha, \beta \in \Delta$ ), il existe  $n \in \underline{\text{Norm}}_{Z_{\alpha\beta}}(\mathbb{T})(S)$  tel que  $\bar{n}(t) = \alpha$  ou  $\beta$ ; on applique alors (iii) et les conditions (5) et (6) et on a prouvé (ii).

282 **2.3.6.** — Démontrons maintenant le théorème en prouvant que les conditions de 2.1 sont vérifiées, pour les morphismes  $f_N$  et  $f'_\alpha$ ,  $\alpha \in R$ .

- 2.1 (i) résulte de 2.3.5 (iii),
- 2.1 (ii) résulte de 2.3.5 (i) et 2.3.2,
- 2.1 (iii) résulte de 2.3.5 (ii) et du fait que  $f_{\alpha\beta}$  est un morphisme de groupes.

Un corollaire évident est :

**Corollaire 2.4.** — *Soient  $S$  un schéma,  $G$  un  $S$ -groupe épinglé de rang semi-simple  $\geq 1$ ,  $H$  un  $S$ -faisceau (fppf) en groupes. Pour chaque  $(\alpha, \beta) \in \Delta \times \Delta$ , soit*

$$F_{\alpha\beta} : Z_{\alpha\beta} \longrightarrow H$$

*un morphisme de groupes. Pour qu'il existe un morphisme de groupes*

$$f : G \longrightarrow H$$

*induisant les  $F_{\alpha\beta}$ , il faut et il suffit que pour tout  $(\alpha, \beta) \in \Delta \times \Delta$ , on ait*

$$F_{\alpha\beta}|_{Z_\alpha} = F_{\alpha\alpha}.$$

La condition est évidemment nécessaire. Supposons-la vérifiée. Posons  $f_T = F_{\alpha\alpha}|_T$  (qui ne dépend pas de  $\alpha$ , car  $F_{\alpha\alpha}|_T = F_{\alpha\beta}|_T = F_{\beta\beta}|_T$ ). Posons

$$p_\alpha = F_{\alpha\alpha}|_{U_\alpha}, \quad h_\alpha = F_{\alpha\alpha}(w_\alpha), \quad f_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}|_{U_{\alpha\beta}}.$$

Les conditions de 2.3 sont évidemment vérifiées : (1), (2), (4) « se vérifient » dans  $Z_\alpha$ , (3), (5) et (6) dans  $Z_{\alpha\beta}$ . Il existe donc un morphisme  $f : G \rightarrow H$  prolongeant  $f_T$ , les  $f_\alpha$ ,  $\alpha \in \Delta$  et vérifiant  $f(w_\alpha) = h_\alpha$  ; il coïncide avec  $F_{\alpha\beta}$  sur des générateurs de  $Z_{\alpha\beta}$ , donc vérifie  $f|_{Z_{\alpha\beta}} = F_{\alpha\beta}$ .

On a également le corollaire technique suivant :

**Corollaire 2.5.** — Soient  $S$  un schéma,  $G$  et  $G'$  deux  $S$ -groupes épinglés de rang **283** semi-simple 2,  $q$  un entier  $> 0$  tel que  $x \mapsto x^q$  soit un endomorphisme de  $\mathbb{G}_{a,S}$ ,  $h : \mathcal{R}(G') \rightarrow \mathcal{R}(G)$  un  $q$ -morphisme de données radicielles épinglées. Choisissons pour chaque  $\alpha \in R_+$  un  $X_\alpha \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$  et un  $X'_{d(\alpha)} \in \Gamma(S, \mathfrak{g}'^{d(\alpha)})^\times$  (prolongeant les choix canoniques pour  $\alpha \in \Delta$ ). Supposons réalisées les conditions suivantes :

(i) Si  $\Delta = \{\alpha, \beta\}$ , on a  $D_S(h)(t_{\alpha\beta}) = t'_{d(\alpha)d(\beta)}$ .

(ii) Pour tout  $\alpha \in \Delta$  et tout  $\beta \in R_+$ ,  $\beta \neq \alpha$  (d'où  $s_\alpha(\beta) \in R_+$ ), si  $z \in \mathbb{G}_m(S)$  est défini par

$$\text{Ad}(w_\alpha)X_\beta = zX_{s_\alpha(\beta)},$$

on a aussi

$$\text{Ad}(w'_{d(\alpha)})X'_{d(\beta)} = z^{q(\beta)}X'_{d(s_\alpha(\beta))}.$$

(iii) Il existe un morphisme de groupes  $f : U \rightarrow U'$  tel que pour tout  $\alpha \in R_+$ , on ait pour tout  $x \in \mathbb{G}_a(S')$ ,  $S' \rightarrow S$ .

$$f(\exp(xX_\alpha)) = \exp(x^{q(\alpha)}X'_{d(\alpha)}).$$

Alors il existe un morphisme de groupes épinglés  $G \xrightarrow{g} G'$  tel que  $\mathcal{R}(g) = h$ .

En effet, on définit  $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow G'$  par

$$f_\alpha(\exp(xX_\alpha)) = \exp(x^{q(\alpha)}X'_{d(\alpha)});$$

on pose  $f_T = D_S(h)$ ,  $h_\alpha = w'_{d(\alpha)}$ . Les conditions de 2.3 sont vérifiées (remarquer que  $q(s_\alpha(\beta)) = q(\beta)$  (Exp. XXI, 6.8.4) et que l'on a toujours  $D_S(h)(t_\alpha) = t'_{d(\alpha)}$ ) et on conclut aussitôt.

**Remarque 2.6.** — On peut préciser ainsi la condition (v) de 2.3. On doit d'abord vérifier :

(a) Pour tout mot en  $w_\alpha$  et  $w_\beta$  tel que le mot correspondant transforme  $\alpha$  ou  $\beta$  en **284**  $\alpha$  ou  $\beta$ , la relation du type 2.3.3 correspondante est vérifiée. En fait la démonstration de 2.3.3 montre qu'il suffit de le vérifier pour les mots en  $w_\alpha$  et  $w_\beta$  qui sont minimaux (au sens que tout sous-mot initial non trivial ne vérifie pas les conditions imposées).

Si la condition (a) est vérifiée, on peut maintenant définir pour chaque  $\gamma \in R_{\alpha\beta}^+$  un  $f_\gamma : U_\gamma \rightarrow H$  comme en 2.3.5 ; on doit alors écrire :

(b) Le morphisme défini par les  $f_\gamma$

$$U_{\alpha\beta} = \prod_{\gamma \in R_{\alpha\beta}^+} U_\gamma \longrightarrow H$$

est un morphisme de groupes. D'après Exp. XXII, 5.5.8, (b) est entraîné par :

(b') Le morphisme précédent respecte les relations de commutations entre  $U_\gamma$  et  $U_\delta$  pour  $\gamma, \delta \in R_{\alpha\beta}^+$ ,  $\gamma > \delta$  (i.e. les relations en  $C_{i,j,\gamma,\delta}$  de Exp. XII, 5.5.2).

Il est clair que réciproquement, l'ensemble des conditions (a) et (b') est équivalent à (v).

On peut même réduire les conditions précédentes à des conditions portant uniquement sur les éléments  $h_\alpha, h_\beta, f_\alpha(u_\alpha), f_\beta(u_\beta)$  de  $H$ . Une condition du type (a) s'écrira par exemple, si  $s_\alpha s_\beta s_\alpha(\beta) = \alpha$  :

$$(1) \quad \text{int}(h_\alpha h_\beta h_\alpha) f_\beta(x) = f_\alpha(\text{int}(w_\alpha w_\beta w_\alpha)x);$$

pour tout  $x \in U_\alpha(S')$ ,  $S' \rightarrow S$ . En particulier, pour  $x = u_\beta$ , on a  $\text{int}(w_\alpha w_\beta w_\alpha)u_\beta = u_\alpha^z$  pour une certaine section  $z$  de  $\mathbb{G}_m(S)$ , et la relation précédente donnera

$$(1') \quad \text{int}(h_\alpha h_\beta h_\alpha) f_\beta(u_\beta) = f_\alpha(u_\alpha)^z.$$

**285** Montrons que réciproquement, en tenant compte des conditions (i) à (iv) de 2.3, (1') entraîne (1). Si  $t \in T(S')$ ,  $S' \rightarrow S$ , faisons opérer  $\text{int}(t)$  sur (1'); tenant compte des conditions (i) et (ii), on obtient (1) pour  $x = \text{int}(t)u_\beta = u_\beta^{\beta(t)}$ . Il suffit de remarquer maintenant que  $\beta : T \rightarrow \mathbb{G}_{m,S}$  est fidèlement plat, donc que la condition (1) est certainement vraie pour  $x \in U_\alpha(S')^\times$ ,  $S' \rightarrow S$ . Comme elle est additive en  $x$  et que toute section de  $U_\alpha$  s'écrit localement comme somme de deux sections de  $U_\alpha^\times$ , on en conclut bien que (1') + (i) + (ii)  $\implies$  (1).

On raisonne de même avec les conditions du type (b). Il faut alors se servir du fait que si  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont deux racines positives distinctes (et donc linéairement indépendantes sur  $\mathbb{Q}$ ), le morphisme  $T \rightarrow \mathbb{G}_{m,S}^2$  de composantes  $\gamma$  et  $\gamma'$  est fidèlement plat. Nous laissons au lecteur les détails de cette transposition.

### 3. Groupes de rang semi-simple 2

#### 3.1. Généralités

**Lemme 3.1.1.** — Soient  $S$  un schéma,  $G$  un  $S$ -groupe épinglé,  $\alpha$  et  $\beta$  deux racines de  $G$ , avec  $\alpha + \beta \neq 0$ .

(i) Si  $\alpha + \beta \notin R$ , on a

$$\exp(X_\alpha) \exp(X_\beta) = \exp(X_\beta) \exp(X_\alpha)$$

pour tous  $X_\alpha \in W(\mathfrak{g}^\alpha)(S')$ ,  $X_\beta \in W(\mathfrak{g}^\beta)(S')$ ,  $S' \rightarrow S$ .

(ii) Si  $\alpha + \beta$  et  $\alpha - \beta$  ne sont pas racines, on a

$$w_\alpha(z_\alpha) \exp(X_\beta) w_\alpha(z_\alpha)^{-1} = \exp(X_\beta)$$

**286** pour tous  $X_\beta \in W(\mathfrak{g}^\beta)(S')$ ,  $z_\alpha \in W(\mathfrak{g}^\alpha)^\times(S')$ ,  $S' \rightarrow S$ , et

$$w_\alpha(z_\alpha)w_\beta(z_\beta) = w_\beta(z_\beta)w_\alpha(z_\alpha)$$

pour tous  $z_\alpha \in W(\mathfrak{g}^\alpha)^\times(S')$  et  $z_\beta \in W(\mathfrak{g}^\beta)^\times(S')$ ,  $S' \rightarrow S$ .

(iii) Soient  $X_\alpha \in W(\mathfrak{g}^\alpha)^\times(S')$ ,  $X_\beta \in W(\mathfrak{g}^\beta)^\times(S')$ , et  $w \in \underline{\text{Norm}}_G(\mathbb{T})(S')$  tels que  $\bar{w}(\alpha) = \beta$ ; définissons  $z \in \mathbb{G}_m(S')$  par

$$\text{Ad}(w)X_\alpha = zX_\beta.$$

Alors

$$\begin{aligned} \text{int}(w) \exp(xX_\alpha) &= \exp(xzX_\beta), \\ \text{int}(w) \exp(yX_\alpha^{-1}) &= \exp(yz^{-1}X_\beta^{-1}), \\ \text{int}(w)w_\alpha(X_\alpha) &= \beta^*(z)w_\beta(X_\beta). \end{aligned}$$

En particulier, si  $z = \pm 1$ , on a

$$\text{int}(w)w_\alpha(X_\alpha) = w_\beta(X_\beta)^z.$$

(iv) Si on pose  $t_\alpha = \alpha^*(-1)$ ,  $t_\beta = \beta^*(-1)$ , on a

$$s_\alpha(t_\beta) = t_\beta t_\alpha^{(\beta^*, \alpha)}, \quad \beta(t_\alpha) = (-1)^{(\alpha^*, \beta)}.$$

Démonstration. (i) résulte aussitôt de Exp. XXII, 5.5.2, (ii) de Exp. XX, 3.1 et de (i) appliqué à  $(\beta, \alpha)$ ,  $(\beta, -\alpha)$ ,  $(-\beta, \alpha)$ ,  $(-\beta, -\alpha)$ , (iii) est évident sur les définitions; pour la dernière assertion de (iii), remarquer que  $\beta^*(-1) = w_\beta(X_\beta)^{-2}$ . Enfin, (iv) est trivial.

**Proposition 3.1.2 (Groupes de type  $A_1 \times A_1$ ).** — Soient  $S$  un schéma,  $G$  un  $S$ -groupe épingle de type  $A_1 \times A_1$ , notons  $\Delta = R_+ = \{\alpha, \beta\}$ .

(i) On a

$$t_{\alpha\beta} = (w_\alpha w_\beta)^2 = t_\alpha t_\beta = (w_\beta w_\alpha)^2 = t_{\beta\alpha}.$$

(ii) On a

$$\text{Ad}(w_\alpha)X_\beta = X_\beta, \quad \text{Ad}(w_\beta)X_\alpha = X_\alpha.$$

(iii)  $U_\alpha$  et  $U_\beta$  commutent (i.e.  $U$  est commutatif).

En effet, par l'assertion (ii) du lemme, on a

$$w_\alpha w_\beta = w_\beta w_\alpha,$$

d'où  $(w_\alpha w_\beta)^2 = w_\alpha^2 w_\beta^2 = t_\alpha t_\beta$ , soit (i). Par l'assertion (ii) du lemme, on a également (ii); enfin (iii) est l'assertion (i) du lemme.

**3.1.3.** — Explications ici la condition (v) de 2.3. En utilisant la méthode exposée en 2.6, on obtient les deux groupes de conditions suivants, en posant  $v_\alpha = f_\alpha(u_\alpha)$ , pour  $\alpha \in \Delta$ :

$$(A) \begin{cases} h_\alpha v_\beta h_\alpha^{-1} = v_\beta \\ h_\beta v_\alpha h_\beta^{-1} = v_\alpha \end{cases} \quad (B) \quad v_\alpha v_\beta = v_\beta v_\alpha.$$

**3.2. Groupes de type  $A_2$**

**Proposition 3.2.1.** — Soient  $S$  un schéma,  $G$  un  $S$ -groupe épinglé de type  $A_2$ , notons  $\Delta = \{\alpha, \beta\}$ ,  $R_+ = \{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$ .

288 (i) On a

$$t_{\alpha\beta} = (w_\alpha w_\beta)^3 = e = (w_\beta w_\alpha)^3 = t_{\beta\alpha}.$$

(ii) Posons  $\text{Ad}(w_\beta)X_\alpha = X_{\alpha+\beta}$ . Alors

$$\text{Ad}(w_\alpha)X_\beta = -X_{\alpha+\beta}, \quad \text{Ad}(w_\alpha)X_{\alpha+\beta} = X_\beta, \quad \text{Ad}(w_\beta)X_{\alpha+\beta} = -X_\alpha.$$

(iii) Posons  $p_{\alpha+\beta}(x) = \exp(xX_{\alpha+\beta}) = \text{int}(w_\beta)p_\alpha(x)$ . On a :

$$p_\beta(y)p_\alpha(x) = p_\alpha(x)p_\beta(y)p_{\alpha+\beta}(xy).$$

**3.2.2.** — La démonstration occupe les numéros 3.2.2 à 3.2.7. D’abord, on a  $(\beta^*, \alpha) = (\alpha^*, \beta) = -1$ , d’où  $\alpha(t_\beta) = \beta(t_\alpha) = -1$ .

Posons  $\text{Ad}(w_\beta)X_\alpha = X_{\alpha+\beta}$ ; on a aussitôt

$$\text{Ad}(w_\beta)X_{\alpha+\beta} = \alpha(t_\beta)X_\alpha = -X_\alpha.$$

Posons

$$\text{Ad}(w_\alpha)X_\beta = zX_{\alpha+\beta}, \quad z \in \mathbb{G}_m(S),$$

d’où

$$\text{Ad}(w_\alpha)X_{\alpha+\beta} = \beta(t_\alpha)z^{-1}X_\beta = -z^{-1}X_\beta.$$

Nous savons (Exp. XXII, 5.5.2), qu’il existe une unique section  $A \in \mathbb{G}_a(S)$  telle que

(+)

$$p_\beta(y)p_\alpha(x) = p_\alpha(x)p_\beta(y)p_{\alpha+\beta}(Ax).$$

Il s’agit donc pour prouver (ii) et (iii) de montrer que  $A = -z = 1$ .

289 **3.2.3.** — Faisons opérer  $\text{int}(w_\beta)$  sur la formule (+) précédente, on obtient :

(++)

$$p_{-\beta}(-y)p_{\alpha+\beta}(x) = p_{\alpha+\beta}(x)p_{-\beta}(-y)p_\alpha(-Ax)$$

**3.2.4.** — Par définition de  $p_{\alpha+\beta}$ , on a

$$w_\beta p_\alpha(x) w_\beta^{-1} = p_{\alpha+\beta}(x),$$

ce qui s’écrit

$$p_\beta(1)p_{-\beta}(-1)p_\beta(1)p_\alpha(x)p_\beta(-1)p_{-\beta}(1)p_\beta(-1) = p_{\alpha+\beta}(x).$$

Comme  $p_\beta$  et  $p_{\alpha+\beta}$  commutent,  $\alpha + 2\beta$  n’étant pas racine, cela s’écrit aussi

$$p_\beta(1)p_\alpha(x)p_\beta(-1) = p_{-\beta}(1)p_{\alpha+\beta}(x)p_{-\beta}(-1).$$

Utilisant maintenant (+) dans le premier membre et (++) dans le second, on obtient :

$$p_\alpha(x)p_\beta(1)p_{\alpha+\beta}(Ax)p_\beta(-1) = p_{\alpha+\beta}(x)p_{-\beta}(1)p_\alpha(Ax)p_{-\beta}(-1).$$

Comme  $\alpha + 2\beta$  (resp.  $\alpha - \beta$ ) n’est pas racine, le premier (resp. second) membre s’écrit

$$p_\alpha(x)p_{\alpha+\beta}(Ax) \quad \text{resp.} \quad p_{\alpha+\beta}(x)p_\alpha(Ax)$$

et le terme de droite égale  $p_\alpha(Ax)p_{\alpha+\beta}(x)$ , puisque  $2\alpha + \beta$  n’est pas racine. Donc

$$p_\alpha(x)p_{\alpha+\beta}(Ax) = p_\alpha(Ax)p_{\alpha+\beta}(x)$$

ce qui donne (d’après XXII 4.1.3)  $A = 1$ .



**3.2.5.** — Faisons maintenant opérer  $\text{int}(w_\alpha)$  sur la formule (+), on trouve, en utilisant le fait que  $A = 1$ ,

$$(+++) \quad p_{\alpha+\beta}(zy) p_{-\alpha}(-x) = p_{-\alpha}(-x) p_{\alpha+\beta}(zy) p_\beta(-z^{-1}xy).$$

**3.2.6.** — Écrivons maintenant comme tout-à-l'heure

$$w_\alpha p_\beta(y) w_\alpha^{-1} = p_{\alpha+\beta}(zy),$$

d'où, comme  $p_\alpha$  et  $p_{\alpha+\beta}$  commutent,

$$p_\alpha(1) p_\beta(y) p_\alpha(-1) = p_{-\alpha}(1) p_{\alpha+\beta}(zy) p_{-\alpha}(-1).$$

Utilisant maintenant (+) et (+++), cela s'écrit aussi

$$p_\beta(y) p_{\alpha+\beta}(-y) = p_{\alpha+\beta}(zy) p_\beta(-z^{-1}y),$$

et comme  $p_\beta$  et  $p_{\alpha+\beta}$  commutent, ceci donne  $z = -1$ .

**3.2.7.** — On a donc prouvé (ii) et (iii), prouvons (i). On a

$$w_\alpha w_\beta w_\alpha = w_\alpha w_\beta w_\alpha^{-1} w_\alpha^2 = w_{\alpha+\beta}^{-1} t_\alpha,$$

d'où

$$\begin{aligned} w_\beta w_\alpha w_\beta w_\alpha w_\beta &= w_\beta w_{\alpha+\beta}^{-1} t_\alpha w_\beta = w_\beta w_{\alpha+\beta}^{-1} w_\beta^{-1} \cdot s_\beta(t_\alpha) \cdot t_\beta = \\ &= w_\alpha \cdot t_\alpha t_\beta \cdot t_\beta = w_\alpha t_\alpha = w_\alpha^{-1}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$(w_\alpha w_\beta)^3 = (w_\beta w_\alpha)^3 = e,$$

ce qui achève la démonstration.

**Remarque 3.2.8.** — La condition (v) de 2.3 se traduit ici par (notant  $v_\alpha = f_\alpha(u_\alpha)$ ) :

$$(A) \quad h_\alpha v_\beta^{-1} h_\alpha^{-1} = h_\beta v_\alpha h_\beta^{-1} \quad (B) \quad \begin{cases} v_\beta v_\alpha = v_\alpha v_\beta \cdot h_\beta v_\alpha h_\beta^{-1}, \\ v_\beta \cdot h_\beta v_\alpha h_\beta^{-1} = h_\beta v_\alpha h_\beta^{-1} \cdot v_\beta, \\ v_\alpha \cdot h_\beta v_\alpha h_\beta^{-1} = h_\beta v_\alpha h_\beta^{-1} \cdot v_\alpha. \end{cases}$$

Posant  $v_{\alpha+\beta} = \text{int}(h_\beta)v_\alpha$ , les trois dernières conditions s'écrivent aussi

$$(B) \quad \begin{cases} v_\beta v_\alpha = v_\alpha v_\beta v_{\alpha+\beta}, \\ v_\alpha v_{\alpha+\beta} = v_{\alpha+\beta} v_\alpha, \\ v_\beta v_{\alpha+\beta} = v_{\alpha+\beta} v_\beta. \end{cases}$$

### 3.3. Groupes de type $B_2$

**Proposition 3.3.1.** — Soient  $S$  un schéma,  $G$  un  $S$ -groupe épinglé de type  $B_2$ , notons  $\Delta = \{\alpha, \beta\}$ ,  $R_+ = \{\alpha, \beta, \alpha + \beta, 2\alpha + \beta\}$ .

(i) On a

$$t_{\alpha\beta} = (w_\alpha w_\beta)^4 = t_\alpha = (w_\beta w_\alpha)^4 = t_{\beta\alpha}.$$

(ii) Si on pose

$$\text{Ad}(w_\beta)X_\alpha = X_{\alpha+\beta}, \quad \text{Ad}(w_\alpha)X_\beta = X_{2\alpha+\beta},$$

on a :

$$\begin{aligned} \text{Ad}(w_\alpha)X_{\alpha+\beta} &= -X_{\alpha+\beta}, \\ \text{Ad}(w_\alpha)X_{2\alpha+\beta} &= X_\beta, \\ \text{Ad}(w_\beta)X_{\alpha+\beta} &= -X_\alpha, \\ \text{Ad}(w_\beta)X_{2\alpha+\beta} &= X_{2\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

(iii) Posons  $p_{\alpha+\beta}(x) = \exp(xX_{\alpha+\beta}) = \text{int}(w_\beta)p_\alpha(x)$

$$p_{2\alpha+\beta}(x) = \exp(xX_{2\alpha+\beta}) = \text{int}(w_\alpha)p_\beta(x).$$

Alors :

$$\begin{aligned} p_\beta(y)p_\alpha(x) &= p_\alpha(x)p_\beta(y)p_{\alpha+\beta}(xy)p_{2\alpha+\beta}(x^2y), \\ p_{\alpha+\beta}(y)p_\alpha(x) &= p_\alpha(x)p_{\alpha+\beta}(y)p_{2\alpha+\beta}(2xy). \end{aligned}$$

**3.3.2.** — La démonstration occupe les numéros 3.3.2 à 3.3.6. On a  $(\beta^*, \alpha) = -1$ ,  $(\alpha^*, \beta) = -2$ , d'où  $\alpha(t_\beta) = -1$ ,  $\beta(t_\alpha) = 1$ . Notons en passant que  $\beta(t_\alpha) = \alpha(t_\alpha) = 1$ , ce qui montre que  $t_\alpha$  est une section de  $\text{Centr}(G)$ . Posons

$$\text{Ad}(w_\beta)X_\alpha = X_{\alpha+\beta}, \quad \text{Ad}(w_\alpha)X_\beta = X_{2\alpha+\beta}.$$

On a aussitôt

$$\begin{aligned} \text{Ad}(w_\beta)X_{\alpha+\beta} &= \alpha(t_\beta)X_\alpha = -X_\alpha, \\ \text{Ad}(w_\alpha)X_{2\alpha+\beta} &= \beta(t_\alpha)X_\beta = X_\beta. \end{aligned}$$

Comme  $(2\alpha + \beta) + \beta$  et  $(2\alpha + \beta) - \beta$  ne sont pas racines, on a

$$\text{Ad}(w_\beta)X_{2\alpha+\beta} = X_{2\alpha+\beta}.$$

Il existe un scalaire  $k \in \mathbb{G}_m(S)$  tel que

$$\text{Ad}(w_\alpha)X_{\alpha+\beta} = kX_{\alpha+\beta}.$$

D'autre part, par Exp. XXII, 5.5.2, il existe des sections  $A, B, C \in \mathbb{G}_a(S)$  telles que

$$\begin{aligned} (1) \quad & p_\beta(y)p_\alpha(x) = p_\alpha(x)p_\beta(y)p_{\alpha+\beta}(Axy)p_{2\alpha+\beta}(Bx^2y), \\ (2) \quad & p_{\alpha+\beta}(y)p_\alpha(x) = p_\alpha(x)p_{\alpha+\beta}(y)p_{2\alpha+\beta}(Cxy). \end{aligned}$$

Il s'agit donc, dans (ii) et (iii), de prouver  $A = B = 1$ ,  $C = 2$ ,  $k = -1$ .

**3.3.3.** — Faisons opérer  $\text{int}(w_\alpha)$  sur la formule (2). On trouve

$$(3) \quad p_{2\alpha+\beta}(y)p_{-\alpha}(-x) = p_{-\alpha}(-x)p_{2\alpha+\beta}(y)p_{\alpha+\beta}(Aky)p_\beta(Bx^2y).$$

Transformant de même (2), on obtient

$$(4) \quad p_{\alpha+\beta}(ky)p_{-\alpha}(-x) = p_{-\alpha}(-x)p_{\alpha+\beta}(ky)p_\beta(Cxy).$$

**293** Transformant (1) par  $\text{int}(w_\beta)$ , on a

$$(5) \quad p_{-\beta}(-y)p_{\alpha+\beta}(x) = p_{\alpha+\beta}(x)p_{-\beta}(-y)p_\alpha(-Axy)p_{2\alpha+\beta}(Bx^2y).$$

**3.3.4.** — Écrivons

$$w_\beta p_\alpha(X) w_\beta^{-1} = p_{\alpha+\beta}(x).$$

Comme  $\alpha + 2\beta$  n'est pas racine, cela donne

$$p_\beta(1) p_\alpha(x) p_\beta(-1) = p_{-\beta}(1) p_{\alpha+\beta}(x) p_{-\beta}(-1).$$

Utilisant (1) au premier membre et (5) au second, on obtient

$$\begin{aligned} p_\alpha(x) p_\beta(1) p_{\alpha+\beta}(Ax) p_{2\alpha+\beta}(Bx^2) p_\beta(-1) = \\ p_{\alpha+\beta}(x) p_{-\beta}(1) p_\alpha(Ax) p_{2\alpha+\beta}(-Bx^2) p_{-\beta}(-1). \end{aligned}$$

Comme  $p_\beta$  commute à  $p_{\alpha+\beta}$  et  $p_{2\alpha+\beta}$  d'une part, et  $p_{-\beta}$  commute à  $p_\alpha$  et  $p_{2\alpha+\beta}$  d'autre part, cela s'écrit

$$p_\alpha(x) p_{\alpha+\beta}(Ax) p_{2\alpha+\beta}(Bx^2) = p_{\alpha+\beta}(x) p_\alpha(Ax) p_{2\alpha+\beta}(-Bx^2).$$

Transformant le second membre par (2), on obtient

$$p_\alpha(x) p_{\alpha+\beta}(Ax) p_{2\alpha+\beta}(Bx^2) = p_\alpha(Ax) p_{\alpha+\beta}(x) p_{2\alpha+\beta}((AC - B)x^2),$$

ce qui donne

$$A = 1, \quad C = 2B.$$

**3.3.5.** — Écrivons maintenant

$$w_\alpha p_\beta(y) w_\alpha^{-1} = p_{2\alpha+\beta}(y).$$

Comme  $3\alpha + \beta$  n'est pas racine, cela donne

$$p_\alpha(1) p_\beta(y) p_\alpha(-1) = p_{-\alpha}(1) p_{2\alpha+\beta}(y) p_{-\alpha}(-1).$$

Utilisant (1) au premier membre, (3) au second, on obtient

$$p_\beta(y) p_{\alpha+\beta}(-Ay) p_{2\alpha+\beta}(By) = p_{2\alpha+\beta}(y) p_{\alpha+\beta}(Aky) p_\beta(By).$$

Comme  $p_{\alpha+\beta}$ ,  $p_{2\alpha+\beta}$ , et  $p_\beta$  commutent, cela donne aussitôt

$$B = 1, \quad -A = Ak,$$

d'où enfin

$$A = 1, \quad B = 1, \quad C = 2, \quad k = -1.$$

**3.3.6.** — On a donc prouvé (ii) et (iii). Prouvons (i). Tenant compte de l'égalité  $s_\beta(t_\alpha) = t_\alpha t_\beta^{(\alpha^*, \beta)} = t_\alpha$  (puisque  $(\alpha^*, \beta) = 2$ ), on a successivement :

$$\begin{aligned} w_\alpha w_\beta w_\alpha &= w_\alpha w_\beta w_\alpha^{-1} t_\alpha = w_{2\alpha+\beta} t_\alpha, \\ w_\beta w_\alpha w_\beta w_\alpha w_\beta &= w_\beta w_{2\alpha+\beta} w_\beta^{-1} \cdot s_\beta(t_\alpha) \cdot t_\beta = w_{2\alpha+\beta} t_\alpha t_\beta, \\ w_\alpha w_\beta w_\alpha w_\beta w_\alpha w_\beta w_\alpha &= w_\alpha w_{2\alpha+\beta} w_\alpha^{-1} \cdot s_\alpha(t_\alpha t_\beta) \cdot t_\alpha = w_\beta \cdot t_\alpha \cdot t_\beta t_\alpha \cdot t_\alpha = w_\beta^{-1} t_\alpha, \end{aligned}$$

d'où

$$(w_\beta w_\alpha)^4 = t_\alpha,$$

et

$$(w_\alpha w_\beta)^4 = s_\beta(t_\alpha) = t_\alpha,$$

ce qui achève la démonstration.

**Remarque 3.3.7.** — La condition (v) de 2.3 se traduit ici de la manière suivante, en posant  $v_{\alpha+\beta} = \text{int}(h_\beta)v_\alpha$  et  $v_{2\alpha+\beta} = \text{int}(h_\alpha)v_\beta$  :

$$(A) \begin{cases} \text{int}(h_\alpha h_\beta h_\alpha)v_\beta = v_\beta, \\ \text{int}(h_\beta h_\alpha h_\beta)v_\alpha = v_\alpha, \end{cases} \quad (B) \begin{cases} v_\beta v_\alpha = v_\alpha v_\beta v_{\alpha+\beta} v_{2\alpha+\beta}, \\ v_{\alpha+\beta} v_\alpha = v_\alpha v_{\alpha+\beta} v_{2\alpha+\beta}^2, \\ v_{\alpha+\beta} v_\beta = v_\beta v_{\alpha+\beta}, \\ v_{2\alpha+\beta} v_\alpha = v_\alpha v_{2\alpha+\beta}, \\ v_{2\alpha+\beta} v_\beta = v_\beta v_{2\alpha+\beta}, \\ v_{2\alpha+\beta} v_{\alpha+\beta} = v_{\alpha+\beta} v_{2\alpha+\beta}. \end{cases}$$

### 3.4. Groupes de type $G_2$

**Proposition 3.4.1.** — Soient  $S$  un schéma,  $G$  un  $S$ -groupe épinglé de type  $G_2$ , notons  $\Delta = \{\alpha, \beta\}$ ,  $R_+ = \{\alpha, \beta, \alpha + \beta, 2\alpha + \beta, 3\alpha + \beta, 3\alpha + 2\beta\}$ .

(i) On a

$$t_{\alpha\beta} = (w_\alpha w_\beta)^6 = e = (w_\beta w_\alpha)^6 = t_{\beta\alpha}.$$

(ii) Si on pose

$$\begin{aligned} \text{Ad}(w_\beta)X_\alpha &= X_{\alpha+\beta}, & \text{Ad}(w_\alpha)X_{\alpha+\beta} &= X_{2\alpha+\beta}, \\ \text{Ad}(w_\alpha)X_\beta &= -X_{3\alpha+\beta}, & \text{Ad}(w_\beta)X_{3\alpha+\beta} &= X_{3\alpha+2\beta}, \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned} \text{Ad}(w_\alpha)X_{2\alpha+\beta} &= -X_{\alpha+\beta}, & \text{Ad}(w_\alpha)X_{3\alpha+\beta} &= X_\beta, \\ \text{Ad}(w_\alpha)X_{3\alpha+2\beta} &= X_{3\alpha+2\beta}, & \text{Ad}(w_\beta)X_{\alpha+\beta} &= -X_\alpha, \\ \text{Ad}(w_\beta)X_{2\alpha+\beta} &= X_{2\alpha+\beta}, & \text{Ad}(w_\beta)X_{3\alpha+2\beta} &= -X_{3\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

(iii) Si on pose

$$\begin{aligned} p_{\alpha+\beta}(x) &= \exp(xX_{\alpha+\beta}) = \text{int}(w_\beta)p_\alpha(x), \\ p_{2\alpha+\beta}(x) &= \exp(xX_{2\alpha+\beta}) = \text{int}(w_\alpha w_\beta)p_\alpha(x), \\ p_{3\alpha+\beta}(x) &= \exp(xX_{3\alpha+\beta}) = \text{int}(w_\alpha)p_\beta(-x), \\ p_{3\alpha+2\beta}(x) &= \exp(xX_{3\alpha+2\beta}) = \text{int}(w_\beta w_\alpha)p_\beta(-x), \end{aligned}$$

296 on a :

$$\begin{aligned} p_\beta(y)p_\alpha(x) &= p_\alpha(x)p_\beta(y)p_{\alpha+\beta}(xy)p_{2\alpha+\beta}(x^2y)p_{3\alpha+\beta}(x^3y)p_{3\alpha+2\beta}(x^3y^2), \\ p_{\alpha+\beta}(y)p_\alpha(x) &= p_\alpha(x)p_{\alpha+\beta}(y)p_{2\alpha+\beta}(2xy)p_{3\alpha+\beta}(3x^2y)p_{3\alpha+2\beta}(3xy^2), \\ p_{2\alpha+\beta}(y)p_\alpha(x) &= p_\alpha(x)p_{2\alpha+\beta}(y)p_{3\alpha+\beta}(3xy), \\ p_{3\alpha+\beta}(y)p_\beta(x) &= p_\beta(x)p_{3\alpha+\beta}(y)p_{3\alpha+2\beta}(-xy), \\ p_{2\alpha+\beta}(y)p_{\alpha+\beta}(x) &= p_{\alpha+\beta}(x)p_{2\alpha+\beta}(y)p_{3\alpha+2\beta}(3xy). \end{aligned}$$

**3.4.2.** — La démonstration occupe les numéros 3.4.2 à 3.4.9. On a  $(\beta^*, \alpha) = -1$ ,  $(\alpha^*, \beta) = -3$ , d'où  $\beta(t_\alpha) = \alpha(t_\beta) = -1$ . Définissons  $X_{\alpha+\beta}$ ,  $X_{2\alpha+\beta}$ ,  $X_{3\alpha+\beta}$  et  $X_{3\alpha+2\beta}$

comme dans (ii). On a aussitôt

$$\begin{aligned} \operatorname{Ad}(w_\beta)X_{\alpha+\beta} &= \alpha(t_\beta)X_\alpha = -X_\alpha, \\ \operatorname{Ad}(w_\alpha)X_{2\alpha+\beta} &= \alpha(t_\alpha)\beta(t_\alpha)X_{\alpha+\beta} = -X_{\alpha+\beta}, \\ \operatorname{Ad}(w_\alpha)X_{3\alpha+\beta} &= -\beta(t_\alpha)X_\beta = X_\beta, \\ \operatorname{Ad}(w_\beta)X_{3\alpha+2\beta} &= \alpha(t_\beta)^3\beta(t_\beta)X_{3\alpha+\beta} = -X_{3\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Enfin, comme  $(3\alpha + 2\beta) \pm \alpha$  et  $(2\alpha + \beta) \pm \beta$  ne sont pas racines, on a :

$$\operatorname{Ad}(w_\alpha)X_{3\alpha+2\beta} = X_{3\alpha+2\beta}, \quad \operatorname{Ad}(w_\beta)X_{2\alpha+\beta} = X_{2\alpha+\beta},$$

ce qui achève de démontrer (ii).

**3.4.3.** — En vertu de Exp. XXII, 5.5.2, il existe des scalaires <sup>(8)</sup>

297

$$A, B, C, D, E, F, G, H, J \in \mathbb{G}_a(S),$$

tels que

$$\begin{aligned} (1) \quad p_\beta(y)p_\alpha(x) &= p_\alpha(x)p_\beta(y)p_{\alpha+\beta}(Axy)p_{2\alpha+\beta}(Bx^2y)p_{3\alpha+\beta}(Cx^3y)p_{3\alpha+2\beta}(Dx^3y^2). \\ (2) \quad p_{\alpha+\beta}(y)p_\alpha(x) &= p_\alpha(x)p_{\alpha+\beta}(y)p_{2\alpha+\beta}(Exy)p_{3\alpha+\beta}(Fx^2y)p_{3\alpha+2\beta}(Gxy^2). \\ (3) \quad p_{2\alpha+\beta}(y)p_\alpha(x) &= p_\alpha(x)p_{2\alpha+\beta}(y)p_{3\alpha+\beta}(Hxy). \\ (4) \quad p_{3\alpha+\beta}(y)p_\beta(x) &= p_\beta(x)p_{3\alpha+\beta}(y)p_{3\alpha+2\beta}(Jxy). \end{aligned}$$

**3.4.4.** — Faisons opérer  $\operatorname{int}(w_\beta)$  sur (1), (3) et (4) :

$$\begin{aligned} (5) \quad p_{-\beta}(-y)p_{\alpha+\beta}(x) &= \\ & p_{\alpha+\beta}(x)p_{-\beta}(-y)p_\alpha(-Axy)p_{2\alpha+\beta}(Bx^2y)p_{3\alpha+2\beta}(Cx^3y)p_{3\alpha+\beta}(-Dx^3y^2). \\ (6) \quad p_{2\alpha+\beta}(y)p_{\alpha+\beta}(x) &= p_{\alpha+\beta}(x)p_{2\alpha+\beta}(y)p_{3\alpha+2\beta}(Hxy). \\ (7) \quad p_{3\alpha+2\beta}(y)p_{-\beta}(-x) &= p_{-\beta}(-x)p_{3\alpha+2\beta}(y)p_{3\alpha+\beta}(-Jxy). \end{aligned}$$

Faisant de même opérer  $\operatorname{int}(w_\alpha)$  sur (1), on trouve

$$(8) \quad p_{3\alpha+\beta}(-y)p_{-\alpha}(-x) = \\ p_{-\alpha}(-x)p_{3\alpha+\beta}(-y)p_{2\alpha+\beta}(Axy)p_{\alpha+\beta}(-Bx^2y)p_\beta(Cx^3y)p_{3\alpha+\beta}(Dx^3y^2).$$

**3.4.5.** — Écrivons

$$w_\beta p_\alpha(x) w_\beta^{-1} = p_{\alpha+\beta}(x),$$

soit,  $\alpha + 2\beta$  n'étant pas racine :

298

$$(9) \quad p_\beta(1)p_\alpha(x)p_\alpha(-1) = p_{-\beta}(1)p_{\alpha+\beta}(x)p_{-\beta}(-1).$$

<sup>(8)</sup>N.D.E. : On introduit ici des constantes absolues  $A, B, \dots, J$ . Ces constantes vont être déterminées dans les pages qui suivent ; leurs valeurs sont  $A = B = C = D = 1$ ,  $E = 2$ ,  $J = -1$ ,  $F = G = H = 3$ , cf. 3.4.8 page 195.

Transformant le premier membre de (9) par (1), puis (4), on obtient :

$$\begin{aligned}
 (10) \quad & p_\beta(1) p_\alpha(x) p_\beta(-1) \\
 &= p_\alpha(x) p_\beta(1) p_{\alpha+\beta}(Ax) p_{2\alpha+\beta}(Bx^2) p_{3\alpha+\beta}(Cx^3) p_{3\alpha+2\beta}(Dx^3) p_\beta(-1) \\
 &= p_\alpha(x) p_\beta(1) p_{\alpha+\beta}(Ax) p_{2\alpha+\beta}(Bx^2) p_\beta(-1) p_{3\alpha+\beta}(Cx^3) p_{3\alpha+2\beta}((D - CJ)x^3) \\
 &= p_\alpha(x) p_{\alpha+\beta}(Ax) p_{2\alpha+\beta}(Bx^2) p_{3\alpha+\beta}(Cx^3) p_{3\alpha+2\beta}((D - CJ)x^3).
 \end{aligned}$$

Transformons le second membre de (9) par (5), puis (7) :

$$\begin{aligned}
 (11) \quad & p_{-\beta}(1) p_{\alpha+\beta}(x) p_{-\beta}(-1) \\
 &= p_{\alpha+\beta}(x) p_{-\beta}(1) p_\alpha(Ax) p_{2\alpha+\beta}(-Bx^2) p_{3\alpha+2\beta}(-Cx^3) p_{3\alpha+\beta}(-Dx^3) p_{-\beta}(-1) \\
 &= p_{\alpha+\beta}(x) p_\alpha(Ax) p_{2\alpha+\beta}(-Bx^2) p_{3\alpha+2\beta}(-Cx^3) p_{3\alpha+\beta}((CJ - D)x^3).
 \end{aligned}$$

Utilisant maintenant (2), ce second membre devient

$$\begin{aligned}
 (12) \quad & p_\alpha(Ax) p_{\alpha+\beta}(x) p_{2\alpha+\beta}(AEx^2) p_{3\alpha+\beta}(A^2Fx^3) p_{3\alpha+2\beta}(AGx^3) \times \\
 & \quad p_{2\alpha+\beta}(-Bx^2) p_{3\alpha+2\beta}(-Cx^3) p_{3\alpha+\beta}((CJ - D)x^3) = \\
 & p_\alpha(Ax) p_{\alpha+\beta}(x) p_{2\alpha+\beta}((AE - B)x^2) p_{3\alpha+\beta}((A^2F + CJ - D)x^3) p_{3\alpha+2\beta}((AG - C)x^3).
 \end{aligned}$$

Donc (9) se récrit :

$$\begin{aligned}
 & p_\alpha(x) p_{\alpha+\beta}(Ax) p_{2\alpha+\beta}(Bx^2) p_{3\alpha+\beta}(Cx^3) p_{3\alpha+2\beta}((D - CJ)x^3) = \\
 & p_\alpha(Ax) p_{\alpha+\beta}(x) p_{2\alpha+\beta}((AE - B)x^2) p_{3\alpha+\beta}((A^2F + CJ - D)x^3) p_{3\alpha+2\beta}((AG - C)x^3)
 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$A = 1, \quad E = 2B, \quad C + D = F + CJ, \quad F = G.$$

**3.4.6.** — Écrivons maintenant

$$w_\alpha p_\beta(y) w_\alpha^{-1} = p_{3\alpha+\beta}(-y),$$

**299** soit,  $4\alpha + \beta$  n'étant pas racine :

$$(13) \quad p_\alpha(1) p_\beta(y) p_\alpha(-1) = p_{-\alpha}(1) p_{3\alpha+\beta}(-y) p_{-\alpha}(-1).$$

Transformons le premier membre par (1) :

$$p_\alpha(1) p_\beta(y) p_\alpha(-1) = p_\beta(y) p_{\alpha+\beta}(-Ay) p_{2\alpha+\beta}(By) p_{3\alpha+\beta}(-Cy) p_{3\alpha+2\beta}(-Dy^2).$$

Transformons le second membre de (13) successivement par (8), (6) et (4) :

$$\begin{aligned}
 & p_{-\alpha}(1) p_{3\alpha+\beta}(-y) p_{-\alpha}(-1) \\
 &= p_{3\alpha+\beta}(-y) p_{2\alpha+\beta}(Ay) p_{\alpha+\beta}(-By) p_\beta(Cy) p_{3\alpha+2\beta}(Dy^2) \\
 &= p_{3\alpha+\beta}(-y) p_{\alpha+\beta}(-By) p_{2\alpha+\beta}(Ay) p_{3\alpha+2\beta}(-ABHy^2) p_\beta(Cy) p_{3\alpha+2\beta}(Dy^2) \\
 &= p_\beta(Cy) p_{3\alpha+\beta}(-y) p_{\alpha+\beta}(-By) p_{2\alpha+\beta}(Ay) p_{3\alpha+2\beta}((D - CJ - ABH)y^2) \\
 &= p_\beta(Cy) p_{\alpha+\beta}(-By) p_{2\alpha+\beta}(Ay) p_{3\alpha+\beta}(-y) p_{3\alpha+2\beta}((D - CJ - ABH)y^2).
 \end{aligned}$$

Donc (13) se récrit :

$$p_\beta(Cy) p_{\alpha+\beta}(-By) p_{2\alpha+\beta}(Ay) p_{3\alpha+\beta}(-y) p_{3\alpha+2\beta}((D - CJ - ABH)y^2) = \\ p_\beta(y) p_{\alpha+\beta}(-Ay) p_{2\alpha+\beta}(By) p_{3\alpha+\beta}(-Cy) p_{3\alpha+2\beta}(-Dy^2)$$

d'où

$$C = 1, \quad A = B, \quad D - CJ - ABH = -D.$$

Tenons compte des résultats déjà obtenus :

$$A = B = C = 1, \quad E = 2, \quad F = G, \\ D + 1 = F + J, \quad 2D = H + J.$$

**3.4.7.** — Écrivons

$$w_\beta p_{3\alpha+\beta}(x) w_\beta^{-1} = p_{3\alpha+2\beta}(x),$$

soit

$$p_\beta(1) p_{3\alpha+\beta}(x) p_\beta(-1) = p_{-\beta}(1) p_{3\alpha+2\beta}(x) p_{-\beta}(-1).$$

Transformant le premier membre par (4), le second par (7), on obtient :

300

$$p_{3\alpha+\beta}(x) p_{3\alpha+2\beta}(-Jx) = p_{3\alpha+2\beta}(x) p_{3\alpha+\beta}(-Jx),$$

soit  $J = -1$ .

**3.4.8.** — Écrivons enfin

$$w_\alpha p_{\alpha+\beta}(y) w_\alpha^{-1} = p_{2\alpha+\beta}(y),$$

soit

$$p_\alpha(1) p_{\alpha+\beta}(y) p_\alpha(-1) = p_{-\alpha}(1) p_\alpha(-1) p_{2\alpha+\beta}(y) p_\alpha(1) p_{-\alpha}(-1).$$

Transformant le premier membre par (2), le second par (3), on obtient :

$$p_{\alpha+\beta}(y) p_{2\alpha+\beta}(-Ey) p_{3\alpha+\beta}(Fy) p_{3\alpha+2\beta}(-Gy^2) = \\ p_{-\alpha}(1) p_{2\alpha+\beta}(y) p_{3\alpha+\beta}(Hy) p_{-\alpha}(-1).$$

Il est immédiat de voir que si l'on fait commuter  $p_{-\alpha}(-1)$  avec  $p_{3\alpha+\beta}(Hy)$ , puis  $p_{2\alpha+\beta}(y)$ , on n'introduit pas dans le second membre de nouveaux termes en  $p_{3\alpha+\beta}$ . Celui-ci s'écrit donc, en notant par des parenthèses vides les quantités dont la valeur exacte ne nous importe pas :

$$p_{\alpha+\beta}(\ ) p_{2\alpha+\beta}(\ ) p_\beta(\ ) p_{3\alpha+\beta}(Hy) p_{3\alpha+2\beta}(\ ).$$

Comparant avec le premier membre, on a aussitôt  $F = H$ , d'où par les résultats antérieurs  $2D = D + 1$ , soit  $D = 1$ , et enfin  $F = G = H = 2D - J = 3$ , ce qui achève la détermination des coefficients  $A, \dots, J$  et la démonstration de (iii).

3.4.9. — Prouvons enfin (i) à la manière habituelle. On a successivement :

$$\begin{aligned} w_\alpha w_\beta w_\alpha &= w_\alpha w_\beta w_\alpha^{-1} t_\alpha = w_{3\alpha+\beta}^{-1} \cdot t_\alpha, \\ w_\beta (w_\alpha w_\beta)^2 &= w_\beta w_{3\alpha+\beta}^{-1} w_\beta^{-1} \cdot s_\beta(t_\alpha) \cdot t_\beta = w_{3\alpha+2\beta}^{-1} \cdot t_\alpha t_\beta \cdot t_\beta = w_{3\alpha+2\beta}^{-1} \cdot t_\alpha, \\ w_\alpha (w_\beta w_\alpha)^3 &= w_\alpha w_{3\alpha+2\beta}^{-1} w_\alpha^{-1} = w_{3\alpha+2\beta}^{-1}, \\ w_\beta (w_\alpha w_\beta)^4 &= w_\beta w_{3\alpha+2\beta}^{-1} w_\beta^{-1} \cdot t_\beta = w_{3\alpha+\beta} \cdot t_\beta, \\ w_\alpha (w_\beta w_\alpha)^5 &= w_\alpha w_{3\alpha+\beta} w_\alpha^{-1} \cdot s_\alpha(t_\beta) \cdot t_\beta = w_\beta \cdot t_\beta t_\alpha \cdot t_\alpha = w_\beta^{-1}. \end{aligned}$$

301 D'où

$$(w_\alpha w_\beta)^6 = (w_\beta w_\alpha)^6 = e.$$

**Remarque 3.4.10.** — La condition (v) de 2.4 est formée de

$$(A) \begin{cases} \text{int}(h_\alpha h_\beta h_\alpha h_\beta h_\alpha) v_\beta = v_\beta, \\ \text{int}(h_\beta h_\alpha h_\beta h_\alpha h_\beta) v_\alpha = v_\alpha, \end{cases}$$

et, posant

$$\begin{aligned} v_{\alpha+\beta} &= \text{int}(h_\beta) v_\alpha, & v_{2\alpha+\beta} &= \text{int}(h_\alpha h_\beta) v_\alpha, \\ v_{3\alpha+\beta} &= \text{int}(h_\alpha) v_\beta^{-1}; & v_{3\alpha+2\beta} &= \text{int}(h_\beta h_\alpha) v_\beta^{-1}, \end{aligned}$$

302 des relations de commutation :

$$(B) \begin{cases} v_\beta v_\alpha = v_\alpha v_\beta v_{\alpha+\beta} v_{2\alpha+\beta} v_{3\alpha+\beta} v_{3\alpha+2\beta}, \\ v_{\alpha+\beta} v_\alpha = v_\alpha v_{\alpha+\beta} v_{2\alpha+\beta}^2 v_{3\alpha+\beta}^3 v_{3\alpha+2\beta}^3, \\ v_{2\alpha+\beta} v_\alpha = v_\alpha v_{2\alpha+\beta} v_{3\alpha+\beta}^3, \\ v_{3\alpha+\beta} v_\alpha = v_\alpha v_{3\alpha+\beta}, \\ v_{3\alpha+2\beta} v_\alpha = v_\alpha v_{3\alpha+2\beta}, \end{cases} \quad (B) \begin{cases} v_{3\alpha+\beta} v_{\alpha+\beta} = v_{\alpha+\beta} v_{3\alpha+\beta}, \\ v_{3\alpha+2\beta} v_{\alpha+\beta} = v_{\alpha+\beta} v_{3\alpha+2\beta}, \\ v_{3\alpha+\beta} v_{2\alpha+\beta} = v_{2\alpha+\beta} v_{3\alpha+\beta}, \\ v_{3\alpha+2\beta} v_{2\alpha+\beta} = v_{2\alpha+\beta} v_{3\alpha+2\beta}, \\ v_{3\alpha+2\beta} v_{3\alpha+\beta} = v_{3\alpha+\beta} v_{3\alpha+2\beta}. \end{cases}$$

### 3.5. Forme explicite du théorème de générateurs et relations

**Théorème 3.5.1.** — Soient  $S$  un schéma,  $G$  un  $S$ -groupe épinglé,  $T$  son tore maximal,  $\Delta$  son système de racines simples,  $u_\alpha \in U_\alpha(S)^\times$  et  $w_\alpha \in \underline{\text{Norm}}_G(T)(S)$  les éléments définis par l'épinglage ( $\alpha \in \Delta$ ). Soient

$$f_T : T \longrightarrow H, \quad f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow H, \quad \alpha \in \Delta$$

303 des morphismes de groupes,  $H$  étant un  $S$ -faisceau en groupes pour (fppf) ; soient  $h_\alpha \in H(S)$ , ( $\alpha \in \Delta$ ) des sections de  $H$ , posons  $v_\alpha = f_\alpha(u_\alpha)$ ,  $\alpha \in \Delta$ . Pour qu'il existe un morphisme de groupes

$$f : G \longrightarrow H$$



prolongeant  $f_T, f_\alpha$  ( $\alpha \in \Delta$ ) et vérifiant  $f(w_\alpha) = h_\alpha$  ( $\alpha \in \Delta$ ) (et alors nécessairement unique), il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :

(i) Pour tout  $S' \rightarrow S$ , tout  $\alpha \in \Delta$ , tout  $t \in T(S')$  et tout  $x \in U_\alpha(S')$ , on a

$$(1) \quad \text{int}(f_T(t))f_\alpha(x) = f_\alpha(\text{int}(t)x) = f_\alpha(x^{\alpha(t)}).$$

(ii) Pour tout  $\alpha \in \Delta$ , tout  $S' \rightarrow S$  et tout  $t \in T(S')$ , on a

$$(2) \quad \text{int}(h_\alpha)f_T(t) = f_T(s_\alpha(t)) = f_T(t \cdot \alpha^* \alpha(t)^{-1}).$$

(iii) Pour tout  $\alpha \in \Delta$ , on a <sup>(9)</sup>

$$(3_1) \quad h_\alpha^2 = f_T(\alpha^*(-1)),$$

$$(4) \quad (h_\alpha v_\alpha)^3 = e.$$

(iv) Pour tous  $\alpha, \beta \in \Delta$ ,  $\alpha \neq \beta$ , tels que  $(\alpha^*, \beta) = 0$  (resp.  $(\alpha^*, \beta) = -1$ , resp.  $(\alpha^*, \beta) = -2$ , resp.  $(\alpha^*, \beta) = -3$ ), on a :

(a) la relation

$$(3_2) \quad \begin{cases} (h_\alpha h_\beta)^2 = f_T(\alpha^*(-1)\beta^*(-1)) & \text{si } (\alpha^*, \beta) = 0; \\ (h_\alpha h_\beta)^3 = e, & \text{si } (\alpha^*, \beta) = -1; \\ (h_\alpha h_\beta)^4 = f_T(\alpha^*(-1)), & \text{si } (\alpha^*, \beta) = -2; \\ (h_\alpha h_\beta)^6 = e, & \text{si } (\alpha^*, \beta) = -3. \end{cases}$$

(b) Les relations (A) et (B) de 3.1.3 (resp. 3.2.8, resp. 3.3.7, resp. 3.4.10).

Cela résulte aussitôt de 2.3, 2.6 et des calculs faits dans chaque cas particulier.

**Remarque 3.5.2.** — On peut présenter de manière légèrement différente les résultats précédents : on se donne des morphismes, pour  $\alpha \in \Delta$ ,

$$a_\alpha : T \cdot U_\alpha \longrightarrow H, \quad b_\alpha : \underline{\text{Norm}}_{Z_\alpha}(T) \longrightarrow H,$$

et l'on pose

$$h_\alpha = b_\alpha(w_\alpha), \quad v_\alpha = a_\alpha(u_\alpha);$$

alors les conditions à vérifier sont les suivantes :

- (1) tous les  $a_\alpha$  ( $\alpha \in \Delta$ ) et tous les  $b_\alpha$  ( $\alpha \in \Delta$ ) ont même restriction à  $T$ ;
- (2) les conditions (4) et (iv) de 3.5.1 ci-dessus sont vérifiées.

**3.5.4.** — 3.5.3 On donnera dans l'exposé suivant diverses applications de ce théorème. Signalons-en ici une : le théorème 3.5.1 donne une description par générateurs et relations de  $G$  dans la catégorie des  $S$ -faisceaux pour (fppf) ; autrement dit, considérons pour chaque  $S' \rightarrow S$  le groupe  $H(S')$  engendré par  $T(S')$ ,  $U_\alpha(S')$ ,  $\alpha \in R$ , et  $w_\alpha$ ,  $\alpha \in R$ , soumis aux relations analogues à (1), (2), (3<sub>1</sub>), (4), (3<sub>2</sub>), (A), (B) ; alors  $G$  n'est autre que le faisceau associé au préfaisceau  $S' \mapsto H(S')$ .

En particulier, si  $S'$  est le spectre d'un corps algébriquement clos  $k$ , on a  $G(S') = H(S')$  (conséquence immédiate du Nullstellensatz sous la forme : « un crible d'un corps

<sup>(9)</sup>N.D.E. : Les relations (3<sub>1</sub>) et (3<sub>2</sub>) forment la description du normalisateur du tore, (3<sub>1</sub>) étant, comme (4), dans un groupe de rang 1, tandis que (3<sub>2</sub>) est dans un groupe de rang 2.

algébriquement clos, couvrant pour (fppf), est trivial » ), de sorte que 3.5.1 donne aussitôt une description explicite par générateurs et relations du groupe « abstrait »  $G(k)$ .<sup>(10)</sup>

**4. Unicité des groupes épinglés : théorème fondamental**

**Théorème 4.1.** — Soit  $S$  un schéma non vide. Le foncteur  $\mathcal{R}$  de 1.6 est pleinement fidèle : soient  $G$  et  $G'$  deux  $S$ -groupes épinglés,  $p$ <sup>(11)</sup> un entier  $> 0$  tel que  $x \mapsto x^p$  soit un endomorphisme de  $\mathbb{G}_{a,S}$ , et  $h : \mathcal{R}(G') \rightarrow \mathcal{R}(G)$  un  $p$ -morphisme de données radicielles épinglés. Il existe un unique morphisme de groupes épinglés

$$f : G \longrightarrow G'$$

tel que  $\mathcal{R}(f) = h$ .

L'unicité est démontrée en 1.9. Il suffit de démontrer l'existence. Par hypothèse, on a une bijection  $d : R \xrightarrow{\sim} R'$  et une application  $\mathbf{q} : R \rightarrow \{p^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  telle que

$$h(d(\alpha)) = \mathbf{q}(\alpha)\alpha \quad \text{et} \quad {}^t h(\alpha^*) = \mathbf{q}(\alpha)d(\alpha)^*$$

306 pour tout  $\alpha \in R$ . En particulier, les rangs semi-simples de  $G$  et  $G'$  coïncident.

**4.1.1.** — Supposons  $\text{rgss}(G) = \text{rgss}(G') = 0$ . Alors  $G$  et  $G'$  sont des tores : on a  $G = T = D_S(M)$ ,  $G' = T' = D_S(M')$  et  $h$  est simplement un morphisme de groupes ordinaires  $h : M' \rightarrow M$ . On prend alors  $f = D_S(h)$ .

**4.1.2.** — Supposons  $\text{rgss}(G) = \text{rgss}(G') = 1$ . Considérons alors

$$f_T = D_S(h) : T \longrightarrow T'.$$

Par hypothèse on a un diagramme commutatif, où  $\alpha' = d(\alpha)$  :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{G}_{m,S} & \xrightarrow{\alpha^*} & T & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{G}_{m,S} \\ \downarrow \mathbf{q}(\alpha) & & \downarrow f_T & & \downarrow \mathbf{q}(\alpha) \\ \mathbb{G}_{m,S} & \xrightarrow{\alpha'^*} & T' & \xrightarrow{\alpha'} & \mathbb{G}_{m,S}. \end{array}$$

On applique alors Exp. XX, 4.1.

**4.1.3.** — Supposons  $\text{rgss}(G) = \text{rgss}(G') = 2$ . Alors, par Exp. XXI, 7.5.3 on connaît toutes les possibilités pour  $h : \mathcal{R}(G') \rightarrow \mathcal{R}(G)$ . Étudions-les successivement, en vérifiant chaque fois les conditions de 2.5.

Notons  $\Delta = \{\alpha, \beta\}$ ,  $\Delta' = \{\alpha', \beta'\}$  de façon que  $d(\alpha) = \alpha'$ ,  $d(\beta) = \beta'$ .

<sup>(10)</sup>N.D.E. : Pour un corps arbitraire  $k$  et  $G$  simplement connexe, R. Steinberg a donné une présentation du groupe  $G(k)$  dans [St62], Th. 3.2, voir aussi [St67], §6, Th. 8.

<sup>(11)</sup>N.D.E. : Pour éviter un problème de notations plus loin, on a remplacé ici  $q$  par  $p$ , de sorte que dans ce qui suit,  $q$  (resp.  $q_1$ ) est une puissance arbitraire de  $p$ .

**4.1.4.** —  $G$  et  $G'$  de type  $A_1 \times A_1$ . On a alors

$$h(\alpha') = q\alpha, \quad h(\beta') = q_1\beta.$$

Montrons que les conditions de 2.5 sont vérifiées : (ii) et (iii) découlent de 3.1.2 (ii) et (iii) ; prouvons (i). On a

$$D_S(h)t_{\alpha\beta} = D_S(h)(t_\alpha t_\beta) = {}^t h(\alpha^*)(-1) \cdot {}^t h(\beta^*)(-1) = \alpha'^*((-1)^q) \cdot \beta'^*((-1)^{q_1}).$$

<sup>(12)</sup> Or, l'hypothèse que  $x \mapsto x^p$  soit un endomorphisme de  $\mathbb{G}_{a,S}$  (et  $S \neq \emptyset$ ) entraîne que  $p = 1$  ou que  $S$  est de caractéristique  $p$  ; dans tous les cas on a  $(-1)^q = -1$  (si  $q$  est pair,  $p = 2$  et  $1 = -1$ ). Par conséquent,

$$D_S(h)t_{\alpha\beta} = \alpha'^*(-1) \cdot \beta'^*(-1) = t'_{\alpha'\beta'}.$$

Ceci montre que la condition 2.5 (i) est vérifiée.

**4.1.5.** —  $G$  et  $G'$  de type  $A_2$ . On a alors

$$h(\alpha') = q\alpha, \quad h(\beta') = q\beta.$$

Posons  $X_{\alpha+\beta} = \text{Ad}(w_\beta)X_\alpha$  et  $X'_{\alpha'+\beta'} = \text{Ad}(w_{\beta'})X_{\alpha'}$ . Vérifions les conditions de 2.5. Pour (i), on raisonne comme ci-dessus, à l'aide de 3.2.1 (i) ; pour (ii), c'est immédiat par 3.2.1 (ii) ; reste à vérifier (iii). On a à vérifier que

$$p_\alpha(x)p_\beta(y)p_{\alpha+\beta}(z) \longmapsto p'_{\alpha'}(x^q)p'_{\beta'}(y^q)p'_{\alpha'+\beta'}(z^q)$$

est un morphisme de groupes. La seule relation de commutation non triviale est celle de 3.2.1 (iii) qui s'écrit

$$\begin{aligned} p_\beta(y)p_\alpha(x) &= p_\alpha(x)p_\beta(y)p_{\alpha+\beta}(xy), \\ p'_{\beta'}(y^q)p'_{\alpha'}(x^q) &= p'_{\alpha'}(x^q)p'_{\beta'}(y^q)p'_{\alpha'+\beta'}(x^qy^q). \end{aligned}$$

**4.1.6.** — On raisonne de même pour  $G$  et  $G'$  de type  $B_2$  (resp.  $G_2$ ), lorsque les exposants radiciels sont égaux, à l'aide de 3.3.1 (resp. 3.4.1) ; il reste donc à traiter, pour achever le cas des groupes de rang 2, les deux cas exceptionnels de Exp. XXI, 7.5.3.

**4.1.7.** —  $G$  et  $G'$  sont de type  $B_2$ ,  $S$  est de caractéristique 2, on a  $\mathbf{q}(\alpha) = 2q$ ,  $\mathbf{q}(\beta) = q$ . Les racines positives sont  $\{\alpha, \beta, \alpha + \beta, 2\alpha + \beta\}$  et  $\{\alpha', \beta', \alpha' + \beta', \alpha' + 2\beta'\}$  (remarquer que les racines simples « courtes » sont  $\alpha$  et  $\beta'$ ). On a

$$h(\alpha') = 2q\alpha, \quad h(\beta') = q\beta, \quad h(\alpha' + \beta') = q(2\alpha + \beta), \quad h(\alpha' + 2\beta') = 2q(\alpha + \beta),$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} d(\alpha + \beta) &= \alpha' + 2\beta', & \mathbf{q}(\alpha + \beta) &= 2q, \\ d(2\alpha + \beta) &= \alpha' + \beta', & \mathbf{q}(2\alpha + \beta) &= q. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} X_{\alpha+\beta} &= \text{Ad}(w_\beta)X_\alpha, & X_{2\alpha+\beta} &= \text{Ad}(w_\alpha)X_\beta, \\ X'_{\alpha'+\beta'} &= \text{Ad}(w'_{\alpha'})X'_{\beta'}, & X'_{\alpha'+2\beta'} &= \text{Ad}(w'_{\beta'})X'_{\alpha'}. \end{aligned}$$

Vérifions maintenant les conditions de 2.5.

<sup>(12)</sup>N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

(i) Comme  $S$  est de caractéristique 2, on a  $-1 = 1$  sur  $S$ , donc  $t_{\alpha\beta} = t_{\alpha} = \alpha^*(-1) = e = \beta'^*(-1) = t'_{\beta'} = t'_{\alpha'\beta'}$  (cf. 3.3.1 (i)).

(ii) On a par construction

$$\begin{aligned} \text{Ad}(w_{\alpha})X_{\beta} &= X_{2\alpha+\beta}, & \text{Ad}(w'_{\alpha'})X'_{\beta'} &= X'_{\alpha'+\beta'} = X'_{d(2\alpha+\beta)}; \\ \text{Ad}(w_{\beta})X_{\alpha} &= X_{\alpha+\beta}, & \text{Ad}(w'_{\beta'})X'_{\alpha'} &= X'_{\alpha'+2\beta'} = X'_{d(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

Par 3.3.1 (ii) et le fait que  $-1 = 1$  sur  $S$ , on a de part et d'autre

$$\begin{aligned} \text{Ad}(w_{\alpha})X_{\alpha+\beta} &= X_{\alpha+\beta}, & \text{Ad}(w'_{\alpha'})X'_{d(\alpha+\beta)} &= \text{Ad}(w'_{\alpha'})X'_{\alpha'+2\beta'} = X'_{\alpha'+2\beta'} = X'_{d(\alpha+\beta)}; \\ \text{Ad}(w_{\alpha})X_{2\alpha+\beta} &= X_{\beta}, & \text{Ad}(w'_{\alpha'})X'_{d(2\alpha+\beta)} &= \text{Ad}(w'_{\alpha'})X'_{\alpha'+\beta'} = X'_{\beta'} = X'_{d(\beta)}; \\ \text{Ad}(w_{\beta})X_{\alpha+\beta} &= X_{\alpha}, & \text{Ad}(w'_{\beta'})X'_{d(\alpha+\beta)} &= \text{Ad}(w'_{\beta'})X'_{\alpha'+2\beta'} = X'_{\alpha'} = X'_{d(\alpha)}; \\ \text{Ad}(w_{\beta})X_{2\alpha+\beta} &= X_{2\alpha+\beta}, & \text{Ad}(w'_{\beta'})X'_{d(2\alpha+\beta)} &= \text{Ad}(w'_{\beta'})X'_{\alpha'+\beta'} = X'_{\alpha'+\beta'} = X'_{d(2\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

309 (iii) Par 3.3.1 (iii), on voit que la seule relation de commutation non triviale dans  $U$  (resp.  $U'$ ) est

$$p_{\beta}(y) p_{\alpha}(x) = p_{\alpha}(x) p_{\beta}(y) p_{\alpha+\beta}(xy) p_{2\alpha+\beta}(x^2y),$$

resp.

$$p'_{\alpha'}(y') p'_{\beta'}(x') = p'_{\beta'}(x') p'_{\alpha'}(y') p'_{\alpha'+\beta'}(x'y') p'_{\alpha'+2\beta'}(x'^2y').$$

Il nous faut vérifier que le morphisme

$$p_{\alpha}(x) p_{\beta}(y) p_{\alpha+\beta}(z) p_{2\alpha+\beta}(t) \longmapsto p'_{\alpha'}(x^{2q}) p'_{\beta'}(y^q) p'_{\alpha'+2\beta'}(z^{2q}) p'_{\alpha'+\beta'}(t^q)$$

est un morphisme de groupes; on voit aussitôt que cela revient à voir que

$$p'_{\beta'}(y^q) p'_{\alpha'}(x^{2q}) = p'_{\alpha'}(x^{2q}) p'_{\beta'}(y^q) p'_{\alpha'+2\beta'}((xy)^{2q}) p'_{\alpha'+\beta'}((x^2y)^q),$$

ce qui n'est autre que la seconde relation ci-dessus (en posant  $y' = x^{2q}$ ,  $x' = y^q$ ).

4.1.8. —  $G$  et  $G'$  sont de type  $G_2$ ,  $S$  est de caractéristique 3, on a  $\mathbf{q}(\alpha) = 3q$  et  $\mathbf{q}(\beta) = q$ . Les racines positives sont  $\{\alpha, \beta, \alpha + \beta, 2\alpha + \beta, 3\alpha + \beta, 3\alpha + 2\beta\}$  d'une part,  $\{\alpha', \beta', \alpha' + \beta', \alpha' + 2\beta', \alpha' + 3\beta', 2\alpha' + 3\beta'\}$  d'autre part (comme dans le cas précédent, les racines simples courtes sont  $\alpha$  et  $\beta'$ ). On a

$$\begin{aligned} h(\alpha') &= 3q\alpha, & h(\beta') &= q\beta, & h(\alpha' + \beta') &= q(3\alpha + \beta), \\ h(\alpha' + 2\beta') &= q(3\alpha + 2\beta), & h(\alpha' + 3\beta') &= 3q(\alpha + \beta), \\ h(2\alpha' + 3\beta') &= 3q(2\alpha + \beta), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} d(\alpha + \beta) &= \alpha' + 3\beta', & \mathbf{q}(\alpha + \beta) &= 3q, \\ d(2\alpha + \beta) &= 2\alpha' + 3\beta', & \mathbf{q}(2\alpha + \beta) &= 3q, \\ d(3\alpha + \beta) &= \alpha' + \beta', & \mathbf{q}(3\alpha + \beta) &= q, \\ d(3\alpha + 2\beta) &= \alpha' + 2\beta', & \mathbf{q}(3\alpha + 2\beta) &= q. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} X_{\alpha+\beta} &= \text{Ad}(w_\beta)X_\alpha, & X_{2\alpha+\beta} &= \text{Ad}(w_\alpha)X_{\alpha+\beta}, \\ X_{3\alpha+\beta} &= -\text{Ad}(w_\alpha)X_\beta, & X_{3\alpha+2\beta} &= \text{Ad}(w_\beta)X_{3\alpha+\beta}; \\ X'_{\alpha'+\beta'} &= -\text{Ad}(w'_{\alpha'})X'_{\beta'}, & X'_{\alpha'+2\beta'} &= \text{Ad}(w'_{\beta'})X'_{\alpha'+\beta'}, \\ X'_{\alpha'+3\beta'} &= \text{Ad}(w'_{\beta'})X'_{\alpha'}, & X'_{2\alpha'+3\beta'} &= \text{Ad}(w'_{\alpha'})X'_{\alpha'+3\beta'}. \end{aligned}$$

Vérifions maintenant les conditions de 2.5.

(i) On a  $t_{\alpha\beta} = e$  et  $t'_{\alpha'\beta'} = e$  par 3.4.1 (i).

(ii) On a par construction

$$\begin{aligned} \text{Ad}(w_\beta)X_\alpha &= X_{\alpha+\beta}, & \text{Ad}(w'_{\beta'})X'_{\alpha'} &= X'_{\alpha'+3\beta'} = X'_{d(\alpha+\beta)}; \\ \text{Ad}(w_\alpha)X_\beta &= -X_{3\alpha+\beta}, & \text{Ad}(w'_{\alpha'})X'_{\beta'} &= -X'_{\alpha'+\beta'} = -X'_{d(3\alpha+\beta)}; \\ \text{Ad}(w_\beta)X_{3\alpha+\beta} &= X_{3\alpha+2\beta}, & \text{Ad}(w'_{\beta'})X'_{d(3\alpha+\beta)} &= \text{Ad}(w'_{\beta'})X'_{\alpha'+\beta'} \\ & & &= X'_{\alpha'+2\beta'} = X'_{d(3\alpha+2\beta)}; \\ \text{Ad}(w_\alpha)X_{\alpha+\beta} &= X_{2\alpha+\beta}, & \text{Ad}(w'_{\alpha'})X'_{d(\alpha+\beta)} &= \text{Ad}(w'_{\alpha'})X'_{\alpha'+3\beta'} \\ & & &= X'_{2\alpha'+3\beta'} = X'_{d(2\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

Par 3.4.1 (ii), on a de part et d'autre :

311

$$\begin{aligned} \text{Ad}(w_\alpha)X_{2\alpha+\beta} &= -X_{\alpha+\beta}, & \text{Ad}(w'_{\alpha'})X'_{d(2\alpha+\beta)} &= \text{Ad}(w'_{\alpha'})X'_{2\alpha'+3\beta'} \\ & & &= -X'_{\alpha'+3\beta'} = -X'_{d(\alpha+\beta)}; \\ \dots & & \dots & \\ \text{Ad}(w_\beta)X_{3\alpha+2\beta} &= -X_{3\alpha+\beta}, & \text{Ad}(w'_{\beta'})X'_{d(3\alpha+2\beta)} &= \text{Ad}(w'_{\beta'})X'_{\alpha'+2\beta'} \\ & & &= -X'_{\alpha'+\beta'} = -X'_{d(3\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

(Les pointillés remplacent quatre vérifications du même genre).

(iii) Les seules relations de commutation non triviales dans  $U$  et  $U'$  sont par 3.4.1 (iii) (et compte tenu de  $3 = 0$  sur  $S$ ) :

$$\begin{aligned} p_\beta(y)p_\alpha(x) &= p_\alpha(x)p_\beta(y)p_{\alpha+\beta}(xy)p_{2\alpha+\beta}(x^2y)p_{3\alpha+\beta}(x^3y)p_{3\alpha+2\beta}(x^3y^2), \\ p_{\alpha+\beta}(y)p_\alpha(x) &= p_\alpha(x)p_{\alpha+\beta}(y)p_{2\alpha+\beta}(-xy), \\ p_{3\alpha+\beta}(y)p_\beta(x) &= p_\beta(x)p_{3\alpha+\beta}(y)p_{3\alpha+2\beta}(-xy); \\ p'_{\alpha'}(y')p'_{\beta'}(x') &= \\ p'_{\beta'}(x')p'_{\alpha'}(y')p'_{\alpha'+\beta'}(-x'y')p'_{\alpha'+2\beta'}(-x'^2y')p'_{\alpha'+3\beta'}(-x'^3y')p'_{2\alpha'+3\beta'}(-x'^3y'^2), \\ p'_{\alpha'+\beta'}(y')p'_{\beta'}(x') &= p'_{\beta'}(x')p'_{\alpha'+\beta'}(y')p'_{\alpha'+2\beta'}(x'y'), \\ p'_{\alpha'+3\beta'}(y')p'_{\alpha'}(x') &= p'_{\alpha'}(x')p'_{\alpha'+3\beta'}(y')p'_{2\alpha'+3\beta'}(x'y'). \end{aligned}$$

Nous avons à vérifier que le morphisme  $\varphi$  de  $U$  dans  $U'$  défini par

312

$$\begin{aligned} \varphi\left(p_\alpha(x)p_\beta(y)p_{\alpha+\beta}(t)p_{2\alpha+\beta}(u)p_{3\alpha+\beta}(v)p_{3\alpha+2\beta}(w)\right) \\ = p'_{\alpha'}(x^{3q})p'_{\beta'}(y^q)p'_{\alpha'+3\beta'}(t^{3q})p'_{2\alpha'+3\beta'}(u^{3q})p'_{\alpha'+\beta'}(v^q)p'_{\alpha'+2\beta'}(w^q) \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes. Or on vérifie immédiatement que les trois dernières relations de commutation s'écrivent aussi

$$\begin{aligned} p'_{\beta'}(y^q) p'_{\alpha'}(x^{3q}) &= \\ p'_{\alpha'}(x^{3q}) p'_{\beta'}(y^q) p'_{\alpha'+3\beta'}((xy)^{3q}) p'_{2\alpha'+3\beta'}((x^2y)^{3q}) p'_{\alpha'+\beta'}((x^3y)^q) p'_{\alpha'+2\beta'}((x^3y^2)^q), \\ p'_{\alpha'+3\beta'}(y^{3q}) p'_{\alpha'}(x^{3q}) &= p'_{\alpha'}(x^{3q}) p'_{\alpha'+3\beta'}(y^{3q}) p'_{2\alpha'+3\beta'}(-(xy)^{3q}), \\ p'_{\alpha'+\beta'}(y^q) p'_{\beta'}(x^q) &= p'_{\beta'}(x^q) p'_{\alpha'+\beta'}(y^q) p'_{\alpha'+2\beta'}(-(xy)^q); \end{aligned}$$

ce qui montre que  $\varphi$  est bien un morphisme de groupes et achève la démonstration de 4.1.7.

**4.1.9.** — Cas où  $G$  et  $G'$  sont de rang semi-simple  $> 2$ . Pour chaque racine  $\alpha \in \Delta$ , notons  $\alpha' = d(\alpha) \in \Delta' = d(\Delta)$ . Pour chaque  $(\alpha, \beta) \in \Delta \times \Delta$ , considérons les groupes épinglés de rang semi-simple  $\leq 2$ ,  $Z_{\alpha\beta}$  et  $Z'_{\alpha'\beta'}$ . Le morphisme de groupes  $M' \rightarrow M$  sous-jacent à  $h$  définit un  $p$ -morphisme de données radicielles

$$h_{\alpha\beta} : \mathcal{R}(Z_{\alpha\beta}) \longrightarrow \mathcal{R}(Z'_{\alpha'\beta'}).$$

En vertu des résultats précédents, il existe donc un morphisme de groupes épinglés

$$f_{\alpha\beta} : Z_{\alpha\beta} \longrightarrow Z'_{\alpha'\beta'}$$

**313** tel que  $\mathcal{R}(f_{\alpha\beta}) = h_{\alpha\beta}$ . Prouvons que les  $f_{\alpha\beta}$  vérifient la condition de recollement de 2.5; en effet  $f_{\alpha\beta}|_{Z_\alpha}$  et  $f_{\alpha\alpha}$  sont deux morphismes de groupes épinglés

$$Z_\alpha \longrightarrow Z'_{\alpha'}$$

correspondant au même morphisme de données radicielles épinglées, et coïncident donc par le résultat d'unicité déjà démontré. Par 2.5 il existe donc un morphisme de groupes

$$f : G \longrightarrow G'$$

prolongeant les  $f_{\alpha\beta}$ . Celui-ci est évidemment un morphisme de groupes épinglés tel que  $\mathcal{R}(f) = h$ , ce qui achève la démonstration du théorème 4.1.

## 5. Corollaires du théorème fondamental

Le plus important est :

**Corollaire 5.1.** — Soient  $S$  un schéma non vide,  $G$  et  $G'$  deux  $S$ -groupes épinglés,  $h$  un isomorphisme de données radicielles épinglées

$$h : \mathcal{R}(G') \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}(G).$$

Il existe un unique isomorphisme de  $S$ -groupes épinglés

$$f : G \xrightarrow{\sim} G'$$

tel que  $\mathcal{R}(f) = h$ .

Notons que 5.1 se déduit aussi de 3.5.1 (les relations de 3.5.1 peuvent s'écrire en utilisant uniquement la donnée de  $\mathcal{R}(G)$ ); notons aussi que 5.1 se déduit de la partie la plus élémentaire de la démonstration de 4.1 (on n'a pas besoin de considérer les « isogénies exceptionnelles » de 4.1.7 et 4.1.8).

**Corollaire 5.2** (« Théorème d'unicité »). — Soient  $S$  un schéma,  $G$  et  $G'$  deux  $S$ -groupes déployables (Exp. XXII, 1.13). Si  $G$  et  $G'$  sont de même type (Exp. XXII, 2.6), ils sont isomorphes. 314

**Corollaire 5.3.** — Soient  $S$  un schéma,  $G$  et  $G'$  deux  $S$ -groupes déployables. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $G$  et  $G'$  sont isomorphes.
- (ii)  $G$  et  $G'$  sont isomorphes localement pour la topologie (fpqc).
- (iii) Il existe un  $s \in S$  tel que les  $\bar{s}$ -groupes  $G_{\bar{s}}$  et  $G'_{\bar{s}}$  soient de même type.

En effet, on a évidemment (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii). D'autre part, (iii) entraîne que  $\mathcal{R}(G) = \mathcal{R}(G_{\bar{s}}) = \mathcal{R}(G'_{\bar{s}}) = \mathcal{R}(G')$ , donc que  $G$  et  $G'$  vérifient la condition de 4.2.

**Corollaire 5.4** (« unicité des schémas de Chevalley »). — Soient  $G$  et  $G'$  deux groupes réductifs sur  $\mathbb{Z}$  possédant des tores maximaux déployés. <sup>(\*)</sup> Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $G$  et  $G'$  sont isomorphes.
- (ii) Il existe  $s \in \text{Spec}(\mathbb{Z})$  tel que  $G_s$  et  $G'_s$  soient de même type.
- (iii)  $G_{\mathbb{C}}$  et  $G'_{\mathbb{C}}$  sont de même type.

En effet  $G$  et  $G'$  sont déployables par Exp. XXII, 2.2.

**Corollaire 5.5** (« Existence d'automorphismes extérieurs »). — Soient  $S$  un schéma,  $G$  un  $S$ -groupe épinglé,  $h$  un automorphisme de la donnée radicielle épinglée  $\mathcal{R}(G)$ . Il existe un unique automorphisme  $u$  de  $G$  respectant son épinglage et tel que  $\mathcal{R}(u) = h$ .

Explicitons le corollaire précédent :

**Corollaire 5.5. bis.** — Soient  $S$  un schéma,  $G$  un  $S$ -groupe réductif déployé,  $R_+$  un système de racines positives de  $G$ . Choisissons pour chaque racine simple  $\alpha$ , un isomorphisme de groupes vectoriels  $p_\alpha : \mathbb{G}_{a,S} \xrightarrow{\sim} U_\alpha$ . Soit  $h$  un automorphisme de  $M$  permutant les racines positives et les coracines correspondantes : si  $\alpha \in R_+$ ,  $h(\alpha) \in R_+$  et  $h^\vee(\alpha^*) = h(\alpha)^*$ . Il existe un unique automorphisme  $u$  de  $G$  induisant  $D_S(h)$  sur  $T$  et tel que  $u \circ p_\alpha = p_{h(\alpha)}$  pour toute racine simple  $\alpha$ . 315

**Corollaire 5.6.** — Soient  $G$  et  $G'$  deux  $S$ -groupes réductifs. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $G$  et  $G'$  sont isomorphes localement pour la topologie (fpqc).
- (i bis)  $G$  et  $G'$  sont isomorphes localement pour la topologie étale.

<sup>(\*)</sup>En fait, on peut prouver que tout  $\mathbb{Z}$ -tore est déployé. <sup>(13)</sup>N.D.E. : cela résulte de ce que tout  $\mathbb{Z}$ -tore est isotrivial (Exp. X, 5.16) et de ce que tout revêtement étale de  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$  est trivial.

- (ii) Pour tout  $s \in s$ ,  $G_{\bar{s}}$  et  $G'_{\bar{s}}$  sont isomorphes.
- (iii) Les fonctions  $s \mapsto \text{type de } G_{\bar{s}}$  et  $s \mapsto \text{type de } G'_{\bar{s}}$  sont égales.

En effet (i bis)  $\Rightarrow$  (i) trivialement, (i)  $\Rightarrow$  (ii) par le principe de l'extension finie (EGA IV<sub>3</sub>, 9.1.4), (ii)  $\Rightarrow$  (iii) trivialement, reste à prouver (iii)  $\Rightarrow$  (i bis). Or on peut supposer  $G$  et  $G'$  déployables (Exp. XXII, 2.3), auquel cas l'assertion résulte de 5.3.

**Corollaire 5.7.** — Soient  $S$  un schéma,  $G$  un  $S$ -groupe réductif,  $G'$  un  $S$ -groupe affine, lisse et à fibres connexes. Soit  $s \in S$  tel que  $G_{\bar{s}}$  et  $G'_{\bar{s}}$  soient isomorphes; il existe alors un  $S' \rightarrow S$  étale et couvrant  $s$  tel que  $G_{S'}$  et  $G'_{S'}$  soient isomorphes.

En effet, par Exp. XIX 2.5 et Exp. XXII 2.1, on peut supposer  $G$  et  $G'$  réductifs déployables et on est ramené à 5.3.

Dans le cas où  $S$  est le spectre d'un corps, on déduit de 5.6 et 5.7 :

- 316 Corollaire 5.8.** — Soient  $k$  un corps et  $G$  et  $G'$  deux  $k$ -groupes réductifs. Les conditions suivantes sont équivalentes : <sup>(14)</sup>
- (i)  $G$  et  $G'$  sont de même type.
  - (ii)  $G \otimes_k \bar{k}$  et  $G' \otimes_k \bar{k}$  sont isomorphes.
  - (iii) Il existe une extension séparable finie  $K$  de  $k$  telle que  $G \otimes_k K$  et  $G' \otimes_k K$  soient isomorphes.

**Corollaire 5.9.** — Soient  $S$  un schéma non vide et  $\mathcal{R}$  une donnée radicielle. Les conditions suivantes sont équivalentes : <sup>(15)</sup>

- (i) Il existe un  $S$ -groupe épinglé de type  $\mathcal{R}$ .
- (ii) Il existe un  $S$ -groupe de type  $\mathcal{R}$ .
- (iii) Il existe localement pour (fpqc) un  $S$ -groupe réductif de type  $\mathcal{R}$ .

Il s'agit évidemment de prouver (iii)  $\Rightarrow$  (i). Pour simplifier la démonstration, supposons qu'il existe un morphisme fidèlement plat quasi-compact  $S' \rightarrow S$  et un  $S'$ -groupe réductif  $G'$  de type  $\mathcal{R}$ . On peut supposer  $G'$  déployable; fixons un épinglage  $E'$  de  $G'$ ; notons  $\mathcal{R} = \mathcal{R}(G', E')$ . Les deux images réciproques de  $(G', E')$  sur  $S'' = S' \times_S S'$  sont des groupes épinglés  $(G''_1, E''_1)$ ,  $(G''_2, E''_2)$ ; on a des isomorphismes canoniques  $p_i : \mathcal{R}(G''_i, E''_i) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}$ , d'où un isomorphisme

$$p = p_2^{-1} \circ p_1 : \mathcal{R}(G''_1, E''_1) \longrightarrow \mathcal{R}(G''_2, E''_2).$$

Par le théorème d'unicité, il existe un unique isomorphisme

$$f : (G''_1, E''_1) \xrightarrow{\sim} (G''_2, E''_2)$$

<sup>(14)</sup>N.D.E. : Une autre démonstration de ce corollaire, n'utilisant pas la réduction au cas des groupes de rang 2, a été donnée par M. Takeuchi ([Ta83], Th. 4.6), voir aussi [Ja87], II 1.14.

<sup>(15)</sup>N.D.E. : Ce corollaire est rendu inutile par l'Exp. XXV, qui montre l'existence d'un groupe déployé de type  $\mathcal{R}$  sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ , donc sur toute base  $S$ . (En fait, on trouve après XXV 1.3 un renvoi au présent corollaire pour assurer que le  $\mathbb{Z}$ -groupe réductif obtenu est déployé, mais cela résulte déjà de XXII 2.2, cf. la N.D.E. (3) de XXV).



tel que  $\mathcal{R}(f) = p$ . On a donc sur  $G'$  une donnée de recollement ; c'est une donnée de descente.

En effet, il faut vérifier une condition de compatibilité entre les images réciproques de  $f$  sur  $S'''$ , mais il suffit de faire cette vérification sur les transformées de ces flèches par le foncteur  $\mathcal{R}$ , car ce dernier est pleinement fidèle. Or  $p$  est bien une donnée de descente, par construction, ce qui montre que  $f$  en est aussi une. Comme  $G'$  est affine, cette donnée de descente est effective ; comme l'épinglage de  $G'$  est stable par la donnée de descente, on vérifie aisément qu'il existe un  $S$ -groupe épinglé  $(G, E)$  qui donne  $(G', E')$  par extension de la base et qui est donc de type  $\mathcal{R}$ . 317

N. B. Naturellement, dans le langage des catégories fibrées, la démonstration précédente se simplifie (et se comprend).

**Corollaire 5.10.** — Soit  $S$  un schéma non vide. Soit  $\mathcal{R}$  une donnée radicielle épinglée telle qu'il existe un  $S$ -groupe réductif de type  $\mathcal{R}$ . Alors il existe un  $S$ -groupe épinglé de type  $\mathcal{R}$ , unique à un isomorphisme unique près.

**Définition 5.11.** — Sous les conditions précédentes, on notera  $G_S^{\text{Ép}}(\mathcal{R})$  l'unique  $S$ -groupe épinglé de type  $\mathcal{R}$ ,  $T_S(\mathcal{R})$  son tore maximal canonique,  $B_S(\mathcal{R})$  son sous-groupe de Borel canonique, ...

Si on a un morphisme  $S' \rightarrow S$  ( $S'$  non vide), on peut identifier  $G_S^{\text{Ép}}(\mathcal{R}) \times_S S'$  à  $G_{S'}^{\text{Ép}}(\mathcal{R})$ . En particulier, si  $G_{\text{Spec}(\mathbb{Z})}^{\text{Ép}}(\mathcal{R})$  existe (on verra que c'est toujours le cas), on le note  $G^{\text{Ép}}(\mathcal{R})$  et on a

$$G_S^{\text{Ép}}(\mathcal{R}) = G^{\text{Ép}}(\mathcal{R}) \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z})} S.$$

On dit que  $G^{\text{Ép}}(\mathcal{R})$  est le schéma en groupes de Chevalley de type  $\mathcal{R}$ .

**5.12.** Il revient donc au même de dire que le  $S$ -faisceau en groupes  $G$  est un  $S$ -groupe réductif de type  $\mathcal{R}$  ou de dire qu'il est localement isomorphe (pour la topologie étale ou (fpqc)) à  $G_S^{\text{Ép}}(\mathcal{R})$ . De même, en vertu des théorèmes de conjugaison, il revient au même de dire que  $(G, T)$  est un  $S$ -groupe réductif de type  $\mathcal{R}$  muni d'un tore maximal ou qu'il est localement isomorphe à  $(G_S^{\text{Ép}}(\mathcal{R}), T_S(\mathcal{R}))$  ; de même avec sous-groupes de Borel ou couples de Killing.

## 6. Systèmes de Chevalley

318

Les calculs explicites du numéro 3 ont des conséquences numériques importantes. Posons d'abord la définition suivante :

**Définition 6.1.** — Soient  $S$  un schéma,  $(G, T, M, R)$  un  $S$ -groupe déployé. On appelle système de Chevalley de  $G$  une famille  $(X_\alpha)_{\alpha \in R}$  d'éléments

$$X_\alpha \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$$

vérifiant la condition suivante :

(SC) pour tout couple  $\alpha, \beta \in R$ , on a

$$\text{Ad}(w_\alpha(X_\alpha))X_\beta = \pm X_{s_\alpha(\beta)}.$$

On rappelle (Exp. XX, 3.1) que

$$w_\alpha(X_\alpha) = \exp(X_\alpha) \exp(-X_\alpha^{-1}) \exp(X_\alpha).$$

Remarquons que (SC) entraîne en particulier  $X_{-\alpha} = \pm X_\alpha$  pour  $\alpha \in R$ , en vertu de la relation (Exp. XX, 2.10)  $\text{Ad}(w_\alpha(X_\alpha))X_\alpha = -X_{-\alpha}$ .

**Proposition 6.2.** — *Tout groupe déployé possède un système de Chevalley. Plus précisément, soit  $(\Delta, (X'_\alpha)_{\alpha \in \Delta})$  un épinglage (1.1) du groupe déployé  $(G, T, M, R)$  ; il existe alors un système de Chevalley  $(X_\alpha)_{\alpha \in R}$  de  $G$  tel que  $X_\alpha = X'_\alpha$  pour  $\alpha \in \Delta$ .*

Montrons d'abord qu'il suffit de vérifier la condition (SC) pour  $\alpha \in \Delta$  ; pour tout  $\alpha \in R$ , il existe une suite  $\{\alpha_i\} \subset \Delta$  telle que  $\alpha = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_n}(\alpha_{n+1})$ , d'où en appliquant la condition (SC) pour chacun des  $\alpha_i$ ,

$$X_\alpha = \pm \text{Ad}(w_{\alpha_1}(X_{\alpha_1}) \cdots w_{\alpha_n}(X_{\alpha_n}))X_{\alpha_{n+1}}.$$

319 Par 3.1.1 (iii), on a

$$w_{\alpha_1}(X_{\alpha_1}) \cdots w_{\alpha_n}(X_{\alpha_n})w_{\alpha_{n+1}}(X_{\alpha_{n+1}})w_{\alpha_n}(X_{\alpha_n})^{-1} \cdots w_{\alpha_1}(X_{\alpha_1})^{-1} = \alpha^*(\pm 1)w_\alpha(X_\alpha).$$

Maintenant, il suffit de remarquer que  $w_{\alpha_i}(X_{\alpha_i})^{-1} = \alpha_i^*(-1)w_{\alpha_i}(X_{\alpha_i})$  et que pour tout couple de racines  $(\beta, \gamma)$ , on a  $\beta(\gamma^*(-1)) = (-1)^{(\gamma^*, \beta)} = \pm 1$ , ce qui entraîne que si (SC) est vérifié pour les couples  $(\alpha_i, \gamma)$  ( $\gamma \in R$ ), il l'est pour tout couple  $(\alpha, \beta)$ , ( $\beta \in R$ ).

Construisons maintenant un système  $(X_\alpha)_{\alpha \in R}$  de la manière suivante. Pour tout  $\alpha \in R$ , choisissons une suite  $\{\alpha_i\} \subset \Delta$  comme ci-dessus et définissons  $X_\alpha$  par

$$X_\alpha = \text{Ad}(w_{\alpha_i}(X_{\alpha_i}) \cdots w_{\alpha_n}(X_{\alpha_n}))X'_{\alpha_{n+1}}.$$

Pour vérifier (SC), il suffit de prouver :

**Lemme 6.3.** — *Soit  $(G, T, M, R, \Delta, (X_\alpha)_{\alpha \in \Delta})$  un S-groupe épinglé ; soit  $\alpha_i$  ( $0 \leq i \leq n+1$ ) une suite de racines simples telle que*

$$\text{int}(s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_n})(\alpha_{n+1}) = \alpha_0.$$

Alors

$$\text{Ad}(w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n})X_{\alpha_{n+1}} = \pm X_{\alpha_0}.$$

Raisonnant comme dans 2.3.4 à l'aide du lemme de Tits (Exp. XXI 5.6), on est ramené à vérifier le lemme 6.3 dans les deux cas suivants :

a)  $G$  est de rang semi-simple au plus 2 ou b)  $w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n}$  est une section de  $T$ . Dans le cas a), remarquons que 6.3 est une conséquence de 6.2 et que 6.2 a été vérifié dans la partie (i) de 3.1.2 (resp. 3.2.1, resp. 3.3.1, resp. 3.4.1).

320 Reste donc à prouver 6.3 dans le cas b), ou, ce qui revient au même, que si  $\{\alpha_i\}$  est une suite de racines simples telle que  $s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_n} = \text{id}$ , alors  $t = w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n}$  vérifie  $\alpha(t) = \pm 1$  pour toute racine  $\alpha \in R$ . En vertu de la structure du groupe de Weyl (Exp. XXI, 5.1), le mot  $s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_n}$  du groupe libre engendré par les  $s_\alpha$ ,  $\alpha \in \Delta$  est

dans le sous-groupe invariant engendré par les  $(s_\alpha s_\beta)^{n_{\alpha\beta}}$ ,  $(\alpha, \beta) \in \Delta \times \Delta$ . On est donc ramené au cas où  $s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_n}$  est de la forme

$$s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_i} (s_{\alpha_{i+1}} s_{\alpha_{i+2}})^{n_{\alpha_{i+1} \alpha_{i+2}}} s_{\alpha_i} \cdots s_{\alpha_1}.$$

Alors on a

$$t = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_i} (t_{\alpha_{i+1} \alpha_{i+2}}),$$

et on est ramené à vérifier que pour tout couple de racines simples  $(\alpha_1, \alpha_2)$  et toute racine  $\beta \in R$ , on a  $\beta(t_{\alpha_1 \alpha_2}) = \pm 1$ , ce qui est trivial, vu les valeurs de  $t_{\alpha_1 \alpha_2}$  calculées au n°3 (partie (i) de 3.1.2, 3.2.1, 3.3.1, 3.4.1).

**Proposition 6.4.** — Soient  $(G, T, M, R)$  un S-groupe déployé,  $(X_\alpha)_{\alpha \in R}$  un système de Chevalley de  $G$ . Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux racines non proportionnelles ; supposons

$$\text{long}(\alpha) \leq \text{long}(\beta), \quad \text{i.e.} \quad |(\beta^*, \alpha)| \leq |(\alpha^*, \beta)|.$$

Soient  $q$  et  $p - 1$  les entiers  $\geq 0$  tels que l'ensemble des racines de la forme  $\beta + k\alpha$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , soit

$$\{\beta - (p - 1)\alpha, \dots, \beta, \dots, \beta + q\alpha\}.$$

(cf. Exp. XXI, 2.3.5 ; d'après loc. cit., on a donc  $-(\alpha^*, \beta) = q - p + 1$ ). Alors la relation de commutation entre  $U_\alpha$  et  $U_\beta$  est donnée par le tableau suivant (qui épuise les cas possibles, car la longueur de la chaîne de racines précédentes est  $p + q - 1 \leq 3$ ), où on note pour chaque  $\gamma \in R$ ,  $p_\gamma(x) = \exp(xX_\gamma)$  : 321

$$\begin{array}{ll} (p, q) & p_\beta(y) p_\alpha(x) p_\beta(-y) p_\alpha(-x) \\ (-, 0) & = e \\ (1, 1) & = p_{\alpha+\beta}(\pm xy) \\ (1, 2) & = p_{\alpha+\beta}(\pm xy) p_{2\alpha+\beta}(\pm x^2 y) \\ (1, 3) & = p_{\alpha+\beta}(\pm xy) p_{2\alpha+\beta}(\pm x^2 y) p_{3\alpha+\beta}(\pm x^3 y) p_{3\alpha+2\beta}(\pm x^3 y^2) \\ (2, 1) & = p_{\alpha+\beta}(\pm 2xy) \\ (2, 2) & = p_{\alpha+\beta}(\pm 2xy) p_{2\alpha+\beta}(\pm 3x^2 y) p_{\alpha+2\beta}(\pm 3xy^2) \\ (3, 1) & = p_{\alpha+\beta}(\pm 3xy) \end{array}$$

*Démonstration.* En vertu de Exp. XXI, 3.5.4, il existe un système de racines simples  $\Delta$  de  $R$  vérifiant :  $\alpha \in \Delta$  et il existe  $\alpha' \in \Delta$  et  $a, b \in \mathbb{Q}_+$  tels que  $\beta = a\alpha + b\alpha'$ . Considérons l'épinglage  $(\Delta, (X_\alpha)_{\alpha \in \Delta})$  de  $G$ . La relation de commutation à vérifier est une relation entre éléments de  $U_{\alpha\alpha'}$  ; on est donc ramené aux calculs explicites du n°3, et on conclut aussitôt par la condition (SC).

**Corollaire 6.5** (Règle de Chevalley). — Soient  $S$  un schéma,  $(X_\alpha)_{\alpha \in R}$  un système de Chevalley du S-groupe déployé  $G$ . Si  $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in R$ , alors 322

$$[X_\alpha, X_\beta] = \pm p X_{\alpha+\beta},$$

où  $p$  est le plus petit entier  $> 0$  tel que  $\beta - p\alpha$  ne soit pas racine.

En effet, comme l'assertion est symétrique en  $\alpha$  et  $\beta$ , on peut supposer  $\text{long}(\alpha) \leq \text{long}(\beta)$ , et on est ramené à 6.4.

**Corollaire 6.6.** — Soient  $S$  un schéma tel que  $6 \cdot 1_S \neq 0$  et  $(G, T, M, R)$  un  $S$ -groupe déployé. Si  $R'$  est une partie de  $R$  telle que

$$(*) \quad \mathfrak{g}_{R'} = \mathfrak{t} \oplus \coprod_{\alpha \in R'} \mathfrak{g}^\alpha$$

soit une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ , alors  $R'$  est une partie close de  $R$  (Exp. XXI, 3.1.4).

<sup>(16)</sup> En effet, soit  $(X_\gamma)_{\gamma \in R^+}$  un système de Chevalley de  $\mathfrak{g}$  et soient  $\alpha, \beta \in R'$  tels que  $\alpha + \beta \in R$ . D'après 6.5 et 6.4, on a

$$[X_\alpha, X_\beta] = \pm p X_{\alpha+\beta}, \quad \text{avec } p \in \{1, 2, 3\}$$

et comme ni 2 ni 3 ne sont nuls sur  $S$  ceci entraîne, d'après (\*), que  $\mathfrak{g}_{R'}$  contient  $\mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$ , et donc  $\alpha + \beta \in R'$ . <sup>(17)</sup>

**6.7.** Il est possible de préciser la valeur exacte des divers  $\pm$  de ce numéro, grâce à l'étude du groupe  $\underline{\text{Norm}}_G(T)$  et plus précisément, du « groupe de Weyl étendu » :

$$W^* = N(\mathbb{Z}), \quad \text{où } N = \underline{\text{Norm}}_{G_{\mathbb{Z}}^{\text{ép}}(\mathcal{R})}(T_{\mathbb{Z}}(\mathcal{R}))$$

(cf. 5.11) qui est une extension de  $W(\mathcal{R})$  par un groupe abélien de type  $(2, 2, \dots, 2)$ , qui est « responsable des signes » <sup>(\*)</sup> <sup>(18)</sup>.

**Remarque 6.7.1.** — <sup>(19)</sup> Noter que, d'après le point (i) de 3.1.2 et 3.n.1 ( $n = 2, 3, 4$ ), les éléments  $w_\alpha$  et  $w_\beta$  de  $N(\mathbb{Z})$  vérifient les « relations de tresses » :

$$w_\alpha w_\beta \cdots = w_\beta w_\alpha \cdots \quad (n_{\alpha\beta} \text{ facteurs dans chaque terme}).$$

(voir aussi [Ti66], [BLie], § IX.4, Ex. 12, et [Sp98], 9.3.2).

<sup>(\*)</sup>cf. J. Tits : *Sur les constantes de structure et le théorème d'existence des algèbres de Lie semi-simples*, Publ. Math. I.H.É.S. 31 (1966), 21-58.

<sup>(16)</sup>N.D.E. : On a ajouté la démonstration qui suit. Notons qu'il suffit que 2 et 3 soient non nuls sur  $S$ ; par exemple le résultat est valable pour  $S = \text{Spec}(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ .

<sup>(17)</sup>N.D.E. : D'autre part, signalons que si  $2 = 0$  sur  $S$  et si  $R$  est de type  $C_n$ , alors l'ensemble  $R'$  des racines courtes (qui est un système de racines de type  $D_n$ ) n'est pas clos dans  $R$ , mais est une partie de type (R) de  $R$ , symétrique (cf. XXII 5.4.2 et 5.4.10), i.e. il lui correspond un sous-groupe  $H_{R'}$  de type (R) de  $G$  à fibres réductives : ceci est en particulier le cas pour le plongement naturel (en caractéristique 2) de  $SO(2n)$  dans  $Sp(2n)$ . De même, si  $2 = 0$  sur  $S$  et  $R$  est de type  $F_4$  (resp. si  $3 = 0$  sur  $S$  et  $R$  est de type  $G_2$ ), l'ensemble  $R'$  des racines courtes (qui est un système de racines de type  $D_4$  (resp.  $A_2$ )) n'est pas clos dans  $R$ , mais correspond à un sous-groupe  $H_{R'}$  de type (R) de  $G$ , à fibres réductives.

<sup>(18)</sup>N.D.E. : voir aussi [Ti66].

<sup>(19)</sup>N.D.E. : On a ajouté cette remarque.

**Bibliographie**

(20)

- [BLie] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. IX, Masson, 1982.
- [Ja87] J. C. Jantzen, *Representations of algebraic groups*, Academic Press, 1987, 2nd ed., Amer. Math. Soc., 2003.
- [Sp98] T. A. Springer, *Linear algebraic groups*, 2nd ed., Birkhäuser, 1998.
- [St62] R. Steinberg, *Générateurs, relations et revêtements de groupes algébriques*, Colloque sur la théorie des groupes algébriques (Bruxelles 1962), Univ. Louvain & Gauthier-Villars, 1962 (pp. 133-147 in R. Steinberg Collected Papers, Amer. Math. Soc., 1997).
- [St67] R. Steinberg, *Lectures on Chevalley groups*, Yale University (1967).
- [Ta83] M. Takeuchi, *A hyperalgebraic proof of the isomorphism and isogeny theorems for reductive groups*, J. Algebra **85** (1983), 179-196.
- [Ti66] J. Tits, *Normalisateurs de tores I. Groupes de Coxeter étendus*, J. Algebra **4** (1969), 96-116.

---

<sup>(20)</sup>N.D.E. : références additionnelles citées dans cet Exposé.

