EXPOSÉ I

STRUCTURES ALGÉBRIQUES. COHOMOLOGIE DES GROUPES

par M. Demazure

Cet exposé se compose de deux parties ; la première rassemble un certain nombre 1
de définitions générales et pose des notations qui seront souvent utilisées par la suite, la seconde traite de la cohomologie des groupes et aboutit au théorème 5.3.3 (nullité de la cohomologie des groupes diagonalisables).

Nous choisissons une fois pour toutes un Univers. Toutes les définitions posées et toutes les constructions effectuées seront relatives à cet Univers. Nous nous permettrons systématiquement l'abus de langage suivant : pour définir un foncteur $f : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$, nous nous contenterons de définir l'objet $f(\mathrm{S})$ de $\mathscr{C}'$ pour tout objet S de $\mathscr{C}$, chaque fois qu'il n'y aura aucune ambiguïté sur la manière de définir $f(h)$ pour une flèche h de $\mathscr{C}$. En pratique, nous dirons : soit $f : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ le foncteur défini par $f(\mathrm{S}) = \cdots$.

1. Généralités

1.1. — Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. On notera $\widehat{\mathscr{C}}$ la catégorie $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}^\circ, (\mathbf{Ens}))$ des foncteurs contravariants de $\mathscr{C}$ dans la catégorie $(\mathbf{Ens})$ des ensembles. Il existe un foncteur canonique $\mathbf{h} : \mathscr{C} \to \widehat{\mathscr{C}}$ qui associe à tout $\mathrm{X} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ le foncteur $\mathbf{h}_\mathrm{X}$ tel que

$$\mathbf{h}_\mathrm{X}(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{S}, \mathrm{X}).$$

Pour tout foncteur $\mathbf{F} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}})$, on définit (cf. par exemple EGA 0.8.1) une bijection 2

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{h}_\mathrm{X}, \mathbf{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{F}(\mathrm{X}).$$

En particulier, pour tout couple X, Y d'objets de $\mathscr{C}$, l'application canonique

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathbf{h}_\mathrm{X}, \mathbf{h}_\mathrm{Y})$$

est bijective ; le foncteur $\mathbf{h}$ est *pleinement fidèle*. Il définit donc un isomorphisme de $\mathscr{C}$ sur une sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathscr{C}}$, et une équivalence de $\mathscr{C}$ avec la sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathscr{C}}$ formée des foncteurs *représentables* (i.e. isomorphes à un foncteur de la forme $\mathbf{h}_\mathrm{X}$). Dans la suite, nous identifierons souvent X et $\mathbf{h}_\mathrm{X}$. Les numéros suivants ont pour but de montrer que cette identification peut se faire sans danger.

1.2. — Un *monomorphisme* de $\widehat{\mathscr{C}}$ n'est autre qu'un morphisme $\mathbf{F} \to \mathbf{G}$ tel que pour $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, l'application d'ensembles correspondante $\mathbf{F}(\mathrm{S}) \to \mathbf{G}(\mathrm{S})$ soit injective. On dira que $\mathbf{F}$ est un *sous-objet* (ou un sous-foncteur) de $\mathbf{G}$ si $\mathbf{F}(\mathrm{S})$ est un sous-ensemble de $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ pour chaque S.

Dans $\widehat{\mathscr{C}}$ les limites projectives « quelconques » *existent* et se calculent par

$$(\varprojlim_i \mathbf{F}_i)(\mathrm{S}) = \varprojlim_i \mathbf{F}_i(\mathrm{S}),$$

en particulier les produits fibrés par

$$\big(\mathbf{F} \underset{\mathbf{G}}{\times} \mathbf{F}'\big)(\mathrm{S}) = \mathbf{F}(\mathrm{S}) \underset{\mathbf{G}(\mathrm{S})}{\times} \mathbf{F}'(\mathrm{S}).$$

3 Nous choisirons comme objet final de $\widehat{\mathscr{C}}$ le foncteur $\underline{\mathbf{e}}$ tel que $\underline{\mathbf{e}}(\mathrm{S}) = \{\varnothing\}$. Tout $\mathbf{F} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}})$ possède un morphisme unique dans $\underline{\mathbf{e}}$ et on pose

$$\mathbf{F} \times \mathbf{F}' = \mathbf{F} \underset{\underline{\mathbf{e}}}{\times} \mathbf{F}'.$$

Pour tout $\mathbf{F} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}})$ on pose

$$\Gamma(\mathbf{F}) = \mathrm{Hom}(\underline{\mathbf{e}}, \mathbf{F});$$

un élément de $\Gamma(\mathbf{F})$ est donc une famille $(\gamma_{\mathrm{S}})_{\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})}$, $\gamma_{\mathrm{S}} \in \mathbf{F}(\mathrm{S})$ telle que pour toute flèche $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}''$ de $\mathscr{C}$, on ait $\mathbf{F}(f)(\gamma_{\mathrm{S}''}) = \gamma_{\mathrm{S}'}$.

Le foncteur $\mathbf{h}$ *commute aux limites projectives ;* en particulier pour que $\mathrm{X} \times \mathrm{X}'$ existe ($\mathrm{X}, \mathrm{X}' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$), resp. pour que $\mathscr{C}$ admette un objet final e, il faut et il suffit que $\mathbf{h}_{\mathrm{X}} \times \mathbf{h}_{\mathrm{X}'}$ soit représentable, resp. $\underline{\mathbf{e}}$ soit représentable, et on a

$$\mathbf{h}_{\mathrm{X}} \times \mathbf{h}_{\mathrm{X}'} \simeq \mathbf{h}_{\mathrm{X} \times \mathrm{X}'} \quad , \quad \mathbf{h}_e \simeq \underline{\mathbf{e}}.$$

On pose $\Gamma(\mathrm{X}) = \Gamma(\mathbf{h}_{\mathrm{X}})$ pour $\mathrm{X} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. Si $\mathscr{C}$ à un objet final e, on a donc un isomorphisme $\Gamma(\mathrm{X}) \simeq \mathrm{Hom}(e, \mathrm{X})$.

1.3. — Soit $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. On dénote par $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ la catégorie des objets de $\mathscr{C}$ au-dessus de S, c'est-à-dire la catégorie dont les objets sont les flèches $f : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ de $\mathscr{C}$, l'ensemble $\mathrm{Hom}(f, f')$ étant le sous-ensemble de $\mathrm{Hom}(\mathrm{T}, \mathrm{T}')$ formé des u tels que $f = f' \circ u$.
Si $\mathscr{C}$ possède un objet final e, alors $\mathscr{C}_{/e}$ est isomorphe à $\mathscr{C}$. La catégorie $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ possède un objet final : la flèche identique $\mathrm{S} \to \mathrm{S}$.

Si $f : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ est un objet de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, alors on peut former la catégorie $(\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})_{/f}$ que l'on note par abus de langage $(\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})_{/\mathrm{T}}$ et on a un isomorphisme canonique

$$\mathscr{C}_{/\mathrm{T}} \simeq (\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})_{/\mathrm{T}}\,.$$

Cette construction s'applique en particulier aux catégories $\widehat{\mathscr{C}}$, $\widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$, etc. . ., on définit en particulier la catégorie $\widehat{\mathscr{C}}_{/h_{\mathrm{S}}}$.

4 Si $f : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ est un objet de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, alors $\Gamma(f)$ s'identifie à l'ensemble $\Gamma(\mathrm{T}/\mathrm{S})$ des sections de T au-dessus de S, c'est-à-dire des flèches $\mathrm{S} \to \mathrm{T}$ inverses à droite de f. Remarquons que $\mathbf{h}_f : \mathbf{h}_{\mathrm{T}} \to \mathbf{h}_{\mathrm{S}}$ est alors un objet de $\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}}$ et que l'on a :

$$\Gamma(\mathbf{h}_f) \simeq \Gamma(\mathbf{h}_{\mathrm{T}}/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}) \simeq \Gamma(\mathrm{T}/\mathrm{S}) \simeq \Gamma(f).$$

1.4. — On se propose maintenant de définir une *équivalence des catégories* $\widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$ *et* $\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_\mathrm{S}}$, c'est-à-dire de prouver que « se donner un foncteur sur la catégorie des objets de $\mathscr{C}$ au-dessus de S, c'est « la même chose » que se donner un foncteur sur $\mathscr{C}$ muni d'un morphisme dans $\mathbf{h}_\mathrm{S}$ ».

(i) **Construction de** $\alpha_\mathrm{S} : \widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_\mathrm{S}} \to \widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$.

Soit d'abord $\mathrm{H} : \mathbf{F} \to \mathbf{h}_\mathrm{S}$ un objet de $\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_\mathrm{S}}$. On doit définir un foncteur $\alpha_\mathrm{S}(\mathrm{H})$ sur $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$. Soit donc d'abord $f : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ un objet de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$; définissons $\alpha_\mathrm{S}(\mathrm{H})(f)$ comme l'image inverse de $f \in \mathbf{h}_\mathrm{S}(\mathrm{T})$ par l'application $\mathrm{H}(\mathrm{T}) : \mathbf{F}(\mathrm{T}) \to \mathbf{h}_\mathrm{S}(\mathrm{T})$.

Soit ensuite $u : f \to f'$ une flèche de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$; alors $\mathbf{F}(u) : \mathbf{F}(\mathrm{T}') \to \mathbf{F}(\mathrm{T})$ induit une application de $\alpha_\mathrm{S}(\mathrm{H})(f')$ dans $\alpha_\mathrm{S}(\mathrm{H})(f)$ que l'on note $\alpha_\mathrm{S}(\mathrm{H})(u)$. On vérifie aussitôt que les applications

$$f \longmapsto \alpha_\mathrm{S}(\mathrm{H})(f) \quad , \quad u \longmapsto \alpha_\mathrm{S}(\mathrm{H})(u)$$

définissent bien un foncteur sur $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, donc un objet de $\widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$.

Soient enfin $\mathrm{H} : \mathbf{F} \to \mathbf{h}_\mathrm{S}$ et $\mathrm{H}' : \mathbf{F}' \to \mathbf{h}_\mathrm{S}$ deux objets de $\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_\mathrm{S}}$ et $\mathrm{U} : \mathrm{H} \to \mathrm{H}'$ un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_\mathrm{S}}$,

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F} \arrow[rr, "\mathrm{U}"] \arrow[dr, "\mathrm{H}"'] & & \mathbf{F}' \arrow[dl, "\mathrm{H}'"] \\
& \mathbf{h}_\mathrm{S} &
\end{tikzcd} .$$

Alors pour tout $f : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$, $\mathrm{U}(\mathrm{T}) : \mathbf{F}(\mathrm{T}) \to \mathbf{F}'(\mathrm{T})$ induit une application 5

$$\alpha_\mathrm{S}(\mathrm{U})(f) : \quad \alpha_\mathrm{S}(\mathrm{H})(f) \longrightarrow \alpha_\mathrm{S}(\mathrm{H}')(f),$$

ce qui définit un morphisme de foncteurs

$$\alpha_\mathrm{S}(\mathrm{U}) : \quad \alpha_\mathrm{S}(\mathrm{H}) \longrightarrow \alpha_\mathrm{S}(\mathrm{H}').$$

On vérifie aisément que les applications

$$\mathrm{H} \longmapsto \alpha_\mathrm{S}(\mathrm{H}) \quad , \quad \mathrm{U} \longmapsto \alpha_\mathrm{S}(\mathrm{U})$$

définissent bien un foncteur $\alpha_\mathrm{S} : \widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_\mathrm{S}} \to \widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$.

(ii) ***Proposition 1.4.1.* —** *Le foncteur* $\alpha_\mathrm{S} : \widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_\mathrm{S}} \to \widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$ *est une équivalence de catégories.*

Indiquons seulement le principe de la construction d'un foncteur quasi-inverse β_S : $\widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}} \to \widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_\mathrm{S}}$. Soit $\mathbf{G}$ un foncteur de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$; pour tout objet T de $\mathscr{C}$, on pose

$$\beta_\mathrm{S}(\mathbf{G})(\mathrm{T}) = \text{somme des ensembles } \mathbf{G}(f) \text{ pour } f \in \mathrm{Hom}(\mathrm{T}, \mathrm{S}) = \mathbf{h}_\mathrm{S}(\mathrm{T}),$$

ce qui définit un foncteur $\beta_\mathrm{S}(\mathbf{G})$ sur $\mathscr{C}$, qui est muni d'une projection évidente sur $\mathbf{h}_\mathrm{S}$.

1.5. — *L'équivalence* α_{S} *commute aux foncteurs* Γ. En d'autres termes, si $\mathrm{H} : \mathbf{F} \to \mathbf{h}_{\mathrm{S}}$ est un objet de $\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}}$ et $\alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})$ l'objet correspondant de $\widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$, on a

$$\Gamma(\alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})) \simeq \Gamma(\mathrm{H}) \simeq \Gamma(\mathbf{F}/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}).$$

L'équivalence α_{S} *commute aux foncteurs* $\mathbf{h}$: si $f : \mathrm{F} \to \mathrm{S}$ est un objet de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, $\mathbf{h}_f : \mathbf{h}_{\mathrm{T}} \to \mathbf{h}_{\mathrm{S}}$ est un objet de $\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}}$ dont le transformé par α_{S} n'autre que $\mathbf{h}_{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}(f)$, où

$$\mathbf{h}_{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}} : \mathscr{C}_{/\mathrm{S}} \longrightarrow \widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$$

6 est le foncteur canonique . En conséquence :

Proposition 1.5.1. — *Soit* $\mathrm{H} : \mathbf{F} \to \mathbf{h}_{\mathrm{S}}$ *un objet de* $\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}}$. *Pour que* $\alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H}) : \mathscr{C}_{/\mathrm{S}} \to (\mathbf{Ens})$ *soit représentable, il faut et il suffit que* $\mathbf{F} : \mathscr{C} \to (\mathbf{Ens})$ *soit représentable ; si* $\mathbf{F} \simeq \mathbf{h}_{\mathrm{T}}$, *alors* $\alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})$ *est représentable par l'objet* $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ *de* $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$.

L'équivalence α_{S} *est transitive en* S : si $\mathrm{T} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})$, on a un diagramme commutatif d'équivalence

$$\begin{tikzcd}
(\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}})_{/\mathbf{h}_{\mathrm{T}}} \arrow[rr, "\alpha_{\mathrm{S}}/\mathbf{h}_{\mathrm{T}}"] \arrow[dr, "\cong"'] & & (\widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}})_{/\mathbf{h}_{\mathrm{T}}} \arrow[rr, "\alpha_{\mathbf{h}_{\mathrm{T}}}"] & & \widehat{(\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})_{/\mathrm{T}}} \arrow[dl, "\cong"] \\
& \widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{T}}} \arrow[rr, "\alpha_{\mathrm{T}}"] & & \widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{T}}} &
\end{tikzcd} ,$$

où $\alpha_{\mathrm{S}}/\mathbf{h}_{\mathrm{T}}$ désigne (provisoirement) la *restriction* (cf. 1.6) du foncteur α_{S} aux objets au-dessus de $\mathbf{h}_{\mathrm{T}}$.

1.6. Changement de base dans un foncteur. — Pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, on a un foncteur canonique

$$i_{\mathrm{S}} : \mathscr{C}_{/\mathrm{S}} \longrightarrow \mathscr{C}$$

défini par $i_{\mathrm{S}}(f) = \mathrm{T}$ si f est la flèche $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$. Si $f : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ est un objet de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, on note $i_{\mathrm{T}/\mathrm{S}} = i_f$:

$$i_{\mathrm{T}/\mathrm{S}} : (\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})_{/\mathrm{T}} \longrightarrow \mathscr{C}_{/\mathrm{S}},$$

et on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})_{/\mathrm{T}} \arrow[r, "i_{\mathrm{T}/\mathrm{S}}"] \arrow[dr, "\cong"'] & \mathscr{C}_{/\mathrm{S}} \arrow[r, "i_{\mathrm{S}}"] & \mathscr{C} \\
& \mathscr{C}_{/\mathrm{T}} \arrow[ur, "i_{\mathrm{T}}"'] &
\end{tikzcd} ,$$

7 c'est-à-dire, *en identifiant* $(\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})_{/\mathrm{T}}$ à $\mathscr{C}_{/\mathrm{T}}$ *comme nous le ferons désormais*

$$i_{\mathrm{S}} \circ i_{\mathrm{T}/\mathrm{S}} = i_{\mathrm{T}} .$$

De la même manière, si on identifie $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_{/e}$, lorsque $\mathscr{C}$ possède un objet final e, alors $i_{\mathrm{S}/e} : \mathscr{C}_{/\mathrm{S}} \to \mathscr{C}_{/e}$ s'identifie à i_{S}.

Pour $\mathrm{X} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ (resp. $\mathrm{X} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})$), soit $p_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})$ (resp. $p_{\mathrm{T}/\mathrm{S}}(\mathrm{X})$) l'objet de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ (resp. de $\mathscr{C}_{/\mathrm{T}}$) lorsqu'il existe, défini par $\mathrm{X} \times \mathrm{S}$ (resp. $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$) muni de sa deuxième projection :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \times \mathrm{S} \arrow[d, "p_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})"'] \\ \mathrm{S} \end{tikzcd} \qquad \text{resp.} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T} \arrow[d, "p_{\mathrm{T}/\mathrm{S}}(\mathrm{X})"] \\ \mathrm{T} \end{tikzcd} .$$

Le foncteur (partiellement défini) p_{S} (resp. $p_{\mathrm{T}/\mathrm{S}}$) s'appelle *foncteur de changement de base.* C'est par définition du produit (resp. du produit fibré) le foncteur adjoint du foncteur i_{S} (resp. $i_{\mathrm{T}/\mathrm{S}}$) . On note également

$$p_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}_{\mathrm{S}} \quad , \quad p_{\mathrm{T}/\mathrm{S}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}_{\mathrm{T}} \, .$$

Le foncteur i_{S} définit un foncteur (*restriction*)

$$i^*_{\mathrm{S}} : \widehat{\mathscr{C}} \longrightarrow \widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}};$$

où on note $\mathbf{F}_{\mathrm{S}} = i^*_{\mathrm{S}}(\mathbf{F}) = \mathbf{F} \circ i^{\circ}_{\mathrm{S}}$. On a évidemment

$$i^*_{\mathrm{T}/\mathrm{S}} \circ i^*_{\mathrm{S}} = i^*_{\mathrm{T}},$$

c'est-à-dire pour tout foncteur $\mathbf{F} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}})$,

$$(\mathbf{F}_{\mathrm{S}})_{\mathrm{T}} = \mathbf{F}_{\mathrm{T}}.$$

La notation demande une justification que voici : 8

Proposition 1.6.1. — *Pour que le foncteur* $(\mathbf{h}_{\mathrm{X}})_{\mathrm{S}} : (\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})^{\circ} \to (\mathbf{Ens})$ *soit représentable, il faut et il suffit que le produit* $\mathrm{X} \times \mathrm{S}$ *existe. On a alors*

$$(\mathbf{h}_{\mathrm{X}})_{\mathrm{S}} \simeq \mathbf{h}_{\mathrm{X}_{\mathrm{S}}}.$$

Ceci montre que $\mathbf{F}_{\mathrm{S}}$ a deux interprétations : *restriction* du foncteur $\mathbf{F}$ à $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, foncteur obtenu par *changement de base* $e \leftarrow \mathrm{S}$. Ceci conduit à la notation suivante :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{F} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathbf{F}_{\mathrm{S}} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathbf{F}_{\mathrm{T}} \arrow[d, dash] \\ e & \mathrm{S} \arrow[l] & \mathrm{T} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

qui rend bien compte des deux interprétations précédentes.

Remarquons que l'on a

$$\Gamma(\mathbf{F}_{\mathrm{S}}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{h}_{\mathrm{S}}, \mathbf{F}) \simeq \mathbf{F}(\mathrm{S}),$$

en particulier

$$\Gamma(\mathrm{X}_{\mathrm{S}}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{S}, \mathrm{X}).$$

1.7. Objets $\underline{\mathrm{Hom}}$, $\underline{\mathrm{Isom}}$, ... — Soient $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ deux objets de $\widehat{\mathscr{C}}$. Nous allons définir un autre objet de $\widehat{\mathscr{C}}$ de la manière suivante :

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F},\mathbf{G})(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}}(\mathbf{F}_{\mathrm{S}},\mathbf{G}_{\mathrm{S}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}}}(\mathbf{F}\times\mathbf{h}_{\mathrm{S}},\mathbf{G}\times\mathbf{h}_{\mathrm{S}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}}(\mathbf{F}\times\mathbf{h}_{\mathrm{S}},\mathbf{G}).$$

L'objet $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F},\mathbf{G})$ défini ci-dessus possède les propriétés suivantes :

(i) $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathbf{e}},\mathbf{G}) \simeq \mathbf{G}$

9 (ii) *La formation de* $\underline{\mathrm{Hom}}$ *commute à l'extension de la base* :

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}_{\mathrm{S}},\mathbf{G}_{\mathrm{S}}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F},\mathbf{G})_{\mathrm{S}}.$$

(iii) $(\mathbf{F},\mathbf{G}) \mapsto \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F},\mathbf{G})$ *est un bifoncteur, contravariant en* $\mathbf{F}$ *et covariant en* $\mathbf{G}$.

Ces trois propriétés sont évidentes sur les définitions.

Soit $\mathbf{E}$ un troisième objet de $\widehat{\mathscr{C}}$. Nous allons définir un morphisme de trifoncteurs

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{E}\times\mathbf{F},\mathbf{G}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbf{E},\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F},\mathbf{G})).$$

Soit $f : \mathbf{E}\times\mathbf{F}\to\mathbf{G}$; nous devons lui associer un morphisme de $\mathbf{E}$ dans $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F},\mathbf{G})$. Soit donc $\mathrm{S}'\to\mathrm{S}$ une flèche de $\mathscr{C}$. On a des applications

$$\mathbf{E}(\mathrm{S})\times\mathbf{F}(\mathrm{S}') \longrightarrow \mathbf{E}(\mathrm{S}')\times\mathbf{F}(\mathrm{S}') \xrightarrow{f(\mathrm{S}')} \mathbf{G}(\mathrm{S}').$$

Un élément de $\mathbf{E}(\mathrm{S})$ définit donc pour tout $\mathrm{S}'\to\mathrm{S}$ une application de $\mathbf{F}(\mathrm{S}')\to\mathbf{G}(\mathrm{S}')$ fonctorielle en S', donc un élément de $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F},\mathbf{G})(\mathrm{S})$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que l'on a bien construit ainsi un morphisme de trifoncteurs.

***Proposition 1.7.1.* —** *Le morphisme de foncteurs*

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{E}\times\mathbf{F},\mathbf{G}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbf{E},\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F},\mathbf{G}))$$

est un isomorphisme.

Indiquons seulement un principe de démonstration. Considérons les deux membres comme des foncteurs en $\mathbf{E}$. Le résultat annoncé est vrai si $\mathbf{E}=\mathbf{h}_{\mathrm{X}}$; en effet, ce n'est autre en ce cas que la définition du foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F},\mathbf{G})$. D'autre part les deux membres comme foncteurs en $\mathbf{E}$ transforment limites inductives en limites projectives. Enfin, tout objet de $\widehat{\mathscr{C}}$ est limite inductive d'objets de la forme $\mathbf{h}_{\mathrm{X}}$.

10 ***Corollaire.* —** *On a* $\mathrm{Hom}(\mathbf{E},\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F},\mathbf{G})) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{F},\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{E},\mathbf{G}))$.

En particulier, faisant $\mathbf{E}=\underline{\mathbf{e}}$, et compte tenu de $\mathrm{Hom}(\underline{\mathbf{e}},\mathbf{G})\simeq\mathbf{G}$, on a

$$\Gamma(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F},\mathbf{G})) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{F},\mathbf{G}).$$

Notons que la composition des Hom fournit des morphismes fonctoriels

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F},\mathbf{G})\times\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G},\mathbf{H}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F},\mathbf{H}).$$

Si $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ sont deux objets de $\widehat{\mathscr{C}}$, on note $\mathrm{Isom}(\mathbf{F},\mathbf{G})$ le sous-ensemble de $\mathrm{Hom}(\mathbf{F},\mathbf{G})$ formé des isomorphismes de $\mathbf{F}$ sur $\mathbf{G}$. On définit alors un sous-objet $\underline{\mathrm{Isom}}(\mathbf{F},\mathbf{G})$ de $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F},\mathbf{G})$ par :

$$\underline{\mathrm{Isom}}(\mathbf{F},\mathbf{G})(\mathrm{S}) = \mathrm{Isom}(\mathbf{F}_{\mathrm{S}},\mathbf{G}_{\mathrm{S}}).$$

On a alors des isomorphismes

$$\Gamma(\underline{\mathrm{Isom}}(\mathbf{F},\mathbf{G})) \simeq \mathrm{Isom}(\mathbf{F},\mathbf{G}),$$
$$\underline{\mathrm{Isom}}(\mathbf{F},\mathbf{G}) \simeq \underline{\mathrm{Isom}}(\mathbf{G},\mathbf{F}).$$

Dans le cas particulier où $\mathbf{F} = \mathbf{G}$, on pose

$$\underline{\mathrm{End}}(\mathbf{F}) = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F},\mathbf{F})\,, \qquad \mathrm{End}(\mathbf{F}) = \mathrm{Hom}(\mathbf{F},\mathbf{F}) \simeq \Gamma(\underline{\mathrm{End}}(\mathbf{F})),$$
$$\underline{\mathrm{Aut}}(\mathbf{F}) = \underline{\mathrm{Isom}}(\mathbf{F},\mathbf{F})\,, \qquad \mathrm{Aut}(\mathbf{F}) = \mathrm{Isom}(\mathbf{F},\mathbf{F}) \simeq \Gamma(\underline{\mathrm{Aut}}(\mathbf{F})).$$

La formation des objets $\underline{\mathrm{Hom}}$, $\underline{\mathrm{Isom}}$, $\underline{\mathrm{Aut}}$, $\underline{\mathrm{End}}$ commute aux changements de base.

Remarquons que l'on peut construire un objet isomorphe à $\underline{\mathrm{Isom}}(\mathbf{F},\mathbf{G})$ de la manière suivante : on a un morphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F},\mathbf{G}) \times \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G},\mathbf{F}) \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{F});$$

permutant $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$, on déduit un morphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F},\mathbf{G}) \times \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G},\mathbf{F}) \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{F}) \times \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{G}).$$

D'autre part, le morphisme identique de $\mathbf{F}$ est un élément de $\mathrm{End}(\mathbf{F})$ et définit donc un morphisme $\underline{\mathbf{e}} \to \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{F})$. Faisant de même avec $\mathbf{G}$ et effectuant le produit, on trouve un morphisme 11

$$\underline{\mathbf{e}} \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{F}) \times \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{G}).$$

Il est alors immédiat que le produit fibré de $\underline{\mathbf{e}}$ et de $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F},\mathbf{G}) \times \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G},\mathbf{F})$ au-dessus de $\underline{\mathrm{End}}(\mathbf{F}) \times \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{G})$ est isomorphe à $\underline{\mathrm{Isom}}(\mathbf{F},\mathbf{G})$.

Toutes ces définitions s'appliquent en particulier au cas où $\mathbf{F} = \mathbf{h}_{\mathrm{X}}$, $\mathbf{G} = \mathbf{h}_{\mathrm{Y}}$. Dans le cas où $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{h}_{\mathrm{X}},\mathbf{h}_{\mathrm{Y}})$ est représentable par un objet de $\mathscr{C}$, on note cet objet $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$. Il possède la propriété suivante : si $\mathrm{Z} \times \mathrm{X}$ existe, alors

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Z}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})) \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{Z} \times \mathrm{X}, \mathrm{Y}).$$

Cette propriété le caractérise lorsque les produits existent dans $\mathscr{C}$.

On définit de même (lorsqu'ils veulent bien exister) des objets

$$\underline{\mathrm{Isom}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \quad , \quad \underline{\mathrm{End}}(\mathrm{X}) \quad , \quad \underline{\mathrm{Aut}}(\mathrm{X});$$

remarquons simplement que d'après la construction donnée plus haut, $\underline{\mathrm{Isom}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ existe chaque fois que les produit fibrés existent dans $\mathscr{C}$ et que $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$, $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Y},\mathrm{X})$, $\underline{\mathrm{End}}(\mathrm{X})$ et $\underline{\mathrm{End}}(\mathrm{Y})$ existent.

Ceci s'applique également à des catégories de la forme $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$. Les objets correspondant seront notés de manière aussi explicite que possible par des symboles appropriés : par exemple, si T et T′ sont deux objets de $\mathscr{C}$ au-dessus de S, on notera $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{T},\mathrm{T}')$ l'objet $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}(\mathrm{T}/\mathrm{S},\mathrm{T}'/\mathrm{S})$ qui sera donc un objet de $\mathscr{C}$ au-dessus de S, ...

1.8. Objets constants. — Soit $\mathscr{C}$ une catégorie où les sommes directes et les produits 12
fibrés existent et où les sommes directes commutent aux changements de base (par exemple la catégorie des schémas). Pour tout ensemble E et pour tout objet S de $\mathscr{C}$, soit $\mathrm{E_S}$ la somme directe d'une famille $(\mathrm{S}_i)_{i\in \mathrm{E}}$ d'objets de $\mathscr{C}$ tous isomorphes à S. Cet objet est caractérisé par la formule

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{E_S}, \mathrm{T}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{Hom}(\mathrm{S}, \mathrm{T})), \qquad \mathrm{T} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}),$$

où le second Hom est pris dans la catégorie des ensembles.

L'objet $\mathrm{E_S}$ est muni d'une projection canonique sur S, de telle façon que $\mathrm{E} \mapsto \mathrm{E_S}$ est en fait un foncteur de (**Ens**) dans $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$. Supposons que, $\varnothing$ désignant un objet initial de $\mathscr{C}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{S} \arrow[dr] & \\ \varnothing \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathrm{S} \sqcup \mathrm{S} \\ & \mathrm{S} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

soit cartésien (c'est le cas de la catégorie des schémas). Alors le foncteur $\mathrm{E} \mapsto \mathrm{E_S}$ *commute aux limites projectives finies.* En particulier :

$$\mathrm{E_S} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{F_S} = (\mathrm{E} \times \mathrm{F})_{\mathrm{S}}.$$

Si $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ est une flèche de $\mathscr{C}$, on a

$$\mathrm{E}_{\mathrm{S}'} = (\mathrm{E_S})_{\mathrm{S}'}.$$

En particulier, si $\mathscr{C}$ possède un objet final e, on a

$$\mathrm{E_S} = (\mathrm{E}_e)_{\mathrm{S}}.$$

Un objet de la forme $\mathrm{E_S}$ sera dit *objet constant.* Remarquons que l'on a un monomorphisme fonctoriel en E :

$$\mathrm{E} \longrightarrow \Gamma(\mathrm{E_S}/\mathrm{S})$$

qui associe à chaque $i \in \mathrm{E}$, la section de $\mathrm{E_S}$ sur S définie par l'isomorphisme de S sur S_i.

Si $\mathscr{C}$ est la catégorie des schémas, alors $\Gamma(\mathrm{E_S}/\mathrm{S})$ s'identifie aux applications locale-
13 ment constantes de l'espace topologique S dans l'ensemble E, l'application précédente
associant à chaque élément de E l'application constante correspondante. Remarquons
qu'il résulte de ce qu'on vient de dire que $\mathrm{E_S}$ peut aussi être défini comme représentant
le foncteur qui à tout S' au-dessus de S associe l'ensemble des fonctions localement
constantes de l'espace topologique S' dans l'ensemble E.

2. Structures algébriques

Etant donnée une espèce de structure algébrique dans la catégorie des ensembles, nous nous proposons de l'étendre à la catégorie $\mathscr{C}$. Traitons d'abord un exemple : le cas des groupes.

2.1. Structures de groupe. — Nous gardons les notations du paragraphe précédent.

Définition 2.1.1. — Soit $\mathbf{G} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}})$. On appelle structure de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe sur $\mathbf{G}$ la donnée pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ d'une structure de groupe sur l'ensemble $\mathbf{G}(\mathrm{S})$, de telle manière que pour toute flèche $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}''$ de $\mathscr{C}$, l'application $\mathbf{G}(f) : \mathbf{G}(\mathrm{S}'') \to \mathbf{G}(\mathrm{S}')$ soit un homomorphisme de groupes. Si $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ sont deux $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes, on appelle *morphisme* de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes de $\mathbf{G}$ dans $\mathbf{H}$ tout morphisme $u \in \mathrm{Hom}(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ tel que pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ l'application d'ensembles $u(\mathrm{S}) : \mathbf{G}(\mathrm{S}) \to \mathbf{H}(\mathrm{S})$ soit un homomorphisme de groupes.

On note $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.}}(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ l'ensemble des morphismes de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes de $\mathbf{G}$ dans $\mathbf{H}$ et ($\widehat{\mathscr{C}}$-Gr.) la catégorie des $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes.

Exemples. — Soit $\mathbf{E} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}})$; l'objet $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathbf{E})$ est muni de manière évidente d'une structure de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe. L'objet final $\underline{\mathbf{e}}$ possède une structure de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe unique qui en fait un objet final de ($\widehat{\mathscr{C}}$-Gr.).

Pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, soit $e_{\mathbf{G}}(\mathrm{S})$ l'élément unité de $\mathbf{G}(\mathrm{S})$. La famille des $e_{\mathbf{G}}(\mathrm{S})$ définit un élément $e_{\mathbf{G}} \in \Gamma(\mathbf{G}) = \mathrm{Hom}(\underline{\mathbf{e}}, \mathbf{G})$ qui est en fait un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$- 14
groupes $\underline{\mathbf{e}} \to \mathbf{G}$ et que l'on appelle *section unité de* $\mathbf{G}$.

Remarquons que se donner une structure de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe sur $\mathbf{G}$ revient à se donner une loi de composition sur $\mathbf{G}$, c'est-à-dire un $\widehat{\mathscr{C}}$-morphisme

$$\pi_{\mathbf{G}} \ : \ \mathbf{G} \times \mathbf{G} \ \longrightarrow \mathbf{G}$$

telle que pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}), \pi_{\mathbf{G}}(\mathrm{S})$ munisse $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ d'une structure de groupe.

De la même manière, $u : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ est un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes si et seulement si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{G} \times \mathbf{G} \arrow[r, "\pi_{\mathbf{G}}"] \arrow[d, "{(f,f)}"'] & \mathbf{G} \arrow[d, "f"] \\
\mathbf{H} \times \mathbf{H} \arrow[r, "\pi_{\mathbf{H}}"] & \mathbf{H}
\end{tikzcd} \quad .$$

Un sous-objet $\mathbf{H}$ de $\mathbf{G}$ tel que, pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $\mathbf{H}(\mathrm{S})$ soit un sous-groupe de $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ possède évidemment une structure de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe induite par celle de $\mathbf{G}$: c'est la seule pour laquelle le monomorphisme $\mathbf{H} \to \mathbf{G}$ soit un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes. Le $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe $\mathbf{H}$ muni de cette structure est appelé *sous-$\widehat{\mathscr{C}}$-groupe de* $\mathbf{G}$.

Si $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ sont deux $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes, le produit $\mathbf{G} \times \mathbf{H}$ est muni d'une structure de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe évidente : pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, on munit $\mathbf{G}(\mathrm{S}) \times \mathbf{H}(\mathrm{S})$ de la structure de groupe produit des structures de groupes données sur $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ et $\mathbf{H}(\mathrm{S})$. Le $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe $\mathbf{G} \times \mathbf{H}$ muni de cette structure sera dit *$\widehat{\mathscr{C}}$-groupe produit* de $\mathbf{G}$ et de $\mathbf{H}$ (c'en est d'ailleurs le produit dans la catégorie des $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes).

Si $\mathbf{G}$ est un $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe, alors pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $\mathbf{G}_{\mathrm{S}}$ est un $\widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$-groupe. Si $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ sont deux $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes, on définira l'objet $\underline{\mathrm{Hom}}_{\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.}}(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ de $\widehat{\mathscr{C}}$ par :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.}}(\mathbf{G}, \mathbf{H})(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}\text{-Gr.}}(\mathbf{G}_{\mathrm{S}}, \mathbf{H}_{\mathrm{S}})$$

15 (Nota : $\underline{\mathrm{Hom}}_{\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.}}$ n'est pas en général un $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe, ni a fortiori l'objet $\underline{\mathrm{Hom}}$ dans la catégorie ($\widehat{\mathscr{C}}$-Gr.)).

On définit de même les objets

$$\underline{\mathrm{Isom}}_{\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.}}(\mathbf{G}, \mathbf{H}) \quad , \quad \underline{\mathrm{End}}_{\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.}}(\mathbf{G}) \quad , \quad \underline{\mathrm{Aut}}_{\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.}}(\mathbf{G}).$$

Définition 2.1.2. — Soit $\mathrm{G} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. On appelle structure de $\mathscr{C}$-groupe sur G une structure de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe sur $\mathbf{h}_{\mathrm{G}} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}})$. On appelle morphisme du $\mathscr{C}$-groupe G dans le $\mathscr{C}$-groupe H un élément $u \in \mathrm{Hom}(\mathrm{G}, \mathrm{H}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{h}_{\mathrm{G}}, \mathbf{h}_{\mathrm{H}})$ qui définit un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe de $\mathbf{h}_{\mathrm{G}}$ dans $\mathbf{h}_{\mathrm{H}}$.

On note ($\mathscr{C}$-Gr.) la catégorie des $\mathscr{C}$-groupes. Notons qu'il existe dans (**Cat**) un carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
(\mathscr{C}\text{-Gr.}) \arrow[r] \arrow[d] & (\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.}) \arrow[d] \\
\mathscr{C} \arrow[r, "\mathbf{h}"] & \widehat{\mathscr{C}}
\end{tikzcd} .$$

Toutes les définitions et constructions précédentes se transportent donc aussitôt à ($\mathscr{C}$-Gr.) chaque fois que les foncteurs qu'elles font intervenir (produits, objets $\underline{\mathrm{Hom}}$, ...) sont représentables. Elles s'appliquent aussi aux catégories $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$. En ce cas, nous noterons $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}\text{-Gr.}}$ pour $\underline{\mathrm{Hom}}_{\widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}\text{-Gr.}}$, etc...

2.2. — Plus généralement, si (T) est une espèce de structure sur n ensembles de base définie par limites projectives finies (par exemple, par des commutativités de diagrammes construits avec des produits cartésiens : structures de monoïde, groupe, d'ensemble à opérateurs, de module sur un anneau, d'algèbre de Lie sur un anneau...) la construction précédente permet de définir la notion de « structure d'espèce (T) sur
16 n objets $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n$ de $\widehat{\mathscr{C}}$ » : une telle structure sera la donnée pour chaque S de $\mathscr{C}$, d'une structure d'espèce (T) sur les ensembles $\mathbf{F}_1(\mathrm{S}), \ldots, \mathbf{F}_n(\mathrm{S})$ de telle manière que pour toute flèche $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}''$ de $\mathscr{C}$, la famille d'application $(\mathbf{F}_i(\mathrm{S}'')) \to (\mathbf{F}_i(\mathrm{S}'))$ soit un poly-homomorphisme pour l'espèce de structure (T). On définit de manière semblable les morphismes de l'espèce de structure (T), d'où une catégorie $(\widehat{\mathscr{C}} \times \widehat{\mathscr{C}} \cdots \times \widehat{\mathscr{C}})^{(\mathrm{T})}$. Le foncteur pleinement fidèle $(\mathbf{h} \times \mathbf{h} \times \cdots \times \mathbf{h})$ permet alors de définir par image inverse la catégorie $(\mathscr{C} \times \mathscr{C} \cdots \times \mathscr{C})^{(\mathrm{T})}$, puis, comme il commute aux limites projectives, d'y transporter toutes les propriétés, notions et notations fonctorielles introduites dans $\widehat{\mathscr{C}}$. Supposons maintenant que dans $\mathscr{C}$ les produits fibrés existent, et soit (T) une espèce de structure algébrique définie par la *donnée* de certains morphismes entre produits cartésiens satisfaisant à des *axiomes* consistant en certaines commutativités de diagrammes construits à l'aide des flèches précédentes. Une structure d'espèce (T) sur une famille d'objets de $\mathscr{C}$ sera donc définie par certains morphismes entre produits

cartésiens satisfaisant à certaines conditions de commutation. Il en résulte que si $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont deux catégories possédant des produits et $f : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ est un foncteur *commutant aux produits*, alors pour toute famille d'objets (F_i) de $\mathscr{C}$ munie d'une structure d'espèce (T), la famille $(f(\mathrm{F}_i))$ d'objets de $\mathscr{C}'$ sera par là-même munie elle aussi d'une structure d'espèce (T). Tout $\mathscr{C}$-groupe sera transformé en $\mathscr{C}'$-groupe, tout couple ($\mathscr{C}$-anneau, $\mathscr{C}$-module sur ce $\mathscr{C}$-anneau) en un couple analogue dans $\mathscr{C}'$...

Soit en particulier $\mathscr{C}$ une catégorie satisfaisant aux conditions énoncées dans 1.8 ; le foncteur $\mathrm{E} \mapsto \mathrm{E}_{\mathrm{S}}$ défini loc. cit. commute aux limites projectives ; il transforme donc groupe en S-groupe (i.e. $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ groupe), anneau en S-anneau...

Remarque. — Il est bon de remarquer que le procédé de construction précédent appliqué à la catégorie $\widehat{\mathscr{C}}$ redonne bien les notions que l'on y a déjà définies ; en d'autres termes, il revient de même de se donner sur un objet de $\widehat{\mathscr{C}}$ une structure d'espèce (T) quand on considère cet objet comme un foncteur sur $\mathscr{C}$, ou de se donner une structure d'espèce (T) sur le foncteur représentable sur $\widehat{\mathscr{C}}$ défini par cet objet.

Nous allons encore traiter deux cas particuliers de la construction précédente, le cas des structures à groupe d'opérateurs et le cas des modules. 17

2.3. Structures à groupes d'opérateurs. —

Définition 2.3.1. — Soient $\mathbf{E} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}})$ et $\mathbf{G} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.})$. Une structure d'objet à $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe d'opérateurs $\mathbf{G}$ (ou de $\mathbf{G}$-objet) sur $\mathbf{E}$ est la donnée sur $\mathbf{E}(\mathrm{S})$, pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, d'une structure d'ensemble à groupes d'opérateurs $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ de telle manière que, pour toute flèche $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}''$ de $\mathscr{C}$, l'application d'ensembles $\mathbf{E}(\mathrm{S}'') \to \mathbf{E}(\mathrm{S}')$ soit compatible avec l'homomorphisme d'opérateurs $\mathbf{G}(\mathrm{S}'') \to \mathbf{G}(\mathrm{S}')$.

Comme d'habitude, il revient au même de se donner un morphisme

$$\mu : \mathbf{G} \times \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$$

qui pour tout S munisse $\mathbf{E}(\mathrm{S})$ d'une structure d'ensemble à opérateurs $\mathbf{G}(\mathrm{S})$. Mais $\mathrm{Hom}(\mathbf{G} \times \mathbf{E}, \mathbf{E}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{G}, \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{E}))$, donc μ définit un morphisme $\mathbf{G} \to \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{E})$ et il est immédiat que celui-ci applique $\mathbf{G}$ dans $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathbf{E})$ et que c'est un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes. En conséquence : *se donner sur* $\mathbf{E}$ *une structure d'objet à* $\widehat{\mathscr{C}}$*-groupe d'opérateurs* $\mathbf{G}$ *est équivalent à se donner un morphisme de* $\widehat{\mathscr{C}}$*-groupes*

$$\rho : \mathbf{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}(\mathbf{E}).$$

En particulier, tout élément $g \in \mathbf{G}(\mathrm{S})$ définit un automorphisme $\rho(g)$ du foncteur $\mathbf{E}_{\mathrm{S}}$, c'est-à-dire un automorphisme de $\mathbf{E} \times \mathbf{h}_{\mathrm{S}}$ commutant à la projection $\mathbf{E} \times \mathbf{h}_{\mathrm{S}} \to \mathbf{h}_{\mathrm{S}}$, et en particulier un automorphisme de l'ensemble $\mathbf{E}(\mathrm{S}')$ pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$.

Définition 2.3.2. — On note $\mathbf{E}^{\mathbf{G}}$ le sous-objet de $\mathbf{E}$ défini comme suit :

$$\mathbf{E}^{\mathbf{G}}(\mathrm{S}) = \{x \in \mathbf{E}(\mathrm{S}),\ x_{\mathrm{S}'} \text{ invariant sous } \mathbf{G}(\mathrm{S}') \text{ pour tout } \mathrm{S}' \longrightarrow \mathrm{S}\},$$

où $x_{\mathrm{S}'}$ désigne l'image de x par $\mathbf{E}(\mathrm{S}) \to \mathbf{E}(\mathrm{S}')$.

Alors $\mathbf{E}^{\mathbf{G}}$ (« sous-objet des invariants de $\mathbf{G}$ ») est le plus grand sous-objet de $\mathbf{E}$ sur lequel $\mathbf{G}$ opère trivialement. 18

Définition 2.3.3. — Soit $\mathbf{F}$ un sous-objet de $\mathbf{E}$. On note $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathbf{G}}\,\mathbf{F}$ et $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathbf{G}}\,\mathbf{F}$ les sous-$\widehat{\mathscr{C}}$-groupes de $\mathbf{G}$ définis par

$$\begin{aligned}(\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathbf{G}}\,\mathbf{F})(\mathrm{S}) &= \{g \in \mathbf{G}(\mathrm{S}) \mid \rho(g)\mathbf{F}_{\mathrm{S}} \subset \mathbf{F}_{\mathrm{S}}\}\\ &= \{g \in \mathbf{G}(\mathrm{S}) \mid \rho(g)\mathbf{F}(\mathrm{S}') \subset \mathbf{F}(\mathrm{S}'),\quad \text{pour tout } \mathrm{S}' \longrightarrow \mathrm{S}\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathbf{G}}\,\mathbf{F})(\mathrm{S}) &= \{g \in \mathbf{G}(\mathrm{S}) \mid \rho(g)|\mathbf{F}_{\mathrm{S}} = \text{ identité}\}\\ &= \{g \in \mathbf{G}(\mathrm{S}) \mid \rho(g)|\mathbf{F}(\mathrm{S}') = \text{ identité}, \text{ pour tout } \mathrm{S}' \longrightarrow \mathrm{S}\},\end{aligned}$$

où la barre verticale après $\rho(g)$ désigne la restriction.

Définition 2.3.4. — Si G est un $\mathscr{C}$-groupe et $\mathbf{E}$ un objet de $\widehat{\mathscr{C}}$ (resp. E un objet de $\mathscr{C}$) une structure de G-objet sur $\mathbf{E}$ (resp. sur E) est une structure de $\mathbf{h}_{\mathrm{G}}$-objet sur $\mathbf{E}$ (resp. $\mathbf{h}_{\mathrm{E}}$).

Vu cette définition, toutes les notions et notations définies ci-dessus se transportent à $\mathscr{C}$, lorsqu'elles ne font intervenir que des foncteurs représentables : par exemple si $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathbf{h}_{\mathrm{G}}}(\mathbf{E})$ est représentable, alors il existe un et un seul sous-objet de G qui le représente et qui est alors un sous-$\mathscr{C}$-groupe de G, on le note $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{E})$ …

Définition 2.3.5. — a) On dit que le $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe $\mathbf{G}$ opère sur le $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe $\mathbf{H}$ si $\mathbf{H}$ est muni d'une structure de $\mathbf{G}$-objet telle que, pour tout $g \in \mathbf{G}(\mathrm{S})$, l'automorphisme de $\mathbf{H}(\mathrm{S})$ défini par g soit un automorphisme de groupe.

Il revient au même de dire que pour tout $g \in \mathbf{G}(\mathrm{S})$, l'automorphisme $\rho(g)$ de $\mathbf{H}_{\mathrm{S}}$
19 est un automorphisme de $\widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$-groupes, ou encore que le morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes $\mathbf{G} \to \underline{\mathrm{Aut}}(\mathrm{H})$ applique $\mathbf{G}$ dans $\underline{\mathrm{Aut}}_{\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.}}(\mathbf{H})$.

b) Dans la situation ci-dessus, il existe sur le produit $\mathbf{H} \times \mathbf{G}$ une structure de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe unique telle que, pour tout S, $\mathbf{H} \times \mathbf{G}(\mathrm{S})$ soit le produit semi-direct des groupes $\mathbf{H}(\mathrm{S})$ et $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ relativement à l'opération donnée de $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ sur $\mathbf{H}(\mathrm{S})$. On notera ce $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe $\mathbf{H} \cdot \mathbf{G}$ et l'appellera *produit semi-direct de* $\mathbf{H}$ *par* $\mathbf{G}$. On a donc par définition

$$(\mathbf{H} \cdot \mathbf{G})(\mathrm{S}) = \mathbf{H}(\mathrm{S}) \cdot \mathbf{G}(\mathrm{S}).$$

Soit $\mathbf{G}$ un $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe. Pour toute flèche $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ de $\mathscr{C}$ et tout $g \in \mathbf{G}(\mathrm{S})$, soit $\mathrm{Int}(g)$ l'automorphisme de $\mathbf{G}(\mathrm{S}')$ défini par $\mathrm{Int}(g)h = ghg^{-1}$. Cette définition se prolonge en celle d'un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes

$$\mathrm{Int} : \mathbf{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.}}(\mathbf{G}) \subset \underline{\mathrm{Aut}}(\mathbf{G}).$$

La définition 2.3.3 s'applique donc et on a des sous-$\widehat{\mathscr{C}}$-groupes de $\mathbf{G}$

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathbf{G}}(\mathbf{E}) \quad \text{et} \quad \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathbf{G}}(\mathbf{E})$$

pour tout sous-objet $\mathbf{E}$ de $\mathbf{G}$.

Définition 2.3.6. — On appelle centre de $\mathbf{G}$ et on note $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathbf{G})$ le sous-$\widehat{\mathscr{C}}$-groupe $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathbf{G}}(\mathbf{G})$ de $\mathbf{G}$. On dit que $\mathbf{G}$ est commutatif si $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathbf{G}) = \mathbf{G}$ ou, ce qui revient au même, si $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ est commutatif pour tout S. On dit que le sous-$\widehat{\mathscr{C}}$-groupe $\mathbf{H}$ de

$\mathbf{G}$ est invariant dans $\mathbf{G}$ si $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathbf{G}}(\mathbf{H}) = \mathbf{G}$, ou, ce qui revient au même, si $\mathbf{H}(\mathrm{S})$ est invariant dans $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ pour tout S.

Beaucoup de définitions et de propositions de la théorie élémentaire des groupes se transposent aisément. Signalons simplement la suivante qui nous sera utile :

Proposition 2.3.7. — *Soit $f : \mathbf{W} \to \mathbf{G}$ un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes. Posons $\mathbf{H}(\mathrm{S}) = \operatorname{Ker} f(\mathrm{S})$. Soit $u : \mathbf{G} \to \mathbf{W}$ un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes qui soit une section de f* 20
(et qui est alors nécessairement un monomorphisme). Alors $\mathbf{W}$ s'identifie au produit semi-direct de $\mathbf{H}$ par $\mathbf{G}$ pour l'opération de $\mathbf{G}$ sur $\mathbf{H}$ définie par $(g, h) \mapsto \mathrm{Int}(u(g))h$ pour $g \in \mathbf{G}(\mathrm{S})$, $h \in \mathbf{H}(\mathrm{S})$, $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$.

L'ensemble de ces définitions et propositions se transporte comme d'habitude à $\mathscr{C}$. On définit en particulier le produit semi-direct de deux $\mathscr{C}$-groupes H et G (G opérant sur H) lorsque le produit cartésien $\mathrm{H} \times \mathrm{G}$ existe, et on a l'analogue de la proposition 2.3.7 sous la forme suivante :

Proposition 2.3.8. — *Soit $\mathrm{H} \xrightarrow{i} \mathrm{W} \xrightarrow{f} \mathrm{G}$ une suite de morphismes de $\mathscr{C}$-groupes telle que pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $(\mathrm{H}(\mathrm{S}),\ i(\mathrm{S}))$ soit un noyau de $f(\mathrm{S}) : \mathrm{W}(\mathrm{S}) \to \mathrm{G}(\mathrm{S})$. Soit $u : \mathrm{G} \to \mathrm{W}$ un morphisme de $\mathscr{C}$-groupes qui soit une section de f. Alors W s'identifie au produit semi-direct de H par G pour l'opération de G sur H telle que si $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, si $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ et $h \in \mathrm{H}(\mathrm{S})$, on ait $\mathrm{Int}(u(g))i(h) = i({}^g h)$.*

3. La catégorie des O-modules, la catégorie des G-O-modules

Définition 3.1. — Soient $\mathbf{O}$ et $\mathbf{F}$ deux objets de $\widehat{\mathscr{C}}$. On dit que $\mathbf{F}$ est un $\widehat{\mathscr{C}}$-module sur le $\widehat{\mathscr{C}}$-anneau $\mathbf{O}$, ou en abrégé un $\mathbf{O}$-module, si, pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, on a muni $\mathbf{O}(\mathrm{S})$ d'une structure d'anneau et $\mathbf{F}(\mathrm{S})$ d'une structure de module sur cet anneau de telle manière que pour toute flèche $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}''$ de $\mathscr{C}$, $\mathbf{O}(\mathrm{S}'') \to \mathbf{O}(\mathrm{S}')$ soit un homomorphisme d'anneaux et $\mathbf{F}(\mathrm{S}'') \to \mathbf{F}(\mathrm{S}')$ un homomorphisme de groupes abéliens compatible avec cet homomorphisme d'anneaux.

Si $\mathbf{O}$ est fixé, on définit de manière habituelle un morphisme des $\mathbf{O}$-modules $\mathbf{F}$ et $\mathbf{F}'$, d'où le groupe commutatif $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(\mathbf{F}, \mathbf{F}')$, et la catégorie des $\mathbf{O}$-modules notée ($\mathbf{O}$-Mod.). Remarquons que si $\mathbf{O}_0$ est le $\widehat{\mathscr{C}}$-anneau défini par $\mathbf{O}_0(\mathrm{S}) = \mathbb{Z}$ (qu'il ne faut pas confondre avec le foncteur associé à l'objet constant $\mathbb{Z}$), alors la catégorie des $\mathbf{O}_0$-modules est isomorphe à la catégorie des $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes commutatifs. La catégorie ($\mathbf{O}$-Mod.) est abélienne.

Remarquons que, si $\mathbf{F}$ est un $\mathbf{O}$-module, alors pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $\mathbf{F}_{\mathrm{S}}$ est un 21
$\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module. On peut donc définir un $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe abélien $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}}(\mathbf{F}, \mathbf{F}')$ par

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}}(\mathbf{F}, \mathbf{F}')(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{F}_{\mathrm{S}}, \mathbf{F}'_{\mathrm{S}}).$$

On définira de même des objets

$$\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathbf{O}}(\mathbf{F}, \mathbf{F}'), \quad \underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}}(\mathbf{F}) \quad , \quad \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}}(\mathbf{F}),$$

le dernier étant un $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe pour la structure induite par la composition des automorphismes.

Définition 3.2. — Soient $\mathbf{O}$ un $\widehat{\mathscr{C}}$-anneau, $\mathbf{F}$ un $\mathbf{O}$-module et $\mathbf{G}$ un $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe. On appelle structure de $\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-module sur $\mathbf{F}$ une structure de $\mathbf{G}$-objet telle que pour $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ et tout $g \in \mathbf{G}(\mathrm{S})$, l'automorphisme de $\mathbf{F}(\mathrm{S})$ défini par g soit un automorphisme de sa structure de $\mathbf{O}(\mathrm{S})$-module.

Il revient au même de dire que le morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes

$$\rho : \mathbf{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}(\mathbf{F})$$

défini en 2.3 applique $\mathbf{G}$ dans le sous-$\widehat{\mathscr{C}}$-groupe $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}}(\mathbf{F})$ de $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathbf{F})$. Se donner une *structure de* $\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-*module* sur le $\mathbf{O}$-module $\mathbf{F}$, c'est donc se donner un *morphisme de* $\widehat{\mathscr{C}}$*-groupes*

$$\rho : \mathbf{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}}(\mathbf{F}).$$

On définit de manière naturelle le groupe abélien

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}}(\mathbf{F}, \mathbf{F}'),$$

donc la catégorie additive des $\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-modules notée ($\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-Mod.). Le lecteur remarquera que cette dernière peut également se définir comme la catégorie des $\mathbf{O}[\mathbf{G}]$-modules, où $\mathbf{O}[\mathbf{G}]$ est l'algèbre du $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe $\mathbf{G}$ sur le $\widehat{\mathscr{C}}$-anneau $\mathbf{O}$, dont la définition est claire.

22 Toutes les constructions de ce paragraphe se spécialisent aussitôt au cas où $\mathbf{G}$ (ou $\mathbf{O}$, ou les deux) sont représentables par des objets de $\mathscr{C}$ qui sont par là-même munis des structures algébriques correspondantes.

Nous avons traité succinctement le cas des principales structures algébriques rencontrées dans la suite de ce séminaire. Pour les autres (structure de $\mathbf{O}$-algèbre de Lie par exemple), nous croyons que le lecteur aura eu suffisamment d'exemples dans ce paragraphe pour pouvoir dans chaque cas particulier faire fonctionner lui-même le mécanisme général esquissé dans 2.2.

Nous allons maintenant appliquer ce que nous venons de faire à la catégorie des schémas notée (**Sch**) et plus généralement aux catégories $(\mathbf{Sch})_{/\mathrm{S}}$.

4. Structures algébriques dans la catégorie des schémas

Nous nous permettrons, chaque fois qu'il n'y aura pas d'ambiguïté, les abus de langage suivants : on désignera par T l'objet $\mathrm{T} \xrightarrow{f} \mathrm{S}$ de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, la donnée de f (« morphisme structural de T ») étant sous-entendue, et on identifiera $\mathscr{C}$ à une sous-catégorie de $\widehat{\mathscr{C}}$. Compte tenu des compatibilités énoncées aux paragraphes précédents, ces identifications peuvent se faire sans danger.

Nous simplifierons d'autre part les appellations sur le modèle suivant : un (**Sch**)-groupe sera aussi appelé *schéma en groupes*, un $(\mathbf{Sch})_{/\mathrm{S}}$-groupe *schéma en groupes sur* S, ou S-*schéma en groupes*, ou S-*groupe*, ou A-*groupe* lorsque S sera le spectre de l'anneau A.

4.1. Schémas constants. — La catégorie des schémas satisfait aux conditions exigées en 1.8. On peut donc y définir les objets constants ; pour tout ensemble E, on a un schéma $\mathrm{E}_{\mathbb{Z}}$ et pour tout schéma S, un S-schéma $\mathrm{E}_{\mathrm{S}} = (\mathrm{E}_{\mathbb{Z}})_{\mathrm{S}}$. Rappelons que pour tout schéma T, $\mathrm{Hom}(\mathrm{T}, \mathrm{E}_{\mathrm{S}})$ est l'ensemble des applications localement constantes de **23**
l'espace topologique T dans E.
Le foncteur

$$\mathrm{E} \mapsto \mathrm{E}_{\mathrm{S}}$$

commute aux limites projectives finies. En particulier si G est un groupe, G_{S} est un S-schéma en groupes ; si O est un anneau, O_{S} est un S-schéma en anneaux...

4.2. S-groupes affines. — Rappelons un certain nombre de choses sur les S-schémas affines (EGA II, § 1). On dit que le S-schéma T est *affine sur* S si l'image réciproque de tout ouvert affine de S est affine. La $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre $f_*(\mathscr{O}_{\mathrm{T}})$, que l'on désigne par $\mathscr{A}(\mathrm{T})$, est alors *quasi-cohérente* (f désigne le morphisme structural de T). Réciproquement, à toute $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre quasi-cohérente $\mathscr{A}$, on peut faire correspondre un S-schéma affine sur S noté $\mathrm{Spec}(\mathscr{A})$. Ces foncteurs $\mathrm{T} \mapsto \mathscr{A}(\mathrm{T})$ et $\mathscr{A} \to \mathrm{Spec}(\mathscr{A})$ sont des équivalences quasi-inverses l'une de l'autre entre la catégorie des S-schémas affines sur S et la catégorie opposée à celle des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbres quasi-cohérentes.

Il en résulte que se donner une structure algébrique sur un S-schéma affine T est équivalent à se donner la structure correspondante sur $\mathscr{A}(\mathrm{T})$ dans la catégorie opposée à celle des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbres quasi-cohérentes. En particulier, si G est un S-groupe affine sur S, $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ est munie d'une structure de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-bigèbre augmentée, c'est-à-dire que l'on a deux *morphismes de* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-algèbres* **24**

$$\begin{aligned} \Delta &: \mathscr{A}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \ , \\ \varepsilon &: \mathscr{A}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \ , \end{aligned}$$

correspondant aux morphismes de S-schémas

$$\begin{aligned} \pi &: \mathrm{G} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}, \\ e_{\mathrm{G}} &: \quad \mathrm{S} \quad \longrightarrow \mathrm{G}. \end{aligned}$$

Les applications Δ et ε vérifient les conditions suivantes (qui expriment que G est un S-monoïde) :

(HA 1) Δ *est co-associatif* : le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \arrow[dr, "\mathrm{Id} \otimes \Delta"] & \\ \mathscr{A}(\mathrm{G}) \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes \mathscr{A}(\mathrm{G}) \\ & \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \arrow[ur, "\Delta \otimes \mathrm{Id}"'] & \end{tikzcd} \quad .$$

(HA 2) : Δ *est compatible avec* ε : les deux composés suivants sont l'identité

$$\mathscr{A}(\mathrm{G}) \xrightarrow{\Delta} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes\varepsilon} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} \mathscr{O}_\mathrm{S} \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \quad ,$$
$$\mathscr{A}(\mathrm{G}) \xrightarrow{\Delta} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \xrightarrow{\varepsilon\otimes\mathrm{Id}} \mathscr{O}_\mathrm{S} \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \quad .$$

Profitons de la circonstance pour remarquer une fois encore qu'il résulte de la définition d'une structure de S-groupe que pour se donner une telle structure sur un S-schéma G affine sur S, *il n'est pas nécessaire de vérifier quoi ce soit sur* $\mathscr{A}(\mathrm{G})$, mais simplement de munir chaque $\mathrm{G}(\mathrm{S}')$ pour S' au-dessus de S d'une structure de groupe
25 fonctorielle en S'. Cette remarque s'applique *mutatis mutandis* aux morphismes.

4.3. Les groupes $\mathbb{G}_a$ et $\mathbb{G}_m$. L'anneau $\mathbb{O}$

***4.3.1.* —** Soit $\mathbf{G}_a$ le foncteur de $(\mathbf{Sch})^\circ$ dans $(\mathbf{Ens})$ défini par

$$\mathbf{G}_a(\mathrm{S}) = \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S})$$

muni de la structure de $(\widehat{\mathbf{Sch}})$-groupe définie par la structure de groupe additif de l'anneau $\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S})$. Il est représentable par un schéma affine que l'on notera $\mathbb{G}_a$, et qui est donc un *schéma en groupes*

$$\mathbb{G}_a = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\mathrm{T}].$$

En effet, $\mathbb{G}_a(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{S}, \mathbb{G}_a) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg.}}(\mathbb{Z}[\mathrm{T}], \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S})) \simeq \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S})$.

Pour tout schéma S, on a donc un S-groupe affine sur S $\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}$, qui correspond à la $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-bigèbre $\mathscr{O}_\mathrm{S}[\mathrm{T}]$, avec l'application diagonale et l'augmentation définies par :

$$\Delta(\mathrm{T}) = \mathrm{T} \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{T}, \qquad \varepsilon\mathrm{T} = 0.$$

***4.3.2.* —** Soit $\mathbf{G}_m$ le foncteur de $(\mathbf{Sch})^\circ$ dans $(\mathbf{Ens})$ défini par

$$\mathbf{G}_m(\mathrm{S}) = \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S})^\times,$$

où $\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S})^\times$ désigne le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau $\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S})$, muni de sa structure naturelle de $(\widehat{\mathbf{Sch}})$-groupe. Il est représentable par un schéma affine noté $\mathbb{G}_m$

$$\mathbb{G}_m = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\mathrm{T}, \mathrm{T}^{-1}] = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}],$$

26 où $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$ désigne l'algèbre du groupe $\mathbb{Z}$ sur l'anneau $\mathbb{Z}$. En effet

$$\mathbb{G}_m(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg.}}(\mathbb{Z}[\mathrm{T}, \mathrm{T}^{-1}], \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S})) \simeq \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S})^\times.$$

Pour tout schéma S, on a donc un S-groupe affine sur S noté $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$ qui correspond à la $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-algèbre $\mathscr{O}_\mathrm{S}[\mathbb{Z}]$, avec l'application diagonale et l'augmentation définies par :

$$\Delta(x) = x \otimes x, \quad \varepsilon(x) = 1, \qquad x \in \mathbb{Z}.$$

***4.3.3.* —** Soit $\mathbf{O}$ le foncteur $\mathbf{G}_a$ muni de sa structure de $(\widehat{\mathbf{Sch}})$-anneau. Il est représenté par le schéma $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\mathrm{T}]$ que l'on notera $\mathbb{O}$ lorsqu'on le considèrera comme muni de sa structure de *schéma d'anneaux.*

Pour tout S, on a donc un S-anneau affine sur S noté $\mathbb{O}_{\mathrm{S}}$. (*Nota* : dans EGA II 1.7.13, $\mathbb{O}_{\mathrm{S}}$ est noté S[T]).

4.4. Groupes diagonalisables

4.4.1. **—** La construction de $\mathbb{G}_m$ se généralise comme suit : soit M un groupe commutatif et $\mathrm{M}_{\underline{\underline{\mathrm{S}}}}$ le S-schéma en groupes qui lui est associé par le procédé de 4.1. Considérons le foncteur défini par

$$\mathbf{D}(\mathrm{M})(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}_{\text{groupes}}(\mathrm{M}, \mathbb{G}_m(\mathrm{S})) \simeq \mathrm{Hom}_{\text{S-Gr.}}(\mathrm{M}_{\mathrm{S}}, \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}).$$

C'est un $(\widehat{\mathbf{Sch}})$-groupe commutatif qui est représentable par un *schéma en groupes* que l'on notera D(M) ; on aura donc par définition :

$$\mathrm{D}(\mathrm{M}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{(\mathbf{Sch})\text{-Gr.}}(\mathrm{M}_{\mathbb{Z}}, \mathbb{G}_m).$$

Posons en effet 27

$$\mathrm{D}(\mathrm{M}) = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[\mathrm{M}],$$

où $\mathbb{Z}[\mathrm{M}]$ est l'algèbre du groupe M sur l'anneau $\mathbb{Z}$; on a

$$\mathrm{D}(\mathrm{M})(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}_{\text{Alg.}}(\mathbb{Z}[\mathrm{M}], \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}})) \simeq \mathrm{Hom}_{\text{groupes}}(\mathrm{M}, \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}})^{\times})$$

par définition même de l'algèbre $\mathbb{Z}[\mathrm{M}]$.

4.4.2. **—** Pour tout schéma S on a donc un S-schéma en groupes affine sur S

$$\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M}) = \mathrm{D}(\mathrm{M})_{\mathrm{S}} = \underline{\mathrm{Hom}}_{(\mathbf{Sch})\text{-Gr.}}(\mathrm{M}_{\mathbb{Z}}, \mathbb{G}_m)_{\mathrm{S}} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-Gr.}}(\mathrm{M}_{\mathrm{S}}, \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}).$$

Il est associé à la $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-bigèbre $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{M}]$, munie de l'application diagonale et de l'augmentation définies par

$$\Delta(x) = x \otimes x \quad \text{et} \quad \varepsilon(x) = 1, \qquad x \in \mathrm{M}.$$

4.4.3. **—** Si $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ est un homomorphisme de groupes commutatifs, on définit de manière évidente un morphisme de S-groupes

$$\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(f) : \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{N}) \longrightarrow \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M}) \ ,$$

d'où un *foncteur*

$$\mathrm{D}_{\mathrm{S}} : \mathrm{M} \mapsto \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$$

de la catégorie des *groupes abéliens* dans la catégorie des S-*groupes affines sur* S, que l'on peut aussi définir comme composé du foncteur $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}_{\mathrm{S}}$ et du foncteur $\mathrm{M}_{\mathrm{S}} \mapsto \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-Gr.}}(\mathrm{M}_{\mathrm{S}}, \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}})$. Ce foncteur *commute aux extensions de la base.*

Un S-groupe isomorphe à un groupe de la forme $\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$ est dit *diagonalisable.* 28
Notons que les éléments de M s'interprètent comme certains caractères de $\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$, c'est-à-dire certains éléments de $\mathrm{Hom}_{\text{S-Gr.}}(\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M}), \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}})$. (*Confer* VIII 1).

***4.4.4.* —** Donnons quelques exemples de groupes diagonalisables. On a d'abord

$$\mathrm{D}(\mathbb{Z}) = \mathbb{G}_m \quad , \quad \mathrm{D}(\mathbb{Z}^r) = (\mathbb{G}_m)^r.$$

On pose

$$\boldsymbol{\mu}_n = \mathrm{D}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}),$$

et on le nomme *groupe des racines n-ièmes de l'unité*. En effet, on a

$$\boldsymbol{\mu}_n(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{groupes}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S})^*) = \{f \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S}), f^n = 1\}.$$

Le S-groupe $\boldsymbol{\mu}_{n,\mathrm{S}}$ correspond à la $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-algèbre $\mathscr{O}_\mathrm{S}[\mathrm{T}]/(\mathrm{T}^n - 1)$. Supposons en particulier que S soit le spectre d'un corps k de caractéristique $p = n$. En posant $\mathrm{T} - 1 = s$, on trouve

$$k[\mathrm{T}]/(\mathrm{T}^p - 1) = k[s]/(s^p),$$

ce qui montre que l'espace topologique sous-jacent à $\boldsymbol{\mu}_{p,k}$ est réduit à un point, l'anneau local de ce point étant la k-algèbre artinienne $k[s]/(s^p)$. (Dans le même ordre d'idées, signalons que les S-schémas $\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}$, $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$, $\mathbb{O}_\mathrm{S}$ sont *lisses* sur S, que $\mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{M})$ est *plat* sur S et qu'il est formellement lisse (resp. *lisse*) sur S si et seulement si aucune caractéristique résiduelle de S ne divise la torsion de M (resp. et si de plus M est de type fini), cf. Exp. VIII, 2.1).

29 **4.5. Autres exemples de groupes.** — Le procédé précédent s'applique aux « groupes classiques » ($\mathrm{GL}_n, \mathrm{Sp}_n, \mathrm{O}_n \ldots$). On définira par exemple $\mathbb{GL}_n$ comme représentant le foncteur $\mathbf{GL}_n$ tel que :

$$\mathbf{GL}_n(\mathrm{S}) = \mathrm{GL}(n, \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S})) = \mathrm{Aut}_{\mathscr{O}_\mathrm{S}}(\mathscr{O}_\mathrm{S}^n).$$

On pourra le construire par exemple comme l'ouvert de $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[\mathrm{T}_{ij}]$ $0 \leqslant i, j \leqslant n$ défini par la fonction $f = \mathrm{dét}((\mathrm{T}_{ij}))$, c'est-à-dire $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[\mathrm{T}_{ij}, f^{-1}]$.

4.6. Foncteurs-modules dans la catégorie des schémas. — Nous nous proposons d'associer à tout $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module sur le schéma S, un $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-module (où $\mathbf{O}_\mathrm{S}$ désigne le foncteur-anneau introduit en 4.3.3). Ceci peut se faire de deux manières différentes. De façon précise

***Définition 4.6.1.* —** Soit S un schéma. Pour tout $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module $\mathscr{F}$ on note $\mathbf{V}(\mathscr{F})$ et $\mathbf{W}(\mathscr{F})$ les foncteurs sur $(\mathbf{Sch})_{/\mathrm{S}}$ définis par :

$$\mathbf{V}(\mathscr{F})(\mathrm{S}') = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}}(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}),$$
$$\mathbf{W}(\mathscr{F})(\mathrm{S}') = \Gamma(\mathrm{S}', \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}'})$$

(où $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$ désigne l'image inverse sur S' du $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-Module $\mathscr{F}$).

Alors $\mathbf{V}(\mathscr{F})$ et $\mathbf{W}(\mathscr{F})$ sont munis de manière évidente d'une structure de $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-*modules* (on rappelle que $\mathbf{O}_\mathrm{S}(\mathrm{S}') = \Gamma(\mathrm{S}', \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}) = \mathbf{W}(\mathscr{O}_\mathrm{S})(\mathrm{S}')$), de telle façon que l'on a en fait défini deux foncteurs $\mathbf{V}$ et $\mathbf{W}$ de la catégorie des $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-modules dans la catégorie des $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-modules, $\mathbf{V}$ étant contravariant et $\mathbf{W}$ covariant.

Nous nous restreignons dans la suite de ce paragraphe au cas où les $\mathscr{O}_S$-modules
30 en question sont quasi-cohérents, c'est-à-dire que nous considérons $\mathbf{V}$ et $\mathbf{W}$ comme des foncteurs de la catégorie ($\mathscr{O}_S$-Mod.q.c.) des $\mathscr{O}_S$-modules quasi-cohérents dans la catégorie des $\mathbf{O}_S$-modules

$$\mathbf{V} : (\mathscr{O}_S\text{-Mod.q.c.})^\circ \longrightarrow (\mathbf{O}_S\text{-Mod.}),$$
$$\mathbf{W} : (\mathscr{O}_S\text{-Mod.q.c.}) \longrightarrow (\mathbf{O}_S\text{-Mod.}).$$

(*Nota* : le lecteur remarquera que, dans la suite, toutes les propositions qui ne font intervenir que le foncteur $\mathbf{W}$ sont valables sans cette restriction).

Proposition 4.6.2. — (i) *Les foncteurs* $\mathbf{V}$ *et* $\mathbf{W}$ *commutent à l'extension de la base : si* S' *est au-dessus de* S *et si* $\mathscr{F}$ *est un* $\mathscr{O}_S$*-Module quasi-cohérent, on a*

$$\mathbf{V}(\mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_{S'}) \simeq \mathbf{V}(\mathscr{F})_{S'} \quad , \quad \mathbf{W}(\mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_{S'}) \simeq \mathbf{W}(\mathscr{F})_{S'}.$$

(ii) *Les foncteurs* $\mathbf{V}$ *et* $\mathbf{W}$ *sont pleinement fidèles : les application canoniques*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{F}, \mathscr{F}') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}_S}(\mathbf{V}(\mathscr{F}'), \mathbf{V}(\mathscr{F}))$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{F}, \mathscr{F}') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}_S}(\mathbf{W}(\mathscr{F}), \mathbf{W}(\mathscr{F}'))$$

sont bijectives.

(iii) *Les foncteurs* $\mathbf{V}$ *et* $\mathbf{W}$ *sont additifs :*

$$\mathbf{V}(\mathscr{F} \oplus \mathscr{F}') \simeq \mathbf{V}(\mathscr{F}) \underset{S}{\times} \mathbf{V}(\mathscr{F}') \quad , \quad \mathbf{W}(\mathscr{F} \oplus \mathscr{F}') \simeq \mathbf{W}(\mathscr{F}) \underset{S}{\times} \mathbf{W}(\mathscr{F}').$$

Les parties (i) et (iii) sont évidentes sur les définition. Pour (ii), on prend pour S' 31
des ouverts de S. Nous laissons la démonstration au lecteur (pour $\mathbf{V}$, utiliser EGA II, 1.7.14).

4.6.3. — On a des morphismes canoniques dans ($\mathbf{O}_S$-Mod.) :

$$\mathbf{W}(\mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{F}, \mathscr{F}')) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_S}(\mathbf{W}(\mathscr{F}), \mathbf{W}(\mathscr{F}')),$$
$$\mathbf{W}(\mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{F}, \mathscr{F}')) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_S}(\mathbf{V}(\mathscr{F}'), \mathbf{V}(\mathscr{F})).$$

Cela résulte immédiatement de (i) et (ii).

Considérons maintenant $\mathbf{W}(\mathscr{F})$ et $\mathbf{V}(\mathscr{F})$ comme des foncteurs au-dessus de S. On sait (EGA II, 1.7.8) que $\mathbf{V}(\mathscr{F})$ est représentable par un S-schéma affine sur S que l'on note $\mathbb{V}(\mathscr{F})$ et que l'on appelle *fibré vectoriel* défini par $\mathscr{F}$,

$$\mathbb{V}(\mathscr{F}) = \mathrm{Spec}(\mathcal{S}(\mathscr{F})),$$

où $\mathcal{S}(\mathscr{F})$ désigne l'algèbre symétrique du $\mathscr{O}_S$-module $\mathscr{F}$.

Proposition 4.6.4. — *Soient* $\mathscr{F}$ *et* $\mathscr{F}'$ *deux* $\mathscr{O}_S$*-modules quasi-cohérents,* $\mathscr{A}$ *une* $\mathscr{O}_S$*-algèbre quasi-cohérente. On a un isomorphisme fonctoriel :*

$$\mathrm{Hom}_S(\mathrm{Spec}(\mathscr{A}), \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_S}(\mathbf{W}(\mathscr{F}), \mathbf{W}(\mathscr{F}'))) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{F}, \mathscr{A} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F}').$$

En effet, si on note $S' = \mathrm{Spec}(\mathscr{A})$, le premier membre est canoniquement isomorphe à $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_S}(\mathbf{W}(\mathscr{F}), \mathbf{W}(\mathscr{F}')(S')$, c'est-à-dire par définition à

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}_{S'}}(\mathbf{W}(\mathscr{F})_{S'}, \mathbf{W}(\mathscr{F}')_{S'}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}_{S'}}(\mathbf{W}(\mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_{S'}), \mathbf{W}(\mathscr{F}' \otimes \mathscr{O}_{S'}))$$

32 (cf. 4.6.2 (i)), ce qui par 4.6.2 (ii) peut aussi s'écrire

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{S'}}(\mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_{S'}, \mathscr{F}' \otimes \mathscr{O}_{S'}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{F}, f_*(f^*(\mathscr{F}'))),$$

où on note $f : S' \to S$ le morphisme structural. Mais, par EGA II, 1.4.7, on a $f_*(f^*(\mathscr{F}')) \simeq \mathscr{F}' \otimes \mathscr{A}$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire. — *On a un isomorphisme canonique*

$$\mathbf{W}(\mathscr{A} \otimes \mathscr{F}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_S(\mathrm{Spec}(\mathscr{A}), \mathbf{W}(\mathscr{F})).$$

En effet, on prend $\mathscr{F} = \mathscr{O}_S$ dans la formule précédente ; puis on fait varier S.

Proposition 4.6.5. — *Si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ sont deux $\mathscr{O}_S$-modules localement libres de type fini, les morphismes de* 4.6.3 *sont des isomorphismes.*

En effet, pour tout $S' \to S$, on a

$$\mathbf{W}(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{F}, \mathscr{F}'))(S') = \Gamma(S', \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{F}, \mathscr{F}') \otimes \mathscr{O}_{S'}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{S'}}(\mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_{S'}, \mathscr{F}' \otimes \mathscr{O}_{S'}).$$

Mais le second membre est bien isomorphe à $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_S}(\mathbf{W}(\mathscr{F}), \mathbf{W}(\mathscr{F}'))(S')$ et à $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_S}(\mathbf{V}(\mathscr{F}'), \mathbf{V}(\mathscr{F}))(S')$, par 4.6.2 (i) et (ii).

Corollaire 4.6.5.1. — *Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_S$-module localement libre de type fini. Posons $\mathscr{F}^\vee =$*
33 *$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{F}, \mathscr{O}_S)$. On a des isomorphismes canoniques :*

$$\mathbf{W}(\mathscr{F}^\vee) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_S}(\mathbf{W}(\mathscr{F}), \mathbf{O}_S) \simeq \mathbf{V}(\mathscr{F}),$$
$$\mathbf{V}(\mathscr{F}^\vee) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_S}(\mathbf{V}(\mathscr{F}), \mathbf{O}_S) \simeq \mathbf{W}(\mathscr{F}).$$

On a enfin la proposition suivante :

Proposition 4.6.6. — *Soit $f : \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ un morphisme de $\mathscr{O}_S$-modules localement libres de rang fini. Pour que $\mathbf{W}(f) : \mathbf{W}(\mathscr{F}) \to \mathbf{W}(\mathscr{F}')$ soit un monomorphisme, il faut et il suffit que f identifie $\mathscr{F}$ localement à un facteur direct de $\mathscr{F}'$.*

La proposition directe est essentiellement contenue dans (EGA 0.5.5.5). La proposition réciproque est pratiquement évidente.

4.7. La catégorie des G-$\mathscr{O}_S$-modules. — Soit G un S-groupe *affine* sur S et $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_S$-Module quasi-cohérent ; alors $\mathbf{W}(\mathscr{F})$ est muni d'une structure de $\mathbf{O}_S$-module.

Définition 4.7.1. — On appelle structure de G-$\mathscr{O}_S$-*module* sur $\mathscr{F}$ une structure de $\mathbf{h}_G$-$\mathbf{O}_S$-module sur $\mathbf{W}(\mathscr{F})$. (cf. 3.2).

Un morphisme de G-$\mathscr{O}_S$-Modules est par définition un morphisme des $\mathbf{h}_G$-$\mathbf{O}_S$-modules associés. On peut donc dire que l'on a construit la catégorie (G-$\mathscr{O}_S$-Mod.) que l'on vient de définir par le carré cartésien :

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{G}\text{-}\mathscr{O}_S\text{-Mod.}) \arrow[r] \arrow[d] & (\mathbf{h}_G\text{-}\mathbf{O}_S\text{-Mod.}) \arrow[d] \\
\mathscr{O}_S\text{-Mod.} \arrow[r, "\mathbf{W}"] & \mathbf{O}_S\text{-Mod.}
\end{tikzcd}$$

La catégorie (G-$\mathscr{O}_S$-Mod.) est abélienne. 34

***4.7.2.* —** Se donner une structure de G-$\mathscr{O}_S$-Module sur $\mathscr{F}$, c'est donc par 3.2 se donner un morphisme de $(\widehat{\mathbf{Sch}})_{/S}$-groupes

$$\mathbf{h}_G \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_S}(\mathbf{W}(\mathscr{F})).$$

En vertu de 4.6.4, la donnée d'un morphisme de S-foncteurs

$$\rho : \mathbf{h}_G \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_S}(\mathbf{W}(\mathscr{F}))$$

équivaut à celle d'un morphisme de $\mathscr{O}_S$-Modules

$$\mu : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F}.$$

Dire que ρ est un morphisme de $(\widehat{\mathbf{Sch}})_{/S}$-groupes équivaut alors à dire que μ satisfait aux axiomes suivants :

(CM 1) *le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\mu"'] & \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\Delta"] \\
\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \arrow[r, "\mu\otimes\mathrm{Id}"] & \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A}(\mathrm{G})
\end{tikzcd} .$$

(CM 2) *le composé*

$$\mathscr{F} \xrightarrow{\mu} \mathscr{F} \otimes \mathscr{A}(\mathrm{G}) \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes\varepsilon} \mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_S \longrightarrow \mathscr{F}$$

est l'identité.

Ces axiomes (CM 1) et (CM 2) sont ceux de la structure de *comodule* sur la bigèbre $\mathscr{A}(\mathrm{G})$. En résumé :

***Proposition 4.7.2.* —** *La construction précédente fournit une équivalence de la catégorie des* G-$\mathscr{O}_S$*-modules quasi-cohérents* (*resp.* G-$\mathscr{O}_S$*-modules*) *sur la catégorie des comodules quasi-cohérents* (*resp. comodules*) *sur la* $\mathscr{O}_S$*-bigèbre* $\mathscr{A}(\mathrm{G})$. 35

4.7.3. — Supposons maintenant que G soit un *groupe diagonalisable*, c'est-à-dire que $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ soit l'algèbre d'un groupe commutatif M sur le faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$. Si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module, on a

$$\mathscr{F} \otimes \mathscr{A}(\mathrm{G}) = \coprod_{m\in\mathrm{M}} \mathscr{F} \otimes m\mathscr{O}_{\mathrm{S}}.$$

Se donner un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules

$$\mu : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F} \otimes \mathscr{A}(\mathrm{G})$$

est donc équivalent à se donner des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-endomorphismes $(\mu_m)_{m\in\mathrm{M}}$ de $\mathscr{F}$, tels que pour toute section x de $\mathscr{F}$ sur un ouvert de S, $(\mu_m(x))$ soit une section de la somme directe $\coprod_{m\in\mathrm{M}} \mathscr{F}$ (cela veut dire que sur tout ouvert suffisamment petit, il n'y ait qu'un nombre fini de restrictions des $\mu_m(x)$ qui soient non nulles).

Pour que μ définie par

$$\mu(x) = \sum_{m\in\mathrm{M}} \mu_m(x) \otimes m$$

vérifie (CM 1) (resp. (CM 2)) il faut et il suffit que l'on ait

$$\mu_m \circ \mu_{m'} = \delta_{mm'}\mu_m, \quad (\text{resp. } \sum_{m\in\mathrm{M}} \mu_m = \mathrm{Id}_{\mathscr{F}}),$$

36 ce qui signifie que les μ_m sont des projecteurs deux à deux orthogonaux de somme l'identité. On a donc prouvé :

Proposition 4.7.3. — *Si* $\mathrm{G} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$ *est un* S-*groupe diagonalisable, la catégorie des* G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-*modules quasi-cohérents* (*resp. des* G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-*modules*) *est équivalente à la catégorie des* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-*Modules quasi-cohérents* (*resp. des* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-*modules*) *gradués de type* M.

Remarque. — Si $\mathscr{F}$ est muni d'une structure de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-*algèbre* conservée par les opérations de G, alors la graduation de G est une graduation d'algèbre. Plus précisément :

Le foncteur $\mathscr{A} \mapsto \operatorname{Spec}\mathscr{A}$ *induit une équivalence entre la catégorie des* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-*algèbres quasi-cohérentes graduées de type* M *et la catégorie opposée à celle des* S-*schémas affines sur* S *à* S-*schéma en groupes d'opérateurs* $\mathrm{G} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$.

Proposition 4.7.4. — *Soit* G *un* S-*groupe diagonalisable. Si* $0 \to \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2 \to \mathscr{F}_3 \to 0$ *est une suite exacte de* G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-*modules quasi-cohérents qui se scinde comme suite de* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-*modules, alors elle se scinde également comme suite de* G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-*modules.*

En effet chacun des $\mathscr{F}_i$ est gradué par des $(\mathscr{F}_i)_m$ et pour chaque $m \in \mathrm{M}$ la suite

$$0 \longrightarrow (\mathscr{F}_1)_m \longrightarrow (\mathscr{F}_2)_m \longrightarrow (\mathscr{F}_3)_m \longrightarrow 0$$

de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules est scindée. La proposition précédente entraîne alors le résultat.

5. Cohomologie des groupes

37

5.1. Le complexe standard. — Soient $\mathscr{C}$ une catégorie, $\mathbf{G}$ un $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe, $\mathbf{O}$ un $\widehat{\mathscr{C}}$-anneau et $\mathbf{F}$ un $\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-module. On pose

$$\mathrm{C}^n(\mathbf{G},\mathbf{F}) = \mathrm{Hom}(\mathbf{G}^n,\mathbf{F}) \quad , \quad \underline{\mathrm{C}}^n(\mathbf{G},\mathbf{F}) = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}^n,\mathbf{F}) \quad , \quad n \geqslant 0,$$

où $\mathbf{G}^0$ est l'objet final $\underline{\mathrm{e}}$. Alors $\underline{\mathrm{C}}^n(\mathbf{G},\mathbf{F})$ (resp. $\mathrm{C}^n(\mathbf{G},\mathbf{F})$) est muni de manière évidente d'une structure de $\mathbf{O}$-module (resp. de $\Gamma(\mathbf{O})$-module) et on a

$$\mathrm{C}^n(\mathbf{G},\mathbf{F}) \cong \Gamma(\underline{\mathrm{C}}^n(\mathbf{G},\mathbf{F})) \quad , \quad \underline{\mathrm{C}}^n(\mathbf{G},\mathbf{F})(\mathrm{S}) = \mathrm{C}^n(\mathbf{G}_{\mathrm{S}},\mathbf{F}_{\mathrm{S}}).$$

Se donner un élément de $\mathrm{C}^n(\mathbf{G},\mathbf{F})$, c'est se donner pour chaque $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ une n-cochaine de $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ dans $\mathbf{F}(\mathrm{S})$, fonctoriellement en S. L'opérateur bord

$$\partial : \mathrm{C}^n(\mathbf{G}(\mathrm{S}),\mathbf{F}(\mathrm{S})) \longrightarrow \mathrm{C}^{n+1}(\mathbf{G}(\mathrm{S}),\mathbf{F}(\mathrm{S})),$$

qui, rappelons-le, est donné par la formule

$$\begin{aligned}\partial f(g_1,\dots,g_{n+1}) = g_1 f(g_2,\dots,g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{i=n}(-1)^n f(g_1,\dots,g_i g_{i+1},\dots,g_n)\\ + (-1)^{n+1} f(g_1,\dots,g_n),\end{aligned}$$

est fonctoriel en S et définit donc un homomorphisme :

$$\partial : \mathrm{C}^n(\mathbf{G},\mathbf{F}) \longrightarrow \mathrm{C}^{n+1}(\mathbf{G},\mathbf{F})$$

tel que $\partial\circ\partial = 0$. On a donc défini un complexe de groupes abéliens (et même de $\Gamma(\mathbf{O})$- 38
modules) noté $\mathrm{C}^*(\mathbf{G},\mathbf{F})$. On définit de la même manière le complexe de $\mathbf{O}$-modules $\underline{\mathrm{C}}^*(\mathbf{G},\mathbf{F})$ et on a :

$$\mathrm{C}^*(\mathbf{G},\mathbf{F}) = \Gamma(\underline{\mathrm{C}}^*(\mathbf{G},\mathbf{F})).$$

On note $\mathrm{H}^n(\mathbf{G},\mathbf{F})$ (resp. $\underline{\mathrm{H}}^n(\mathbf{G},\mathbf{F})$) les groupes (resp. les $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes) d'homologie du complexe $\mathrm{C}^*(\mathbf{G},\mathbf{F})$ (resp. $\underline{\mathrm{C}}^*(\mathbf{G},\mathbf{F})$).

On a en particulier

$$\underline{\mathrm{H}}^0(\mathbf{G},\mathbf{F}) = \mathbf{F}^{\mathbf{G}} \quad , \quad \mathrm{H}^0(\mathbf{G},\mathbf{F}) = \Gamma(\mathbf{F}^{\mathbf{G}}).$$

Nous nous proposons maintenant de montrer que les foncteurs $\underline{\mathrm{H}}^n$ (resp. H^n) sont bien les foncteurs dérivés de $\underline{\mathrm{H}}^0$ (resp. H^0). Soit $\mathbf{P}$ un $\mathbf{O}$-module ; considérons l'objet $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G},\mathbf{P})$ de $\widehat{\mathscr{C}}$. On peut le munir d'une structure de $\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-module en faisant opérer $\mathbf{G}$ sur le premier facteur et $\mathbf{O}$ sur le second.

De manière précise on a $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G},\mathbf{P})(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathbf{G}_{\mathrm{S}},\mathbf{P}_{\mathrm{S}})$, et on fait opérer $g \in \mathbf{G}(\mathrm{S})$ et $a \in \mathbf{O}(\mathrm{S})$ par les formules :

$$(g\ f)(x) = f(xg) \quad , \quad (a\ f)(x) = af(x) \quad , \quad x \in \mathbf{G}(\mathrm{S}').$$

Soit maintenant $\mathbf{F}$ un $\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-module ; notons $\mathrm{E}(\mathbf{F})$ l'objet $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G},\mathbf{F})$ muni de sa structure de $\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-module précédente. Il existe un morphisme de $\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-module

$$\mu_{\mathbf{F}} : \mathbf{F} \longrightarrow \mathrm{E}(\mathbf{F})$$

défini de la manière suivante : à toute flèche $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}''$ de $\mathscr{C}$, il faut associer de manière fonctorielle une application de $\mathbf{F}(\mathrm{S}')$ dans l'ensemble $\mathrm{Hom}(\mathbf{G}(\mathrm{S}'),\mathbf{F}(\mathrm{S}'))$; pour ce faire, on associe à tout $f \in \mathbf{F}(\mathrm{S}')$ l'application k_f définie par $k_f(g) = gf$. On vérifie aussitôt que $\mu_{\mathbf{F}}$ est bien compatible avec les structures de **G**-**O**-modules et que c'est même un *monomorphisme.*

39 ***Proposition 5.2.1.*** — *Si* $\mathbf{G}$ *est représentable, les foncteurs* $\mathrm{H}^n(\mathbf{G},\ )$ (*resp.* $\underline{\mathrm{H}}^n(\mathbf{G},\ )$) *sont les* foncteurs dérivés *du foncteur exact à gauche* $\mathrm{H}^0(\mathbf{G},\ )$ (*resp.* $\underline{\mathrm{H}}^0(\mathbf{G},\ )$) *sur la catégorie des* **G**-**O***-modules.*

En vertu des résultats généraux bien connus, il suffit de vérifier que les $\mathrm{H}^n(\mathbf{G},\ )$ (resp. $\underline{\mathrm{H}}^n(\mathbf{G},\ )$) forment un foncteur cohomologique effaçable en dimensions > 0. Or $\underline{\mathrm{C}}^n(\mathbf{G},\ )$ considéré comme foncteur sur (**G**-**O**-Mod.) à valeurs dans la catégorie des complexes de (**O**-Mod.) est exact. Ceci montre que les $\underline{\mathrm{H}}^n(\mathbf{G},\ )$ forment bien un foncteur cohomologique. Comme le foncteur Γ est exact, il en est de même pour les $\mathrm{H}^n(\mathbf{G},\ )$. Il nous suffira maintenant de démontrer :

Lemme 5.2.2. — *Pour tout* $\mathbf{P} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{O}\text{-Mod.})$, *on a :*

$$\mathrm{H}^n(\mathbf{G}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G},\mathbf{P})) = 0 \quad , \quad \underline{\mathrm{H}}^n(\mathbf{G}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G},\mathbf{P})) = 0, \quad n > 0.$$

Il nous suffit de démontrer que $\underline{\mathrm{C}}^*(\mathbf{G}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G},\mathbf{P}))$ et $\mathrm{C}^*(\mathbf{G}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G},\mathbf{P}))$ sont homotopiquement triviaux en dimensions > 0. Il suffit même de le faire pour le second, le résultat correspondant pour le premier s'en déduisant par changement de base. Or on a l'opérateur d'homotopie suivant :

$$(sf)(g_1, g_2, \ldots, g_n)(g) = f(g, g_0, g_1, \ldots, g_n)(e)$$

où e désigne l'élément unité de $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ et f une $(n+1)$-cochaine de $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ dans $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G},\mathbf{P})(\mathrm{S})$.

5.3. Cohomologie des G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$**-modules.** — Soient S un schéma, G un S-groupe *affine* sur S et $\mathscr{F}$ un G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent. On définit les groupes de cohomologie de G à valeurs dans $\mathscr{F}$ par

$$\mathrm{H}^n(\mathrm{G},\mathscr{F}) = \mathrm{H}^n(\mathbf{h}_{\mathrm{G}}, \mathbf{W}(\mathscr{F})).$$

(pour les notations, cf. 4.6).

40 Vu la proposition 4.6.4, cette cohomologie se calcule de la façon suivante : $\mathrm{H}^n(\mathrm{G},\mathscr{F})$ est le n-ième groupe d'homologie du complexe $\mathrm{C}^n(\mathrm{G},\mathscr{F})$ défini comme suit :

$$\mathrm{C}^n(\mathrm{G},\mathscr{F}) = \Gamma(\mathrm{S}, \underline{\mathrm{C}}^n(\mathrm{G},\mathscr{F})) \quad , \quad \underline{\mathrm{C}}^n(\mathrm{G},\mathscr{F}) = \mathscr{F} \otimes \underbrace{\mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes \cdots \otimes \mathscr{A}(\mathrm{G})}_{n \text{ fois}}.$$

Si f (resp. a_i) est une section de $\mathscr{F}$ (resp. de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$) sur un ouvert de S, on a

$$\begin{aligned}\partial(f \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \mu_{\mathscr{F}}(f) \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \\ + \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^i f \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes \Delta a_i \otimes \cdots \otimes a_n \\ + (-1)^{n+1} f \otimes a_1 \otimes a_2 \cdots \otimes a_n \otimes 1,\end{aligned}$$

où $\mu_{\mathscr{F}} : \mathscr{F} \to \mathscr{F} \otimes \mathscr{A}(\mathrm{G})$ et $\Delta : \mathscr{A}(\mathrm{G}) \to \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes \mathscr{A}(\mathrm{G})$ décrivent la structure de comodule de $\mathscr{F}$. Remarquons en passant que la cohomologie de G à valeurs dans $\mathscr{F}$

ne dépend donc que de la structure de comodule de $\mathscr{F}$, et en particulier que de la structure de S-monoïde de G.

On a en particulier

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{G}, \mathscr{F}) = \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{F}^{\mathrm{G}}),$$

où $\mathscr{F}^{\mathrm{G}}$, le *faisceau des invariants de* $\mathscr{F}$, est défini comme le faisceau dont les sections sur l'ouvert U de S sont des sections de $\mathscr{F}$ sur U dont l'image inverse dans tout S′ au-dessus de U est invariante par G(S′).

Théorème 5.3.1. — *Soient* S *un schéma* affine, G *un* S-*groupe* affine et plat *sur* S. 41
Les foncteurs $\mathrm{H}^n(\mathrm{G},\ \ )$ *sont les foncteurs dérivés de* $\mathrm{H}^0(\mathrm{G},\ \ )$ *sur la catégorie des* G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-*modules quasi-cohérents.*

Comme S est affine, et comme G est affine et plat, on voit aussitôt que $\mathrm{C}^*(\mathrm{G},\ \ )$ est bien un foncteur exact sur la catégorie précédente.

Il ne reste plus qu'à construire pour tout $\mathscr{F}$ un monomorphisme de $\mathscr{F}$ dans un G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module $\mathrm{E}(\mathscr{F})$ tel que $\mathrm{H}^n(\mathrm{G}, \mathrm{E}(\mathscr{F})) = 0,\ \ n > 0$. Or considérons $\mathrm{E}(\mathscr{F}) = \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes \mathscr{F}$ muni de la structure de G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module définie par celle de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$. Considérons l'homomorphisme canonique $\mu_{\mathscr{F}} : \mathscr{F} \to \mathrm{E}(\mathscr{F})$; l'axiome (CM 1) de 4.7.2 dit exactement que $\mu_{\mathscr{F}}$ est un morphisme de G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules. Il suffit de remarquer maintenant que l'image de $\mu_{\mathscr{F}}$ par le foncteur $\mathbf{W}$ n'est autre que l'effacement $\mu_{\mathbf{W}(\mathscr{F})} : \mathbf{W}(\mathscr{F}) \to \mathrm{E}(\mathbf{W}(\mathscr{F}))$ défini dans 5.2 (comparer avec le corollaire 1 à la proposition 4.6.4).

Remarquons maintenant que l'axiome (CM 2) montre que considéré comme $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module, $\mathscr{F}$ est un facteur direct de $\mathrm{E}(\mathscr{F})$. Cela entraîne :

Proposition 5.3.2. — *Soient* S *un schéma* affine *et* G *un* S-*groupe* affine et plat *; supposons que toute suite exacte* $0 \to \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2 \to \mathscr{F}_3 \to 0$ *de* G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-*modules quasi-cohérents, qui se scinde comme suite de* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-*modules, se scinde également comme suite de* G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-*modules.*

Les foncteurs $\mathrm{H}^n(\mathrm{G},\ \ )$, $n > 0$, *sont nuls* (*ou ce qui revient au même, le foncteur* $\mathrm{H}^0(\mathrm{G},\ \ )$ *est exact*).

En effet, d'après l'hypothèse, la suite $0 \to \mathscr{F} \to \mathrm{E}(\mathscr{F}) \to \mathrm{E}(\mathscr{F})/\mathscr{F} \to 0$ est scindée ; $\mathscr{F}$ est donc facteur direct dans $\mathrm{E}(\mathscr{F})$, or la cohomologie de ce dernier est nulle.

On tire immédiatement de là et de la proposition 4.7.4 :

42

Théorème 5.3.3. — *Soient* S *un schéma* affine *et* G *un* S-*groupe* diagonalisable. *Pour tout* G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-*module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$, *on a* $\mathrm{H}^n(\mathrm{G}, \mathscr{F}) = 0,\ \ n > 0$.

Remarque. — La proposition 5.3.2 reste valable, lorsque G n'est pas nécessairement plat sur S ; la démonstration fait alors appel à la cohomologie relative.