

EXPOSÉ IV

TOPOLOGIES ET FAISCEAUX

par M. DEMAZURE ^(*)

Cet exposé est destiné à faire connaître au lecteur l'essentiel du langage des topologies et des faisceaux (sans cohomologie), particulièrement commode dans les questions de passage au quotient (entre autres). 160

Les trois premiers paragraphes développent le langage du passage au quotient. Le quatrième, qui est la partie centrale, est l'exposé de la théorie des faisceaux, orienté principalement vers l'application aux questions de quotients ; le cinquième est une application au passage au quotient dans les groupes et aux fibrés principaux homogènes. Le dernier paragraphe concerne plus spécialement la catégorie des schémas, et définit diverses topologies utiles sur cette catégorie.

Le lecteur se référera utilement à [AS], [MA], [D], et SGA 4 ; [D] en ce qui concerne spécialement les applications des topologies à la théorie de la descente, et SGA 4 pour les questions d'univers (particulièrement maltraitées dans cet exposé).

1. Épimorphismes effectifs universels

Dans la suite de cet exposé, on suppose fixée une catégorie \mathcal{C} . 161

Définition 1.1. — Un morphisme $u : T \rightarrow S$ est appelé un *épimorphisme* si, pour tout objet X , l'application correspondante

$$X(S) = \text{Hom}(S, X) \longrightarrow X(T) = \text{Hom}(T, X)$$

est injective. On dit que u est un *épimorphisme universel* si pour tout morphisme $S' \rightarrow S$, le produit fibré $T' = T \times_S S'$ existe, et $u' : T' \rightarrow S'$ est un épimorphisme.

Définition 1.2. — Un diagramme

$$A \xrightarrow{u} B \begin{array}{c} \xrightarrow{v_1} \\ \xrightarrow{v_2} \end{array} C$$

^(*)Ce texte développe la substance de deux exposés oraux de A. GROTHENDIECK, en complétant ces derniers sur plusieurs points importants, qui avaient été passés sous silence ou à peine effleurés.

d'applications d'ensembles est dit *exact* si u est injectif et si son image est formée des éléments b de B tels que $v_1(b) = v_2(b)$. Un diagramme de même type dans \mathcal{C} est dit *exact* si pour tout objet X de \mathcal{C} , le diagramme d'ensembles correspondant

$$A(X) \longrightarrow B(X) \rightrightarrows C(X)$$

est exact ; on dit aussi alors que u fait de A un *noyau* du couple de flèches (v_1, v_2) . Dualement, un diagramme

$$C \rightrightarrows B \xrightarrow{u} A$$

dans \mathcal{C} est dit *exact*, s'il est exact en tant que diagramme dans la catégorie opposée \mathcal{C}° , i.e. si pour tout objet X de \mathcal{C} , le diagramme d'ensembles correspondant

$$X(A) \longrightarrow X(B) \rightrightarrows X(C)$$

162 est exact. On dit aussi que u fait de A un *conoyau* du couple de flèches (v_1, v_2) .

Définition 1.3. — Un morphisme $u : T \rightarrow S$ est appelé un *épimorphisme effectif* si le carré fibré $T \times_S T$ existe, et si le diagramme

$$T \times_S T \rightrightarrows T \xrightarrow{u} S$$

est exact, i.e. si u fait de S un conoyau de (pr_1, pr_2) . On dit que u est un *épimorphisme effectif universel* si pour tout morphisme $S' \rightarrow S$, le produit fibré $T' = T \times_S S'$ existe, et le morphisme $u' : T' \rightarrow S'$ est un épimorphisme effectif.

On a évidemment les implications :

$$\begin{array}{ccc} \text{épimorphisme effectif universel} & \implies & \text{épimorphisme effectif} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{épimorphisme universel} & \implies & \text{épimorphisme} \end{array} ,$$

mais en général aucune autre implication n'est valable.

Lemme 1.4. — *Considérons des morphismes $U \xrightarrow{v} T \xrightarrow{u} S$. Alors*

- a) u, v épimorphismes $\Rightarrow uv$ épimorphisme $\Rightarrow u$ épimorphisme,
- b) u, v épim. univ. $\Rightarrow uv$ épim. univ. et u quarrable $\Rightarrow u$ épim. univ.

On rappelle qu'un morphisme $u : T \rightarrow S$ est dit *quarrable* si pour tout morphisme $S' \rightarrow S$, le produit fibré $T \times_S S'$ existe. Le lemme 1.4 est trivial sur les définitions. On en conclut :

Corollaire 1.5. — *Soient $u : X \rightarrow Y$ et $u' : X' \rightarrow Y'$ des épimorphismes universels, tels que $Y \times Y'$ existe, alors $X \times X'$ existe et $u \times u' : X \times X' \rightarrow Y \times Y'$ est un épimorphisme universel.*

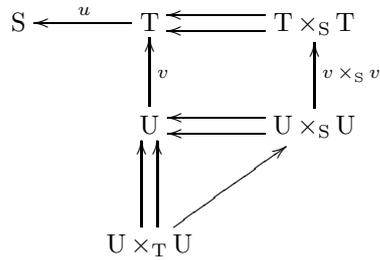
163 Notons aussi :

Lemme 1.6. — Soit $u : X \rightarrow Y$ un morphisme dans $\mathcal{C}_{/S}$; pour que ce soit un épimorphisme (resp. épimorphisme universel, resp. épimorphisme effectif, resp. épimorphisme effectif universel), il suffit que le morphisme correspondant dans \mathcal{C} le soit, et c'est aussi nécessaire si on suppose que S est un objet quarrable de \mathcal{C} , i.e. que son produit par tout objet de \mathcal{C} existe.

Démonstration immédiate laissée au lecteur. On utilise l'hypothèse « S quarrable » pour interpréter les \mathcal{C} -morphisms d'un objet Y dans un objet Z , comme étant les $\mathcal{C}_{/S}$ -morphisms de Y dans $Z \times S$.

Lemme 1.7. — Avec les notations de 1.4 :
 u, v épim. effectifs et v épim. univ. $\Rightarrow uv$ épim. effectif.

Pour le voir, on considère le diagramme



On note que par hypothèse, la ligne 1 et la colonne 1 sont exactes, et qu'en vertu de 1.5 et 1.6, $v \times_S v$ est un épimorphisme (v étant un épimorphisme universel). La conclusion en résulte par un diagram-chasing évident : si un élément de $X(U)$ a mêmes images dans $X(U \times_S U)$, il a *a fortiori* mêmes images dans $X(U \times_T U)$, donc provient d'un élément de $X(T)$ puisque la colonne 1 est exacte. Comme la ligne 1 est exacte, il suffit de vérifier que l'élément envisagé a mêmes images dans $X(T \times_S T)$, et comme $v \times_S v$ est un épimorphisme, il suffit de vérifier que les images dans $X(U \times_S U)$ sont les mêmes, ce qui est bien le cas.

Proposition 1.8. — Considérons des morphismes $U \xrightarrow{v} T \xrightarrow{u} S$. Alors u, v épim. effectifs univ. $\Rightarrow uv$ épim. eff. un. et u quarrable $\Rightarrow u$ épim. eff. univ.

La première implication résulte aussitôt de 1.7. Pour la deuxième, on regarde le diagramme (de type « bisimplicial ») :

$$\begin{array}{ccccc}
 S & \xleftarrow{u} & T & \xleftarrow{\quad} & T \times_S T \\
 \uparrow \scriptstyle vu & & \uparrow & & \uparrow \\
 U & \xleftarrow{\quad} & U \times_S T & \xleftarrow{\quad} & U \times_S T \times_S T \\
 \uparrow \uparrow & & \uparrow \uparrow & & \uparrow \uparrow \\
 U \times_S U & \xleftarrow{\quad} & U \times_S U \times_S T & \xleftarrow{\quad} & U \times_S U \times_S T \times_S T
 \end{array}$$

Les colonnes 1,2,3 sont exactes en vertu de l'hypothèse « vu épimorphisme effectif universel », la ligne 2 est exacte, car $U \times_S T \rightarrow U$ est un épimorphisme effectif (car il a une section sur U), et il en est de même de la ligne 3 (même raison). Un diagram-chasing évident montre alors que la ligne 1 est exacte, i.e. u est un épimorphisme effectif. Comme les hypothèses faites sont invariantes par un changement de base quelconque $S' \rightarrow S$, il s'ensuit que u est même un épimorphisme effectif universel.

Corollaire 1.9. — Soient $u : X \rightarrow Y$ et $u' : X' \rightarrow Y'$ des épimorphismes effectifs universels, tels que $Y \times Y'$ existe; alors $X \times X'$ existe et $u \times u' : X \times X' \rightarrow Y \times Y'$ est un épimorphisme effectif universel.

Démonstration comme pour 1.5 par le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Y' & \xleftarrow{u'} & X' \\
 & & \uparrow & & \uparrow \\
 X & \xleftarrow{\quad} & X \times Y' & \xleftarrow{\quad} & X \times X' \\
 \downarrow \scriptstyle u & & \downarrow & \swarrow \scriptstyle u \times u' & \\
 Y & \xleftarrow{\quad} & Y \times Y' & &
 \end{array}$$

165 **Corollaire 1.10.** — Considérons un morphisme quarrable $u : T \rightarrow S$, et un morphisme de changement de base $S' \rightarrow S$, qui soit un épimorphisme effectif universel. Pour que u soit un épimorphisme effectif universel, il faut et suffit que $u' : T' = T \times_S S' \rightarrow S'$ le soit :

$$\begin{array}{ccc}
 T & \xleftarrow{v'} & T' \\
 \downarrow \scriptstyle u & & \downarrow \scriptstyle u' \\
 S & \xleftarrow{v} & S'
 \end{array}$$

Seul le « il suffit » demande une démonstration. Or si u' est un épim. eff. univ., il en est de même de vu' grâce à 1.8, et comme $vu' = uv'$, on conclut par 1.8 que u est un épim. eff. univ.

Remarque 1.11. — Le même raisonnement montre que dans 1.10 on peut remplacer « épimorphisme effectif universel » par « épimorphisme universel » ou « épimorphisme universel et effectif », ou simplement par « épimorphisme » (et dans ce dernier cas, l'hypothèse « u quarrable » est évidemment inutile).

Dans la démonstration de 1.8 nous avons utilisé le résultat suivant, qui mérite d'être explicité :

Proposition 1.12. — *Soit $u : T \rightarrow S$ un morphisme qui admette une section. Alors u est un épimorphisme, et si $T \times_S T$ existe, c'est un épimorphisme effectif, et un épimorphisme effectif universel si de plus u est quarrable.*

La première assertion est contenue dans 1.4 a), et la troisième va résulter aussitôt de la seconde, qu'il suffira donc d'établir. En fait on a une conclusion plus forte : pour tout foncteur $F : \mathcal{C}^\circ \rightarrow (\mathbf{Ens})$ (non nécessairement représentable), le diagramme d'ensembles

$$F(S) \rightarrow F(T) \rightrightarrows F(T \times_S T)$$

est exact. Ceci peut être considéré comme un cas particulier du formalisme de la cohomologie de Čech (en dimension 0!) que nous nous contentons de rappeler ici. Supposons simplement que $T \times_S T$ existe, on pose alors

$$H^0(T/S, F) = \text{Ker}(F(T) \rightrightarrows F(T \times_S T)).$$

On peut regarder $H^0(T/S, F)$ de façon évidente comme un foncteur contravariant en l'argument T variable dans $\mathcal{C}/_S$, tout S -morphisme $T' \rightarrow T$ définissant une application

$$(+)$$

$$H^0(T/S, F) \rightarrow H^0(T'/S, F).$$

Fixons T et T' dans $\mathcal{C}/_S$. Un calcul bien connu montre que s'il existe un S -morphisme de T' dans T , l'application correspondante (+) est en fait indépendante du choix de ce morphisme, de sorte que $H^0(T/S, F)$ peut être regardé comme un foncteur sur la catégorie associée à l'ensemble $\text{Ob } \mathcal{C}/_S$ préordonné par la relation de « domination » (T' domine T s'il existe un S -morphisme de T' dans T). En particulier, si T et T' sont isomorphes dans cette dernière catégorie, i.e. si chacun domine l'autre, alors (+) est un *isomorphisme* d'ensembles. Ceci s'applique en particulier au cas où T' est l'objet final de $\mathcal{C}/_S$, i.e. essentiellement S lui-même; de toutes façons T domine $T' = S$, et l'inverse est vrai précisément si T/S a une section. Cela établit 1.12 sous la forme renforcée annoncée.

Remarque 1.13. — Pour diverses applications, les notions introduites dans le présent exposé, et les résultats énoncés, doivent se développer plus généralement relativement à une *famille* de morphismes $u_i : T_i \rightarrow S$ de même but (au lieu d'un seul morphisme

$u : T \rightarrow S$). Ainsi, une telle famille sera dite *épimorphique* si pour tout objet X de \mathcal{C} , l'application correspondante

$$X(S) \rightarrow \prod_i X(T_i)$$

est injective, et on introduit de même la notion de *famille épimorphique effective* et les variantes « universelles » de ces notions. Nous admettrons au besoin, par la suite, que les résultats du présent exposé s'étendent à cette situation plus générale.

Remarque 1.14. — Tout morphisme qui est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme effectif est un isomorphisme. En effet, dans les notations de 1.3, le fait que $T \rightarrow S$ soit un monomorphisme entraîne que les deux morphismes

$$\text{pr}_1, \text{pr}_2 : T \times_S T \rightrightarrows T$$

sont égaux (et sont des isomorphismes). Or un diagramme

$$C \begin{array}{c} \xrightarrow{v} \\ \xrightarrow{v} \end{array} B \xrightarrow{u} A$$

n'est exact que si u est un isomorphisme, comme il résulte immédiatement de la définition.

2. Morphismes de descente

Rappelons les définitions suivantes :

Définition 2.1. — Soient $f : S' \rightarrow S$ un morphisme tel que $S'' = S' \times_S S'$ existe, et soit $u' : X' \rightarrow S'$ un objet sur S' . On appelle *donnée de recollement* sur X'/S' , relativement à f , un isomorphisme

$$c : X''_1 \xrightarrow{\sim} X''_2$$

où X''_i ($i = 1, 2$) désigne l'image inverse (supposée exister) de X'/S' par la projection $\text{pr}_i : S'' \rightarrow S'$. On dit que la donnée de recollement c est une *donnée de descente* si elle satisfait la « condition des cocycles »

$$\text{pr}_{3,1}^*(c) = \text{pr}_{3,2}^*(c)\text{pr}_{2,1}^*(c)$$

où $\text{pr}_{i,j}$ ($1 \leq j < i \leq 3$) sont les projections canoniques de $S''' = S' \times_S S' \times_S S'$ dans S'' (N. B. on suppose maintenant que S''' existe également), où $\text{pr}_{i,j}^*(c)$ est l'image inverse de c , considéré comme un S''' -morphisme de X''_i dans X''_j , et où pour tout entier k entre 1 et 3, X''_k désigne l'image inverse (supposée exister) de X'/S' par la projection d'indice k , $q_k : S''' \rightarrow S'$.

Dans la deuxième partie de la définition, on a donc utilisé des identifications et abus d'écriture d'usage courant, que l'expérience prouve être inoffensifs, mais qu'il convient évidemment d'éviter dans un exposé rigoureux de la théorie de la descente, (qui doit précisément justifier dans une certaine mesure ces abus de langage courants). Un tel exposé en forme ([D]) a été rédigé par GIRAUD, (en vue de justifier et de préciser SGA 1, VII, qui n'a jamais été rédigé). Pour un exposé détaillé des résultats de

descente fidèlement plate dont il sera fait un usage constant dans le présent Séminaire on pourra consulter SGA 1, VIII.

Soit toujours $f : S' \rightarrow S$ un morphisme tel que $S'' = S' \times_S S'$ existe, et soit X un objet sur S tel que $X' = X \times_S S'$ et $X'' = X \times_S S''$ existent ; alors les images inverses de X' par pr_i ($i = 1, 2$) existent et sont canoniquement isomorphes, et par suite X'/S' est munie d'une donnée de recollement canonique relativement à f . Lorsque S''' et $X''' = X \times_S S'''$ existent, c'est même une donnée de descente. Si Y est un autre objet sur S , satisfaisant aux mêmes conditions que X/S , alors pour tout S -morphisme $X \rightarrow Y$, le S' -morphisme correspondant $X' \rightarrow Y'$ est « compatible avec les données de recollement » canoniques sur X', Y' . Si en particulier $S' \rightarrow S$ est un morphisme *quarrable*, alors

$$X \mapsto X' = X \times_S S'$$

est un foncteur de la catégorie \mathcal{C}_S dans la « catégorie des objets sur S' munis d'une donnée de descente relativement à f » – catégorie dont la définition est laissée au lecteur, et qui est une sous-catégorie pleine de la « catégorie des objets sur S' munis d'une donnée de recollement relativement à f ».

Ceci posé :

Définition 2.2. — On dit qu'un morphisme $f : S' \rightarrow S$ est un *morphisme de descente* (resp. un *morphisme de descente effective*) si f est *quarrable* (i.e. pour tout $X \rightarrow S$, le produit fibré $X \times_S S'$ existe), et si le foncteur précédent $X \mapsto X' = X \times_S S'$ de la catégorie \mathcal{C}_S des objets sur S , dans la catégorie des objets sur S' munis d'une donnée de descente relativement à f , est pleinement fidèle (resp. une équivalence de catégories). 169

On notera que la première de ces deux notions peut s'exprimer à l'aide de la seule notion de donnée de recollement (donc sans faire intervenir le produit fibré triple S'''), f étant un morphisme de descente si f est quarrable et $X \mapsto X'$ est un foncteur pleinement fidèle de la catégorie \mathcal{C}_S dans la catégorie des objets sur S' munis d'une *donnée de recollement* relativement à f . Quand on explicite cette définition, on constate que cela signifie que pour deux objets X, Y sur S , le diagramme d'ensembles suivant

$$(x) \quad \text{Hom}_S(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{S'}(X', Y') \begin{array}{c} \xrightarrow{p_1} \\ \xrightarrow{p_2} \end{array} \text{Hom}_{S''}(X'', Y'')$$

est exact, où $p_i(u')$ désigne l'image inverse de $u' \in \text{Hom}_{S'}(X', Y')$ par la projection $\text{pr}_i : S'' \rightarrow S'$, pour $i = 1, 2$; en effet, le noyau du couple (p_1, p_2) n'est autre par définition que l'ensemble des S' -morphisms $X' \rightarrow Y'$ compatibles avec les données de recollement canoniques.

Notons que, par définition des images inverses Y', Y'' , on a des bijections canoniques

$$\text{Hom}_{S'}(X', Y') \simeq \text{Hom}_S(X', Y) \quad , \quad \text{Hom}_{S''}(X'', Y'') \simeq \text{Hom}_S(X'', Y),$$

de sorte que l'exactitude du diagramme (x) équivaut à celle de

$$(xx) \quad \text{Hom}_S(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_S(X', Y) \rightrightarrows \text{Hom}_S(X'', Y),$$

obtenu en appliquant $\text{Hom}_S(-, Y)$ au diagramme dans $\mathcal{C}/_S$:

$$(xxx) \quad X'' \rightrightarrows X' \longrightarrow X$$

170 qui est déduit de

$$S'' \rightrightarrows S' \longrightarrow S$$

par le changement de base $X \rightarrow S$. Cela prouve, compte tenu de 1.6, la première partie de :

Proposition 2.3. — *Soit $f : S' \rightarrow S$ un morphisme. Si c'est un épimorphisme effectif universel, c'est un morphisme de descente, et la réciproque est vraie si S est un objet quarrable de \mathcal{C} (i.e. son produit par tout objet de \mathcal{C} existe).*

Reste à prouver que si f est un morphisme de descente, c'est un épimorphisme effectif universel, c'est-à-dire que pour tout morphisme $X \rightarrow S$, le diagramme (xxx) est exact, i.e. pour tout objet Z de \mathcal{C} , le transformé de ce diagramme par $\text{Hom}(-, Z)$ est un diagramme exact d'ensembles. Or par hypothèse $Z \times S$ existe ; soit Y l'objet de $\mathcal{C}/_S$ qu'il définit ; alors le diagramme transformé de (xxx) par $\text{Hom}(-, Z)$ est isomorphe au diagramme transformé par $\text{Hom}_S(-, Y)$, or ce dernier est exact par l'hypothèse sur f .

On peut donc appliquer aux épimorphismes effectifs universels les résultats sur les morphismes de descente, tels les suivants :

Proposition 2.4. — *Soit $f : S' \rightarrow S$ un morphisme de descente (par exemple un épimorphisme effectif universel). Alors :*

a) *Pour tout S -morphisme $u : X \rightarrow Y$, u est un isomorphisme (resp. un monom.) si et seulement si $u' : X' \rightarrow Y'$ l'est.*

b) *Soient X, Y deux sous-objets de S , X' et Y' les sous-objets de S' images inverses des précédents. Pour que X soit majoré par Y (resp. soit égal à Y), il faut et suffit qu'il en soit de même pour X', Y' .*

171 Pour (a), il résulte de la définition que si u' est un isomorphisme dans la catégorie des objets à donnée recollement, alors u est un isomorphisme ; or on constate aussitôt que tout isomorphisme d'objets sur S' , compatible avec des données de recollement, est un isomorphisme d'objets à donnée de recollement, i.e. son inverse est également compatible avec les données de recollement. Pour b), on est ramené à prouver que si X' est majoré par Y' , i.e. s'il existe un S' -morphisme $X' \rightarrow Y'$, alors il en est de même pour X, Y sur S . Or comme $Y' \rightarrow S'$, donc aussi $Y'' \rightarrow S''$, est un monomorphisme, on voit que $X' \rightarrow Y'$ est automatiquement compatible avec les données de recollement, donc provient d'un S -morphisme $X \rightarrow Y$. Notons que la démonstration vaut plus généralement quand on a deux objets X, Y sur S , avec $Y \rightarrow S$ un monomorphisme, et qu'on se demande si le morphisme $X \rightarrow S$ se factorise par Y : il suffit que $X' \rightarrow S'$ se factorise par Y' .

Corollaire 2.5. — *Soient $f : S' \rightarrow S$ un épimorphisme effectif universel et $g : S \rightarrow T$ un morphisme tel que $S \times_T S$ existe. Supposons que $S'' = S' \times_S S'$ soit aussi un produit*

fibré de S' par lui-même sur T , i.e. $S' \times_S S' \xrightarrow{\sim} S' \times_T S'$. Alors $g : S \rightarrow T$ est un monomorphisme (et réciproquement bien sûr).

En effet, considérons le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} S' \times_S S' & \xrightarrow{\sim} & S' \times_T S' \\ \downarrow & & \downarrow f \\ S & \longrightarrow & S \times_T S \end{array} ,$$

où la deuxième flèche horizontale est le morphisme diagonal. En vertu de 1.9 la deuxième flèche verticale est un épimorphisme effectif universel, par hypothèse la première flèche horizontale est un isomorphisme, donc en vertu de 2.4 a) ou b) au choix, il en est de même de la première $S \rightarrow S \times_T S$, ce qui signifie précisément que $g : S \rightarrow T$ est un monomorphisme.

Remarque 2.6. — Les notions introduites dans 2.1, en termes de morphismes entre certaines limites projectives, s'explicitent de façon évidente en termes des foncteurs contravariants définis par les objets S, S', X' envisagés : sous réserve d'existence des produits fibrés envisagés dans 2.1, il y a correspondance biunivoque entre les données de recollement (resp. de descente) sur X'/S' relativement à $S' \rightarrow S$, et les données de recollement (resp. de descente) pour les objets correspondants dans $\widehat{\mathcal{C}} = \mathbf{Hom}(\mathcal{C}^\circ, (\mathbf{Ens}))$. Ceci permet, si on le désire, d'étendre ces notions au cas où on ne fait aucune hypothèse d'existence de produits fibrés dans \mathcal{C} . 172

Remarque 2.7. — Les notions introduites dans ce numéro se généralisent au cas de familles de morphismes. Elles peuvent d'autre part se présenter de manière plus intrinsèque à l'aide de la notion de *crible* (4.1). Pour ces questions, le lecteur se reportera à [D].

3. Relations d'équivalence effectives universelles

3.1. Relations d'équivalence : définitions

Définition 3.1.1. — On appelle \mathcal{C} -relation d'équivalence dans $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ un sous-foncteur *représentable* R du foncteur $X \times X$, tel que pour tout $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$, $R(S)$ soit le graphe d'une relation d'équivalence dans $X(S)$.

Cette définition s'applique en particulier à la catégorie $\widehat{\mathcal{C}}$. Si on considère X comme un objet de $\widehat{\mathcal{C}}$, on voit alors qu'une $\widehat{\mathcal{C}}$ -relation d'équivalence dans X n'est autre qu'un sous-foncteur R de $X \times X$ tel que $R(S)$ soit le graphe d'une relation d'équivalence dans $X(S)$ pour tout objet S de \mathcal{C} .

Si R est une \mathcal{C} -relation d'équivalence dans X , on désigne par p_i le morphisme de R dans X induit par la projection $\text{pr}_i : X \times X \rightarrow X$. On a donc un diagramme

$$p_1, p_2 : R \rightrightarrows X.$$

Définition 3.1.2. — Un morphisme $u : X \rightarrow Z$ est dit *compatible* avec R si $up_1 = up_2$. 173
Un objet conoyau du couple (p_1, p_2) est aussi appelé *objet-quotient* de X par R et noté X/R .

On a donc un diagramme exact

$$R \xrightarrow{p_1, p_2} X \xrightarrow{p} X/R$$

et X/R représente le foncteur *covariant*

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X/R, Z) = \{\text{morphisms de } X \text{ dans } Z \text{ compatibles avec } R\}.$$

Si les objets-quotients ont été choisis dans \mathcal{C} , le quotient X/R est unique (lorsqu'il existe).

Ces définitions se généralisent aussitôt au cas d'une $\widehat{\mathcal{C}}$ -relation d'équivalence dans X , mais on remarquera que l'identification des objets de \mathcal{C} à leurs images dans $\widehat{\mathcal{C}}$ ne commute pas à la formation des quotients, c'est-à-dire que le quotient X/R de X par R dans \mathcal{C} n'est pas *a priori* un quotient de X par R dans $\widehat{\mathcal{C}}$. On se gardera donc d'identifier inconsidérément \mathcal{C} à son image dans $\widehat{\mathcal{C}}$ dans les questions faisant intervenir des passages au quotient.

Dans la suite, nous dirons simplement *relation d'équivalence pour $\widehat{\mathcal{C}}$ -relation d'équivalence*; nous préciserons, le cas échéant, s'il s'agit de \mathcal{C} -relations d'équivalences.

Définition 3.1.3. — Si X est un objet de \mathcal{C} au-dessus de S , on appelle relation d'équivalence dans X au-dessus de S une relation d'équivalence R dans X tel que le morphisme structural $X \rightarrow S$ soit compatible avec R .

Le monomorphisme canonique $R \rightarrow X \times X$ se factorise alors par le monomorphisme

$$X \times_S X \rightarrow X \times X$$

174 et définit une relation d'équivalence dans l'objet $X \rightarrow S$ de $\mathcal{C}/_S$. Lorsque le quotient X/R existe, il est muni d'un morphisme canonique dans S et l'objet de $\mathcal{C}/_S$ correspondant est un quotient de $X \in \text{Ob } \mathcal{C}/_S$ par la relation d'équivalence précédente. Réciproquement, si S est un objet *quarrable* de \mathcal{C} et si $Y \rightarrow S$ est un quotient de X par cette relation d'équivalence (dans $\mathcal{C}/_S$), alors Y est un quotient de X par R dans \mathcal{C} . De toutes façons, nous n'aurons jamais à considérer des quotients dans $\mathcal{C}/_S$ qui ne soient pas déjà quotients dans \mathcal{C} .

Définition 3.1.4. — Si X (resp. X') est un objet de \mathcal{C} muni d'une relation d'équivalence R (resp. R'), un morphisme

$$u : X \rightarrow X'$$

est dit *compatible avec R et R'* si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

(i) pour tout $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$, deux points de $X(S)$ congrus modulo $R(S)$ sont transformés par u en deux points de $X'(S)$ congrus modulo $R'(S)$;

(ii) il existe un morphisme $R \rightarrow R'$ (nécessairement unique) rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & R' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times X & \xrightarrow{u \times u} & X' \times X' \end{array} .$$

D'après la propriété universelle de X/R , il existe alors (lorsque les quotients X/R et X'/R' existent) un morphisme unique v rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & X/R \\ \downarrow u & & \downarrow v \\ X' & \xrightarrow{p'} & X'/R' \end{array} .$$

Définition 3.1.5. — Un sous-objet (= un sous-foncteur représentable) Y de X est dit *stable* par la relation d'équivalence R si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

- (i) Pour tout $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$, le sous-ensemble $Y(S)$ de $X(S)$ est stable par $R(S)$.
- (ii) Les deux sous-objets de R images inverses de Y par p_1 et p_2 sont identiques.

Un cas particulier important de sous-objet stable de X est le suivant : le quotient X/R existe et Y est l'image inverse sur X d'un sous-objet de X/R .

Définition 3.1.6. — Soient R une relation d'équivalence dans X et $X' \rightarrow X$ un morphisme. La relation d'équivalence R' dans X' obtenue par le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} R' & \longrightarrow & R \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' \times X' & \longrightarrow & X \times X \end{array}$$

est dite la relation d'équivalence dans X' *image inverse* de la relation d'équivalence R dans X . En particulier, si X' est un sous-objet de X , on dira que c'est la relation d'équivalence *induite* dans X' par R , on la notera $R_{X'}$.

Le morphisme $X' \rightarrow X$ est compatible avec R' et R ; on a donc, lorsque les quotients existent, un morphisme $X'/R' \rightarrow X/R$ (3.1.4). Si X' est un sous-objet de X , nous verrons plus tard que dans certains cas on peut prouver que $X'/R' \rightarrow X/R$ est un monomorphisme, donc identifie X'/R' à un sous-objet de X/R . Lorsqu'il en sera ainsi, l'image inverse de ce sous-objet dans X sera un sous-objet de X majorant X' et stable par R : le *saturé* de X' pour la relation d'équivalence R .

Proposition 3.1.7. — *Si le sous-objet Y de X est stable par R , on a deux carrés cartés-* 176

siens, pour $i = 1, 2$:

$$\begin{array}{ccc} R_Y & \longrightarrow & R \\ p_i \downarrow & & \downarrow p_i \\ Y & \longrightarrow & X \end{array} .$$

Démonstration immédiate.

3.2. Relation d'équivalence définie par un groupe opérant librement

Définition 3.2.1. — Soient X un objet de \mathcal{C} et H un \mathcal{C} -groupe opérant sur X (c'est-à-dire muni d'un morphisme de $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes

$$H \longrightarrow \underline{\text{Aut}}(X) .$$

On dit que H opère *librement* sur X si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

- (i) Pour tout $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$, le groupe $H(S)$ opère librement sur $X(S)$;
- (ii) Le morphisme de foncteurs

$$H \times X \longrightarrow X \times X$$

défini ensemblistement par $(h, x) \mapsto (hx, x)$ est un monomorphisme.

(Dans la définition précédente, on a supposé que le groupe H opérait « à gauche » sur X . On a évidemment une notion analogue dans le cas où le groupe opère « à droite » c'est-à-dire lorsqu'on s'est donné un morphisme de groupes du groupe H° opposé à H dans $\underline{\text{Aut}}(X)$).

Si H opère librement sur X , l'image de $H \times X$ par le morphisme de (ii) est une relation d'équivalence dans X dite *relation d'équivalence définie par l'action de H sur X* . Lorsque le quotient de X par cette relation d'équivalence existe, on le note $H \backslash X$ (X/H lorsque H opère à droite). Il représente le foncteur covariant suivant : si Z est un objet de \mathcal{C} , on a

$$\text{Hom}(H \backslash X, Z) = \{ \text{morphisms de } X \text{ dans } Z \text{ invariants par } H \}$$

où le morphisme $f : X \rightarrow Z$ est dit invariant par H si pour tout $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$, le morphisme $X(S) \rightarrow Z(S)$ correspondant est invariant sous le groupe $H(S)$.

Lemme 3.2.2. — *Sous les conditions de 3.2.1, soit Y un sous-objet de X . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) Y est stable par la relation d'équivalence définie par H (3.1.5) ;
- (ii) Pour tout $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$, le sous-ensemble $Y(S)$ de $X(S)$ est stable sous $H(S)$;

(iii) Il existe un morphisme f , nécessairement unique, rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H \times Y & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ H \times X & \longrightarrow & X \end{array} .$$

Sous ces conditions, f définit un morphisme de $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes

$$H \longrightarrow \underline{\text{Aut}}(Y)$$

et la relation d'équivalence définie dans Y par cette opération de H n'est autre que la relation d'équivalence induite dans Y par la relation d'équivalence définie dans X par l'action de H .

Démonstration immédiate. On a évidemment un énoncé analogue pour une « opération à droite ». L'opération de H sur Y définie ci-dessus sera appelée opération *induite* dans Y par l'opération donnée de H sur X .

Considérons maintenant la situation suivante : H et G sont deux \mathcal{C} -groupes et on s'est donné un morphisme de groupes 178

$$u : H \longrightarrow G.$$

Alors H opère sur G par translations (on pose ensemblistement $hg = u(h)g$) et y opère *librement* si et seulement si u est un *monomorphisme*. Le quotient de G par cette opération de H est noté, lorsqu'il existe, $H \backslash G$. On définit de même une opération à droite de H sur G et un quotient G/H . Ces quotients sont fonctoriels par rapport aux groupes en cause ; de manière précise, on a le lemme suivant, énoncé pour les quotients à droite :

Lemme 3.2.3. — Soient $u : H \rightarrow G$ et $u' : H' \rightarrow G'$ deux monomorphismes de \mathcal{C} -groupes. Supposons donné un morphisme de \mathcal{C} -groupes

$$f : G \longrightarrow G'.$$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est compatible avec les relations d'équivalences définies dans G et G' par H et H' .

(ii) Pour tout $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$, on a $f u(H(S)) \subset u'(H'(S))$.

(iii) Il existe un morphisme $g : H \rightarrow H'$, nécessairement unique et multiplicatif, tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{g} & H' \\ u \downarrow & & \downarrow u' \\ G & \xrightarrow{f} & G' \end{array} .$$

Sous ces conditions, si les quotients G/H et G'/H' existent, il existe un morphisme unique \bar{f} rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & G' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ G/H & \xrightarrow{\bar{f}} & G'/H' \end{array} .$$

179

La première partie se démontre par réduction au cas ensembliste. La seconde résulte immédiatement de (i).

On pourrait traduire dans la situation présente les notions introduites ci-dessus pour des relations d'équivalences générales. Signalons simplement le lemme suivant dont la démonstration est immédiate par réduction au cas ensembliste :

Lemme 3.2.4. — Soient $u : H \rightarrow G$ un monomorphisme de \mathcal{C} -groupes et G' un sous- \mathcal{C} -groupe de G . Pour que le sous-objet G' de G soit stable par la relation d'équivalence définie par H , il faut et il suffit que u se factorise par le monomorphisme canonique $G' \rightarrow G$ et sous cette condition l'opération de H sur G' induite par l'opération de H sur G définie par u n'est autre que l'opération déduite du monomorphisme $H \rightarrow G'$ factorisant u .

3.3. Relations d'équivalence effectives universelles

Définition 3.3.1. — Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme. On appelle *relation d'équivalence définie par f* dans X et on note $\mathcal{R}(f)$, la \mathcal{C} -relation d'équivalence dans X image du monomorphisme canonique

$$X \times_X X \rightarrow X \times X.$$

Définition 3.3.2. — Soit R une relation d'équivalence dans X . On dit que R est *effective* si

- (i) R est représentable (i.e. est une \mathcal{C} -relation d'équivalence) ;
- (ii) le quotient $Y = X/R$ existe dans \mathcal{C} ;
- (iii) le diagramme

180

$$R \begin{array}{c} \xrightarrow{p_1, p_2} \\ \rightrightarrows \end{array} X \xrightarrow{p} Y$$

fait de R le carré fibré de X au-dessus de Y , c'est-à-dire R est la relation d'équivalence définie par p .

Si R est une relation d'équivalence effective dans X , alors p est un épimorphisme effectif (1.3). Si $f : X \rightarrow Y$ est un épimorphisme effectif, alors $\mathcal{R}(f)$ est une relation d'équivalence effective dans X dont un quotient est Y . Il y a donc une *correspondance* « galoisienne » *biunivoque* entre relations d'équivalence effectives dans X et quotients effectifs de X (i.e. classes d'équivalences des épimorphismes effectifs de source X).

Définition 3.3.3. — On dit que la relation d'équivalence R dans X est *effective universelle* si le quotient $Y = X/R$ existe, et si, pour tout $Y' \rightarrow Y$, les produits fibrés $X' = X \times_Y Y'$ et $R' = R \times_Y Y'$ existent et R' est un carré fibré de X' au-dessus de Y' . Il revient au même de dire que R est *effective* et que $p : X \rightarrow X/R$ est un *épimorphisme effectif universel*.

Il y a donc comme ci-dessus correspondance *biunivoque* entre relations d'équivalence effectives universelles dans X et quotients effectifs universels de X .

Proposition 3.3.4. — Soit R une relation d'équivalence effective universelle dans X . Soit $f : X \rightarrow Z$ un morphisme compatible avec R donc se factorisant par $g : X/R \rightarrow Z$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) g est un monomorphisme ;
- (ii) R est la relation d'équivalence définie par f .

En effet, (i) entraîne (ii) trivialement, la réciproque n'est autre que 2.5.

Définition 3.3.5. — Soit H un \mathcal{C} -groupe opérant librement sur X . On dit que H opère de manière effective, ou que l'opération de H sur X est effective (resp. effective universelle), si la relation d'équivalence définie dans X par l'action de H est effective (resp. effective universelle). 181

3.4. (M)-effectivité. — Dans la pratique, il est le plus souvent difficile de caractériser les épimorphismes effectifs universels. On dispose souvent, néanmoins, d'un certain nombre de morphismes de ce type, par exemple en théorie des schémas, des morphismes fidèlement plats quasi-compacts. Cela conduit aux développements ci-dessous.

3.4.1. — Énonçons d'abord un certain nombre de conditions portant sur une famille (M) de morphismes de \mathcal{C} :

- (a) (M) est stable par extension de la base : tout $u : T \rightarrow S$ élément de (M) est quarrable et pour tout $S' \rightarrow S$, $u' : T \times_S S' \rightarrow S'$ est élément de (M) .
- (b) Le composé de deux éléments de (M) est dans (M) .
- (c) Tout isomorphisme est élément de (M) .
- (d) Tout élément de (M) est un épimorphisme effectif.

Notons que (a) et (b) entraînent :

(a') Le produit cartésien de deux éléments de (M) est dans (M) : Soient $u : X \rightarrow Y$ et $u' : X' \rightarrow Y'$ deux S -morphisms éléments de (M) . Si $Y \times_S Y'$ existe, alors $X \times_S X'$ existe et $u \times_S u'$ est élément de (M) .

Cela résulte du diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Y' & \xleftarrow{u'} & X' \\
 & & \uparrow & & \uparrow \\
 X & \xleftarrow{\quad} & X \times_S Y' & \xleftarrow{\quad} & X \times_S X' \\
 \downarrow u & & \downarrow & \swarrow u \times_S u' & \\
 Y & \xleftarrow{\quad} & Y \times_S Y' & & .
 \end{array}$$

182 De même (a) et (d) entraînent :

(d') Tout élément de (M) est un épimorphisme *effectif universel*.

3.4.2. — La famille (M₀) des épimorphismes effectifs universels vérifie les conditions (a) à (d) de 3.4.1. En effet, (a), (c) et (d) sont vérifiés par définition, (b) résulte de 1.8. Dans la suite, nous supposons donnée une famille (M) de morphismes de \mathcal{C} vérifiant ces conditions : nos résultats s'appliqueront donc à la famille (M₀) en particulier.

Définition 3.4.3. — On dit que la relation d'équivalence R dans X est *de type (M)* si elle est représentable et si $p_1 \in (M)$ (ce qui par (b) et (c) entraîne que $p_2 \in (M)$). On dit que R est *(M)-effective* si elle est effective et si le morphisme canonique $X \rightarrow X/R$ est élément de (M). On dit que le quotient Y de X est *(M)-effectif* si le morphisme canonique $X \rightarrow Y$ est élément de (M).

Il résulte de cette définition les conséquences suivantes :

(i) Une relation d'équivalence (M)-effective est effective universelle et de type (M). Cela résulte respectivement de (d), et de (a) par le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc}
 R & \xrightarrow{p_2} & X \\
 \downarrow p_1 & & \downarrow p \\
 X & \xrightarrow{p} & X/R
 \end{array}
 .$$

(ii) Un quotient (M)-effectif est effectif universel.

(iii) Les application $R \mapsto X/R$ et $p \mapsto \mathcal{R}(p)$ réalisent une correspondance biunivoque entre relations d'équivalences (M)-effectives dans X et quotients (M)-effectifs de X.

(iv) (M₀)-effectif équivaut à effectif universel.

183 **3.4.4.** — Soit H un S-groupe dont le morphisme structural soit élément de (M). Alors si H opère *librement* sur le S-objet X, il y définit une relation d'équivalence de type (M). En effet par (a) le produit fibré $H \times_S X$ existe et $pr_2 : H \times_S X \rightarrow X$ est élément

de (M). On dira que l'opération de H est (M)-effective si la relation d'équivalence définie dans X par cette opération est (M)-effective.

Proposition 3.4.5 ((M)-effectivité et changement de base). — Soit R une relation d'équivalence (M)-effective dans X au-dessus de S. Posons $Y = X/R$. Soit $S' \rightarrow S$ un changement de base tel que $Y' = Y \times_S S'$ existe. Alors $X' = X \times_S S'$ existe, $R' = R \times_S S'$ est une relation d'équivalence (M)-effective dans X' au-dessus de S' et $X'/R' \simeq (X/R)'$.

En effet, les morphismes canoniques $X \rightarrow Y$ et $R \rightarrow Y$ sont éléments de (M), donc par (a') X' et R' sont représentables. Par associativité du produit, R' est la relation d'équivalence définie dans X' par le morphisme canonique $X' \rightarrow Y'$ qui est élément de (M), d'où la conclusion.

Proposition 3.4.6 ((M)-effectivité et produits cartésiens). — Soit R (resp. R') une relation d'équivalence (M)-effective dans X (resp. X') au-dessus de S. Si $(X/R) \times_S (X'/R')$ existe, alors $X \times_S X'$ existe, $R \times_S R'$ est une relation d'équivalence (M)-effective dans $X \times_S X'$ au-dessus de S et

$$(X \times_S X') / (R \times_S R') \simeq X/R \times_S X'/R'.$$

Posons $Y = X/R$, $Y' = X'/R'$. D'après (a'), le produit fibré $X \times_S X'$ existe et le morphisme canonique

$$q : X \times_S X' \rightarrow Y \times_S Y'$$

est élément de (M). Or la formule

$$(X \times X') \times_{(Y \times Y')} (X \times X') \simeq (X \times_Y X) \times (X' \times_{Y'} X')$$

(tous les produits non indicés sont pris sur S) montre que $R \times_S R'$ est la relation d'équivalence définie par q dans $X \times_S X'$, ce qui achève la démonstration. 184

3.5. Construction de quotients par descente. — Il arrive fréquemment que l'on ne sache pas construire directement un quotient, mais qu'on sache le faire après un changement de base convenable. Le présent numéro donne un critère utile dans cette situation.

On a vu au paragraphe 2 la définition d'une donnée de descente sur un objet X' au-dessus de S' relativement à un morphisme $S' \rightarrow S$.

Définition 3.5.1. — On dit qu'une donnée de descente sur X' relativement à $S' \rightarrow S$ est effective, si X' muni de cette donnée de descente est isomorphe à l'image réciproque sur S' d'un objet X au-dessus de S, munie de sa donnée de descente canonique.

Si $S' \rightarrow S$ est un morphisme de descente (2.2), alors le X de la définition est unique à isomorphisme unique près. Dire que $S' \rightarrow S$ est un morphisme de descente effective (2.2), c'est dire que c'est un morphisme de descente et que toute donnée de descente relativement à ce morphisme est effective.

Considérons maintenant une relation d'équivalence R dans un objet X au-dessus de S. Soient X' (resp. X'' , resp. X''') les images inverses de X sur S' , $S'' = S' \times_S S'$ et

$S''' = S' \times_S S' \times_S S'$ et soit R', R'', R''' les relations d'équivalence déduites de R par image inverse. Supposons que la relation d'équivalence R' dans X' soit (M) -effective, et considérons le quotient $Y' = X'/R'$ qui est un objet au-dessus de S' . Ses deux images inverses sur S'' sont isomorphes à X''/R'' d'après 3.4.5. Le S' -objet Y' est donc muni d'une donnée de recollement canonique. Utilisant de même l'unicité de X'''/R''' , on voit que c'est même une *donnée de descente*. (Remarque : on a implicitement supposé dans cette démonstration que tous les produits fibrés écrits existaient, ce qui est le cas en particulier si $S' \rightarrow S$ est quarrable, par exemple un morphisme de descente).

185 **Proposition 3.5.2.** — *Soit R une relation d'équivalence dans l'objet X au-dessus de S . Soit $S' \rightarrow S$ un épimorphisme effectif universel. Supposons que tout S -morphisme dont l'image inverse sur S' est dans (M) soit lui-même dans (M) . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) R est (M) -effective dans X ;

(ii) R' est (M) -effective dans X' et la donnée de descente canonique sur X'/R' est effective.

S'il en est ainsi, l'objet « descendu » de X'/R' est canoniquement isomorphe à X/R .

Le fait que (i) entraîne (ii) n'est autre que la traduction dans le langage de la descente de 3.4.4. Si on montre la réciproque, la dernière affirmation de la proposition sera conséquence du fait qu'un épimorphisme effectif universel est un morphisme de descente (2.3), donc que l'« objet descendu » est unique (= à isomorphisme unique près).

Démontrons donc (ii) \Rightarrow (i). Soit Y' le quotient X'/R' et Y l'objet descendu. Comme le morphisme canonique $p' : X' \rightarrow X'/R' = Y'$ est compatible par construction avec les données de descente (ses images inverses sur S'' coïncident avec le morphisme canonique $X'' \rightarrow X''/R''$), il provient par image inverse sur S' d'un S -morphisme $p : X \rightarrow Y$. Comme p' est élément de (M) , il résulte de l'hypothèse faite sur le morphisme $S' \rightarrow S$ que p est également élément de (M) . Comme p' est compatible avec la relation d'équivalence R' , p est compatible avec R , toujours parce qu'un épimorphisme effectif universel est un morphisme de descente. On a donc un morphisme

$$R \longrightarrow X \underset{Y}{\times} X.$$

Pour démontrer que R est (M) -effective et que Y est isomorphe à X/R , il suffit de prouver que ce morphisme est un isomorphisme. Or il le devient par extension de la base de S à S' , car R' est effective, c'est donc un isomorphisme pour la même raison que précédemment (2.4).

186 Remarquons que l'hypothèse du texte est vérifiée si on prend pour (M) la famille (M_0) des épimorphismes effectifs universels et si \mathcal{C} possède des produits fibrés (1.10). On en déduit le

Corollaire 3.5.3. — *Supposons que \mathcal{C} possède des produits fibrés (au-dessus de S suffirait). Soient R une relation d'équivalence dans X au-dessus de S et $S' \rightarrow S$ un épimorphisme effectif universel. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) R est effective universelle dans X ,
(ii) R' est effective universelle dans X' et la donnée de descente canonique sur X'/R' est effective.
S'il en est ainsi, l'objet « descendu » de X'/R' est canoniquement isomorphe à X/R .

4. Topologies et faisceaux

La notion de crible, et la présentation de la notion de topologie (4.2.1) adoptée ici, (plus intrinsèque et plus commode à bien des égards que celle par familles couvrantes de [MA]), sont dus à J. GIRAUD [AS].

4.1. Cribles

Définition 4.1.1. — On appelle *crible* de la catégorie \mathcal{C} un sous-foncteur C du foncteur final $\underline{e} : \mathcal{C}^\circ \rightarrow (\mathbf{Ens})$.

A tout crible C de \mathcal{C} on associe l'ensemble $E(C)$ des objets X de \mathcal{C} tels que $C(X) \neq \emptyset$, c'est-à-dire tels que le morphisme structural $X \rightarrow \underline{e}$ se factorise par C . On a donc les équivalences

$$(+) \quad \begin{cases} X \in E(C) \iff C(X) = \underline{e}(X) = \{\emptyset\}. \\ X \notin E(C) \iff C(X) = \emptyset. \end{cases}$$

L'ensemble $E(C)$ jouit de la propriété suivante :

187

$$(++) \quad \text{Si } X \in E(C) \text{ et si } \text{Hom}(Y, X) \neq \emptyset, \text{ alors } Y \in E(C).$$

Réciproquement, si E est un sous-ensemble de $\text{Ob } \mathcal{C}$ jouissant de la propriété $(++)$, alors E s'écrit de manière unique sous la forme $E(C)$ et C est défini par les formules $(+)$. Il y a donc correspondance biunivoque entre les cribles de \mathcal{C} et les sous-ensembles de $\text{Ob } \mathcal{C}$ vérifiant la condition $(++)$. Par *abus de langage*, nous dirons parfois que l'ensemble $E(C)$ est un crible de \mathcal{C} .

Si on munit l'ensemble $\text{Ob } \mathcal{C}$ de sa *structure de préordre naturelle*, (Y dominant X s'il existe une flèche de Y dans X), les ensembles $E(C)$ sont donc les sous-ensembles de $\text{Ob } \mathcal{C}$ qui contiennent tout majorant d'un de leurs éléments. L'ensemble des cribles de \mathcal{C} est muni d'une structure d'ordre : on dira que C est *plus fin* que C' si $C \subset C'$, ou, ce qui revient au même $E(C) \subset E(C')$. On a $E(C) \cap E(C') = E(C \times C')$ et l'ensemble des cribles de \mathcal{C} est *filtrant*.

Tout sous-ensemble E de $\text{Ob } \widehat{\mathcal{C}}$, par exemple un sous-ensemble de $\text{Ob } \mathcal{C}$ définit un crible $C(E)$: l'ensemble des $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$, tels que $F(X) \neq \emptyset$ pour au moins un $F \in E$ vérifie la condition $(++)$ et définit le crible cherché.

Ce crible peut aussi être défini comme l'*image* de la famille de morphismes $\{F \rightarrow \underline{e}, F \in E\}$ au sens de la définition suivante :

Définition 4.1.2. — Soit $\{F_i \rightarrow F\}$ une famille de morphismes de $\widehat{\mathcal{C}}$ de même but F . On appelle *image* de cette famille le sous-foncteur de F défini par

$$S \rightsquigarrow \bigcup_i \text{Im } F_i(S) \subset F(S).$$

Proposition 4.1.3. — La formation de l'image commute à l'extension de la base : dans les notations précédentes, désignons par I l'image de la famille $\{F_i \rightarrow F\}$; pour tout morphisme $G \rightarrow F$ de $\widehat{\mathcal{C}}$, l'image de la famille de morphismes $\{F_i \times_F G \rightarrow G\}$ est le sous-foncteur $I \times_F G$ de G .

188

Si C est un crible de \mathcal{C} et E un sous-ensemble de $\text{Ob } \mathcal{C}$ tel que $C(E) = C$, on dit que E est une *base* de C . Tout crible C possède une base, par exemple l'ensemble $E(C)$. Nous nous proposons de décrire l'ensemble $\text{Hom}(C, F)$, où C est un crible de \mathcal{C} et F un objet de $\widehat{\mathcal{C}}$, à l'aide d'une base de C .

Soit $\{S_i\}$ une base du crible C , pour chaque couple (i, j) , on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} S_i \times S_j & \longrightarrow & S_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_j & \longrightarrow & \underline{e} \end{array},$$

d'où un diagramme d'ensembles

$$\Gamma(F) = \text{Hom}(\underline{e}, F) \xrightarrow{i} \prod_i \text{Hom}(S_i, F) \xrightarrow{j_1, j_2} \prod_{i,j} \text{Hom}(S_i \times S_j, F)$$

tel que $j_1 i = j_2 i$. On a donc un morphisme

$$\text{Hom}(\underline{e}, F) \longrightarrow \text{Ker} \left(\prod_i \text{Hom}(S_i, F) \rightrightarrows \prod_{i,j} \text{Hom}(S_i \times S_j, F) \right).$$

On vérifie immédiatement :

Proposition 4.1.3. — On a un isomorphisme fonctoriel en F

$$\text{Hom}(C, F) \xrightarrow{\sim} \text{Ker} \left(\prod_i \text{Hom}(S_i, F) \rightrightarrows \prod_{i,j} \text{Hom}(S_i \times S_j, F) \right),$$

tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(\underline{e}, F) & \longrightarrow & \text{Ker} \left(\prod_i \text{Hom}(S_i, F) \rightrightarrows \prod_{i,j} \text{Hom}(S_i \times S_j, F) \right) \\ \parallel & & \uparrow \wr \\ \text{Hom}(\underline{e}, F) & \longrightarrow & \text{Hom}(C, F) \end{array},$$

où la dernière ligne est induite par le morphisme canonique $C \rightarrow \underline{e}$, soit commutatif.

189 **Corollaire 4.1.4.** — Supposons que les produits fibrés $S_i \times S_j$ soient représentables, par exemple que les S_i soient quarrables. On a alors pour tout $F \in \text{Ob } \widehat{\mathcal{C}}$, un isomorphisme

$$\text{Hom}(C, F) \xrightarrow{\sim} \text{Ker} \left[\prod_i F(S_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(S_i \times S_j) \right].$$

Remarque 4.1.5. — Soit R un crible de \mathcal{C} ; désignons par \mathcal{R} la sous-catégorie pleine de \mathcal{C} dont l'ensemble des objets est $E(R)$ et par

$$i_R : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{C}$$

le foncteur d'inclusion. On a un isomorphisme fonctoriel en $F \in \text{Ob } \widehat{\mathcal{C}}$

$$\text{Hom}(R, F) \longrightarrow \Gamma(F \circ i_R)$$

tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(\underline{e}, F) & \longrightarrow & \text{Hom}(R, F) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \Gamma(F) & \longrightarrow & \Gamma(F \circ i_R) \end{array} ,$$

où la seconde ligne est induite par le foncteur i_R , soit commutatif.

Définition 4.1.6. — Soit \mathcal{C} une catégorie. On appelle *crible* de l'objet S de \mathcal{C} un crible de la catégorie $\mathcal{C}/_S$.

Un crible de S est donc un sous- $\widehat{\mathcal{C}}$ -objet de S . Il lui correspond canoniquement un sous-ensemble de $\text{Ob } \mathcal{C}/_S$ contenant la source de toute flèche dont il contient le but. Par abus de langage, un tel ensemble sera aussi appelé *crible* de S .

4.2. Topologies : définitions

Définition 4.2.1. — Soit \mathcal{C} une catégorie. On appelle *topologie* sur \mathcal{C} la donnée pour chaque S de \mathcal{C} d'un ensemble $J(S)$ de cribles de S , appelés *cribles couvrants* ou *raffinements* de S , donnée vérifiant les axiomes suivants :

190

(T 1) Pour tout raffinement R de S et tout morphisme $T \rightarrow S$, le crible $R \times_S T$ de T est couvrant (« stabilité par *changement de base* »).

(T 2) Si R, C sont deux cribles de S , si R est couvrant et si pour tout $T \in \text{Ob } \mathcal{C}$ et tout morphisme $T \rightarrow R$, le crible $C \times_S T$ de T est couvrant, alors C est un raffinement de S .

(T 3) Si $C \supset R$ sont deux cribles de S et si R est couvrant, alors C est couvrant.

(T 4) Pour tout S , S est un raffinement de S .

On peut reformuler ces axiomes de la manière suivante : pour tout objet F de $\widehat{\mathcal{C}}$, notons $J(F)$ l'ensemble des sous-foncteurs R de F tels que pour tout morphisme $T \rightarrow F$ de $\widehat{\mathcal{C}}$, où T est *représentable*, $R \times_F T$, qui est un crible de T , soit *couvrant*. En vertu de (T 1), cette notation est bien compatible avec la précédente. On dira

également que $R \in J(F)$ est un *raffinement* de F . On vérifie immédiatement que les axiomes précédents entraînent les propriétés suivantes :

(T' 0) Si $F \supset G$ sont deux objets de $\widehat{\mathcal{C}}$, et si pour tout $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$ et tout morphisme $S \rightarrow F$, $G \times_F S \in J(S)$, alors $G \in J(F)$.

(T' 1) Si $G \in J(F)$, et si $H \rightarrow F$ est un morphisme de $\widehat{\mathcal{C}}$, alors $G \times_F H \in J(H)$.

(T' 2) Si $F \supset G \supset H$ sont trois objets de $\widehat{\mathcal{C}}$, si $G \in J(F)$ et $H \in J(G)$, alors $H \in J(F)$.

(T' 3) Si $F \supset G \supset H$ sont trois objets de $\widehat{\mathcal{C}}$ et si $H \in J(F)$, alors $G \in J(F)$.

(T' 4) Pour tout $F \in \text{Ob } \widehat{\mathcal{C}}$, $F \in J(F)$.

191 Réciproquement, si on se donne pour tout $F \in \text{Ob } \widehat{\mathcal{C}}$ un ensemble $J(F)$ de sous-objets de F vérifiant les propriétés (T' 0) à (T' 4), l'application $S \mapsto J(S)$ définit une topologie sur \mathcal{C} et les deux constructions précédentes sont inverses l'une de l'autre.

De (T' 1), (T' 2) et (T' 3) résulte la propriété suivante :

(T' 5) Si G et H sont deux sous-objets de F , si $G, H \in J(F)$, alors $G \cap H \in J(F)$.

L'ensemble $J(H)$, ordonné par la relation \supset est donc *filtrant* ; cette remarque nous servira plus tard.

4.2.2. — On dira que la topologie définie par J est plus fine que la topologie définie par J' si pour tout $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$, $J(S) \supset J'(S)$ (il revient au même de dire que pour tout $F \in \text{Ob } \widehat{\mathcal{C}}$, $J(F) \supset J'(F)$).

Tout ensemble de topologies sur \mathcal{C} possède une borne *inférieure* : soit I un ensemble d'indice, et pour chaque $i \in I$, soit $S \mapsto J_i(S)$ une topologie sur \mathcal{C} . Posons $J(S) = \bigcap_{i \in I} J_i(S)$; il est immédiat que l'on a défini ainsi une topologie sur \mathcal{C} , et que c'est bien la borne inférieure de l'ensemble donné.

En particulier, donnons-nous pour chaque $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$, un ensemble $E(S)$ de cribles de S . On appelle *topologie engendrée* par ces ensembles la topologie la moins fine pour laquelle les éléments de $E(S)$ soient des raffinements de S pour tout S .

Définition 4.2.3. — Soit $\{F_i \rightarrow F\}$ une famille de morphismes de $\widehat{\mathcal{C}}$. Soit $G \subset F$ l'image (4.1.2) de cette famille. La famille est dite *couvrante* si $G \in J(F)$.

Un morphisme est dit *couvrant* si la famille réduite à ce morphisme est couvrante.

Cette définition s'applique en particulier à une inclusion : un crible C de S est couvrant si et seulement si le morphisme canonique $C \rightarrow S$ est couvrant.

192 Les axiomes (T' 0) à (T' 5) entraînent pour les familles couvrantes les propriétés suivantes :

(C 0) Soit $\{F_i \rightarrow F\}$ une famille de morphismes de $\widehat{\mathcal{C}}$. Si pour tout changement de base *représentable* $S \rightarrow F$, la famille $\{F_i \times_F S \rightarrow S\}$ est couvrante, alors la famille initiale l'est aussi.

(C 1) Pour toute famille couvrante $\{F_i \rightarrow F\}$ et tout morphisme $G \rightarrow F$, la famille $\{F_i \times_F G \rightarrow G\}$ est couvrante (« *stabilité par changement de base* »).

(C 2) Si $\{F_i \rightarrow F\}$ est une famille couvrante et si, pour chaque i , $\{F_{ij} \rightarrow F_i\}$ est une famille couvrante, alors la famille composée $\{F_{ij} \rightarrow F\}$ est couvrante (« *stabilité par composition* »).

(C 3) Si $\{G_j \rightarrow F\}$ est une famille couvrante, et si $\{F_i \rightarrow F\}$ est une famille de morphismes de but F telle que pour chaque j il existe un i tel que $G_j \rightarrow F$ se factorise par $F_i \rightarrow F$, alors $\{F_i \rightarrow F\}$ est couvrante (« *saturation* »).

(C 4) Toute famille réduite à un isomorphisme est couvrante.

Noter que (C 2) et (C 3) entraînent aussi :

(C 5) Si $\{F_i \rightarrow F\}$ est une famille de morphismes de but F telle qu'il existe une famille couvrante $\{G_j \rightarrow F\}$ telle que pour tout j la famille $\{F_i \times_F G_j \rightarrow G_j\}$ soit couvrante, alors la famille $\{F_i \rightarrow F\}$ est couvrante (« *une famille localement couvrante est couvrante* »).

4.2.4. — Soit réciproquement \mathcal{C} une catégorie possédant des produits fibrés et donnons-nous pour chaque $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$ un ensemble de familles de morphismes de \mathcal{C} de but S dites familles *couvrantes*, donnée vérifiant les axiomes (C 1) à (C 4) (donc aussi (C 5) qui en est une conséquence). Pour tout $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$, soit $J(S)$ l'ensemble des cribles de S possédant une base couvrante (ou, ce qui revient au même par (C 3), dont toutes les bases sont couvrantes). Alors $S \mapsto J(S)$ définit une topologie sur \mathcal{C} . Les deux constructions précédentes sont inverses l'une de l'autre.

193

En fait, dans les applications, il est peu pratique de considérer *toutes* les familles couvrantes, car on possède parfois des descriptions assez simples d'un nombre « suffisant » de ces familles. Cela conduit à poser la

Définition 4.2.5. — Soit \mathcal{C} une catégorie. On appelle *prétopologie* sur \mathcal{C} la donnée pour chaque $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$ d'un ensemble $R(S)$ de familles de morphismes $\{S_i \rightarrow S\}$ de but S dites *couvrantes* pour la prétopologie envisagée, vérifiant les axiomes suivants :

(P 1) Pour toute famille $\{S_i \rightarrow S\} \in R(S)$ et tout morphisme $T \rightarrow S$, les produits fibrés $S_i \times_S T$ existent et $\{S_i \times_S T \rightarrow T\} \in R(T)$.

(P 2) Si $\{S_i \rightarrow S\} \in R(S)$ et si pour chaque i $\{T_{ij} \rightarrow S_i\} \in R(S_i)$, alors la famille composée $\{T_{ij} \rightarrow S\}$ appartient à $R(S)$.

(P 3) Toute famille réduite à un isomorphisme est couvrante.

On appelle topologie *engendrée* par R la topologie la moins fine pour laquelle les familles données soient couvrantes.

Proposition 4.2.6. — Soit pour tout S , $J(S)$ l'ensemble des cribles de S couvrants pour la topologie engendrée par la prétopologie R . Soit $J_R(S)$ la partie de $J(S)$ formée des cribles définis par les familles de $R(S)$. Alors $J_R(S)$ est cofinal dans $J(S)$: tout raffinement de S contient un crible défini par une famille de $R(S)$.

Soit pour tout S , $J'(S)$ l'ensemble des cribles de S contenant un crible de $J_R(S)$. On a évidemment $J'(S) \subset J(S)$. Pour montrer que $J(S) = J'(S)$, il suffit de montrer que les $J'(S)$ font une topologie sur \mathcal{C} , c'est-à-dire vérifient les axiomes (T 1) à (T 4). Or (T 1), (T 3), (T 4) sont évidemment vérifiés. Il reste à vérifier (T 2). Soit donc

194

R un élément de $J'(S)$ et C un sous-crible de R ; on suppose que pour tout $T \rightarrow R$, $C \times_R T$ est dans $J'(T)$ et il faut prouver que $C \in J'(S)$. Par définition de J' , R contient un raffinement R' défini par une famille $\{S_i \rightarrow S\} \in R(S)$. Comme on a vérifié (T 3), il suffit de prouver que $R' \cap C \in J'(S)$, on peut donc supposer que $R = R'$. Par hypothèse, pour tout i , $C \times_S S_i \in J'(S_i)$; il existe donc pour chaque i une famille couvrante $\{T_{ij} \rightarrow S_i\} \in R(S_i)$ telle que $T_{ij} \rightarrow S_i$ se factorise par $C \times_S S_i \rightarrow S_i$. Le morphisme $T_{ij} \rightarrow S$ se factorise donc par $C \rightarrow S$, ce qui montre que C contient le crible défini par la famille composée $\{T_{ij} \rightarrow S\}$ et on a terminé par (P 2).

Les axiomes (P 1) à (P 3) sont ceux de [MA]. Etant donné l'intérêt pratique des prétopologies, nous interpréterons chaque résultat important à l'aide d'une prétopologie définissant la topologie donnée.

Remarque 4.2.7. — On peut introduire une notion un peu plus générale : on donne pour chaque S un ensemble de familles couvrantes vérifiant (P 1), (P 3) et la proposition 4.2.6. Ceci se présente en particulier, lorsque les familles données vérifient (P 1), (P 3) et (C 5). Le lecteur pourra consulter [D].

Définition 4.2.8. — Soit S un objet de \mathcal{C} . Soit $\mathcal{P}(S')$ une relation faisant intervenir un argument $S' \in \text{Ob } \mathcal{C}/_S$. On suppose que $\text{Hom}(S'', S') \neq \emptyset$ entraîne $\mathcal{P}(S') \Rightarrow \mathcal{P}(S'')$. On dit que \mathcal{P} est vrai *localement sur* S si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

- (i) L'ensemble des $S' \rightarrow S$ tels que $\mathcal{P}(S')$ soit vrai est un raffinement de S
- (ii) Il existe un raffinement de S tel que $\mathcal{P}(S')$ soit vrai pour tout S' de ce raffinement.
- (iii) (Si la topologie donnée est définie par une prétopologie). Il existe une famille couvrante pour cette prétopologie telle que $\mathcal{P}(S')$ soit vrai pour tout S' de cette famille.

Exemple 4.2.9. — Soit $f : X \rightarrow Y$ un S -morphisme. On dira que f est *localement* un isomorphisme s'il existe une famille couvrante $\{S_i \rightarrow S\}$ telle que pour tout i , $f \times_S S_i$ soit un isomorphisme. Il revient au même d'exiger qu'il existe un raffinement R de S tel que pour tout $T \rightarrow R$, $X(T) \rightarrow Y(T)$ soit un isomorphisme.

On verra dans la suite bien d'autres exemples de langage « local ».

4.3. Préfaisceaux, faisceaux, faisceau associé un préfaisceau

Définition 4.3.1. — Soit \mathcal{C} une catégorie. On appelle *préfaisceau* d'ensembles sur \mathcal{C} tout foncteur contravariant de \mathcal{C} dans la catégorie des ensembles. La catégorie $\widehat{\mathcal{C}} = \mathbf{Hom}(\mathcal{C}^\circ, (\mathbf{Ens}))$ est appelée *catégorie des préfaisceaux* sur \mathcal{C} . Si \mathcal{C} est munie d'une topologie, on dit que le préfaisceau P est *séparé* (resp. est un *faisceau*) si pour tout $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$ et tout $R \in J(S)$, l'application canonique

$$(+) \quad P(S) = \text{Hom}(S, P) \longrightarrow \text{Hom}(R, P)$$

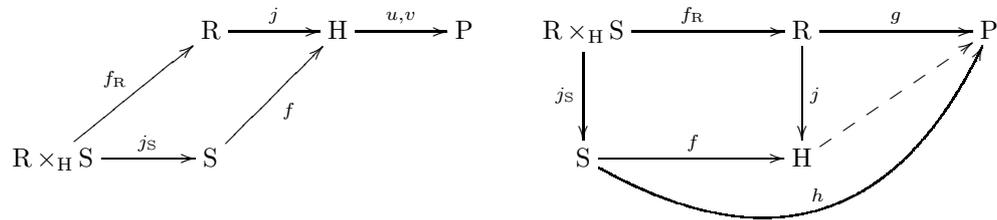
est *injective* (resp. *bijective*). On appelle *catégorie des faisceaux* et on note $\widetilde{\mathcal{C}}$ la sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathcal{C}}$ dont les objets sont les faisceaux.

Proposition 4.3.2. — Soit P un préfaisceau séparé (resp. un faisceau). Pour tout foncteur $H \in \text{Ob } \widehat{\mathcal{C}}$ et tout $R \in J(H)$; l'application canonique

$$(+) \quad \text{Hom}(H, P) \longrightarrow \text{Hom}(R, P)$$

est injective (resp. bijective).

Soient en effet P un préfaisceau séparé, H un préfaisceau, $R \in J(H)$, et $u, v : H \rightarrow P$ tels que $uj = vj$ (voir diagramme). Pour tout $f : S \rightarrow H$, $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$, $R \times_H S$ est un raffinement de S et $ufj_S = v f j_S$. Comme P est séparé, on en tire $uf = vf$. Ceci étant vrai pour tout S représentable, on a $u = v$. 196



Supposons maintenant que P soit un faisceau. Soit $g : R \rightarrow P$, montrons qu'il se factorise par H . Pour tout $f : S \rightarrow H$, $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$, $g \circ f_R : R \times_H S \rightarrow P$ se factorise de manière *unique* par S , donc définit un morphisme $h : S \rightarrow P$, qui est évidemment fonctoriel par rapport à f , par unicité.

On a donc défini pour tout S une application de $F(S)$ dans $P(S)$ fonctorielle en S , donc un morphisme de F dans P qui répond bien aux conditions exigées.

Proposition 4.3.3 ([AS], 1.3). — Soit \mathcal{C} une catégorie. Soit P un préfaisceau sur \mathcal{C} ; pour tout $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$, notons $J(S)$ l'ensemble des cribles R de S tels que pour tout $T \rightarrow S$, l'application

$$(+) \quad \text{Hom}(T, P) \longrightarrow \text{Hom}(R \times_S T, P)$$

soit injective (resp. bijective). Alors les $J(S)$ définissent une topologie sur \mathcal{C} , i.e. vérifient les axiomes (T 1) à (T 4).

Corollaire 4.3.4. — Soit pour tout $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$, $K(S)$ une famille de cribles vérifiant (T 1). Soit P un préfaisceau sur \mathcal{C} . Pour qu'il soit séparé (resp. un faisceau) pour la topologie engendrée par les $K(S)$, il faut et il suffit que pour tout $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$ et tout $R \in K(S)$, l'application canonique

$$(+) \quad \text{Hom}(S, P) \longrightarrow \text{Hom}(R, P)$$

soit injective (resp. bijective).

Corollaire 4.3.5. — Soit pour chaque $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$, $R(S)$ un ensemble de familles de morphisme de \mathcal{C} de but S , vérifiant (P 1) (par exemple définissant une prétopologie). Soit P un préfaisceau sur \mathcal{C} . Pour que P soit séparé (resp. un faisceau) pour la 197

topologie engendrée par R , il faut et il suffit que pour tout $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$ et toute famille $\{S_i \rightarrow S\} \in R(S)$, l'application

$$P(S) \longrightarrow \prod_i P(S_i)$$

soit injective, (resp. le diagramme

$$P(S) \longrightarrow \prod_i P(S_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} P(S_i \times_S S_j)$$

soit exact).

Définition 4.3.6. — Soit \mathcal{C} une catégorie. On appelle *topologie canonique* sur \mathcal{C} la topologie la plus fine pour laquelle tous les foncteurs représentables soient des faisceaux.

Corollaire 4.3.7. — Pour qu'un crible R de S soit un raffinement pour la topologie canonique, il faut et il suffit que pour tout morphisme $T \rightarrow S$ de \mathcal{C} et tout $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$, l'application canonique

$$\text{Hom}(T, X) \longrightarrow \text{Hom}(R \times_S T, X)$$

soit bijective.

Définition 4.3.8. — Un crible couvrant pour la topologie canonique sera dit *crible épimorphique effectif universel*.

Corollaire 4.3.9. — Une famille épimorphique effective universelle définit un crible épimorphique effectif universel. Réciproquement, toute famille quarrable définissant un crible épimorphique effectif universel est épimorphique effective universelle.

198 Passons maintenant à la construction du *faisceau associé*. Soient P un préfaisceau et S un objet de \mathcal{C} . Si $R \supset R'$ sont deux raffinements de S , on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(S, P) & \longrightarrow & \text{Hom}(R, P) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \text{Hom}(R', P) \end{array} .$$

L'ensemble ordonné $J(S)$ est filtrant comme on l'a déjà remarqué. Comme S est un élément de $J(S)$, on a un morphisme évident

$$\text{Hom}(S, P) \longrightarrow \varinjlim_{R \in J(S)} \text{Hom}(R, P).$$

On pose $\check{H}^0(S, P) = \varinjlim_{R \in J(S)} \text{Hom}(R, P)$. On vérifie que $\check{H}^0(S, P)$ dépend fonctoriellement de S , donc définit un foncteur LP par

$$(++) \quad \text{Hom}(S, LP) = \check{H}^0(S, P) = \varinjlim_{R \in J(S)} \text{Hom}(R, P).$$

On a par construction des morphismes

$$\begin{aligned} \ell_P &: P \longrightarrow LP \\ z_R &: \text{Hom}(R, P) \longrightarrow \text{Hom}(S, LP). \end{aligned}$$

Lemme 4.3.10. — (i) Pour tout raffinement R de S et tout $u : R \rightarrow P$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\ell_P} & LP \\ \uparrow u & & \uparrow z_R(u) \\ R & \xrightarrow{i_R} & S \end{array}$$

est commutatif.

(ii) Pour tout morphisme $S \xrightarrow{v} LP$, il existe un raffinement h de S et un morphisme $u : R \rightarrow P$ avec $v = z_R(u)$. 199

(iii) Soit Q un foncteur et $u, v : Q \rightarrow P$ tels que $\ell_P u = \ell_P v$. Alors le noyau du couple (u, v) est un raffinement de Q .

(iv) Soient $u : R \rightarrow P$ et $u' : R' \rightarrow P$; pour que $z_R(u) = z_{R'}(u')$, il faut et il suffit qu'il existe un raffinement $R'' \subset R \cap R'$ de S tel que u et u' coïncident sur R'' .

Démonstration (i) : Il faut vérifier que $z_R(u)i_R = \ell_P u$. Pour cela, il suffit de vérifier que les composés de ces deux morphismes avec tout morphisme $T \xrightarrow{g} R$, où T est représentable, sont égaux. Or considérons $f = i_R g$ et le produit fibré $R' = R \times_S T$.

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\ell_P} & LP \\ \uparrow u & & \uparrow z_R(u) \\ R & \xrightarrow{i_R} & S \\ \uparrow p & \swarrow g & \uparrow f \\ R' & \xrightarrow{\sim} & T \\ & \searrow i_{R'} & \end{array} .$$

Par définition de ℓ_P , $\ell_P u g = z_R(u) f$ (c'est le cas particulier de ce qu'on cherche à démontrer dans lequel i_R est un isomorphisme), or $z_R(u) f = z_R(u) i_R g$.

(ii) et (iv) ne font que traduire la définition de $\text{Hom}(S, LP)$ comme limite inductive.

(iii) : Si K désigne le noyau du couple (u, v) , pour chaque morphisme $f : S \rightarrow Q$ où S est représentable, $K \times_Q S$ majore le noyau du couple de flèches $u f, v f : S \rightarrow P$. On est donc ramené à démontrer l'assertion dans le cas où $Q = S$ est représentable. Mais en ce cas, il résulte de (ii) et (iv) que K contient un raffinement de S donc est un raffinement de S .

On vérifie enfin que $P \mapsto LP$ définit un foncteur

$$L : \widehat{\mathcal{C}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}$$

et $P \mapsto \ell_P$ un morphisme de foncteurs

$$\ell : \text{Id}_{\widehat{\mathcal{C}}} \longrightarrow L.$$

Enonçons maintenant le résultat essentiel :

Proposition 4.3.11. — (i) Si P est un préfaisceau quelconque, LP est séparé et $\ell_P : P \rightarrow LP$ est couvrant (4.2.3).

(ii) Si P est un faisceau, $P \rightarrow LP$ est un isomorphisme.

(iii) Pour tout préfaisceau P et tout préfaisceau séparé (resp. faisceau) F , l'application

$$\text{Hom}(\ell_P, F) : \text{Hom}(LP, F) \rightarrow \text{Hom}(P, F)$$

est injective (resp. bijective).

(iv) Si P est séparé, $\ell_P : P \rightarrow LP$ est un monomorphisme couvrant (donc P est un crible de LP), et LP est un faisceau.

Démonstration : (i) Il est d'abord clair que $P \rightarrow LP$ est couvrant ; en effet, pour tout $S \rightarrow LP$, le morphisme obtenu par changement de base $P \times_{LP} S \rightarrow S$ est majoré par le morphisme d'inclusion d'un crible de S (par 4.3.10 (i) et (ii)), donc est couvrant.

Si d'autre part deux morphismes $S \xrightarrow{v_1, v_2} LP$ induisent le même morphisme d'un raffinement R de S , montrons qu'ils sont égaux. Il existe des raffinements $R_i, i = 1, 2$, et des morphismes $u_i : R_i \rightarrow P$ tels que $z_{R_i}(u_i) = v_i$. En prenant R assez petit, on peut supposer que $R_1 = R_2 = R$. Il résulte alors du diagramme commutatif de 4.3.10 (i) que $\ell_P u_1 = \ell_P u_2$. D'après loc. cit. (ii), u_1 et u_2 coïncident donc sur un raffinement de R , donc un raffinement de S , ce qui entraîne que $z_R(u_1) = z_R(u_2)$, par loc. cit. (iv).

(ii) est clair, car si P est un faisceau, $\text{Hom}(S, P) \rightarrow \text{Hom}(R, P)$ est déjà un isomorphisme pour tout raffinement R de S .

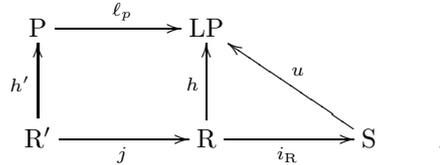
(iii) Soient u et v deux morphismes $LP \rightarrow F$ tels que $u\ell_P = v\ell_P$. Pour montrer que $u = v$, il suffit de voir que $uf = vf$ pour tout $f : S \rightarrow LP$ où S est représentable. Or il existe un raffinement R de S et un morphisme $g : R \rightarrow P$ avec $f = z_R(g)$. Alors uf et vf coïncident sur R avec $u\ell_P g = v\ell_P g$, donc coïncident sur R . Si F est séparé, on a donc $uf = vf$. Supposons maintenant que F soit un faisceau ; on a alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\ell_P} & LP \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ F & \xrightarrow{\sim} & LF \end{array}$$

qui montre que $\text{Hom}(\ell_P, F)$ est surjectif.

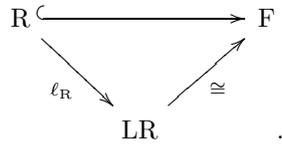
(iv) Montrons que si P est séparé, $P \rightarrow LP$ est un monomorphisme. Pour cela, il suffit de voir que pour tout couple de morphismes $u, v : S \rightarrow P$ (où S est représentable) tels que $\ell_P u = \ell_P v$ on a $u = v$. Or loc. cit. (iii) montre que u et v coïncident sur un raffinement de S , donc coïncident car P est séparé. Montrons enfin que LP est un faisceau. Comme on sait déjà par (i) que c'est un préfaisceau séparé, il suffit de voir que pour tout $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$, tout raffinement R de S et tout morphisme $h : R \rightarrow LP$, il existe un morphisme $u : S \rightarrow LP$ avec $u i_R = h$. Or $R' = P \times_{LP} R$ est un raffinement de

R, car P est un raffinement de LP, donc R' est un raffinement de S. Posons $u = z_{R'}(h')$.



On a $ui_{R'} = \ell_P h' = hj$, d'où $ui_R j = hj$. Comme R' est un raffinement de R et comme LP est séparé, 4.3.2 montre que $ui_R = h$,

Corollaire 4.3.12. — Soient F un faisceau et R un sous- $\widehat{\mathcal{C}}$ -objet de F. Alors R est un raffinement de F si et seulement si on a un diagramme commutatif



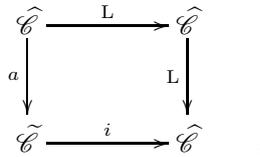
Remarque 4.3.13. — Si $J'(S)$ est un sous-ensemble cofinal de $J(S)$, on a

$$\text{Hom}(S, LP) = \lim_{R \in J'(S)} \text{Hom}(R, P).$$

En particulier, soit $S \mapsto R(S)$ une prétopologie engendrant la topologie donnée. Le foncteur L peut se décrire à l'aide des familles couvrantes éléments de $R(S)$. En explicitant la formule ci-dessus, on retrouve la construction de [MA].

Notons i le foncteur d'inclusion $\widetilde{\mathcal{C}} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$. De la proposition 4.3.11 résulte le théorème suivant :

Théorème 4.3.14. — Il existe un foncteur unique $a : \widehat{\mathcal{C}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{C}}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif



i.e. pour tout préfaisceau P, $L(L(P))$ est un faisceau. Les foncteurs i et a sont adjoints l'un de l'autre : pour tout préfaisceau P et tout faisceau F on a un isomorphisme fonctoriel en P et F

$$\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(P, i(F)) \simeq \text{Hom}_{\widetilde{\mathcal{C}}}(a(P), F),$$

c'est-à-dire

$$\text{Hom}(P, F) \simeq \text{Hom}(a(P), F).$$

Définition 4.3.15. — Le faisceau $a(P)$ est dit *associé* au préfaisceau P .

Remarque 4.3.16. — Comme le foncteur L est construit à l'aide de limites projectives et de limites inductives filtrantes, il *commute* aux *limites projectives finies*.

De plus, si on identifie $L(P \times P)$ à $LP \times LP$, le morphisme $\ell_{P \times P}$ s'identifie à $\ell_P \times \ell_P$. Il en résulte par exemple que si P est un préfaisceau en groupes, LP est aussi muni canoniquement d'une structure de préfaisceau en groupes et le morphisme canonique $P \rightarrow LP$ est un morphisme de groupes. Il en est de même pour le foncteur a , ce qui montre que si P est un préfaisceau en groupes et F un faisceau en groupes, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}\text{-gr.}}(P, i(F)) \simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}\text{-gr.}}(a(P), F).$$

Voir [D] pour plus de détails.

4.3.17. — Si \mathcal{V} est une catégorie quelconque, on appelle *préfaisceau* sur \mathcal{C} à valeurs dans \mathcal{V} un foncteur contravariant de \mathcal{C} dans \mathcal{V} . Pour définir les faisceaux à valeurs dans \mathcal{V} , il nous faut d'abord rappeler la définition de la *limite projective* d'un foncteur. Si \mathcal{R} et \mathcal{V} sont deux catégories, et

$$F : \mathcal{R}^\circ \longrightarrow \mathcal{V}$$

un foncteur contravariant de \mathcal{R} dans \mathcal{V} , on note $\varprojlim F$ l'objet de $\widehat{\mathcal{V}}$ défini de la manière suivante :

$$\varprojlim F(X) = \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{V}}}(X, \varprojlim F) = \varprojlim_{U \in \mathrm{Ob} \mathcal{R}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(F(U), X) = \mathrm{Hom}(c_X, F),$$

204 où X est un objet variable de \mathcal{R} , où c_X dénote le foncteur contravariant de \mathcal{R} dans \mathcal{V} qui envoie chaque objet de \mathcal{R} sur X et chaque flèche de \mathcal{R} sur id_X , et où le dernier Hom est pris dans la catégorie $\mathbf{Hom}(\mathcal{R}^\circ, \mathcal{V})$. Si \mathcal{R} possède un objet final $\mathbf{e}_{\mathcal{R}}$, on a $\varprojlim F = F(\mathbf{e}_{\mathcal{R}})$. Si \mathcal{V} est la catégorie des ensembles, le foncteur \varprojlim s'identifie au foncteur Γ .

Si S est un objet de \mathcal{C} et R un crible de S , notons \mathcal{R} la sous-catégorie pleine de \mathcal{C}/S dont l'ensemble d'objets est $E(R)$ et $i_R : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{C}/S$ le foncteur canonique. Si P est un préfaisceau sur \mathcal{C} à valeurs dans \mathcal{V} , il définit un foncteur $P_S : (\mathcal{C}/S)^\circ \rightarrow \mathcal{V}$. Le foncteur i_R induit un morphisme de $\widehat{\mathcal{V}}$

$$P(S) = P_S(S) = \varprojlim P_S \longrightarrow \varprojlim (P_S \circ i_R).$$

On note $\varprojlim_R P$ ce dernier objet de $\widehat{\mathcal{V}}$. En vertu de 4.1.5, la définition 4.3.1 se généralise en la

Définition 4.3.18. — Le préfaisceau P sur \mathcal{C} à valeurs dans \mathcal{V} est dit *séparé* (resp. un *faisceau*), si pour tout $S \in \mathrm{Ob} \mathcal{C}$ et tout $R \in J(S)$, le morphisme canonique de $\widehat{\mathcal{V}}$

$$P(S) \longrightarrow \varprojlim_R P$$

est un monomorphisme (resp. un isomorphisme).

Dans le cas où \mathcal{V} est la catégorie (Gr.) des groupes (où toute autre catégorie d'ensembles munis de structures algébriques définies par limites projectives finies), on peut voir (cf. [D]) qu'il y a équivalence entre les notions suivantes : un préfaisceau sur \mathcal{C} à valeurs dans (Gr.) dont le préfaisceau d'ensembles sous-jacent est un faisceau, et un groupe dans la catégorie des faisceaux d'ensembles. Compte tenu de ces identifications nous considérerons toujours les faisceaux à valeurs dans une catégorie d'ensembles munis de structures algébriques définies par limites projectives finies, comme des faisceaux d'ensemble, munis dans la catégorie $\tilde{\mathcal{C}}$ de la structure algébrique correspondante.

205

4.4. Propriétés d'exactitude de la catégorie des faisceaux

Théorème 4.4.1. — (i) Les limites projectives quelconques existent dans $\tilde{\mathcal{C}}$; « elles se calculent dans $\widehat{\mathcal{C}}$ », i.e. le foncteur d'inclusion $i : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ commute aux limites projectives : si (X_α) est un système projectif de faisceaux, le préfaisceau

$$\varprojlim i(X_\alpha) : S \longmapsto \varprojlim X_\alpha(S)$$

est un faisceau et on a $i(\varprojlim X_\alpha) = \varprojlim i(X_\alpha)$.

(ii) Les limites inductives quelconques existent dans $\tilde{\mathcal{C}}$: si (X_α) est un système inductif de faisceaux, on a

$$\varinjlim X_\alpha = a(\varinjlim i(X_\alpha))$$

où $\varinjlim i(X_\alpha)$ est le préfaisceau limite inductive des $i(X_\alpha)$:

$$\varinjlim i(X_\alpha) : S \longmapsto \varinjlim X_\alpha(S).$$

(iii) Le foncteur $a : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ commute aux limites inductives quelconques et aux limites projectives finies.

Les assertions (i) et (ii) résultent formellement de la formule d'adjonction (4.3.14), et (iii) a déjà été signalé dans 4.3.16.

Scholie 4.4.2. — Ce théorème permet d'utiliser la méthode suivante pour démontrer dans $\tilde{\mathcal{C}}$ une assertion portant simultanément sur des limites inductives quelconques et des limites projectives finies (par exemple : « tout épimorphisme est effectif universel », cf. plus loin). On commence par démontrer l'assertion correspondante dans la catégorie des ensembles, puis on l'étend « argument par argument » à la catégorie des préfaisceaux. Ensuite, on utilise le théorème précédent pour passer de la catégorie des préfaisceaux à la catégorie des faisceaux. On verra dans la suite bien des exemples de cette méthode (4.4.3, 4.4.6, 4.4.9, etc...).

206

Remarquons enfin que les assertions relatives à la catégories des préfaisceaux sont formellement des corollaires des assertions relatives à la catégorie des faisceaux. Il suffit en effet de prendre comme topologie la topologie la moins fine (« chaotique ») c'est-à-dire la topologie définie par $J(S) = \{S\}$ pour tout $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$, tout foncteur est en effet un faisceau pour cette topologie.

Proposition 4.4.3. — Soit $\mathcal{F} = \{F_i \rightarrow F\}$ une famille de morphismes de faisceaux. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) \mathcal{F} est une famille épimorphique.
- (ii) \mathcal{F} est une famille épimorphique effective universelle (1.13).
- (iii) \mathcal{F} est couvrante (4.2.3).
- (iv) Le faisceau image de \mathcal{F} (c'est-à-dire le faisceau associé au préfaisceau image de \mathcal{F} (4.1.2)) est F .

L'équivalence de (iii) et (iv) résulte de 4.3.12. Les autres équivalences résulteront des lemmes suivants.

Lemme 4.4.4. — Soit $f : X \rightarrow Y$ un monomorphisme de faisceaux qui soit un épimorphisme. Alors f est un isomorphisme.

Le lemme est d'abord clair dans la catégorie des ensembles. Démontrons le ensuite dans la catégorie des préfaisceaux. Considérons le préfaisceau

$$V : S \mapsto Y(S) \coprod^{X(S)} Y(S) \quad ;$$

207 c'est la somme amalgamée de Y et de Y au-dessous de X dans la catégorie des préfaisceaux. Si $X \rightarrow Y$ est un épimorphisme de préfaisceaux, le premier morphisme coordonné $Y \rightarrow V$ est un isomorphisme, donc $Y(S) \rightarrow V(S)$ un isomorphisme pour chaque S , donc $X(S) \rightarrow Y(S)$ un épimorphisme d'ensembles, ce qui règle la question, car c'est d'autre part un monomorphisme.

Plaçons-nous enfin dans la catégorie des faisceaux. La somme amalgamée Z des faisceaux Y et Y au-dessous de X est le faisceau associé à V d'après 4.4.1. Or on a le triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\quad} & Z \\ & \searrow & \nearrow \\ & V & \end{array} .$$

Si on sait que le préfaisceau V est séparé, on saura que $V \rightarrow Z$ est un monomorphisme (4.3.11 (iv)). Comme $Y \rightarrow Z$ est un isomorphisme par hypothèse, $Y \rightarrow V$ le sera aussi. Le morphisme $X \rightarrow Y$ sera donc aussi un épimorphisme de préfaisceaux, ce qui démontre le lemme, lorsqu'on aura vérifié que V est séparé. Ceci résulte de :

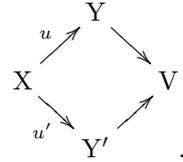
Lemme 4.4.5. — (i) Le préfaisceau somme directe d'une famille de préfaisceaux séparés est séparé.

(ii) Soit

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \xrightarrow{v} \end{array} Y$$

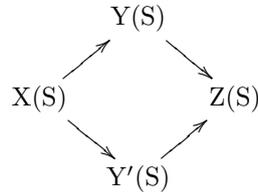
une relation d'équivalence dans la catégorie des préfaisceaux. Soit $w : Y \rightarrow Z$ le quotient. Si $u \times v : X \rightarrow Y \times Y$ est un monomorphisme, si X est un faisceau et si Y est séparé, alors Z est séparé.

(iii) *Considérons une somme amalgamée dans la catégorie des préfaisceaux, où u et u' sont des monomorphismes :*



Si Y et Y' sont des préfaisceaux séparés, et X un faisceau, alors V est séparé.

On démontre aussitôt (i) ; (iii) se prouve sans peine, en remarquant que pour tout $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$,

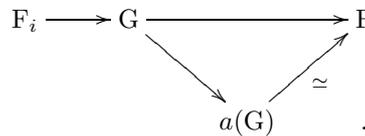


est une somme amalgamée dans la catégorie des ensembles. Pour prouver (ii), on doit prouver que deux morphismes d'un S dans Z coïncidant sur un raffinement R de S sont égaux. Or tout morphisme d'un S *représentable* dans Z se remonte par construction de Z en un morphisme de S dans Y . On voit alors aussitôt qu'il suffit de prouver que pour tout préfaisceau U et tout couple de morphismes $f, g : U \rightarrow Y$ tels que $wf = wg$, il existe un morphisme *unique* $U \rightarrow X$ avec $uf = vg$. Or pour ce faire, il suffit de prouver l'assertion correspondante pour les composés de ces morphismes avec tout $T \rightarrow U$ où T est représentable ; on peut donc supposer $U = T$ représentable. Mais le diagramme $X(T) \rightrightarrows Y(T) \rightarrow Z(T)$ est un conoyau dans la catégorie des ensembles, $X(T)$ étant une relation d'équivalence dans $Y(T)$, ce qui achève la démonstration.

208

Lemme 4.4.6. — *Une famille couvrante est épimorphique effective universelle.*

Comme la notion de famille couvrante est stable par extension de la base, il suffit de montrer que toute famille couvrante est épimorphique effective. Soit donc $\{F_i \rightarrow F\}$ une famille couvrante. Considérons le préfaisceau G image de cette famille. On a un diagramme



La famille de morphismes de préfaisceaux $\{F_i \rightarrow G\}$ est épimorphique effective, car c'est une vérification qui se fait argument par argument, et car dans la catégorie des ensembles, famille épimorphique effective veut simplement dire famille surjective.

Comme $G \rightarrow F$ est un monomorphisme, les produits fibrés $F_i \times_G F_j$ et $F_i \times_F F_j$ sont les mêmes. De plus, pour tout faisceau H , on a

$$\text{Hom}(G, H) \simeq \text{Hom}(F, H).$$

Il en résulte que la famille donnée est bien une famille épimorphique effective de morphismes de *faisceaux*.

Lemme 4.4.7. — *Toute famille de morphisme de faisceaux $\{F_i \rightarrow F\}$ se factorise en une famille couvrante $\{F_i \rightarrow G\}$ et un monomorphisme $G \rightarrow F$.*

209 Il suffit en effet de prendre pour G le faisceau image de la famille donnée.

Démonstration du théorème : on a vu en 4.4.6 que (iii) \Rightarrow (ii), on a évidemment (ii) \Rightarrow (i). Soit enfin $\{F_i \rightarrow F\}$ une famille épimorphique; d'après 4.4.7, elle se factorise en une famille couvrante suivi d'un monomorphisme. Mais ce dernier étant majoré par une famille épimorphique est un épimorphisme, donc un isomorphisme par 4.4.4.

Remarque 4.4.7. — Comme le préfaisceau image de la famille \mathcal{F} est séparé, la construction du faisceau associé montre que les conditions du théorème sont aussi équivalentes aux suivantes :

(v) Pour tout $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$, tout $f \in F(S)$ est *localement* dans l'image de \mathcal{F} , c'est-à-dire :

(vi) Pour tout $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$ et tout $f \in F(S)$, l'ensemble des $S' \rightarrow S$ tels que l'image de f dans $F(S')$ soit dans l'image d'un des $F_i(S')$ est un raffinement de S .

(vii) (Si la topologie est définie par une prétopologie). Pour tout $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$ et tout $f \in F(S)$, il existe une famille $\{S_j \rightarrow S\} \in R(S)$ telle que pour tout j l'image f_j de f dans $F(S_j)$ soit dans l'image de l'un des $F_i(S_j)$.

Remarque 4.4.8. — Si le faisceau F est *représentable*, les conditions précédentes sont aussi équivalentes à

(viii) L'ensemble des $T \rightarrow F$ ($T \in \text{Ob } \mathcal{C}$), tels qu'il existe un i et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F_i & \xrightarrow{\quad} & F \\ \uparrow & & \nearrow \\ T & & \end{array}$$

est un raffinement de F .

210 En effet, si (viii) est satisfaite, le préfaisceau image des F_i majore un raffinement de F , ce qui entraîne que la famille est couvrante. Réciproquement, on applique (vi) à $\text{id}_F \in F(F)$.

Cette condition s'exprime en langage imagé de la manière suivante : localement sur F , il existe un i tel que $F_i \rightarrow F$ possède une section. En particulier un morphisme $G \rightarrow F$ où G est un faisceau et F un faisceau *représentable* sera *couvrant* si et seulement si il possède *localement* (sur F) une *section*.

Proposition 4.4.9. — *Toute relation d'équivalence dans $\tilde{\mathcal{C}}$ est effective universelle (3.3.3) : soit R une $\tilde{\mathcal{C}}$ -relation d'équivalence dans le faisceau X ; alors le faisceau associé au préfaisceau séparé*

$$i(X)/i(R) : S \longmapsto X(S)/R(S)$$

est un quotient effectif universel de X par R .

Soit X/R le faisceau quotient de X par R , qui existe par 4.4.1 (ii) : $X/R = a(i(X)/i(R))$. Il nous faut montrer que $X \rightarrow X/R$ est un épimorphisme effectif universel, et que le morphisme $f : R \rightarrow X \times_{X/R} X$ est un isomorphisme. La première assertion a déjà été démontrée (4.4.3). Quant à f , il provient par application du foncteur a du morphisme $i(R) \rightarrow i(X) \times_{i(X/R)} i(X)$ ou, comme $i(X)/i(R)$ est séparé (4.4.5 (ii)) donc $i(X)/i(R) \rightarrow i(X/R)$ est un monomorphisme, du morphisme canonique $i(R) \rightarrow i(X) \times_{i(X)/i(R)} i(R)$.

On est donc ramené à démontrer la même assertion dans la catégorie des préfaisceaux. Mais $i(X)/i(R)$ est le préfaisceau $S \mapsto X(S)/R(S)$ et on est ramené à démontrer l'assertion analogue dans la catégorie des ensembles, où elle est immédiate.

Proposition 4.4.10. — *Sous les conditions de 4.4.9, soit Y un sous-faisceau de X . Notons R_Y la relation d'équivalence induite dans Y par R . Alors le morphisme canonique (3.1.6)*

$$Y/R_Y \longrightarrow X/R$$

211

est un monomorphisme : il identifie Y/R_Y à un sous-faisceau de X/R , qui est le faisceau-image du morphisme composé

$$Y \longrightarrow X \longrightarrow X/R.$$

Le morphisme de préfaisceaux

$$i(Y)/i(R_Y) = i(X)/i(R)_{i(Y)} \longrightarrow i(X)/i(R)$$

est un monomorphisme. Comme le foncteur a est exact à gauche (4.3.16), il transforme monomorphisme en monomorphisme et

$$Y/R_Y \longrightarrow X/R$$

est un monomorphisme. La dernière assertion résulte du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y/R_Y & \longrightarrow & X/R \end{array} ,$$

et du fait que $Y \rightarrow Y/R_Y$ est *couvrant*.

En vertu de cette proposition, nous identifierons toujours Y/R_Y à un sous-faisceau de X/R .

Proposition 4.4.11. — Soit R une \mathcal{C} -relation d'équivalence dans le faisceau X . Pour tout sous-faisceau Y de X stable par R , notons Y' le quotient Y/R_Y considéré comme un sous-faisceau de $X' = X/R$. Alors $Y = Y' \times_{X'} X$, et les applications $Y \mapsto Y/R_Y$ et $Y' \mapsto Y' \times_{X'} X$ réalisent une correspondance bijective entre l'ensemble des sous-faisceaux Y de X stables par R et l'ensemble des sous-faisceaux Y' de X' .

212 Si Y' est un sous-faisceau de X' , alors $Y' \times_{X'} X$ est un sous-faisceau de X stable par R . Si Y' est obtenu par passage au quotient à partir d'un sous-faisceau Y de X , alors $Y' \times_{X'} X$ majore Y . Il suffit donc de montrer que si l'on a deux sous-faisceaux Y et Y_1 de X , stables par R , Y_1 majorant Y , et si les quotients Y/R_Y et Y_1/R_{Y_1} sont identiques, alors $Y = Y_1$. On est évidemment ramené à démontrer la même assertion dans le cas où $Y_1 = X$. Notant alors P (resp. Q) le préfaisceau $i(X)/i(R)$ (resp. $i(Y)/i(R_Y)$), le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & P \\ \uparrow & & \uparrow \\ Y & \longrightarrow & Q \end{array}$$

est cartésien. Comme on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} P \hookrightarrow & a(P) \\ \uparrow & \parallel \\ Q \hookrightarrow & a(Q) \end{array},$$

le monomorphisme $Q \hookrightarrow P$ est couvrant, donc Q est un raffinement de P . Par changement de base, Y est un raffinement de X . Comme X et Y sont des faisceaux, cela entraîne (4.3.12) $Y = X$.

4.4.12. — En particulier, si Y est un sous-faisceau de X , et si $Y' = Y/R_Y$, alors la correspondance précédente définit un sous-faisceau \bar{Y} de X , stable par R , majorant Y et minimum pour ces propriétés, que l'on appelle le *saturé* de Y pour la relation d'équivalence R .

4.5. Le cas d'une topologie moins fine que la topologie canonique. — D'après 4.3.6 et 4.3.8, les conditions suivantes sont équivalentes pour une topologie \mathcal{T} sur \mathcal{C} :

- 213 (i) \mathcal{T} est *moins fine* que la topologie *canonique* de \mathcal{C} .
(ii) Tout préfaisceau *représentable* est un *faisceau* pour \mathcal{T} .
(iii) Tout crible couvrant pour \mathcal{T} est épimorphique effectif universel.

Si \mathcal{T} est définie par une *prétopologie* $S \mapsto R(S)$, ces conditions équivalent encore à

- (iv) Toute famille $\in R(S)$ est épimorphique effective universelle.

Dans le cas où ces conditions sont vérifiées, le foncteur canonique $\mathcal{C} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ se factorise par un foncteur $j_{\mathcal{C}} = j : \mathcal{C} \rightarrow \widetilde{\mathcal{C}}$ (on notera aussi $j(S) = \widetilde{S}$).

Proposition 4.5.1. — *Le foncteur $j : \mathcal{C} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ est pleinement fidèle, commute aux limites projectives quelconques. Il est en particulier exact à gauche et conserve donc les structures algébriques définies par limites projectives finies.*

Cela résulte immédiatement de la considération du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\quad} & \widehat{\mathcal{C}} \\ & \searrow j & \nearrow i \\ & \mathcal{C} & \end{array},$$

et de 4.4.1 (i).

Avant d'exhiber d'autres propriétés du foncteur j , il nous faut définir la topologie induite sur une catégorie \mathcal{C}/S . Ne supposant plus nécessairement la topologie donnée moins fine que la topologie canonique, cela se fait de la manière suivante : si C est un crible de T dans \mathcal{C} et si on a un morphisme $T \rightarrow S$, alors C définit naturellement un crible de T dans \mathcal{C}/S [car la définition d'un crible de T ne dépend que de la catégorie $\mathcal{C}/T = (\mathcal{C}/S)_{/T}$]. Si, par exemple, C est défini par la famille $\{T_i \rightarrow T\}$, alors son image dans \mathcal{C}/S est défini par la même famille considérée comme famille de morphismes de \mathcal{C}/S . Ceci dit, l'application $T \mapsto J(T)$ définit une topologie sur \mathcal{C}/S dite *topologie induite* par la topologie donnée. Avec les définitions de [AS], 2.3, c'est la moins fine des topologies sur \mathcal{C}/S pour laquelle le foncteur canonique

$$i_S : \mathcal{C}/S \longrightarrow \mathcal{C}$$

est un *comorphisme*. On remarquera que les identifications

$$(\mathcal{C}/S)_{/T} = \mathcal{C}/T$$

respectent par définition les topologies.

Proposition 4.5.2. — *Soient S un faisceau représentable sur \mathcal{C} et $F \rightarrow S$ un morphisme de $\widehat{\mathcal{C}}$. Pour que $S' \mapsto \text{Hom}_S(S', F)$ soit un préfaisceau séparé (resp. un faisceau) sur \mathcal{C}/S , il faut et il suffit que F soit un préfaisceau séparé (resp. un faisceau) sur \mathcal{C} .*

Pour tout foncteur P , on a (I 4.1)

$$\text{Hom}(P, F) = \coprod_{f \in \text{Hom}(P, S)} \text{Hom}_f(P, F).$$

Pour tout $S' \in \text{Ob } \mathcal{C}$ et tout crible couvrant C' de S' , on a un isomorphisme

$$\text{Hom}(C', S) \xleftarrow{\sim} \text{Hom}(S', S),$$

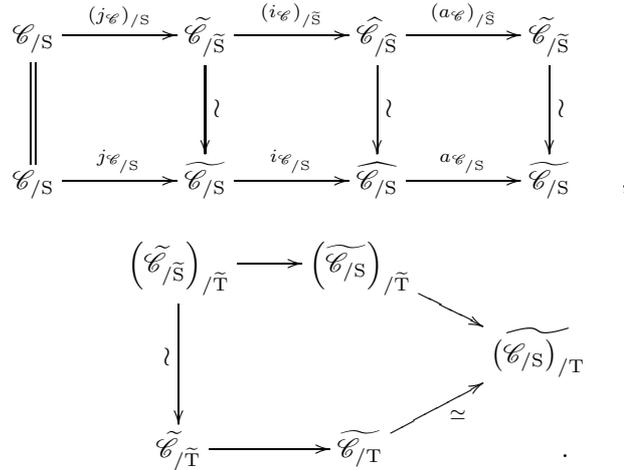
car S est un faisceau. La proposition résulte immédiatement de ces deux formules.

Corollaire 4.5.3. — *La topologie induite sur \mathcal{C}/S par une topologie sur \mathcal{C} moins fine que la topologie canonique de \mathcal{C} , est moins fine que la topologie canonique de \mathcal{C}/S .*

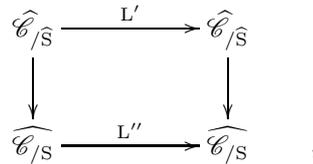
Corollaire 4.5.4. — *Supposons la topologie donnée sur \mathcal{C} moins fine que la topologie canonique. Pour tout $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$, on a une équivalence de catégories*

$$\widetilde{\mathcal{C}}_{/\bar{S}} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}_{/S}.$$

215 Les diagrammes suivants sont commutatifs à isomorphisme près (Toutes les flèches non désignées sont des équivalences) :



La commutativité des deux premiers carrés résulte de la définition de l'équivalence $\widetilde{\mathcal{C}}_{/\bar{S}} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}_{/S}$. Pour démontrer la commutativité du dernier, il faut voir que le carré suivant est commutatif :



où L' est la restriction du foncteur $L_{\mathcal{C}}$ à $\widehat{\mathcal{C}}_{/\bar{S}}$ et L'' le foncteur $L_{\mathcal{C}_S}$; ceci se voit aisément en revenant à la définition des foncteurs L (après 4.3.9). Quant au second diagramme, ce n'est autre que la restriction aux catégories de faisceaux du diagramme correspondant sur les catégories de préfaisceaux (Exposé I, n° 1) qui est commutatif.

216 **Scholie 4.5.5.** — Les diverses assertions de ce numéro montrent que dans le cas où la topologie donnée est moins fine que la topologie canonique, on peut identifier \mathcal{C} à une sous-catégorie pleine de $\widetilde{\mathcal{C}}$, elle-même sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathcal{C}}$ et que dans cette identification, on peut se livrer aux abus de langage, habituels en ce qui concerne $\mathcal{C} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$, justifiés par les commutativités précédentes. Remarquons explicitement que le premier diagramme de 4.5.4 montre que l'on pourra se servir sans précaution spéciale du foncteur a .

Nous verrons dans le numéro suivant que l'identification de \mathcal{C} à une sous-catégorie pleine de $\widetilde{\mathcal{C}}$ (contrairement à ce qui se passait pour $\widehat{\mathcal{C}}$), commute à la formation de certaines limites inductives et nous dirons alors comment utiliser ce fait.

A partir de maintenant et sauf mention expresse du contraire, nous supposons la topologie donnée *moins fine que la topologie canonique* et nous ferons systématiquement les identifications exposées ci-dessus.

Proposition 4.5.6. — *Soient F et G deux faisceaux au-dessus de S et $f : F \rightarrow G$ un S -morphisme. Les conditions suivantes sur f sont équivalentes :*

- (i) *f est un monomorphisme (resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme) dans $\widetilde{\mathcal{C}}$.*
- (ii) *f est un monomorphisme (resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme) dans $\widetilde{\mathcal{C}}_S = \widetilde{\mathcal{C}}/S$.*

Pour monomorphisme et isomorphisme, c'est évident (c'est une question de préfaisceaux). Pour épimorphisme, cela résulte de la description des épimorphismes comme morphismes couvrants et du fait que, par définition de la topologie induite, ceux-ci sont les mêmes dans $\widetilde{\mathcal{C}}$ et $\widetilde{\mathcal{C}}_S$.

Proposition 4.5.7. — *Soit $f : F \rightarrow G$ un morphisme de faisceaux. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *f est un monomorphisme (resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme).*
- (ii) *Pour chaque $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$, $f_S : F_S \rightarrow G_S$ est localement un monomorphisme (resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme), c'est-à-dire :* 217
- (iii) *Pour chaque $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$, l'ensemble des $T \rightarrow S$ tels que $F_T \rightarrow G_T$ soit un monomorphisme (resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme) est un raffinement de S .*

Si la topologie donnée est définie par une prétopologie, ces conditions sont encore équivalentes à la suivante :

- (iv) *Pour chaque $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$, il existe une famille couvrante $\{S_i \rightarrow S\} \in R(S)$ telle que pour tout i , $F_{S_i} \rightarrow G_{S_i}$ soit un monomorphisme (resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme).*

Si la catégorie \mathcal{C} possède un objet final e , on peut se contenter de prendre $S = e$ dans les conditions (ii), (iii) et (iv).

On a évidemment (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv). Pour démontrer l'équivalence de (i) et (ii) ainsi que le supplément concernant l'objet final, il faut montrer que (ii) \Rightarrow (i) et que les notions envisagées sont stables par extension de la base. Démontrons d'abord ce dernier point. Pour monomorphisme et isomorphisme, c'est évident (c'est une question de préfaisceaux). Pour épimorphisme, cela résulte du fait que tout épimorphisme de faisceaux est universel (4.4.3). Montrons enfin que (ii) entraîne (i). Supposons que $f_S : F_S \rightarrow G_S$ soit localement un monomorphisme (resp. un isomorphisme). Il existe alors un crible couvrant C de S tel que pour tout $T \rightarrow C$, f_T soit un monomorphisme, (resp. un isomorphisme). Comme une limite projective de monomorphismes

(resp. isomorphismes) en est un, $\text{Hom}(C, f)$ sera un monomorphisme (resp. un isomorphisme) (cf. 4.1.3). Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(C, F) & \xrightarrow{\text{Hom}(C, f)} & \text{Hom}(C, G) \\ \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\ F(S) & \xrightarrow{f(S)} & G(S) \end{array}$$

218 montre alors que $f(S)$ est injectif (resp. bijectif). Supposons enfin que $F \rightarrow G$ soit localement un épimorphisme et soit $H \subset G$ l'image de f . Pour chaque $S \rightarrow G$, $H \times_G S$ est l'image de $f \times_G S : F \times_G S \rightarrow S$. Pour montrer que f est un épimorphisme, il faut montrer que H est un raffinement de G , c'est-à-dire que $H \times_G S$ est un raffinement de S pour chaque S . Mais comme il en est ainsi après tout changement de base $T \rightarrow S$ d'un raffinement de S (si $f \times_G S$ est localement couvrant), $H \times_G S$ est bien un raffinement de S (Axiome (T 2)).

Corollaire 4.5.8. — Soient F et G deux faisceaux au-dessus de S et $f : F \rightarrow G$ un S -morphisme. Pour que f soit un monomorphisme, resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme, il faut et il suffit qu'il le soit localement sur S .

Remarque 4.5.9. — La démonstration de la proposition montre que celle-ci reste valable, pour la partie concernant les monomorphismes (resp. les isomorphismes) lorsqu'on suppose seulement que F est un préfaisceau séparé (resp. un faisceau) et G un préfaisceau quelconque (resp. un préfaisceau séparé).

Revenons provisoirement au cas d'une topologie *quelconque* et posons une définition.

Définition 4.5.10. — Soit $G \rightarrow F$ un morphisme de $\widehat{\mathcal{C}}$. On dit que G est un *faisceau relatif* au-dessus de F si pour chaque F -foncteur H et chaque raffinement R de H , l'application canonique

$$(+) \quad \text{Hom}_F(R, G) \xleftarrow{\sim} \text{Hom}_F(H, G)$$

est bijective.

La proposition 4.5.2 se généralise aussitôt :

Proposition 4.5.11. — Si F est un faisceau, G est un faisceau relatif au-dessus de F si et seulement si c'est un faisceau.

219 **Lemme 4.5.12.** — Dans la situation $X \rightarrow T \rightarrow S$ (où X, T, S sont trois objets de $\widehat{\mathcal{C}}$), si X est un faisceau relatif au-dessus de T , alors $U = \prod_{T/S} X$ est un faisceau relatif au-dessus de S .

En effet, on a pour tout S -foncteur Y

$$\text{Hom}_S(Y, U) = \text{Hom}_T(T \times_S Y, X).$$

Si C est un crible de Y , alors $T \times_S C$ est un crible de $T \times_S Y$; on conclut aussitôt.

Corollaire 4.5.13. — Les préfaisceaux $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}(X, Y)$, $\underline{\text{Isom}}_{\mathcal{S}}(X, Y), \dots$, sont des faisceaux lorsque les arguments qui y interviennent en sont aussi.

En effet, tous ces préfaisceaux sont construits à l'aide de produits fibrés et de préfaisceaux \coprod (I 1.7 et II 1). Il suffit de vérifier le résultat pour un préfaisceau $\coprod_{\mathcal{T}/\mathcal{S}} X$; en ce cas, l'assertion résulte de 4.5.11 et 4.5.12.

4.6. Description du quotient d'un faisceau par une relation d'équivalence Rappelons que nous supposons la topologie \mathcal{T} donnée moins fine que la topologie canonique.

Proposition 4.6.1. — Soit $R \xrightarrow{p_1, p_2} X$ une $\tilde{\mathcal{C}}$ -relation d'équivalence dans le faisceau X . Soit $F \in \text{Ob } \widehat{\mathcal{C}}$ défini comme suit : pour chaque S de \mathcal{C} , $F(S)$ est l'ensemble des sous- S -faisceaux Z de X_S , stables par R_S , et dont le quotient par R_Z est S (c'est-à-dire tels que le diagramme $R_Z \rightrightarrows Z \rightarrow S$ soit exact). Alors pour tout faisceau Y , $\text{Hom}(Y, F)$ s'identifie à l'ensemble des sous- Y -faisceaux de $X \times Y$ stables par $R \times Y$ et dont le quotient est Y . En particulier le sous-faisceau R de $X \times X$ correspond à un élément p de $\text{Hom}(X, F)$ et le diagramme

$$R \xrightarrow{p_1, p_2} X \xrightarrow{p} F$$

est exact, donc identifie F au faisceau-quotient X/R .

Posons en effet $Q = X/R$. Pour tout faisceau Y et tout morphisme $f \in \text{Hom}(Y, Q)$ 220 correspondant à une section $s : Y \hookrightarrow Y \times Q$, considérons le diagramme

$$(*) \quad \begin{array}{ccccc} R \times Y & \rightrightarrows & X \times Y & \longrightarrow & Q \times Y \\ & & \uparrow & & \uparrow s \\ & & Z & \longrightarrow & Y \end{array}$$

où le carré est cartésien. Il est immédiat par 4.4.11 que Z est un sous- Y -faisceau de $X \times Y$, stable par $R \times Y$, dont le quotient est Y , et que, réciproquement, tout Z de ce type provient d'une unique section de $Q \times Y$ sur Y . Prenant d'abord Y représentable, on en tire un isomorphisme $Q \simeq F$. Prenant ensuite Y quelconque, on en tire la forme annoncée de $\text{Hom}(Y, F)$. Considérant enfin le morphisme canonique $X \rightarrow Q$, on voit aussitôt qu'il correspond au sous- X -faisceau R de $X \times X$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 4.6.2. — Soit G un sous-foncteur quelconque de F tel que $\text{Hom}(X, G) \subset \text{Hom}(X, F)$ contienne R . Alors le morphisme canonique $X \rightarrow F$ se factorise par G . Comme $X \rightarrow F$ est couvrant (4.4.9 et 4.4.3) il en résulte que G est un raffinement de F . En particulier, tout sous-faisceau G de F vérifiant la condition précédente est égal à F (4.3.12).

4.6.3. — Nous allons maintenant nous intéresser au cas où X et R sont représentables. Introduisons d'abord une terminologie. Outre les conditions (a) à (d) introduites en 3.4.1, nous utiliserons d'autres conditions sur une famille (M) de morphismes de \mathcal{C}

que nous énonçons ci-après, en rappelant les conditions (a) à (c) déjà données, pour être complet.

- (a) (M) est stable par *extension de la base*.
- (b) Le *composé* de deux éléments de (M) est dans (M).
- (c) Tout *isomorphisme* est élément de (M).
- (d_T) Tout élément de (M) est couvrant.

221 (e_T) Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de \mathcal{C} . S'il existe un raffinement R de Y tel que pour tout $Y' \rightarrow R$, $X \times_Y Y' \rightarrow Y'$ soit élément de (M), alors f est élément de (M).

Rappelons que (a) et (b) entraînent

- (a') Le produit cartésien de deux éléments de (M) est élément de (M).

D'autre part (a) et (d_T) entraînent par 4.3.9 :

- (d') Tout élément de (M) est un épimorphisme effectif universel.

4.6.4. — Les conditions précédentes sont vérifiées par la famille des morphismes couvrants, notée (M_T), lorsque \mathcal{C} possède des produits fibrés. En effet (a) résulte de (C 1) (4.2.3), (b) de (C 2), (c) de (C 4), (d_T) de la définition, (e_T) de (C 5). Les résultats que nous allons établir pour une famille vérifiant ces conditions s'appliqueront en particulier à la famille (M_T). En particulier, on pourra prendre pour \mathcal{T} la topologie canonique et pour (M) la famille des épimorphismes effectifs universels.

Lemme 4.6.5. — Soit (M) une famille de morphismes vérifiant les propriétés (a) à (e_T) précédentes. Soit R une \mathcal{C} -relation d'équivalence dans $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$, de type (M). Soient \tilde{X} le faisceau défini par X , \tilde{R} la $\tilde{\mathcal{C}}$ -relation d'équivalence dans \tilde{X} définie par R et \tilde{X}/\tilde{R} le faisceau-quotient. Pour que R soit (M)-effective, il faut et il suffit que \tilde{X}/\tilde{R} soit représentable. S'il en est ainsi, \tilde{X}/\tilde{R} est représentable par le quotient X/R .

Supposons d'abord que R soit (M)-effective et notons $Y = X/R$. Le morphisme canonique $p : X \rightarrow Y$ est élément de (M), donc couvrant par (d_T). Le morphisme correspondant

$$\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/\tilde{R}$$

222 est donc un épimorphisme effectif universel de $\tilde{\mathcal{C}}$ (4.4.3), donc identifie \tilde{X}/\tilde{R} au quotient de \tilde{X} par la relation d'équivalence R' définie dans \tilde{X} par \tilde{p} . Comme le foncteur canonique $\mathcal{C} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ commute aux produits fibrés, R' n'est autre que \tilde{R} , car R est la relation d'équivalence définie par p .

Réciproquement, supposons \tilde{X}/\tilde{R} représentable par un objet Y de \mathcal{C} . Soit $p : X \rightarrow Y$ le morphisme déduit du morphisme canonique $\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/\tilde{R}$; c'est un morphisme couvrant par 4.4.3. Il est clair comme tout à l'heure que R est la relation d'équivalence définie par p . Il ne reste plus qu'à montrer que $p \in (M)$. Or le carré cartésien

$$\begin{array}{ccccc} R & \xrightarrow{\sim} & X \times_Y X & \longrightarrow & X \\ & \searrow^{p_2} & \downarrow \text{pr}_2 & & \downarrow p \\ & & X & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

montre que p devient p_2 qui est un élément de (M) après changement de base par le morphisme couvrant p . On conclut par (e_T) .

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal de ce numéro.

Théorème 4.6.6. — Soit (M) une famille de morphismes vérifiant les axiomes (a) à (e_T) de 4.6.3. Soit R une \mathcal{C} -relation d'équivalence de type (M) dans l'objet X de \mathcal{C} . Considérons le foncteur $F \in \text{Ob } \widehat{\mathcal{C}}$ défini comme suit : $F(S)$ est l'ensemble des sous- S -faisceaux Z de X_S stables par R_S et tels que la relation d'équivalence induite ait pour quotient S . Soit F_0 le sous-foncteur de F défini comme suit : $F_0(S)$ est formé des $Z \in F(S)$ représentables, c'est-à-dire des sous- $\mathcal{C}/_S$ -objets de X_S stables par R_S et tels que la relation d'équivalence induite soit (M) -effective et ait comme quotient S (c'est-à-dire $R_Z \simeq Z \times_S Z$ et $Z \rightarrow S$ élément de (M)). Alors :

(i) Le morphisme $p \in \text{Hom}(X, F) = F(X)$ défini par le sous-objet R de $X \times X$ identifie F au faisceau-quotient de X par R .

(ii) Les conditions suivantes sont équivalentes :

223

- a) F est représentable.
- b) F_0 est représentable.
- c) R est (M) -effective.

Sous ces conditions, $F = F_0 = X/R$.

(iii) Soit (N) une famille de morphismes stable par changement de base, telle que pour toute famille couvrante $\{S_i \rightarrow S\}$ et toute famille $\{T_i \rightarrow S_i\}$ de morphismes de (N) , toute donnée de descente sur les T_i relative à $\{S_i \rightarrow S\}$ soit effective. Supposons X quarrable et le morphisme $R \rightarrow X \times X$ élément de (N) . Alors $F_0 = F$.

Démonstration. (i) a déjà été démontré (4.6.1).

(ii) On a vu l'équivalence de a) et de c) ainsi que $F = X/R$. Il reste à prouver que b) ou c) implique $F_0 = F$. Remarquons d'abord, comme il est d'ailleurs affirmé dans l'énoncé, que F_0 est bien un sous-foncteur de F ; en effet pour tout $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$ et tout $Z \in F_0(S)$, le morphisme $Z \rightarrow S$ est quarrable, donc $Z \times_S S'$ élément de $F_0(S')$ pour tout $S' \rightarrow S$. Comme $R \in F(X)$ appartient à $F_0(X)$, 4.6.2 montre que b) $\Rightarrow F_0 = F$. Supposons maintenant c) vérifié. Le morphisme $X \rightarrow Q$ est élément de (M) et, pour tout $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$ et tout $Z \in F(S)$, le diagramme (*) de 4.6.1 montre que $Z = S \times_{(X/R \times_S X)} X \times S$ est représentable, donc élément de $F_0(S)$.

(iii) Soit $f \in \text{Hom}(S, F)$ correspondant à $Z \in F(S)$. On doit montrer que f se factorise par F_0 , c'est-à-dire que Z est représentable. C'est d'abord clair si f se factorise par X en vertu de :

Lemme 4.6.7. — Soit $x_0 \in X(S)$. L'image de x_0 dans $F(S)$ correspond au sous-faisceau Z de X_S défini par les deux carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc}
 X_S & \xrightarrow{\text{id}_{X_S} \times x_0} & X_S \times_S X_S & \longrightarrow & X \times X \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 Z & \longrightarrow & R_S & \longrightarrow & R
 \end{array} .$$

224

Ce lemme résulte aussitôt de la description du morphisme $X \rightarrow F$.

Revenons à la démonstration du théorème. Si f se factorise par X , alors Z est représentable et le morphisme $Z \rightarrow X_S$ élément de (N) . En général, f ne se factorise pas nécessairement par X ; mais, comme $X \rightarrow F$ est couvrant (4.4.3), il existe par 4.4.7 une famille couvrante $\{S_i \rightarrow S\}$ et pour chaque i un morphisme $S_i \rightarrow X$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & F \\ \uparrow & & \uparrow f \\ S_i & \longrightarrow & S \end{array} .$$

D'après ce qui précède, le morphisme $f_i : S_i \rightarrow F$ défini par le diagramme précédent appartient à $\text{Hom}(S_i, F_0)$ et correspond au sous-faisceau $Z \times_S S_i$ de X_{S_i} . Le morphisme $Z \times_S S_i \rightarrow X_{S_i}$ est élément de (N) et la famille $X_{S_i} \rightarrow X_S$ couvrante. Il n'y a donc plus qu'à établir :

Proposition 4.6.8. — *Soient $\{S_i \rightarrow S\}$ une famille couvrante et F un faisceau au-dessus de S . Supposons que pour chaque i , le S_i -foncteur $F \times_S S_i$ soit représentable par un objet T_i . Alors la famille des T_i est munie d'une donnée de descente canonique relative à $S_i \rightarrow S$. Pour que F soit représentable, il faut et il suffit que cette donnée soit effective; s'il en est ainsi l'objet « descendu » représente F .*

225

Remarquons d'abord que d'après 4.4.3, $S_i \rightarrow S$ est une famille épimorphique effective universelle dans $\tilde{\mathcal{C}}$, donc une famille de descente dans $\tilde{\mathcal{C}}$. Si F est représentable par l'objet T , alors $T \times_S S_i$ (considéré comme faisceau) est isomorphe à $F \times_S S_i$, donc la donnée de descente sur les T_i est effective et l'objet descendu (unique) est isomorphe à F . Réciproquement, supposons que la donnée de descente canonique sur les T_i soit effective et soit T l'objet descendu. Comme la famille $\{S_i \rightarrow S\}$ est une famille de descente dans $\tilde{\mathcal{C}}$, il existe un S -morphisme $T \rightarrow F$ qui par extension de la base à chaque S_i redonne le morphisme canonique $T_i \rightarrow F \times_S S_i$. Ce morphisme est localement un isomorphisme; comme T et F sont des faisceaux, il résulte de 4.5.8 que c'est un isomorphisme.

Corollaire 4.6.9. — *Soit R une relation d'équivalence (M) -effective dans X . Pour tout faisceau F , l'application*

$$\text{Hom}(X/R, F) \longrightarrow \text{Hom}(X, F)$$

identifie le premier ensemble à la partie du second formée des morphismes compatibles avec R .

Corollaire 4.6.10. — *Soit \mathcal{T}' une topologie moins fine que \mathcal{T} , pour laquelle les morphismes de (M) soient couvrants. Sous les conditions de 4.6.6 (iii), X/R est aussi le faisceau-quotient de X par R dans toute topologie intermédiaire entre \mathcal{T}' et la topologie canonique.*

Remarque 4.6.11. — Si dans l'énoncé de 4.6.6 (iii), on suppose de plus que, dans les hypothèses du texte, si on note T l'objet descendu, le morphisme $T \rightarrow S$ est élément de (N) , alors les morphismes d'inclusion $Z \hookrightarrow X_S$ sont aussi éléments de (N) , comme il résulte aussitôt de la construction de Z par descente.

Remarque 4.6.12. — Les implications

$$\begin{aligned} c) &\Rightarrow b) \Rightarrow a), \\ c) &\Rightarrow F_0 = F = X/R, \end{aligned}$$

ont été établies sans recourir à la partie « il suffit » du lemme 4.6.5, qui est le seul endroit où l'on utilise la condition $(e_{\mathcal{T}})$. Elles restent donc valables si (M) vérifie seulement les conditions (a) à $(d_{\mathcal{T}})$. Un exemple de telle famille (M) est celle des *morphismes quarrables couvrants* (comparer avec 4.6.4). Dans le cas de la topologie canonique, ceux-ci ne sont autres que les épimorphismes effectifs universels. On a donc :

Corollaire 4.6.13. — *Soit R une relation d'équivalence effective universelle dans X . Alors X/R est le faisceau-quotient de X par R pour la topologie canonique. Il représente le foncteur suivant : $X/R(S)$ est l'ensemble des sous- \mathcal{C}_S -objets Z de X_S stables par R_S et tels que la relation d'équivalence induite soit effective universelle et ait comme quotient S .*

De même, pour une topologie quelconque :

Corollaire 4.6.14. — *Soit (M) la famille des morphismes quarrables couvrants. Si R est une relation d'équivalence (M) -effective dans X , alors X/R est le faisceau-quotient de X par R et représente le foncteur F_0 de 4.6.6.*

Scholie 4.6.15. — Nous pouvons maintenant apporter les précisions suivantes à 4.5.5. Alors que dans les questions faisant intervenir exclusivement des limites projectives (produits fibrés, structures algébriques...), on peut, d'après les résultats de l'Exposé I et 4.5.5, identifier indifféremment \mathcal{C} à une sous-catégorie pleine de $\tilde{\mathcal{C}}$ ou de $\hat{\mathcal{C}}$, il n'en est pas de même dans celles qui mêlent limites projectives et inductives. *Dans toutes les questions faisant intervenir à la fois des limites projectives et des limites inductives, en particulier des passages au quotient (exemple : structure de groupe sur le quotient d'un groupe par un sous-groupe invariant), nous considérerons la catégorie donnée comme plongée dans la catégorie des faisceaux ; ainsi si R est une \mathcal{C} -relation d'équivalence dans l'objet X de \mathcal{C} , X/R désignera le faisceau-quotient de X par R (désigné antérieurement par $j(X)/j(R)$), donc dans le cas où ce faisceau sera représentable, l'objet qu'il représente. Les résultats précédents montrent que dans les cas les plus importants, un quotient dans \mathcal{C} sera aussi un quotient dans la catégorie des faisceaux ; de toutes façons, nous nous interdisons l'emploi de la notation X/R pour un quotient dans \mathcal{C} qui ne coïnciderait pas avec le quotient dans $\tilde{\mathcal{C}}$ (par exemple qui ne serait pas universel), modifiant ainsi les définitions du n° 3.*

Pour étudier un problème du type ci-dessus, on se place donc d'abord dans la catégorie des faisceaux, où tous les résultats habituels sont valables (cf. n°4.4), puis

on particularise les résultats obtenus à la catégorie de départ, en utilisant les résultats du présent numéro et, lorsqu'on en possède, des critères d'effectivité de descente. Nous verrons des exemples de cette méthode dans les numéros suivants.

4.7. Utilisation de critères d'effectivité : théorème d'isomorphie. — Dans ce numéro, nous donnons un exemple d'utilisation de critères d'effectivité. Les données de départ sont une topologie \mathcal{T} sur \mathcal{C} (toujours moins fine que la topologie canonique), une famille (M) de morphismes de \mathcal{C} vérifiant les axiomes (a) à $(e_{\mathcal{T}})$ de 4.6.3 et une famille (N) de morphismes de \mathcal{C} susceptible de vérifier les axiomes suivants :

(a) (N) est stable par extension de la base.

$(f_{\mathcal{T}})$ « les morphismes de (N) se descendent par la topologie donnée » ; c'est-à-dire : pour tout $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$, toute famille couvrante $\{S_i \rightarrow S\}$ et toute famille $\{T_i \rightarrow S_i\}$ de morphismes de (N), toute donnée de descente sur les T_i relativement à $\{S_i \rightarrow S\}$ est effective, et si on note T l'objet descendu, le morphisme $T \rightarrow S$ est élément de (N).

Signalons tout de suite un exemple de cette situation, qui sera traité plus tard : \mathcal{C} est la catégorie des schémas, \mathcal{T} la topologie fidèlement plate quasi-compacte ; (M) la famille des morphismes fidèlement plats quasi-compacts, (N) la famille des immersions fermées, ou celle des immersions quasi-compactes.

Rappelons le résultat principal de 4.6.6 (compte tenu de 4.6.11) :

228 **Proposition 4.7.1.** — *Si X est un objet quarrable de \mathcal{C} , R une relation d'équivalence de type (M) dans X , telle que $X \rightarrow R \times R$ soit élément de (N), (N) vérifiant (a) et $(f_{\mathcal{T}})$, alors le faisceau-quotient X/R est défini par*

$X/R(S) =$ ensemble des sous- S -objets Z de X_S , stables par R_S , tels que $Z \rightarrow X_S$ soit élément de (N), que $Z \rightarrow S$ soit couvrant (ou élément de (M)) et que $R_Z \simeq Z \times_S Z$.

Soit X un objet de \mathcal{C} , R une relation d'équivalence (M)-effective dans X , notons $X' = X/R$. Pour tout sous-objet Y' de X' tel que le morphisme canonique $Y' \rightarrow X'$ soit élément de (N), le sous-objet $Y = Y' \times_{X'} X$ de X est stable par R , le morphisme canonique $Y \rightarrow X$ est élément de (N), (si (N) vérifie (a)), la relation d'équivalence induite dans Y est (M)-effective (4.4.11 et 4.6.6) et son quotient est Y' . Réciproquement, montrons que tout sous-objet Y de X , stable par R , tel que le morphisme structural $X \rightarrow Y$ soit élément de (N), s'obtient de cette façon ; en effet, si Y est stable par R , ses deux images dans $R = X \times_{X'} X$ sont identiques et Y est muni d'une donnée de descente relative à $X \rightarrow X'$. Pour avoir le résultat cherché, il suffit donc que la famille (N) vérifie l'axiome suivant (entraîné par $(f_{\mathcal{T}})$ et les conditions sur (M)) :

(f_M) Si $Y \rightarrow X$ est élément de (N) et $X \rightarrow X_1$ élément de (M), toute donnée de descente sur Y relative à $X \rightarrow X_1$ est effective ; si on note Y_1 l'objet descendu, $Y_1 \rightarrow X_1$ est élément de (N).

On a donc :

229 **Proposition 4.7.2.** — *Soit R une relation d'équivalence (M)-effective dans X . Soit (N) une famille de morphismes vérifiant (a) et (f_M) . Pour tout sous-objet Y de X , stable par R et tel que le morphisme $Y \rightarrow X$ soit élément de (N), la relation d'équivalence*

induite dans Y par R est (M) -effective et le quotient $Y/R_Y = Y'$ est un sous-objet de $X' = X/R$ tel que $Y' \rightarrow X'$ soit élément de (N) . L'application $Y \mapsto Y'$ réalise une correspondance bijective entre l'ensemble des sous-objets Y de X , stables par R , tels que le morphisme $Y \rightarrow X$ soit élément de (N) , et l'ensemble des sous-objets Y' de X' tels que le morphisme $Y' \rightarrow X'$ soit élément de (N) . L'application réciproque est $Y' \mapsto Y' \times_{X'} X$.

Corollaire 4.7.3. — Supposons de plus que $R \rightarrow X \times X$ soit élément de (N) . Alors, pour tout Y comme dans l'énoncé, $R_Y \rightarrow Y \times Y$ est aussi élément de (N) . Si (N) vérifie (a) et (f_T) , on a donc

$Y'(S) =$ ensemble des sous- S -objets Z de Y_S , stables par R_S , tels que $Z \rightarrow Y_S$ soit élément de (N) (alors $Z \rightarrow X_S$ est aussi élément de (N)), que $Z \rightarrow S$ soit couvrant et que $R_Z \xrightarrow{\sim} Z \times_S Z$.

5. Passage au quotient et structures algébriques

5.1. Fibrés principaux homogènes On rappelle (III 1) qu'un objet X à groupe d'opérateurs (à droite) H est dit *formellement principal homogène* sous H si le morphisme canonique (de foncteurs)

$$X \times H \longrightarrow X \times X$$

défini par $(x, h) \mapsto (x, xh)$ est un *isomorphisme*. Il revient au même de dire (cf. *loc. cit.*) que pour tout $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$, $X(S)$ est formellement principal homogène sous $H(S)$, c'est-à-dire vide ou principal homogène sous $H(S)$. En particulier, si on fait opérer H sur lui-même par translations (à droite), H devient formellement principal homogène sous lui-même. 230

Définition 5.1.1. — L'objet X à groupe d'opérateurs H est dit *trivial* s'il est isomorphe (comme objet à groupe d'opérateurs H) à H sur lequel H opère par translations.

Proposition 5.1.2. — Soit X formellement principal homogène sous H . On a un isomorphisme

$$\Gamma(X) \xrightarrow{\sim} \text{Isom}_{H\text{-obj.}}(H, X)$$

d'ensemble principaux homogènes sous $\Gamma(H)$.

A toute section x de X on associe le morphisme de H dans X défini ensemblistement par $h \mapsto xh$. L'assertion énoncée est immédiate, par réduction au cas ensembliste.

Corollaire 5.1.3. — On a un isomorphisme d'objets à opérateurs H

$$X \longrightarrow \underline{\text{Isom}}_{H\text{-obj.}}(H, X).$$

Corollaire 5.1.4. — Pour qu'un objet à groupe d'opérateurs soit trivial, il faut et il suffit qu'il soit formellement principal homogène et qu'il possède une section.

Définition 5.1.5. — Soit \mathcal{C} une catégorie munie d'une *topologie*. On dit que le S -objet X à S -groupe d'opérateurs H est *fibré principal homogène* sous H s'il est *localement trivial*, c'est-à-dire si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

(i) L'ensemble des $T \rightarrow S$ tels que (le foncteur) $X \times_S T$ soit trivial sous $H \times_S T$ est un raffinement de S .

231 (ii) Il existe une famille couvrante (pour une prétopologie définissant la topologie donnée) $\{S_i \rightarrow S\}$ telle que pour chaque i , le S_i -foncteur $X \times_S S_i$ à S_i -foncteur-groupe d'opérateurs $H \times_S S_i$ soit *trivial* (= possède une section sur S_i).

Proposition 5.1.6. — Soit \mathcal{C} une catégorie munie d'une topologie \mathcal{T} . Soit (M) une famille de morphismes de \mathcal{C} vérifiant les axiomes (a) à $(e_{\mathcal{T}})$ de 4.6.3. Soient H un S -groupe tel que le morphisme structural $H \rightarrow S$ soit élément de (M) et P un S -objet à S -groupe d'opérateurs H . Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) P est fibré principal homogène sous H (définition 5.1.5).

(ii) P est formellement principal homogène sous H et le morphisme structural $P \rightarrow S$ est élément de (M) .

(iii) Il existe un morphisme $S' \rightarrow S$ élément de (M) tel que par extension de la base de S à S' , P devienne trivial, c'est-à-dire que $P \times_S S'$ soit trivial sous $H \times_S S'$.

(iv) H opère librement sur P , de manière (M) -effective et le quotient H/P est isomorphe à S .

Remarquons d'abord que (ii) et (iv) sont équivalents, compte tenu du fait que, dans l'un et l'autre cas, $P \rightarrow S$ est élément de (M) , donc quarrable, ce qui assure la représentabilité des produits fibrés $H \times_S P$ et $P \times_S P$. Il est clair que (ii) entraîne (iii), car on peut prendre comme S' P lui-même, l'hypothèse que P est formellement principal homogène entraînant que $P \times_S P$ est trivial sous $H \times_S P$ (5.1.4), car il a une section (la section diagonale). Il est clair que (iii) entraîne (i), car $\{S' \rightarrow S\}$ est une famille couvrante, par l'axiome $(d_{\mathcal{T}})$. Il reste donc à montrer que (i) entraîne (ii). Le morphisme de faisceaux $P \times_S H \rightarrow P \times_S P$ est localement un isomorphisme, donc un isomorphisme (4.5.8); P est donc formellement principal homogène. Le morphisme structural $P \rightarrow S$ est localement isomorphe au morphisme structural $H \rightarrow S$ qui est élément de (M) . Il est donc lui-même élément de (M) par $(e_{\mathcal{T}})$.

232

L'équivalence entre (i) et (iv) se généralise :

Proposition 5.1.7. — Sous les mêmes hypothèses sur \mathcal{C} et (M) , soient H un S -groupe et X un S -objet sur lequel H opère (à droite). Supposons le morphisme structural $H \rightarrow S$ élément de (M) . Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) H opère librement sur X et de manière (M) -effective.

(ii) Il existe un S -morphisme $p : X \rightarrow Y$ compatible avec la relation d'équivalence définie dans X par l'action de H et tel que l'opération de $H \times_S Y$ sur X au-dessus de Y qu'on en déduit fasse de X un fibré principal homogène sous H_Y au-dessus de Y .

Sous ces conditions p identifie Y quotient X/H .

Si $p : X \rightarrow Y$ est un morphisme compatible avec l'action de H , alors l'opération de $H \times_S Y$ sur X au-dessus de Y qu'on en déduit définit dans X la même relation d'équivalence que l'action de H , en vertu de la formule

$$H_Y \times_Y X \xrightarrow{\sim} H_S \times_S X.$$

la proposition résulte de cette remarque et de l'équivalence (iv) \Leftrightarrow (i) précédente.

Corollaire 5.1.7.1. — Soit \mathcal{C} une catégorie possédant un objet final, stable par produits fibrés, et munie d'une topologie \mathcal{T} moins fine que la topologie canonique. Soient $f : G \rightarrow H$ un morphisme de \mathcal{C} -groupes, et $K = \text{Ker}(f)$. On suppose f couvrant pour la topologie \mathcal{T} .

Alors H représente le faisceau quotient G/K , et f est un K_H -torseur. (N. B. On dira aussi que : « G est un K -torseur au-dessus de H ».)

En effet, comme f est couvrant, c'est un épimorphisme effectif universel (4.4.3), donc d'après 3.3.3, H est le quotient de G par la relation d'équivalence $\mathcal{R}(f) = G \times_H G$. D'autre part, le morphisme $G \times K \rightarrow G \times_H G$, $(g, k) \mapsto (g, gk)$ est un isomorphisme d'objets à groupe d'opérateurs $K_G = G \times_H K_H$ (son inverse étant donné par $(g, g') \mapsto (g, g^{-1}g')$). Donc, d'une part, $\mathcal{R}(f)$ est la relation d'équivalence définie par K ; d'autre part, comme le morphisme $f : G \rightarrow H$ est couvrant, f est un K_H -torseur, d'après 5.1.6 (ii) (ou directement d'après la définition 5.1.5 (ii)).

Nous pouvons maintenant préciser le théorème 4.6.6 dans le cas du passage au quotient par un groupe d'opérateurs :

Proposition 5.1.8. — Dans les hypothèses de 5.1.7, notons F_0 le foncteur au-dessus de S défini comme suit : pour chaque $S' \rightarrow S$, $F_0(S')$ est l'ensemble des sous- S' -foncteurs représentables Z de $X \times_S S'$, stables sous $H \times_S S'$ et fibrés principaux homogènes sous ce S' -groupe pour l'action induite (3.2.2).

(i) Les conditions suivantes sont équivalentes :

233

- a) L'opération de H dans X est (M) -effective et libre.
- b) F_0 est représentable.

Sous ces conditions, on a $F_0 = X/H$.

(ii) Soit (N) une famille de morphismes, stables par changement de base, telle que pour toute famille couvrante $\{S'_i \rightarrow S'\}$ et toute famille $\{T_i \rightarrow S'_i\}$ de morphismes de (N) , toute donnée de descente sur les T_i relativement à $\{S'_i \rightarrow S'\}$ soit effective. Supposons le morphisme $X \times_S H \rightarrow X \times_S X$ élément de (N) et X quarrable. Alors l'élément p de $\text{Hom}(X, F_0)$ correspondant au sous-objet $X \times_S H$ de $X \times_S X$ identifie F_0 au faisceau-quotient X/H .

5.2. Structures de groupes et passage au quotient. — Nous nous intéressons dans ce numéro aux structures algébriques que l'on peut mettre sur le quotient G/H d'un groupe par un sous-groupe. Nous nous placerons d'abord dans la catégorie des faisceaux sur \mathcal{C} pour une topologie quelconque. En prenant la topologie canonique et en utilisant 4.5.12, nous obtiendrons des résultats pour le passage au quotient effectif universel dans \mathcal{C} .

Proposition 5.2.1. — Soit $u : H \rightarrow G$ un monomorphisme de faisceaux en groupes. Il existe sur le faisceau G/H une structure unique d'objet à groupe d'opérateurs G telle que le morphisme canonique

$$p : G \longrightarrow G/H$$

soit un morphisme d'objets à groupe d'opérateurs G . Cette structure est fonctorielle par rapport au couple (G, H) : si on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow f \\ H' & \longrightarrow & G' \end{array} ,$$

234 le morphisme $\bar{f} : G/H \rightarrow G'/H'$ (3.2.3) est compatible avec le morphisme f sur les groupes d'opérateurs.

En effet, le faisceau G/H est le faisceau associé au préfaisceau

$$i(G)/i(H) : S \mapsto G(S)/H(S);$$

comme le foncteur a est exact à gauche, il transforme objets à groupes d'opérateurs en objets à groupe d'opérateurs. Le préfaisceau $i(G)/i(H)$ étant muni d'une structure d'objet à groupes d'opérateurs $i(G)$, $G/H = a(i(G)/i(H))$ est muni d'une structure d'objet à opérateurs $a(i(G)) = G$. Cette structure jouit évidemment de toutes les propriétés énoncées.

Corollaire 5.2.2. — Soit $u : H \rightarrow G$ un monomorphisme de \mathcal{C} -groupes. Supposons que l'opération de H sur G soit effective universelle. Il existe sur le quotient G/H une structure unique d'objet à groupe opérateurs G telle que le morphisme $p : G \rightarrow G/H$ soit un morphisme d'objets à opérateurs. Cette structure est fonctorielle en le couple (H, G) (H opérant de manière effective universelle dans G), au sens précédent.

Proposition 5.2.3. — Soit $u : H \rightarrow G$ un monomorphisme de faisceaux en groupes identifiant H à un sous-faisceau en groupes invariant de G . Il existe sur le quotient G/H une structure unique de faisceau en groupes telle que le morphisme canonique $p : G \rightarrow G/H$ soit un morphisme de groupes. Cette structure est fonctorielle en le couple (H, G) (H invariant).

La démonstration est semblable à celle de 5.2.1.

Corollaire 5.2.4. — Soit $u : H \rightarrow G$ un monomorphisme de \mathcal{C} -groupes identifiant H à un sous-groupe invariant de G . Supposons que l'action de H sur G soit effective universelle. Il existe sur le quotient G/H une structure de groupe unique telle que le morphisme canonique $G \rightarrow G/H$ soit un morphisme de groupes. Cette structure est fonctorielle par rapport au couple (H, G) (H invariant, H opérant de manière effective universelle).

235 On peut caractériser la structure de groupe de G/H de manière plus parlante :

Proposition 5.2.5. — Sous les conditions de 5.2.4, soient K un \mathcal{C} -groupe et $f : G \rightarrow K$ un morphisme. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est un morphisme de groupes compatible avec la relation d'équivalence définie par H .

(ii) f est un morphisme de groupes induisant le morphisme trivial $H \rightarrow K$.

(iii) f se factorise en un morphisme de groupes $G/H \rightarrow K$.

En particulier, on a un isomorphisme, fonctoriel en le groupe K

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\text{-gr.}}(G/H, K) \xrightarrow{\sim} \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\text{-gr.}}(G, K), f \circ u = e\}.$$

L'équivalence de (i) et (ii) se démontre ensemblistement. On a évidemment (iii) \Rightarrow (ii). L'équivalence de (iii) et de (ii) résulte de la formule

$$\mathrm{Hom}(G/H, K) \simeq \mathrm{Hom}(i(G)/i(H), K)$$

et de la définition de la structure de groupe de G/H .

Remarque 5.2.6. — Dans la situation précédente, si le noyau de f est exactement H , le morphisme $G/H \rightarrow K$ qui factorise f est un *monomorphisme*. Cela résulte aussitôt de 3.3.4.

Dans le cas de faisceaux en groupes, on peut préciser 4.4.11 par la

Proposition 5.2.7. — Soient G un faisceau en groupes, H un sous-faisceau en groupes invariant. Pour tout sous-faisceau en groupes K de G contenant H , soit K' le groupe quotient K/H considéré comme un sous-groupe de $G' = G/H$. On a $K = K' \times_{G'} G$. Les applications $K \mapsto K/H$ et $K' \mapsto K' \times_{G'} G$ réalisent une correspondance bijective entre l'ensemble des sous-faisceaux en groupes de G contenant H et l'ensemble des sous-faisceaux en groupes de G' . Dans cette correspondance, les sous-faisceaux en groupes invariants de G correspondent aux sous-faisceaux invariants de G' .

236

La première partie résulte facilement de 4.4.11 et de 3.2.4. Il reste à voir que K est invariant dans G si et seulement si K' est invariant dans G' . Si K est invariant dans G , alors le préfaisceau $i(K)/i(H)$ est invariant dans $i(G)/i(H)$. Il en est de même des faisceaux associés, en vertu de l'argument habituel. Si réciproquement K' est invariant dans G' , alors le produit fibré $K \times_{G'} G$ est invariant dans G , comme on le voit immédiatement.

Si maintenant L est un sous-faisceau en groupes quelconque de G , soit \bar{L} le saturé de L pour la relation d'équivalence définie par H , on notera aussi $\bar{L} = L \cdot H$.

Proposition 5.2.8. — Sous les conditions précédentes, $L \cdot H$ est un sous-faisceau en groupes de G contenant H et l'image de L dans G/H s'identifie à

$$(L \cdot H)/H \simeq L/(H \cap L).$$

En effet, notons L' le faisceau image de L dans G/H . C'est un sous-faisceau en groupes de G/H correspondant à $L \cdot H$ dans la correspondance de la proposition précédente. Comme le morphisme $L \rightarrow L'$ est couvrant, donc un épimorphisme effectif universel de faisceaux, il résulte de 4.4.9 que L' s'identifie au quotient de L par le noyau de $L \rightarrow L'$ qui n'est évidemment autre que $H \cap L$.

Considérons enfin la situation suivante : on a un faisceau en groupes G , un sous-faisceau en groupes K et un sous-faisceau en groupes H de K , invariant dans K . Définissons d'abord une opération (à droite) du faisceau en groupes $H \setminus K (= K/H)$ sur G/H . Le groupe K opère par translations à droite sur G . Comme H est invariant dans K , cette opération est compatible avec la relation d'équivalence définie par l'action

237

de H et définit donc une opération de K sur G/H , c'est-à-dire un morphisme du groupe K° opposé à K dans $\underline{\text{Aut}}(G/H)$. Comme ce dernier est un faisceau (4.5.13) et que ce morphisme est trivial sur H , il se factorise par K/H et définit l'opération cherchée. Comme les opérations de G sur lui-même à droite et à gauche commutent, les opérations de G et de K/H sur G/H commutent.

Proposition 5.2.9. — *Sous les conditions précédentes, K/H opère librement (à droite) dans G/H et on a un isomorphisme canonique de faisceaux à groupe d'opérateurs G*

$$(G/H)/(K/H) \simeq G/K.$$

Lorsque K est invariant dans G , auquel cas K/H est invariant dans G/H (5.2.7), cet isomorphisme respecte les structures de groupe des deux membres.

On a un isomorphisme de préfaisceaux

$$(i(G)/i(H))/(i(K)/i(H)) \xleftarrow{\sim} i(G)/i(K),$$

qui respecte les structures d'objets à groupe d'opérateurs $i(G)$. Le résultat annoncé s'obtient en appliquant le foncteur a à cette relation.

Corollaire 5.2.10. — *Soient G un \mathcal{C} -groupe, K un sous- \mathcal{C} -groupe de G , H un sous- \mathcal{C} -groupe invariant de K . Soit (M) une famille de morphismes de \mathcal{C} vérifiant les axiomes (a) à (e_T) . Supposons l'opération de H sur G (resp. K) à droite (M) -effective. Alors K/H opère de manière naturelle librement à droite sur G/H ; cette opération commute à celle de G . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 238 (i) *L'opération de K sur G est (M) -effective.*
(ii) *L'opération de K/H sur G/H est (M) -effective.*

Sous ces conditions, on a un isomorphisme d'objets à groupe d'opérateurs G :

$$(G/H)/(K/H) \simeq G/K.$$

5.3. Utilisation de critères d'effectivité : théorème de Noether. — Soient \mathcal{C}, \mathcal{T} et (M) comme d'habitude. Soit (N) une famille de morphismes vérifiant les axiomes (a) et (f_M) de 4.7.

Mettant ensemble 5.2.7 et 4.7.2, on obtient :

Proposition 5.3.1. — *Soit G un \mathcal{C} -groupe. Soit H un sous- \mathcal{C} -groupe de G , invariant et opérant de manière (M) -effective dans G . Pour tout sous- \mathcal{C} -groupe K de G majorant H et tel que le morphisme $K \rightarrow G$ soit élément de (N) , H opère dans K de manière (M) -effective et le quotient $K/H = K'$ est un sous- \mathcal{C} -groupe de $G/H = G'$ tel que le morphisme $K' \rightarrow G'$ soit élément de (N) . L'application $K \mapsto K'$ réalise une correspondance bijective entre l'ensemble des sous- \mathcal{C} -groupes K de G , majorant H et tels que $K \rightarrow G$ soit élément de (N) et l'ensemble des sous- \mathcal{C} -groupes K' de G' tels que $K' \rightarrow G'$ soit élément de (N) . L'application réciproque est $K' \mapsto K \times_G G$. Dans cette correspondance, les sous-groupes invariants de G correspondent aux sous-groupes invariants de G' .*

Corollaire 5.3.2. — *Si $H \rightarrow G$ est élément de (N) , alors \mathcal{C} possède un objet final e et la section unité $e \rightarrow G/H$ est élément de (N) .*

6. Topologies dans la catégorie des schémas

239

6.1. La topologie de Zariski. — C'est la topologie engendrée par la prétopologie suivante : une famille de morphismes $\{S_i \rightarrow S\}$ est couvrante si chaque morphisme est une immersion ouverte et si la réunion des images des S_i est S tout entier. On la note (Zar).

Un faisceau pour la topologie de Zariski est aussi appelé *foncteur de nature locale* : c'est un foncteur contravariant de (Sch) dans (Ens) tel que pour tout schéma S et tout recouvrement de S par des ouverts S_i , on ait un diagramme exact :

$$F(S) \rightarrow \prod_i F(S_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(S_i \cap S_j).$$

En particulier, un foncteur de nature locale *transforme sommes directes en produits*. Comme tout foncteur représentable est un faisceau, cette topologie est moins fine que la topologie canonique.

Au point de vue terminologie, chaque fois que nous dirons « local », « localement », sans précisions, ce sera par référence à la topologie de Zariski, donc au sens habituel.

6.2. Un procédé de construction de topologies

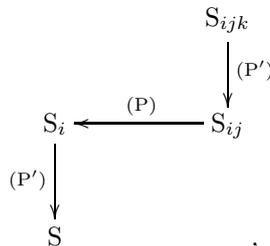
Proposition 6.2.1. — Soient \mathcal{C} une catégorie et \mathcal{C}' une sous-catégorie pleine. Soit P un ensemble de familles de morphismes de \mathcal{C} de même but, stable par changement de base et par composition (c'est-à-dire vérifiant les axiomes (P 1) et (P 2) de 4.2.5). Soit P' un ensemble de morphismes de \mathcal{C}' . On suppose que P' contient les familles réduites à un isomorphisme identique (P 3) vérifie la condition suivante :

(a) Si $\{S_i \rightarrow S\} \in P'$ (donc $S_i, S \in \text{Ob } \mathcal{C}'$) et si $T \rightarrow S$ est un morphisme de \mathcal{C}' , alors les produits fibrés $S_i \times_S T$ (dans \mathcal{C}) existent et la famille $\{S_i \times_S T \rightarrow T\} \in P'$ (donc $S_i \times_S T \in \text{Ob } \mathcal{C}'$). (Remarque : cette condition entraîne que P' est stable par changement de base dans \mathcal{C}' , mais ne lui est pas équivalente, car elle suppose de plus que le foncteur d'inclusion de \mathcal{C}' dans \mathcal{C} commute à certains produits fibrés).

240

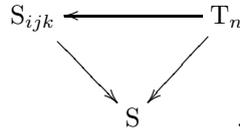
On suppose de plus vérifiées les deux conditions ci-dessous :

- (b) Pour tout $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$, il existe $\{S_i \rightarrow S\} \in P$ avec $S_i \in \text{Ob } \mathcal{C}'$ pour chaque i .
- (c) Dans la situation suivante :



où $S, S_i, S_{ij}, S_{ijk} \in \text{Ob } \mathcal{C}'$; $\{S_i \rightarrow S\} \in P'$; $\{S_{ij} \rightarrow S_i\} \in P$ pour chaque i ; $\{S_{ijk} \rightarrow S_{ij}\} \in P'$ pour chaque ij , il existe une famille $\{T_n \rightarrow S\} \in P'$ et pour chaque

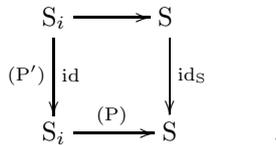
n un multi-indice (ijk) et un diagramme commutatif



Munissons \mathcal{C} de la topologie engendrée par P et P' . Soient $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$ et R un crible de S . Pour que R soit *couvrant*, il faut et il suffit qu'il existe une famille composée $\{S_{ij} \rightarrow S_i \rightarrow S\}$, où $S_i, S_{ij} \in \text{Ob } \mathcal{C}'$, $\{S_i \rightarrow S\} \in P$, $\{S_{ij} \rightarrow S_i\} \in P'$ pour chaque i , et que les morphismes $S_{ij} \rightarrow S$ obtenus se factorisent par R (en d'autres termes que le crible engendré par cette famille composée soit contenu dans R).

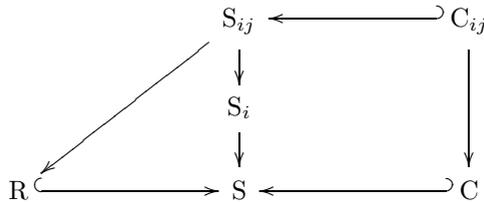
241 *Démonstration.* Les familles éléments de P et de P' étant couvrantes, une famille composée de telles familles le sera aussi (C 2), donc un crible de la forme indiquée couvrant, car contenant un crible couvrant. Réciproquement, il suffit de voir que les cribles de cette forme forment bien une topologie, c'est-à-dire de vérifier les axiomes (T 1) à (T 4) de 4.2.1.

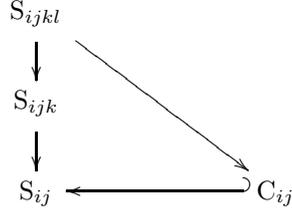
Axiome (T 4). Soit $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$. Il existe d'après (b) une famille $\{S_i \rightarrow S\} \in P$ avec $S_i \in \text{Ob } \mathcal{C}'$. Les familles $\{S_i \xrightarrow{\text{id}_{S_i}} S_i\}$ sont éléments de P' par hypothèse. Le crible S de S est donc de la forme voulue :



Axiome (T 3). Evident.

Axiome (T 2). Soit R un crible de S de la forme voulue et soit C un crible quelconque de S . Comme $S_{ij} \rightarrow S$ se factorise par R , le crible $C_{ij} = C \times_S S_{ij}$ de S_{ij} est de la forme voulue par hypothèse.

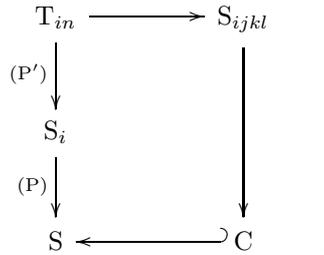




On a donc pour chaque ij un diagramme de la forme ci-contre On a donc prouvé qu'il existe une famille composée

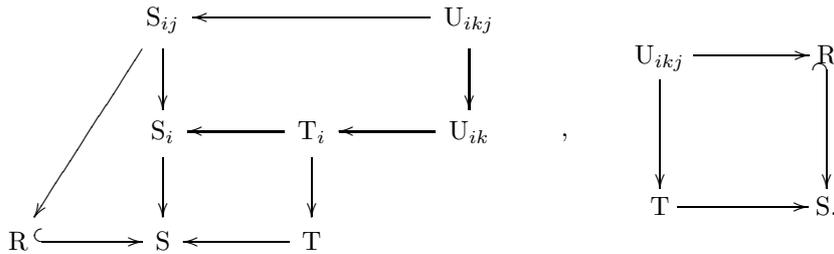
$$S_{ijkl} \xrightarrow{(P')} S_{ijk} \xrightarrow{(P)} S_{ij} \xrightarrow{(P')} S_i \xrightarrow{(P)} S$$

appartenant à $P \circ P' \circ P \circ P'$, se factorisant par C et où tous les objets autres que S sont dans \mathcal{C}' . Appliquant la condition (c) à chaque famille $\{S_{ijkl} \rightarrow S_i\}$, on en déduit **242** qu'il existe pour chaque i une famille $\{T_{in} \rightarrow S_i\} \in P'$, telle que $T_{in} \rightarrow S$ se factorise par l'un des S_{ijkl} , donc par C :



Le crible C est donc de la forme voulue, ce qui achève la vérification.

Axiome (T 1). Soit R un crible de S de la forme donnée et soit $T \rightarrow S$ un morphisme de \mathcal{C} .



Soit $T_i = S_i \times_S T$. La famille $\{T_i \rightarrow T\}$ appartient à P (par (P 1)). Appliquant (b), on construit des $\{U_{ik} \rightarrow T_i\} \in P$, avec les $U_{ik} \in \text{Ob } \mathcal{C}'$. Par hypothèse (condition (P 2) sur P), on a $\{U_{ik} \rightarrow T\} \in P$. D'après (a), $U_{ik} \times_{S_i} S_{ij} = U_{ikj}$ est objet de \mathcal{C}' et pour chaque ik , $\{U_{ikj} \rightarrow U_{ik}\} \in P'$. Le carré commutatif ci-dessus montre alors que les morphismes $U_{ikj} \rightarrow T$ se factorisent par le crible $T \times_S R$ de T , qui est donc de la forme voulue, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 6.2.2. — Si $S \in \text{Ob } \mathcal{C}'$ et si R est un crible de S , R est couvrant si et seulement si il existe une famille $\{T_i \rightarrow S\} \in P'$, se factorisant par R .

243 En effet, un tel crible est couvrant. D'autre part il suffit d'appliquer (c) en prenant la famille $\{S_i \rightarrow S\}$ réduite à l'isomorphisme identique de S pour déduire de la proposition qu'un crible couvrant est de la forme indiquée.

Corollaire 6.2.3. — *Pour qu'un préfaisceau F sur \mathcal{C} soit séparé (resp. un faisceau), il faut et il suffit que le morphisme*

$$F(S) \longrightarrow \prod_i F(S_i)$$

soit injectif (resp. le diagramme

$$F(S) \longrightarrow \prod_i F(S_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(S_i \times_S S_j)$$

exact) dans les deux cas suivants :

- (i) $\{S_i \rightarrow S\} \in P$,
- (ii) $S, S_i \in \text{Ob } \mathcal{C}'$; $\{S_i \rightarrow S\} \in P'$.

En effet, les conditions sont nécessaires, car les familles en question sont couvrantes. Si C est un crible de S engendré par une famille de morphismes du type indiqué, un diagram-chasing facile montre que les conditions du corollaire entraînent que $\text{Hom}(S, F) \xrightarrow{g} \text{Hom}(C, F)$ est injectif (resp. bijectif). Mais tout raffinement R de S contient un crible C du type ci-dessus et on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(S, F) & \xrightarrow{f} & \text{Hom}(R, F) \\ & \searrow g & \swarrow h \\ & \text{Hom}(C, F) & \end{array} .$$

244 On sait que g est injectif, donc aussi f . Donc F est séparé. Mais R est un raffinement de C , donc h est aussi injectif. Si g est bijectif, alors f l'est aussi, donc F est un faisceau.

Remarque 6.2.4. — Le corollaire précédent ne résulte *pas* de 4.3.5, car P' n'est *pas* stable par extension de la base.

Remarque 6.2.5. — La condition (c) est vérifiée en particulier dans le cas où

- (i) P' est stable par composition.
- (ii) Si $\{S_i \rightarrow S\}$ est une famille de morphismes de \mathcal{C}' , élément de P , il en existe une sous-famille élément de P' .

6.3. Application à la catégorie des schémas. — On prend pour \mathcal{C} la catégorie des schémas, pour \mathcal{C}' la sous-catégorie pleine formée des schémas affines, pour P l'ensemble des familles surjectives d'immersions ouvertes. On considèrera plusieurs ensembles P' :

P'_1 : familles finies surjectives, composées de morphismes *plats*.

P'_2 : familles finies surjectives, composées de morphismes *plats de présentation finie et quasi-finis*.

P'_3 : familles finies surjectives, composées de morphismes *étales*

P'_4 : familles finies surjectives, composées de morphismes *étales et finis*.

Pour chacun de ces ensembles P'_i , sauf P'_4 , les conditions de la proposition sont vérifiées ((c) grâce à 6.2.5, car un schéma affine étant quasi-compact, toute famille de morphismes de \mathcal{C}' , élément de P , contient une sous-famille *finie* qui soit également dans P , donc dans P'_i). La topologie \mathcal{T}_i engendrée par P et P'_i est notée et appelée de la manière suivante : 245

$\mathcal{T}_1 = (\text{fpqc}) =$ topologie fidèlement plate quasi-compacte.

$\mathcal{T}_2 = (\text{fppf}) =$ topologie fidèlement plate (localement) de présentation finie.

$\mathcal{T}_3 = (\text{ét}) =$ topologie étale.

$\mathcal{T}_4 = (\text{etf}) =$ topologie étale finie.

Comme $P'_1 \supset P'_2 \supset P'_3 \supset P'_4$, on a

$$(\text{fpqc}) \geq (\text{fppf}) \geq (\text{ét}) \geq (\text{etf}) \geq (\text{Zar}).$$

Proposition 6.3.1. — (i) *Pour que le crible R de S soit couvrant pour \mathcal{T}_i , $1 \leq i \leq 3$, il faut et il suffit qu'il existe un recouvrement (S_p) de S par des ouverts affines et pour chaque p une famille $\{S_{pq} \rightarrow S_p\}$ élément de P'_i , les S_{pq} étant affines, tels que chaque morphisme $\{S_{pq} \rightarrow S\}$ se factorise par R .*

(ii) *Pour qu'un préfaisceau F sur (\mathbf{Sch}) soit un faisceau pour (fpqc) (resp. (fppf) , (ét) , (etf)), il faut et il suffit que*

a) *F soit un faisceau pour (Zar) , i.e. un foncteur de nature locale.*

b) *Pour tout morphisme fidèlement plat (resp. fid. plat de présentation finie et quasi-fini, resp. étale surjectif, resp. étale fini surjectif) $T \rightarrow S$, où T et S sont affines, on ait un diagramme exact :*

$$F(S) \longrightarrow F(T) \rightrightarrows F(T \times_S T).$$

(iii) *Les topologies \mathcal{T}_i , $i = 1, 2, 3, 4$, sont moins fines que la topologie canonique.*

(iv) *Toute famille surjective formée de morphismes plats et ouverts (resp. plats et localement de présentation finie, resp. étales, resp. étales et finis) est couvrante pour (fpqc) (resp. (fppf) resp. (fpqf) , resp. (ét) , resp. (etf) .* 246

(v) *Toute famille surjective, finie et formée de morphismes plats et quasi-compact est couvrante pour (fpqc) . En particulier, tout morphisme fidèlement plat et quasi-compact est couvrant pour (fpqc) .*

Démonstration. (i) résulte de 6.2.1, (ii) de 6.2.3, compte tenu du fait qu'un faisceau pour la topologie de Zariski transforme sommes directes en produits. Tout foncteur représentable étant un faisceau pour (Zar) et vérifiant la condition (b) de (ii) par SGA 1, VIII 5.3, \mathcal{T}_1 est moins fine que la topologie canonique, ce qui prouve (iii).

Prouvons (iv). Soit $\{S_i \rightarrow S\}$ une famille de morphisme comme dans l'énoncé. Considérant un recouvrement de S par des ouverts affines, on se ramène immédiatement au cas où S est affine. Soit alors $S_{i,j}$ un recouvrement de S_i par des ouverts affines,

tels que la restriction de $S_i \rightarrow S$ à S_{ij} soit quelconque (resp. de présentation finie et quasi-finie EGA IV, resp. quelconque, resp. quelconque). Comme les morphismes en cause sont ouverts, les images T_{ij} des S_{ij} forment un recouvrement ouvert de S . Soit T_{ijk} un recouvrement ouvert affine de T_{ij} . Les $S_{ijk} = S_{ij} \times_S T_{ijk}$ sont affines,

$$\begin{array}{ccccc}
 & & S_{ij} & \longleftarrow & S_{ijk} \\
 & \swarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 S_i & & T_{ij} & \longleftarrow & T_{ijk} \\
 \downarrow & \swarrow & & & \\
 S & & & &
 \end{array}$$

les morphismes $S_{ijk} \rightarrow T_{ijk}$ sont surjectifs, plats et ouverts resp. plats de présentation finie et quasi-finis, resp. étales, resp. étales et finis). La famille composée $\{S_{ijk} \rightarrow T_{ijk} \rightarrow S\}$ est donc couvrante par (i). Comme elle se factorise par la famille donnée, celle-ci est couvrante.

247 Prouvons (v). Soit $\{S_i \rightarrow S\}$ une famille *finie* fidèlement plate et quasi-compacte. Soit T_j un recouvrement de S par des ouverts affines. Les $S_{ij} = T_j \times_S S_i$ sont quasi-compactes et possèdent donc des recouvrements ouverts affines *finis* T_{ijk} . Chaque morphisme $T_{ijk} \rightarrow T_j$ est plat, et la famille $\{T_{ijk} \rightarrow T_j\}$ est *finie* et surjective. La famille $\{T_{ijk} \rightarrow S\}$ est couvrante par (i). Elle se factorise par la famille donnée qui l'est donc aussi :

$$\begin{array}{ccccc}
 S_i & \longleftarrow & S_{ij} & \longleftarrow & T_{ijk} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \swarrow \\
 S & \longleftarrow & T_j & &
 \end{array}$$

Corollaire 6.3.2. — Soit (M_i) la famille de morphismes suivante :

- (M₁) : morphismes fidèlement plats et quasi-compactes.
- (M₂) : morphismes fidèlement plats localement de présentation finie.
- (M₃) : morphismes étales.
- (M₄) : morphismes étales et finis.

La famille (M_i) vérifie les axiomes (a), (b), (c), $(d_{\mathcal{T}_i})$ et $(e_{\mathcal{T}_i})$ de 4.6.3.

En effet, pour (a), (b), (c), c'est classique (EGA et SGA 1, passim.). D'après 6.3.1, (iv) et (v), (M_i) vérifie $(d_{\mathcal{T}_i})$. Il reste à voir que (M_i) vérifie $(e_{\mathcal{T}_i})$; pour cela, il suffit de voir que (M_i) vérifie $(e_{\mathcal{T}_1})$ qui entraîne les autres. Cela résulte de SGA 1, VIII (n^{os} 4 et 5).

Corollaire 6.3.3. — Si X est un schéma et R une relation d'équivalence dans X de type (M_i) , R est (M_i) -effective si et seulement si le faisceau quotient de X par R pour \mathcal{T}_i est représentable et en ce cas il est représenté par le quotient X/R .

En effet, c'est 4.6.5.

248

6.4. Conditions d'effectivité. — Nous cherchons maintenant des familles (N) de morphismes vérifiant l'axiome $(f_{\mathcal{T}})$ de 4.7. Remarquons d'abord que $(f_{\mathcal{T}_1})$ entraîne $(f_{\mathcal{T}_i})$, ce qui fait que nous pouvons nous restreindre au cas de la topologie $(fpqc)$.

Lemme 6.4.1. — Les familles de morphismes suivantes vérifient l'axiome $(f_{\mathcal{T}_1})$ de 4.7, c'est-à-dire « se descendent par $(fpqc)$ » :

- (N) : immersions ouvertes.
- (N') : immersions fermées.
- (N'') : immersions quasi-compactes.

En vertu de 6.3.1 (ii), il suffit de vérifier que les familles données se descendent par la topologie de Zariski et par un morphisme fidèlement plat quasi-compact. La première assertion est claire, vérifions la seconde. Pour (N) , c'est SGA 1, VIII 4.4, pour (N') , c'est loc. cit., 1.9. Pour (N'') on raisonne comme dans loc. cit., 5.5 à l'aide des deux résultats antérieurs.

Corollaire 6.4.2. — Le même résultat est valable pour les immersions ouvertes quasi-compactes.

Ces résultats permettent d'appliquer à la situation présente les résultats généraux de 4.7.1, 4.7.2, 5.1.8, 5.3.1, etc... Énonçons-en un comme exemple, le premier.

Corollaire 6.4.3. — (= 4.7.1 + 4.6.10). Soient X un schéma et R une relation d'équivalence dans X . On suppose que $R \rightarrow X$ est fidèlement plat et quasi-compact et que $R \rightarrow X \times X$ est une immersion fermée (resp. ouverte, resp. quasi-compacte, resp. ouverte quasi-compacte). Alors le faisceau-quotient X/R est le même pour la topologie $(fpqc)$ et pour la topologie canonique, et pour chaque schéma S , on a

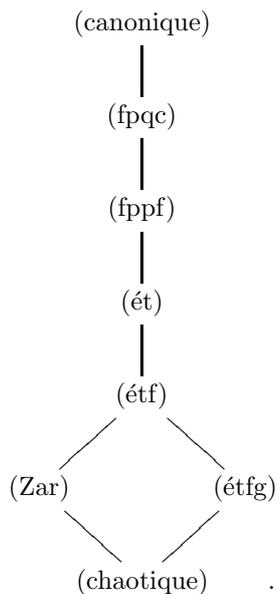
249

$X/R(S) =$ ensemble des sous-schémas fermés (resp. ouverts, resp. rétro-compacts, resp. ouverts rétrocompacts) Z de X_S , stables par R_S , tels que $Z \rightarrow S$ soit fidèlement plat quasi-compact et le diagramme $R_Z \rightrightarrows Z \rightarrow S$ exact.

6.5. Fibrés principaux homogènes. — Signalons simplement la terminologie :

topologie	fibrés	principaux	homogènes	
$(fpqc)$	"	"	"	(tout court)
$(ét)$	"	"	"	quasi-isotriviaux
$(étf)$	"	"	"	localement isotriviaux
(Zar)	"	"	"	localement triviaux.

6.6. Autres topologies. — On utilise parfois d'autres topologies sur la catégorie des schémas. Signalons-en une : la topologie *étale finie globale* (étfg) engendrée par la prétopologie dont les familles couvrantes sont les familles surjectives formées de morphismes étales et finis. Elle *n'est pas* plus fine que la topologie de Zariski. Les fibrés principaux homogènes correspondants sont appelés « isotriviaux ».



250

Bibliographie

- [AS] Analysis Situs, par J. GIRAUD, Sém. Bourbaki, Exp. **256**, Mai 1963.
- [D] Méthode de la descente, Mémoires de la S.M.F. n° 2, par J. GIRAUD.
- [MA] Grothendieck Topologies, par M. ARTIN, notes multigraphiées, Harvard, 1962.
- [TDTE I] Techniques de descente ... I. Généralités. Descente par morphismes fidèlement plats, par A. GROTHENDIECK, Sém. Bourbaki, Exp. **190**, Déc. 1959.