

EXPOSÉ V

CONSTRUCTION DE SCHÉMAS QUOTIENTS

par P. GABRIEL

L'objet de cet exposé est de démontrer les théorèmes énoncés dans TDTE III . Si X et T sont deux objets d'une catégorie $\mathcal{C}$ nous écrivons $X(T)$ au lieu de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X)$. De même, si $\varphi : Y \rightarrow X$ et $f : U \rightarrow T$ sont deux flèches de $\mathcal{C}$, $\varphi(T)$ désigne l'application $g \mapsto \varphi \circ g$ de $Y(T)$ dans $X(T)$, $Y(f)$ l'application $g \mapsto g \circ f$ de $Y(T)$ dans $Y(U)$. Enfin, si P est un schéma, on note $\underline{P}$ l'ensemble sous-jacent à P . 251

Exceptionnellement, nous ne suivons pas dans le présent exposé la convention énoncée dans IV 4.6.15 sur la notation des quotients (loc. cit. haut de la page 68) car nous désirons donner ici une construction de quotients qui s'applique également à des « pré-relations d'équivalence » qui ne sont pas des relations d'équivalence.

1. $\mathcal{C}$ -groupeïdes

$\mathcal{C}$ est une catégorie où les produits et produits fibrés existent. Rappelons d'abord qu'un diagramme

$$X_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} X_0 \xrightarrow{p} Y$$

de $\mathcal{C}$ est dit *exact* si $pd_0 = pd_1$ et si, pour tout $T \in \mathcal{C}$, $T(p)$ est une bijection de $T(Y)$ sur la partie de $T(X_0)$ formée des flèches $f : X_0 \rightarrow T$ telles que $fd_0 = fd_1$. On dit aussi que (Y, p) est le conoyau de (d_0, d_1) et on écrit

$$(Y, p) = \text{Coker}(d_0, d_1).$$

Soit par exemple $\mathcal{C}$ la catégorie des espaces annelés. Dans ce cas, il existe toujours un conoyau (Y, p) , dont on peut donner la description suivante : l'espace sous-jacent à Y est obtenu à partir de X_0 en identifiant les points $d_0(x)$ et $d_1(x)$ et en munissant Y de la topologie quotient. L'application canonique $\pi : X \rightarrow Y$ et d_0, d_1 induisent alors une double-flèche de faisceaux d'anneaux sur Y 252

$$\pi_*(\mathcal{O}_0) \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_0} \\ \xrightarrow{\delta_1} \end{array} \pi_*(d_{0*}\mathcal{O}_1) = \pi_*(d_{1*}\mathcal{O}_1)$$

où $\mathcal{O}_i$ est le faisceau structural de X_i . On choisit pour faisceau d'anneaux sur Y le sous-faisceau de $\pi_*(\mathcal{O}_0)$ dont les sections s sont telles que $\delta_0(s) = \delta_1(s)$. La flèche p est définie de façon évidente.

Dans cet exposé, nous étudions l'existence de $\text{Coker}(d_0, d_1)$ lorsque la double flèche (d_0, d_1) se trouve insérée dans un contexte plus riche ; de façon précise, désignons par $X_2 = X_1 \times_{d_1, d_0} X_1$ le produit fibré du diagramme

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} & X_1 & \\ & \downarrow d_1 & \\ X_1 & \xrightarrow{d_0} & X_0 \end{array},$$

par d'_0 et d'_2 les deux projections canoniques de X_2 sur X_1 ; on a donc par définition un *carré cartésien*

$$(0) \quad \begin{array}{ccc} X_2 & \xrightarrow{d'_0} & X_1 \\ d'_2 \downarrow & & \downarrow d_1 \\ X_1 & \xrightarrow{d_0} & X_0 \end{array}.$$

253 De plus, donnons-nous une troisième flèche $d'_1 : X_2 \rightarrow X_1$; nous disons que $(d_0, d_1 : X_1 \rightrightarrows X_0, d'_1)$ est un *$\mathcal{C}$ -groupoïde* si pour tout objet T de $\mathcal{C}$, $X_1(T)$ est l'ensemble des flèches d'un groupoïde $X_*(T)$ dont l'ensemble des objets est $X_0(T)$, l'application source $d_1(T)$, l'application but $d_0(T)$ et dont l'application composition est $d'_1(T)$ (on identifie comme d'habitude $(X_1 \times_{d_1, d_0} X_1)(T)$ à $X_1(T) \times_{d_1(T), d_0(T)} X_1(T)$; on rappelle aussi qu'un groupoïde est une catégorie dont toutes les flèches sont inversibles).

Si φ est une flèche du groupoïde $X_*(T)$, l'application $f \mapsto \varphi \circ f$ est une bijection de l'ensemble des flèches f dont le but coïncide avec la source de φ sur l'ensemble des flèches ayant même but que φ . On voit facilement qu'on peut traduire ce fait en disant que *le carré*

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} X_2 & \xrightarrow{d'_1} & X_1 \\ d'_0 \downarrow & & \downarrow d_0 \\ X_1 & \xrightarrow{d_0} & X_0 \end{array}$$

est cartésien.

De même, l'application $g \mapsto g \circ \varphi$ est une bijection de l'ensemble des flèches g de $X_*(T)$ qui ont pour source le but de φ sur l'ensemble des flèches qui ont même source

que φ . On peut encore traduire ce fait en disant que *le carré*

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} X_2 & \xrightarrow{d'_1} & X_1 \\ d'_2 \downarrow & & \downarrow d_1 \\ X_1 & \xrightarrow{d_1} & X_0 \end{array}$$

est cartésien.

Notons d'autre part $s : X_0 \rightarrow X_1$ l'unique flèche de $\mathcal{C}$ telle que $s(T) : X_0(T) \rightarrow X_1(T)$ associée à tout objet de $X_*(T)$ la flèche identique de cet objet. La flèche s satisfait aux égalités

$$(3) \quad d_1 s = \text{id}_{X_0},$$

et $(3 \text{ bis}) \quad d_0 s = \text{id}_{X_0}.$

Enfin, l'associativité des applications- composition $d'_1(T)$ se traduit par la commutativité du diagramme

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} X_1 \times_{d_1, d_0} X_1 \times_{d_1, d_0} X_1 & \xrightarrow{d'_1 \times X_1} & X_1 \times_{d_1, d_0} X_1 \\ \downarrow X_1 \times d'_1 & & \downarrow d'_1 \\ X_1 \times_{d_1, d_0} X_1 & \xrightarrow{d'_1} & X_1 \end{array} .$$

Réciproquement, les conditions (1), (2) et (4) et l'existence d'une flèche s satisfaisant à (3) impliquent que $(X_1 \xrightleftharpoons[d_0]{d_1} X_0, d'_1)$ est un $\mathcal{C}$ -groupoïde. La condition (3) est bénigne; elle assure simplement que l'application $d_1(T) : X_1(T) \rightarrow X_0(T)$ est surjective pour tout $T \in \mathcal{C}$. Dans la suite de cet exposé, nous nous servons surtout des carrés cartésiens (0), (1) et (2) que nous résumons dans le diagramme

$$(0,1,2) \quad \begin{array}{ccccc} X_2 & \xrightleftharpoons[d'_0]{d'_1} & X_1 & \xrightarrow{d_0} & X_0 \\ d'_2 \downarrow & & \downarrow d_1 & & \\ X_1 & \xrightleftharpoons[d_0]{d_1} & X_0 & & \end{array} .$$

Dans ce diagramme les deux carrés de gauche (i.e. les carrés (0) et (2)) sont cartésiens; la première ligne est exacte et X_2 s'identifie au produit fibré $X_1 \times_{d_0, d_0} X_1$. Nous n'utilisons l'associativité que de façon détournée, par exemple pour assurer l'existence d'une flèche s satisfaisant à (3) et (3 bis), ou bien pour assurer l'existence d'une flèche $\sigma : X_1 \rightarrow X_1$ telle que $d_0 \sigma = d_1$ et $d_1 \sigma = d_0$ (on choisit σ de telle manière que $\sigma(T) : X_1(T) \rightarrow X_1(T)$ envoie toute flèche de $X_*(T)$ sur la flèche inverse).

254

255

Par abus de langage il nous arrivera d'appeler $\mathcal{C}$ -groupeïde un diagramme

$$X_2 \xrightarrow{d'_0, d'_1, d'_2} X_1 \xrightarrow{d_0, d_1} X_0$$

tel que (0), (1) et (2) soient cartésiens, que (4) soit commutatif et qu'il existe s satisfaisant à (3). L'objet X_2 pourra donc être « un » produit fibré de $(*)$ sans être « le » produit fibré de $(*)$. Au lieu du $\mathcal{C}$ -groupeïde X_* , nous parlerons aussi du *groupeïde* X_* de base X_0 , ou de la *prérelation d'équivalence* X_* dans X_0 .

2. Exemples de $\mathcal{C}$ -groupeïdes

a) Soient X un objet de $\mathcal{C}$ et G un $\mathcal{C}$ -groupe opérant à gauche sur X . Nous désignons par $d_0 : G \times X \rightarrow X$ la flèche définissant l'opération de G sur X , par $d_1 : G \times X \rightarrow X$ la projection du produit sur le deuxième facteur, par $\mu : G \times G \rightarrow G$ la flèche définissant la structure de $\mathcal{C}$ -groupe de G , enfin par $\text{pr}_{2,3}$ la projection de $G \times G \times X = G \times (G \times X)$ sur le deuxième facteur. Alors

$$G \times G \times X \xrightarrow{\text{pr}_{2,3}} G \times X \xrightarrow{d_1} X$$

$$\xrightarrow{\mu \times X} \xrightarrow{G \times d_0} \xrightarrow{d_0}$$

est un $\mathcal{C}$ -groupeïde.

b) Soit $d_0, d_1 : X_1 \rightarrow X_0$ un couple d'équivalence. Si $d_0 \boxtimes d_1 : X_1 \rightarrow X_0 \times X_0$ est la flèche de composantes d_0 et d_1 , nous supposons donc que $(d_0 \boxtimes d_1)(T)$ est, pour tout objet T de $\mathcal{C}$, une bijection de $X_1(T)$ sur le graphe d'une relation d'équivalence de $X_0(T)$. L'ensemble $X_1(T)$ s'identifie par conséquent à l'ensemble des couples (x, y) formés d'éléments de $X_0(T)$ tels que $x \sim y$; de même, l'ensemble $X_2(T) = (X_1 \times_{d_1, d_0} X_1)(T)$ s'identifie à l'ensemble des triplets (x, y, z) d'éléments de $X_0(T)$ tels que $x \sim y$ et $y \sim z$. Il y a donc une et une seule flèche $d'_1 : X_2 \rightarrow X_1$ rendant commutatifs les carrés (1) et (2) : $d'_1(T)$ doit envoyer $(x, y, z) \in X_2(T)$ sur $(x, z) \in X_1(T)$. Pour ce choix de d'_1 , $(d_0, d_1 : X_1 \rightrightarrows X_0, d'_1)$ est un $\mathcal{C}$ -groupeïde.

Réciproquement, considérons un $\mathcal{C}$ -groupeïde X_* tel que $d_0 \boxtimes d_1 : X_1 \rightarrow X_0 \times X_0$ soit un *monomorphisme*. Alors (d_0, d_1) est un couple d'équivalence et X_* peut être reconstruit à partir de (d_0, d_1) comme cela est expliqué quelques lignes plus haut.

c) Si $p : X \rightarrow Y$ est une flèche quelconque de $\mathcal{C}$ et si pr_1 et pr_2 sont les deux projections de $X \times_{p,p} X$ sur X , alors $(\text{pr}_1, \text{pr}_2) : X \times_{p,p} X \rightrightarrows X$ est un couple d'équivalence. On dit que p est un *épimorphisme effectif* si le diagramme

$$X \times_{p,p} X \xrightarrow{\text{pr}_1} X \xrightarrow{p} Y$$

$$\xrightarrow{\text{pr}_2} \xrightarrow{p}$$

est exact, c'est-à-dire si $(Y, p) = \text{Coker}(\text{pr}_1, \text{pr}_2)$.

Soit par exemple S un schéma noethérien et soit $\mathcal{C}$ la catégorie des schémas finis au-dessus de S . Montrons qu'un épimorphisme de $\mathcal{C}$ n'est pas forcément effectif : on choisit S égal à $\text{Spec } k[T^3, T^5]$, où k est un corps commutatif, Y égal à S et X égal à $\text{Spec } k[T]$. Si i est l'inclusion de $B = k[T^3, T^5]$ dans $A = k[T]$, p est choisi égal à

Spec i . Dans ce cas $X \times_{p,p} X$ s'identifie à $\text{Spec}(A \otimes_B A)$ et $\text{Coker}(\text{pr}_1, \text{pr}_2)$ à $\text{Spec } B'$, où B' est le sous-anneau de A formé des a tels que $a \otimes_B 1 = 1 \otimes_B a$. Or

$$T^7 \otimes_B 1 = (T^2 T^5) \otimes_B 1 = T^2 \otimes_B T^5 = T^2 \otimes_B (T^3 T^2) = T^5 \otimes_B T^2 = 1 \otimes_B T^7$$

Donc T^7 appartient à B' , n'appartient pas à B et $\text{Spec } B'$ est distinct de $\text{Spec } B$, d'où le contre-exemple.

3. Quelques sorites sur les $\mathcal{C}$ -groupeïdes

Voici pêle-mêle quelques remarques utilisées dans la suite :

a) Soient

$$X_2 \xrightarrow{\quad d'_0, d'_1, d'_2 \quad} X_1 \xrightarrow{\quad d_0, d_1 \quad} X_0$$

un $\mathcal{C}$ -groupeïde et $f_0 : Y_0 \rightarrow X_0$ une flèche de $\mathcal{C}$. Nous allons définir un $\mathcal{C}$ -groupeïde de base Y_0

$$Y_2 \xrightarrow{\quad e'_0, e'_1, e'_2 \quad} Y_1 \xrightarrow{\quad e_0, e_1 \quad} Y_0$$

qu'on dira *induit par* X_* et f_0 . On dira aussi que Y_* est *l'image réciproque de* X_* *par le changement de base* f_0 .

Nous choisissons pour Y_1 le produit fibré du diagramme

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & \xrightarrow{\quad f_1 \quad} & X_1 \\ \downarrow & & \downarrow d_0 \boxtimes d_1 \\ Y_0 \times Y_0 & \xrightarrow{\quad f_0 \times f_0 \quad} & X_0 \times X_0 \end{array},$$

pour e_0 et e_1 les flèches composées de la flèche canonique $Y_1 \rightarrow Y_0 \times Y_0$ et des première et deuxième projections de $Y_0 \times Y_0$. On peut dire que le couple (e_0, e_1) est défini de telle façon que, pour tout $T \in \mathcal{C}$, et pour tout couple (y, x) d'éléments de $Y_0(T)$, il y ait une certaine correspondance biunivoque $\psi \mapsto {}_y\psi_x$ entre les flèches ψ de $X_*(T)$ de source $f_0(x)$, de but $f_0(y)$ et les flèches ${}_y\psi_x$ de $Y_*(T)$ de source x et de but y . On détermine donc $e'_1 : Y_2 \rightarrow Y_1$ en définissant pour tout $T \in \mathcal{C}$ la composition des flèches de $Y_*(T)$ à l'aide de la formule

$${}_z\psi_y \circ {}_y\varphi_x = {}_z(\psi \circ \varphi)_x.$$

Il est clair que cette définition fait de chaque $Y_*(T)$ un groupeïde.

b) Connaissant le $\mathcal{C}$ -groupeïde X_* et le changement de base $f_0 : Y_0 \rightarrow X_0$, on peut reconstruire le couple $(e_0, e_1) : Y_1 \rightrightarrows Y_0$ d'une autre manière : construisons

$Y_0 \times_{X_0} X_1$, pr_1 et pr_2 de telle façon que le carré

$$\begin{array}{ccc} Y_0 \times_{X_0} X_1 & \xrightarrow{\text{pr}_2} & X_1 \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow d_0 \\ Y_0 & \xrightarrow{f_0} & X_0 \end{array}$$

soit cartésien. On vérifie alors sans peine par réduction au cas ensembliste qu'on peut définir Y_1 au moyen du carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & \xrightarrow{e_0 \boxtimes f_1} & Y_0 \times_{X_0} X_1 \\ e_1 \downarrow & & \downarrow d_1 \circ \text{pr}_2 \\ Y_0 & \xrightarrow{f_0} & X_0 \end{array},$$

où f_1 désigne la projection canonique de $Y_1 = (Y_0 \times Y_0) \times_{(X_0 \times X_0)} X_1$ sur X_1 .

- 259** c) Nous allons donner un exemple d'image réciproque d'un $\mathcal{C}$ -groupeïde : prenons Y_0 égal à X_1 , f_0 égal à d_0 . Pour tout objet T de $\mathcal{C}$, $Y_1(T)$ s'identifie alors à l'ensemble des diagrammes de la forme

$$\begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{\varphi} & d \\ f \uparrow & & \uparrow g \\ a & & c \end{array}$$

de $X_*(T)$. La source d'un tel diagramme est la flèche f , le but est la flèche g . Ces diagrammes se composent de façon évidente.

Posons maintenant $Y'_0 = X_1$, $f'_0 = d_1$ (nous ajoutons les accents pour éviter toute confusion avec l'exemple précédent). Dans ce cas, $Y'_1(T)$ s'identifie pour tout $T \in \mathcal{C}$ à l'ensemble des diagrammes de la forme

$$\begin{array}{ccc} b & & d \\ f \uparrow & & \uparrow g \\ a & \xrightarrow{\psi} & c \end{array}$$

du groupeïde $X_*(T)$. La source d'un tel diagramme est f , le but est g ; la composition de ces diagrammes est évidente.

Ceci dit, il est clair que l'application identique de $Y_0(T)$ et l'application

$$\begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{\varphi} & d \\ f \uparrow & & \uparrow g \\ a & & c \end{array} \quad \mapsto \quad \begin{array}{ccc} b & & d \\ f \uparrow & & \uparrow g \\ a & \xrightarrow{g^{-1}\varphi f} & c \end{array}$$

de $Y_1(T)$ sur $Y'_1(T)$ définissent un isomorphisme du groupoïde $Y_*(T)$ sur $Y'_*(T)$. De plus, cet isomorphisme dépend fonctoriellement de T de sorte que les $\mathcal{C}$ -groupoïdes Y_* et Y'_* sont isomorphes.

d)

Proposition 3.1. — Nous conservons les notations de a) et nous supposons que f_0 est un épimorphisme effectif et universel. Dans ce cas, $\text{Coker}(d_0, d_1)$ existe si et seulement si $\text{Coker}(e_0, e_1)$ existe. L'égalité $(X, p) = \text{Coker}(d_0, d_1)$ entraîne $(X, pf_0) = \text{Coker}(e_0, e_1)$. 260

Rappelons d'abord qu'un épimorphisme $f_0 : Y_0 \rightarrow X_0$ est dit universel si, pour tout carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y' & \longrightarrow & Y_0 \\ f' \downarrow & & \downarrow f_0 \\ X' & \longrightarrow & X_0 \end{array},$$

f' est un épimorphisme. Ceci étant, désignons par $C(d_0, d_1)$ le foncteur covariant de $\mathcal{C}$ dans les ensembles qui associe à tout $T \in \mathcal{C}$ le noyau du couple $T(d_0), T(d_1) : T(X_0) \rightrightarrows T(X_1)$. Définissons de même $C(e_0, e_1)$. Pour tout $T \in \mathcal{C}$, on a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} C(d_0, d_1)(T) & \longrightarrow & T(X_0) & \xrightleftharpoons[T(d_0)]{T(d_1)} & T(X_1) \\ \downarrow T(f) & & \downarrow T(f_0) & & \downarrow T(f_1) \\ C(e_0, e_1)(T) & \longrightarrow & T(Y_0) & \xrightleftharpoons[T(e_0)]{T(e_1)} & T(Y_1) \end{array},$$

où $T(f)$ est l'injection induite par l'injection $T(f_0)$. Si nous montrons que $T(f)$ est une surjection pour tout T , on aura un isomorphisme fonctoriel $f : C(d_0, d_1) \xrightarrow{\sim} C(e_0, e_1)$ de sorte que la représentabilité de l'un de ces foncteurs équivaudra à celle de l'autre; ceci prouvera notre proposition.

Pour prouver la surjectivité de $T(f)$, considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Y_1 & \xrightarrow{f_1} & X_1 \\
 & \nearrow \Delta & \downarrow e_0 & \downarrow e_1 & \downarrow d_0 \\
 Y_0 \times_{X_0} Y_0 & \xrightarrow{\text{pr}_2} & Y_0 & \xrightarrow{f_0} & X_0 \\
 & \xleftarrow{\text{pr}_1} & & & \\
 & & Y_0 & \downarrow d_1 & \\
 & & & & X_0
 \end{array}
 ,$$

261 où Δ est défini par les égalités $(e_0 \boxtimes e_1)\Delta = \text{pr}_1 \boxtimes \text{pr}_2$ et $f_1\Delta = sf_0\text{pr}_1$, la flèche $s : X_0 \rightarrow X_1$ satisfaisant aux égalités (3) et (3 bis) du paragraphe 1.

Si la flèche $g : Y_0 \rightarrow T$ est telle que $g \circ e_0 = g \circ e_1$, on a $g \circ e_0 \circ \Delta = g \circ e_1 \circ \Delta$, donc $g \circ \text{pr}_1 = g \circ \text{pr}_2$. Comme f_0 est un épimorphisme effectif, g est composé de f_0 et d'une flèche $h : X_0 \rightarrow T$, c'est-à-dire qu'on a $g = T(f_0)(h)$. Il reste à montrer que h appartient à $C(d_0, d_1)(T)$, c'est-à-dire satisfait à l'égalité $hd_0 = hd_1$; or on a

$$hd_0f_1 = hf_0e_0 = ge_0 = ge_1 = hf_0e_1 = hd_1f_1,$$

d'où l'égalité cherchée grâce au fait que f_1 est un épimorphisme (car f_0 est un épimorphisme universel).

e) Considérons maintenant un schéma S et choisissons $\mathcal{C}$ égal à $(\mathbf{Sch}/S)$. La donnée d'un $\mathcal{C}$ -groupeoïde

$$\begin{array}{ccccc}
 & \xrightarrow{d'_2} & & & \\
 X_2 & \xrightarrow{d'_1} & X_1 & \xrightarrow{d_1} & X_0 \\
 & \xrightarrow{d'_0} & & \xrightarrow{d_0} & \\
 & & & &
 \end{array}$$

permet de définir une relation d'équivalence dans l'ensemble $\underline{X_0}$ sous-jacent au schéma X_0 : si $x, y \in \underline{X_0}$, on écrira $x \sim y$ lorsqu'il existe $z \in \underline{X_1}$ tel que $x = d_1z$ et $y = d_0z$. La réflexivité et la symétrie de cette relation sont évidentes ; prouvons la transitivité : si $x \sim y$ et $y \sim z$, il existe $u, v \in \underline{X_1}$ tels que $x = d_1u, y = d_0u, y = d_1v, z = d_0v$.
 262 Il s'ensuit que (v, u) appartient au produit fibré ensembliste $\underline{X_1} \times_{\underline{d_1}, \underline{d_0}} \underline{X_1}$. Comme l'application canonique

$$\underline{X_1} \times_{\underline{d_1}, \underline{d_0}} \underline{X_1} \longrightarrow \underline{X_1} \times_{\underline{d_1}, \underline{d_0}} \underline{X_1}$$

de l'ensemble sous-jacent au produit fibré dans le produit fibré des ensembles sous-jacents est surjective, (v, u) est l'image d'un certain $w \in \underline{X_2}$. On a alors $x = d_1d'_1w$ et $z = d_0d'_1w$, d'où $x \sim z$.

f) Conservons les notations de a) et b), $\mathcal{C}$ étant toujours égal à $(\mathbf{Sch}/S)$. Si x, y sont des points de Y_0 , nous allons voir qu'on a $x \sim y$ si et seulement si $f_0(x) \sim f_0(y)$ (l'image réciproque de la relation d'équivalence définie par un groupeoïde est la relation d'équivalence définie par l'image réciproque du groupeoïde).

En effet, supposons qu'on a $x \sim y$. Il existe donc $z \in \underline{Y_1}$ tel que $x = e_1z, y = e_0z$. On a alors $f_0(x) = d_1f_1z$ et $f_0(y) = d_0f_1z$ d'où $f_0(x) \sim f_0(y)$.

Réciproquement, supposons qu'on a $f_0(x) \sim f_0(y)$ et soit $z \in \underline{X_1}$ tel que $f_0(y) = d_1z, f_0(x) = d_0z$. Il y a alors un point t de $\underline{Y_0 \times_{X_0} X_1}$ tel que $\text{pr}_1(t) = x$ et $\text{pr}_2(t) = z$

(les notations sont celles de b)). De même, comme $f_0(y) = d_1 \text{pr}_2(t)$, il y a un $s \in \underline{Y}_1$ tel que $y = e_1(s)$ et $(e_0 \boxtimes f_1)(s) = t$. On a alors $e_0(s) = \text{pr}_1(e_0 \boxtimes f_1)(s) = \text{pr}_1(t) = x$. D'où $x \sim y$.

4. Passage au quotient par une prérelation d'équivalence finie et plate (démonstration d'un cas particulier)

Théorème 4.1. — Soit

$$\begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{d'_2} & & \xrightarrow{d_1} & \\ X_2 & \xrightarrow{d'_1} & X_1 & \xrightarrow{d_0} & X_0 \\ & \xrightarrow{d'_0} & & & \end{array}$$

un $(\mathbf{Sch}/S)$ -groupeïde tel que d_1 soit fini localement libre et que, pour tout $x \in X_0$, l'ensemble $d_0 d_1^{-1}(x)$ soit contenu dans un ouvert affine de X_0 . Alors : 263

- (i) Il existe un conoyau (Y, p) de (d_0, d_1) dans $(\mathbf{Sch}/S)$; de plus, un tel (Y, p) est un conoyau de (d_0, d_1) dans la catégorie de tous les espaces annelés.
- (ii) p est entier, et Y est affine si X_0 est affine.
- (iii) Le morphisme $X_1 \rightarrow X_0 \times_Y X_0$ de composantes d_0 et d_1 est surjectif.
- (iv) Si (d_0, d_1) est un couple d'équivalence, $X_1 \rightarrow X_0 \times_Y X_0$ est un isomorphisme et $p : X_0 \rightarrow Y$ est fini localement libre.

Il résulte évidemment de (i) que l'espace topologique sous-jacent à Y est le quotient de l'espace topologique sous-jacent à X_0 par la relation d'équivalence définie par le $(\mathbf{Sch}/S)$ -groupeïde X_* .

Nous allons d'abord prouver ce théorème lorsque X_0 est affine et que d_1 est localement libre de rang constant n . Nous verrons ensuite comment on peut se ramener à ce cas particulier :

Dans le cas où nous nous sommes placés, X_0 , X_1 et X_2 sont affines. Nous pouvons donc supposer qu'on a

$$X_i = \text{Spec } A_i \quad , \quad d_j = \text{Spec } \delta_j \quad , \quad d'_k = \text{Spec } \delta'_k,$$

les A_i étant des anneaux commutatifs, les δ_j, δ'_k des homomorphismes d'anneaux. On peut alors remplacer le diagramme $(0, 1, 2)$ par le suivant

$$(0, 1, 2)^* \quad \begin{array}{ccccc} & \xleftarrow{\delta'_1} & A_1 & \xleftarrow{\delta_0} & A_0 \\ & \xleftarrow{\delta'_0} & & & \\ \delta'_2 \uparrow & & & & \uparrow \delta_1 \\ A_1 & \xleftarrow{\delta_1} & A_0 & & \\ & \xleftarrow{\delta_0} & & & \end{array}$$

où les deux carrés de gauche sont cocartésiens.

Désignons par B le sous-anneau de A_0 formé des $a \in A_0$ tels que $\delta_0(a) = \delta_1(a)$. 264

a) A_0 est entier sur B :

Si a appartient à A_0 , soit

$$P_{\delta_1}(T, \delta_0(a)) = T^n - \sigma_1 T^{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n$$

le polynôme caractéristique de $\delta_0(a)$ lorsqu'on considère A_1 comme algèbre sur A_0 au moyen de l'homomorphisme δ_1 (cf. Bourbaki, *Alg.* VIII, § 12 et *Alg. comm.* II, § 5, exercice 9). Comme les carrés de gauche de $(0, 1, 2)^*$ sont cocartésiens, on a

$$\begin{aligned} \delta_0(P_{\delta_1}(T, \delta_0(a))) &= P_{\delta'_2}(T, \delta'_0 \delta_0(a)) \\ \text{et} \quad \delta_1(P_{\delta_1}(T, \delta_0(a))) &= P_{\delta'_2}(T, \delta'_1 \delta_0(a)). \end{aligned}$$

Comme $\delta'_0 \delta_0 = \delta'_1 \delta_0$, on a

$$\delta_0(P_{\delta_1}(T, \delta_0(a))) = \delta_1(P_{\delta_1}(T, \delta_0(a)))$$

c'est-à-dire $\delta_0(\sigma_i) = \delta_1(\sigma_i)$ pour tout i . Hamilton-Cayley nous enseigne d'autre part qu'on a

$$\delta_0(a)^n - \delta_1(\sigma_1) \delta_0(a)^{n-1} + \cdots + (-1)^n \delta_1(\sigma_n) = 0.$$

Comme $\delta_1(\sigma_i)$ est égal à $\delta_0(\sigma_i)$, on a aussi

$$\delta_0(a)^n - \delta_0(\sigma_1) \delta_0(a)^{n-1} + \cdots + (-1)^n \delta_0(\sigma_n) = 0,$$

d'où

$$a^n - \sigma_1 a^{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n = 0,$$

265 car il existe un homomorphisme $\tau : A_1 \rightarrow A_0$ tel que $\tau \delta_0 = \text{id}_{A_0}$, donc δ_0 est injectif. Il s'ensuit que A_0 est entier sur B .

b) Considérons maintenant deux idéaux premiers x et y de A_0 . Nous allons montrer que l'égalité $x \cap B = y \cap B$ entraîne l'existence d'un idéal premier z de A_1 tel que $x = d_0(z)$ et $y = d_1(z)$:

En effet, si l'assertion n'était pas vraie, x serait distinct de $\delta_0^{-1}(t)$ pour tout idéal premier t de A_1 tel que $\delta_1^{-1}(t) = y$. Pour un tel t on aurait $\delta_0^{-1}(t) \cap B = \delta_1^{-1}(t) \cap B = y \cap B = x \cap B$, d'où il résulterait grâce à Cohen-Seidenberg que x ne serait contenu dans aucun $\delta_0^{-1}(t)$; il y aurait donc un $a \in x$ qui n'appartiendrait à aucun $\delta_0^{-1}(t)$ (car il y a au plus n idéaux premiers t de A_1 tels que $\delta_1^{-1}(t) = y$). Par conséquent, $\delta_0(a)$ n'appartiendrait à aucun de ces t de sorte que la norme $N_{\delta_1}(\delta_0(a))$ n'appartiendrait pas à y (on calcule cette norme en considérant A_1 comme algèbre sur A_0 au moyen de l'homomorphisme δ_1 ; on a $N_{\delta_1}(\delta_0(a)) = \sigma_n$ avec les notations de a)). Or cette norme appartiendrait à $B \cap x = B \cap y$, d'où la contradiction.

c) *Démonstration de (i) :*

Posons $Y = \text{Spec } B$ et $p = \text{Spec } i$, où i est l'inclusion de B dans A_0 . Nous allons d'abord montrer que (Y, p) est un conoyau de (d_0, d_1) dans la catégorie de tous les espaces annelés : il résulte en effet de b) que l'ensemble sous-jacent à $\text{Spec } B$ est obtenu à partir de l'ensemble sous-jacent à X_0 en identifiant les points x et y tels qu'il existe $z \in X_1$ avec $d_1 z = y$, $d_0 z = x$. De plus, comme i est entier, $p = \text{Spec } i$ est fermé de sorte que Y est muni de la topologie quotient de celle de X_0 . Il résulte enfin du choix de B et du fait que p , d_0 et d_1 sont affines, que la suite canonique de faisceaux d'anneaux

$$\mathcal{O}_Y \longrightarrow p_*(\mathcal{O}_{X_0}) \xrightleftharpoons[p_*(\delta_0)]{p_*(\delta_1)} p_*(d_{0*}(\mathcal{O}_{X_1})) = p_*(d_{1*}(\mathcal{O}_{X_1}))$$

est exacte, c.q.f.d.

Il reste à montrer que (Y, p) est aussi le conoyau de (d_0, d_1) dans la catégorie des schémas (plus généralement dans celle des espaces annelés en anneaux locaux) : soit donc $q : X_0 \rightarrow Z$ un morphisme de schémas tel que $qd_0 = qd_1$. D'après ce qui précède, il y a un morphisme d'espaces annelés $r : Y \rightarrow Z$ et un seul tel que $q = rp$. Il s'agit de montrer que, pour tout $y \in Y$, l'homomorphisme $\mathcal{O}_{r(y)} \rightarrow \mathcal{O}_y$ induit par r est local. Cela résulte de ce que p est surjectif, donc de ce que y est de la forme $p(x)$ et de ce que les homomorphismes $\mathcal{O}_{q(x)} \rightarrow \mathcal{O}_x$ et $\mathcal{O}_y \rightarrow \mathcal{O}_x$ induits par p et q sont locaux.

d) Démonstration de (ii) : Résulte de a) et c).

e) Démonstration de (iii) :

Rappelons qu'on désigne par $\underline{P}$ l'ensemble sous-jacent à un schéma P , par $\underline{d} : \underline{P} \rightarrow \underline{Q}$ l'application induite par un morphisme $d : P \rightarrow Q$.

On peut alors traduire b) en disant que l'application

$$\underline{d}_0 \boxtimes \underline{d}_1 : \underline{X}_1 \longrightarrow \underline{X}_0 \times_{\underline{Y}} \underline{X}_0$$

de composantes $\underline{d}_0$ et $\underline{d}_1$ est surjective ; or cette application se factorise comme suit

$$\underline{X}_1 \xrightarrow{\underline{d}_0 \boxtimes \underline{d}_1} \underline{X}_0 \times_{\underline{Y}} \underline{X}_0 \xrightarrow{q} \underline{X}_0 \times_{\underline{Y}} \underline{X}_0$$

q étant l'application canonique ; l'image de $\underline{d}_0 \boxtimes \underline{d}_1$ contient donc tous les points v de $\underline{X}_0 \times_{\underline{Y}} \underline{X}_0$ tels que $\{v\} = q^{-1}(q(v))$. Cette dernière condition ⁽¹⁾ sera réalisée en particulier si v est rationnel au-dessus de $\underline{Y}$, c'est-à-dire si le corps résiduel $\kappa(v)$ de v s'identifie au corps résiduel $\kappa(w)$ de l'image w de v dans $\underline{Y}$.

267

Si $v \in \underline{X}_0 \times_{\underline{Y}} \underline{X}_0$ n'est pas rationnel au-dessus de $\underline{Y}$, soit toujours w l'image de v dans $\underline{Y}$; il existe alors un anneau local C de radical $\mathfrak{m}$ et un homomorphisme local et plat $f : \mathcal{O}_w \rightarrow C$ tel que $C/\mathfrak{m}$ soit isomorphe à $\kappa(v)$ comme $\kappa(w)$ -algèbre. Si on pose $Y' = \text{Spec } C$ et si $\pi : Y' \rightarrow Y$ est le morphisme induit par f , il est clair que la projection canonique de $(\underline{X}_0 \times_{\underline{Y}} \underline{X}_0) \times_{\underline{Y}} Y'$ dans $\underline{X}_0 \times_{\underline{Y}} \underline{X}_0$ envoie sur v un point v' de $(\underline{X}_0 \times_{\underline{Y}} \underline{X}_0) \times_{\underline{Y}} Y'$ qui est rationnel au-dessus de Y' . Comme $(\underline{X}_0 \times_{\underline{Y}} \underline{X}_0) \times_{\underline{Y}} Y'$ s'identifie à $(\underline{X}_0 \times_{\underline{Y}} Y') \times_{Y'} (\underline{X}_0 \times_{\underline{Y}} Y')$ et que les raisonnements faits ci-dessus restent valables après le changement de base $\pi : Y' \rightarrow Y$, v' est l'image d'un élément $u' \in \underline{X}_1 \times_{\underline{Y}} Y'$ par le morphisme déduit de $\underline{d}_0 \boxtimes \underline{d}_1$ par changement de base. Si u est l'image de u' dans $\underline{X}_1$, on a bien $v = (\underline{d}_0 \boxtimes \underline{d}_1)(u)$, c.q.f.d.

f) Démonstration de (iv) :

Il suffit de montrer que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de B , l'homomorphisme $(A_0)_{\mathfrak{p}} \otimes_{B_{\mathfrak{p}}} (A_0)_{\mathfrak{p}} \rightarrow (A_1)_{\mathfrak{p}}$ de composantes $\delta_{0\mathfrak{p}}$ et $\delta_{1\mathfrak{p}}$ est bijectif. Autrement dit, il est loisible de supposer B local. Il résulte alors de b) que $(A_0)_{\mathfrak{p}}$ est semi-local ; en effet, si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de $(A_0)_{\mathfrak{p}}$, les autres idéaux maximaux sont de la forme $\delta_0^{-1}(\mathfrak{n})$, où $\mathfrak{n}$

⁽¹⁾N.D.E. : Noter la permutation des pages dans le Lecture Notes 151, l'ordre réel est 265-266-268-269-267-270-271.

parcourt les idéaux premiers de A_1 tels que $\delta_1^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$; l'assertion résulte donc de ce qu'il y a au plus $n = [A_1 : A_0]$ idéaux premiers $\mathfrak{n}$. Quitte à faire un changement de base fidèlement plat, on peut aussi supposer que le corps résiduel de B est infini de sorte qu'on peut utiliser le lemme suivant :

Lemme 4.2. — Soient B un anneau local de corps résiduel infini, A un anneau semi-local et $i : B \rightarrow A$ un homomorphisme qui envoie l'idéal maximal $\mathfrak{n}$ de B dans le radical $\mathfrak{r}$ de A . Soient M un A -module libre de rang n et N un B -sous-module de M qui engendre M en tant que A -module. Alors N contient une base de M sur A .

On rappelle en effet qu'une suite $m_1, \dots, m_n$ d'éléments de M est une A -base de M si et seulement si les images canoniques de $m_1, \dots, m_n$ dans $M/\mathfrak{r}M$ forment une base de $M/\mathfrak{r}M$ sur $A/\mathfrak{r}$. On peut donc remplacer M par $M/\mathfrak{r}M$, N par $N/(N \cap \mathfrak{r}M)$, A par $A/\mathfrak{r}$ et B par $B/\mathfrak{m}$. Dans ce cas le lemme est facile (si A est un produit de corps $K_1 \times \dots \times K_r$, on peut identifier M au module $K_1^n \times \dots \times K_r^n$; si x_j est alors un élément de N dont la j -ième composante dans $K_1^n \times \dots \times K_r^n$ n'est pas nulle, montrer qu'une combinaison linéaire x des n_j à coefficients dans B a toutes ses composantes non nulles; remplacer ensuite M par M/Ax et procéder par récurrence sur n).

Nous appliquons le lemme précédent dans la situation suivante : $B = B$, $A = A_0$, i est l'inclusion de B dans A_0 , $M = A_1$ considéré comme A_0 -module au moyen de l'homomorphisme δ_1 , $N = \delta_0(A_0)$: en effet, comme $d_0 \boxtimes d_1 : X_1 \rightarrow X_0 \times_Y X_0$ est un monomorphisme, l'homomorphisme $A_0 \otimes_B A_0 \rightarrow A_1$ de composantes δ_0 et δ_1 est surjectif; cela signifie justement que $\delta_0(A_0)$ engendre le A_0 -module A_1 .

Soient donc $a_1, \dots, a_n$ des éléments de A_0 tels que $\delta_0(a_1), \dots, \delta_0(a_n)$ forment une base de A_1 sur A_0 . Si nous montrons que $a_1, \dots, a_n$ est une base de A_0 sur B , il s'ensuivra que l'homomorphisme $A_0 \otimes_B A_0 \rightarrow A_1$ applique la base $(1 \otimes a_i)_{1 \leq i \leq n}$ sur la base $(\delta_0(a_i))_{1 \leq i \leq n}$, donc est bijectif. Par conséquent, si $\varepsilon : \mathbb{Z}^n \rightarrow A_0$ est l'homomorphisme de groupes abéliens qui envoie la base naturelle de $\mathbb{Z}^n$ sur $a_1, \dots, a_n$, il suffit de prouver que l'application $B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n \rightarrow A_0$ de composantes i et ε est bijective. Or le diagramme $(0, 1, 2)^*$ considéré au début de cette preuve, induit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \delta'_1 & & \\
 & & \leftarrow & & \delta_0 \\
 A_2 & \xleftarrow{\delta'_0} & A_1 & \xleftarrow{\delta_0} & A_0 \\
 \uparrow u_2 & & \uparrow u_1 \cong & & \uparrow u_0 \\
 A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n & \xleftarrow[\delta_0 \otimes \mathbb{Z}^n]{\delta_1 \otimes \mathbb{Z}^n} & A_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n & \xleftarrow{i \otimes \mathbb{Z}^n} & B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n
 \end{array},$$

où u_0 , u_1 et u_2 ont pour composantes respectivement i et ε , δ_1 et $\delta_0\varepsilon$, δ'_2 et $\delta'_0\delta_0\varepsilon$. Nous savons que u_1 est un isomorphisme. Comme les deux carrés de gauche de $(0, 1, 2)^*$ sont cocartésiens, u_2 est bijectif. Or les deux lignes horizontales de notre diagramme sont exactes; donc u_0 est bijectif.

5. Passage au quotient par une prérelation d'équivalence finie et plate (cas général)

a) Soit $U^{(n)}$ le plus grand ouvert de X_0 au-dessus duquel d_1 est fini localement libre de rang n . On sait que X_0 est la somme directe des $U^{(n)}$. Il résulte d'autre part des deux carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccc} X_2 & \xrightarrow{d'_0} & X_1 \\ d'_2 \downarrow & & \downarrow d_1 \\ X_1 & \xrightarrow{d_0} & X_0 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} X_2 & \xrightarrow{d'_1} & X_1 \\ d'_2 \downarrow & & \downarrow d_1 \\ X_1 & \xrightarrow{d_1} & X_0 \end{array}$$

que les images réciproques de $U^{(n)}$ par d_0 et d_1 coïncident toutes les deux avec le plus grand ouvert de X_1 au-dessus duquel d'_2 est localement libre de rang n ; on a donc $d_0^{-1}(U^{(n)}) = d_1^{-1}(U^{(n)})$ de sorte que le groupoïde X_* est la somme directe des groupoïdes $X_*^{(n)}$ induits par X_* sur les ouverts et fermés $U^{(n)}$. Il suffit par conséquent, comme on le voit aisément, de prouver le théorème 4.1 pour chacun des $X_*^{(n)}$: on est ramené au cas où d_1 est fini localement libre de rang n .

b) Nous sommes maintenant en mesure de prouver notre théorème dans le cas **général**. 270

D'après a) on peut supposer que d_1 est localement libre de rang n . Soit alors (Y, p) un conoyau de (d_0, d_1) dans la catégorie de tous les espaces annelés. Le raisonnement du paragraphe 4.c) montre qu'il suffit pour démontrer 4.1 (i) de prouver que Y est un schéma et $p : X_0 \rightarrow Y$ un morphisme de schémas. La question est donc locale sur Y : Soit $y \in Y$ et soit $x \in X_0$ tel que $p(x) = y$. Si x possède un voisinage ouvert affine et saturé U , $p(U)$ sera un ouvert affine de Y d'après le §4 et $p|U$ sera un morphisme de schémas. Il suffit donc de prouver que tout $x \in X_0$ possède un voisinage ouvert affine et saturé U . Voici comment on procède (la démonstration est tirée de SGA 1, VIII cor. 7.6).

$$\begin{array}{ccccccc} d_1(d_0^{-1}(x)) & \subset & U = (V_f)' & \subset & V_f & \subset & V' & \subset & V & \subset & X_0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \text{plus grand} & & \text{ouvert affine} & & \text{plus grand} & & \text{ouvert affine} & & \\ & & \text{ouvert saturé} & & \text{spécial de } V & & \text{ouvert saturé} & & & & \\ & & \text{de } V_f & & & & \text{de } V & & & & \end{array}$$

On prend pour V un ouvert affine contenant $d_1(d_0^{-1}(x))$; si $F = X - V$, $d_1(d_0^{-1}(F))$ est fermé car d_1 est entier et $V' = X - d_1(d_0^{-1}(F))$ est le plus grand ouvert saturé contenu dans V . Comme V' est un voisinage de l'ensemble fini $d_1(d_0^{-1}(x))$, il existe une section f du faisceau structural de V qui s'annule sur $V - V'$ et est telle que

$d_1(d_0^{-1}(x))$ soit contenu dans l'ouvert V_f de V formé des points où f ne s'annule pas. Nous allons voir que le plus grand ouvert saturé $(V_f)'$ de V_f est affine, donc répond à la question :

271 Soit en effet $Z(f) = V' - V_f$. Alors $d_0^{-1}(Z(f))$ est l'ensemble des points de $d_0^{-1}(V') = d_1^{-1}(V')$ où s'annule l'image $d_0^*(f)$ de f par l'application induite par d_0 . D'autre part, comme d_1 induit un morphisme localement libre de rang n de $d_0^{-1}(V') = d_1^{-1}(V')$ sur V' , $d_1(d_0^{-1}(Z(f)))$ est l'ensemble des points où s'annule la norme N de $d_0^*(f)$ pour le morphisme d_1 . Il s'ensuit que $(V_f)' = V' - d_1(d_0^{-1}(Z(f)))$ est l'ensemble des points de V_f où N ne s'annule pas ; par conséquent, $(V_f)'$ est affine.

Ceci prouve 4.1 (i) ; les autres assertions sont claires.

6. Passage au quotient lorsqu'il existe une quasi-section

Nous allons maintenant prouver un *lemme de caractère technique* qui nous servira dans la démonstration des deux théorèmes que nous avons en vue : Soient S un schéma et

$$X_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{d'_0, d'_1, d'_2} \\ \xrightarrow{\quad\quad\quad} \\ \xrightarrow{\quad\quad\quad} \end{array} X_1 \xrightarrow{\quad\quad\quad} X_0$$

un $(\mathbf{Sch}/S)$ -groupeïde. Nous appellerons *quasi-section du groupeïde* X_* , tout sous-schéma U de X_0 tel qu'on ait (1) et (2) :

(1) La restriction v de d_1 à $d_0^{-1}(U)$ est un *morphisme fini, localement libre et surjectif* de $d_0^{-1}(U)$ sur X_0 .

(2) Toute partie de U formée de points deux à deux équivalents pour la relation d'équivalence définie par le groupeïde X_* (§ 3.e)) est contenue dans un ouvert affine de U .

Si U est une quasi-section de X_* , le $(\mathbf{Sch}/S)$ -groupeïde

$$U_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{u'_0, u'_1, u'_2} \\ \xrightarrow{\quad\quad\quad} \\ \xrightarrow{\quad\quad\quad} \end{array} U_1 \xrightarrow{\quad\quad\quad} U$$

272 induit par X_* et l'inclusion de U dans X_0 (cf. § 3.a)) vérifie les hypothèses du théorème 4.1. Posons en effet $V = d_0^{-1}(U)$ et soient u et v les morphismes de source V induits respectivement par d_0 et d_1 :

$$X_0 \xleftarrow{v} V \xrightarrow{u} U.$$

D'après le paragraphe 3.b), on a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & V \\ u_1 \downarrow & & \downarrow v \\ U & \xrightarrow{\text{inclusion}} & X_0 \end{array}$$

de sorte que u_1 est fini localement libre d'après (1). Avec (2), la condition (1) assure donc que le groupeïde U_* vérifie les hypothèses du théorème 4.1. En particulier

$\text{Coker}(u_0, u_1)$ existe dans $(\mathbf{Sch}/S)$. De plus, d_0 possède une section de sorte que u est un épimorphisme effectif et universel ; il s'ensuit, d'après la proposition 3.1, que $\text{Coker}(u_0, u_1)$ coïncide avec $\text{Coker}(v_0, v_1)$ (où

$$\begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{v'_2} & & & \\ & \xrightarrow{v'_1} & & & \\ V_2 & \xrightarrow{\quad} & V_1 & \xrightarrow{\quad} & V \\ & \xrightarrow{v'_0} & & & \\ & \xrightarrow{\quad} & & & \end{array} \quad \begin{array}{c} v_1 \\ v_0 \end{array}$$

désigne l'image réciproque de U_* par le changement de base $u : V \rightarrow U$, c'est-à-dire aussi l'image réciproque de U_* par le changement de base $V \xrightarrow{\text{inclusion}} X_1 \xrightarrow{d_0} X_0$).

De même, comme v est un épimorphisme effectif et universel, $\text{Coker}(d_0, d_1)$ coïncide avec le conoyau de l'image réciproque de X_* par le changement de base $v : V \xrightarrow{\text{inclusion}} X_1 \xrightarrow{d_1} X_0$. Or cette image réciproque est isomorphe à V_* d'après le paragraphe 3.c). Nous avons donc prouvé la première assertion du lemme suivant : 273

Lemme 6.1. — *Supposons que le $(\mathbf{Sch}/S)$ -groupeïde X_* possède une quasi-section et que $d_0 : X_1 \rightarrow X_0$ soit fidèlement plat et quasi-compact. Alors :*

- (i) *Il existe un conoyau (Y, p) de (d_0, d_1) dans $(\mathbf{Sch}/S)$; de plus, un tel (Y, p) est un conoyau de (d_0, d_1) dans la catégorie de tous les espaces annelés.*
- (ii) *p est surjectif ; il est ouvert si d_0 l'est ; si S est localement noethérien et X_0 de type fini sur S , Y est de type fini sur S .*
- (iii) *Le morphisme $X_1 \rightarrow X_0 \times_Y X_0$ de composantes d_0 et d_1 est surjectif.*
- (iv) *Si (d_0, d_1) est un couple d'équivalence, $X_1 \rightarrow X_0 \times_Y X_0$ est un isomorphisme et p est fidèlement plat.*

Avant de prouver la deuxième assertion de (i), nous allons démontrer (ii) et (iii) :

a) Démonstration de (ii) :

Nous venons de voir que (Y, p) s'identifie à $\text{Coker}(v_0, v_1)$ et $\text{Coker}(u_0, u_1)$. Soient donc q et r les épimorphismes canoniques de U et V dans Y :

$$\begin{array}{ccccc} X_0 & \xleftarrow{v} & V & \xrightarrow{u} & U \\ & \searrow p & \downarrow r & \swarrow q & \\ & & Y & & \end{array} .$$

Comme u et v sont surjectifs, p est surjectif si et seulement si r l'est, donc si et seulement si q l'est. Or q est surjectif d'après le théorème 4.1 ; d'où la surjectivité de p . 274

De même, si U' est un ouvert quelconque de U , le saturé de U' pour la relation d'équivalence définie par le groupeïde U_* n'est autre que $u_1(u_0^{-1}(U'))$; c'est donc un ouvert de U , d'où il ressort que le morphisme q est ouvert ; si d_0 est ouvert, u est également ouvert ainsi que r ; comme v est surjectif, il s'ensuit que p est ouvert.

Supposons maintenant S localement noethérien et X_0 de type fini au-dessus de S . Montrons que Y est de type fini au-dessus de S : en effet, comme U est quasi-compact au-dessus de S et que q est surjectif, Y est quasi-compact au-dessus de S . De plus, soient $S' = \text{Spec } R$ un ouvert affine de S , $Y' = \text{Spec } B$ un ouvert affine de Y se projetant dans S' et $U' = \text{Spec } A$ l'image réciproque de Y' dans U . Il s'agit de montrer que B est une R -algèbre de type fini ; or, d'après les paragraphes 4 et 5, B est contenu dans A qui est une R -algèbre de type fini ; l'assertion résulte donc de ce que R est noethérien et A entier sur B .

b) Démonstration de (iii) :

Comme le groupoïde V_* de base V est isomorphe à la fois à l'image réciproque de U_* par le changement de base u et à l'image réciproque de X_* par le changement de base v , on a un double carré cartésien

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xleftarrow{\quad} & V_1 & \xrightarrow{\quad} & U_1 \\ d_0 \boxtimes d_1 \downarrow & & v_0 \boxtimes v_1 \downarrow & & u_0 \boxtimes u_1 \downarrow \\ X_0 \times_Y X_0 & \xleftarrow{v \times v} & V_0 \times_Y V_0 & \xrightarrow{u \times u} & U_0 \times_Y U_0 \end{array} .$$

Comme $u_0 \boxtimes u_1$ est surjectif, il en va de même pour $v_0 \boxtimes v_1$. Comme $v \times v$ est surjectif, il en va de même pour les morphismes composés

$$\begin{aligned} V_1 &\xrightarrow{v_0 \boxtimes v_1} V_0 \times_Y V_0 \xrightarrow{v \times v} X_0 \times_Y X_0 \\ \text{et} \quad V_1 &\longrightarrow X_1 \xrightarrow{d_0 \boxtimes d_1} X_0 \times_Y X_0, \end{aligned}$$

275 donc pour $d_0 \boxtimes d_1$.

c) Démonstration de (i) :

Il reste à prouver que (Y, p) est un conoyau de (d_0, d_1) dans la catégorie de tous les espaces annelés. Nous montrons d'abord que Y est obtenu à partir de X_0 en identifiant les points x et y tels qu'il existe $z \in X_1$ avec $d_0(z) = x$ et $d_1(z) = y$: en effet p est surjectif et on a $pd_0 = pd_1$; en outre, si $p(x) = p(y)$, il y a un point z' de $X_0 \times_Y X_0$ dont la première projection est x , la deuxième y . Si z est un point de X_1 tel que $(d_0 \boxtimes d_1)(z) = z'$, on a bien $d_0(z) = x$ et $d_1(z) = y$.

D'autre part, si W est un ouvert saturé de X_0 , $W \cap U$ est un ouvert saturé de U ; d'après 4.1, $q(W \cap U)$ est un ouvert de Y . Comme $q(W \cap U)$ n'est autre que $p(W)$, on voit que Y est muni d'une topologie quotient de celle de X_0 .

Il reste à démontrer que la suite canonique de faisceaux d'anneaux

$$\mathcal{O}_Y \rightarrow p_*(\mathcal{O}_{X_0}) \rightrightarrows p_*d_{0*}(\mathcal{O}_{X_1}) = p_*d_{1*}(\mathcal{O}_{X_1})$$

est exacte.

Soit donc Y' un ouvert de Y et posons $U' = q^{-1}(Y')$, $X'_0 = p^{-1}(Y')$, etc... Il est clair que U' est un ouvert de U saturé pour la relation d'équivalence définie par le groupoïde U_* . Il résulte donc du théorème 4.1 que Y' est le conoyau du groupoïde induit par U_* sur U' . De même, X'_0 est un ouvert de X_0 saturé pour la relation

d'équivalence définie par X_* et on a $U' = X'_0 \cap U$. Par conséquent, U' est une quasi-section du groupoïde induit par X_* sur X'_0 . Ce qui précède montre alors que Y' est aussi le conoyau de ce dernier groupoïde. En particulier, pour tout S -schéma T , on a la suite exacte

$$T(Y') \xrightarrow{T(p|_{X'_0})} T(X'_0) \xrightleftharpoons[T(d_0|_{X'_1})]{T(d_1|_{X'_1})} T(X'_1).$$

Or, si T est la « droite affine » $\mathbb{G}_{a,S}$ (I 4.3), cette suite s'identifie à la suite : 276

$$\Gamma(Y', \mathcal{O}_Y) \rightarrow \Gamma(p^{-1}(Y'), \mathcal{O}_{X_0}) \xrightleftharpoons[\delta_0]{\delta_1} \Gamma(d_0^{-1}p^{-1}(Y'), \mathcal{O}_{X_1}) = \Gamma(d_1^{-1}p^{-1}(Y'), \mathcal{O}_{X_1})$$

qui est donc exacte pour tout ouvert Y' .

d) Démonstration de (iv) :

Si (d_0, d_1) est un couple d'équivalence, il en va de même pour (u_0, u_1) . Il s'ensuit que $u_0 \boxtimes u_1 : U_1 \rightarrow U_0 \times_Y U_0$ est un isomorphisme (théorème 4.1), donc aussi $v_0 \boxtimes v_1$ (confer les carrés cartésiens de b) ; comme $v \times v$ est fidèlement plat et quasi-compact, $d_0 \boxtimes d_1$ est un isomorphisme SGA 1, VIII 5.4).

De plus, q est fidèlement plat, donc aussi r , car u est fidèlement plat. Comme r et v sont fidèlement plats, il en va de même pour p .

7. Quotient par une prérelation d'équivalence propre et plate

Théorème 7.1. — Soient S un schéma localement noethérien et

$$\begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{d'_2} & & & \\ X_2 & \xrightarrow{d'_1} & X_1 & \xrightarrow{d_1} & X_0 \\ & \xrightarrow{d_0} & & \xrightarrow{d_0} & \\ & \xrightarrow{\quad} & & & \end{array}$$

un $(\mathbf{Sch}/S)$ -groupoïde tel que d_1 soit propre et plat, que X_0 soit quasi-projectif sur S et que le morphisme $d : X_1 \rightarrow X_0 \times_S X_0$ de composantes d_0 et d_1 soit quasi-fini. Alors :

(i) Il existe un conoyau (Y, p) de (d_0, d_1) dans $(\mathbf{Sch}/S)$; de plus, un tel (Y, p) est un conoyau de (d_0, d_1) dans la catégorie de tous les espaces annelés.

(ii) p est surjectif, ouvert, propre et Y est de type fini sur S . 277

(iii) Le morphisme $X_1 \rightarrow X_0 \times_Y X_0$ de composantes d_0 et d_1 est surjectif.

(iv) Si (d_0, d_1) est un couple d'équivalence, $X_1 \rightarrow X_0 \times_Y X_0$ est un isomorphisme et p est fidèlement plat.

Soit (Y, p) le conoyau de (d_0, d_1) dans la catégorie de tous les espaces annelés. Le raisonnement du paragraphe 4.c) montre que, pour prouver (i), il suffit de démontrer que Y est un schéma et p un morphisme de schémas. Or cette question est locale sur Y ; d'après le lemme 6.1 (i), il suffit donc de montrer que tout point z de X_0 possède un voisinage ouvert et saturé U_z tel que le groupoïde induit sur U_z par X_* possède une quasi-section. On peut même supposer que z est fermé dans la fibre de z au-dessus

de S (nous dirons que z est *fermé relativement* à S). L'existence de U_z résulte alors des lemmes qui suivent :

Lemme 7.2. — Soient T un schéma affine noethérien, X , Y , et Z des T -schémas de type fini, X étant quasi-projectif sur T , et

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{u} & X \\ v \downarrow & & \downarrow \\ Z & \dashrightarrow & T \end{array}$$

un diagramme de **(Sch)/ T** . Soit d'autre part z un point de Z qui est fermé relativement à T et tel que v soit plat aux points de $v^{-1}(z)$.

Si $v^{-1}(z)$ n'est pas vide, il existe un sous-schéma fermé F de X tel que $u(u^{-1}(F) \cap v^{-1}(z))$ soit fini non vide et que la restriction de v à $u^{-1}(F)$ soit plate aux points de $v^{-1}(z)$.

Soit $T = \text{Spec } A$. Il est loisible de supposer X de la forme $\text{Proj } S$, où S est l'algèbre symétrique d'un A -module de type fini E .

278

Si $u(v^{-1}(z))$ est fini, on peut choisir F égal à X . Sinon, nous désignons par $y_1, \dots, y_n$ les points de la fibre $v^{-1}(z)$ associés au faisceau structural $\mathcal{O}_{v^{-1}(z)}$ de $v^{-1}(z)$ (les y_i sont donc tels que, si $\mathcal{O}_i$ désigne l'anneau local de $v^{-1}(z)$ au point y_i , l'idéal maximal de $\mathcal{O}_i$ soit formé de diviseurs de 0). Si t est l'image de z dans T , $u(v^{-1}(z))$ est une partie constructible infinie de la fibre de t dans X . Il existe donc un point x fermé dans cette fibre, appartenant à $u(v^{-1}(z))$ et distincte de $u(y_1), \dots, u(y_n)$. Alors $X - \overline{\{x\}}$ est un voisinage ouvert de $u(y_1), \dots, u(y_n)$, donc contient un voisinage ouvert de la forme $D_+(f)$, où f est un élément homogène de degré d de S (les notations sont celles de EGA II, § 2.3). Par conséquent, le sous-schéma fermé $X_1 = V_+(f)$ défini par f contient x et évite les points $u(y_1), \dots, u(y_n)$. Il s'ensuit évidemment que l'image réciproque $Y_1 = u^{-1}(V_+(f))$ de ce sous-schéma est distincte de Y et rencontre $v^{-1}(z)$. Nous allons même montrer que la restriction v_1 de v à Y_1 est plate aux points de $v^{-1}(z)$; si $u(v_1^{-1}(z))$ est fini, on n'aura donc qu'à choisir F égal à X_1 ; sinon, on répètera l'argument qu'on vient de développer en remplaçant Y par Y_1 , v par v_1 , u par le morphisme u_1 induit dans Y_1 par u ; on obtiendra de cette façon une suite décroissante $X, X_1, \dots$ de sous-schémas fermés de X ; comme une telle suite s'arrête, $u(u^{-1}(X_n) \cap v^{-1}(z))$ sera fini non vide pour un certain n et on choisira F égal à X_n .

Il reste donc à montrer que v_1 est plat aux points de $v^{-1}(z)$; soient donc y un point de Y_1 au-dessus de z , $\mathcal{O}_y$ l'anneau local de y dans Y , $\overline{\mathcal{O}}_y$ l'anneau local de y dans $v^{-1}(z)$, $\mathcal{O}_{v(y)}$ l'anneau local de $v(y)$ dans Z . Si $g \in S_1$ est tel que $D_+(g)$ soit un voisinage de $u(y)$ dans X , soient φ l'image de f/g^d dans $\mathcal{O}_y$ et $\overline{\varphi}$ l'image de f/g^d dans $\overline{\mathcal{O}}_y$. Il résulte alors de la construction de f que φ ne divise pas 0 dans $\overline{\mathcal{O}}_y$; comme $\mathcal{O}_y$ est plat sur $\mathcal{O}_z$, φ ne divise pas 0 dans $\mathcal{O}_y$ et $\mathcal{O}_y/\mathcal{O}_y\varphi$ est plat sur $\mathcal{O}_z$ (SGA 1, IV 5.7). Or $\mathcal{O}_y/\mathcal{O}_y\varphi$ n'est autre que l'anneau local de z dans Y_1 .

279

Lemme 7.3. — Nous conservons les notations et les hypothèses de 7.1. Tout point z de X_0 qui est fermé relativement à S possède alors un voisinage ouvert saturé U_z tel que le groupoïde induit par X_* sur U_z possède une quasi-section.

L'énoncé étant local sur S , on peut supposer S affine et appliquer le lemme précédent au diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{d_0} & X_0 \\ d_1 \downarrow & & \downarrow \\ X_0 & \dashrightarrow & S \end{array}$$

de $(\mathbf{Sch}/S)$. Soit donc F un sous-schéma fermé de X_0 tel que $d_0(d_0^{-1}(F) \cap d_1^{-1}(z))$ soit fini non vide et que la restriction de d_1 à $d_0^{-1}(F)$ soit plate aux points de $d_1^{-1}(z)$. Désignons par F_1 et F_2 les images réciproques de F par d_0 et $d_0 d'_0 = d_0 d'_1$, et par $\tilde{d}_0, \tilde{d}_1 \dots$ les morphismes induits par $d_0, d_1 \dots$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} F_2 & \xrightarrow{\tilde{d}_1} & F_1 & \xrightarrow{\tilde{d}_0} & F \\ \tilde{d}_2 \downarrow & \xrightarrow{\tilde{d}'_0} & \downarrow \tilde{d}_1 & & \\ X_1 & \xrightarrow{d_1} & X_0 & & \end{array},$$

où les deux carrés de gauche sont cartésiens et où la première ligne est exacte (confer (0,1,2), § 1).

Montrons d'abord qu'il n'y a qu'un nombre fini de points de F_1 au-dessus de z : soit en effet s l'image de z dans S ; comme $\tilde{d}_0(\tilde{d}_1^{-1}(z))$ est fini les points de cet ensemble sont fermés dans la fibre de s dans X_0 ; il n'y a donc qu'un nombre fini de points u de $X_0 \times_S X_0$ dont la deuxième projection est z et dont la première projection appartient à $\tilde{d}_0(\tilde{d}_1^{-1}(z))$; enfin, comme $X_1 \rightarrow X_0 \times_S X_0$ est quasi-fini un tel point u provient d'un nombre fini de points de X_1 , d'où l'assertion. 280

Le morphisme $\tilde{d}_1$ est donc quasi-fini et plat aux points de F_1 au-dessus de z . Désignons par Φ le fermé de F_1 formé des points où $\tilde{d}_1$ n'est pas à la fois plat et quasi-fini (SGA 1, IV 6.10 et EGA III, 4.4.10). Comme d_1 est propre, $\tilde{d}_1(\Phi)$ est fermé et ne contient pas z ; par conséquent, si on pose $W = \tilde{d}_1(F_1) - \tilde{d}_1(\Phi)$, $\tilde{d}_1$ est plat et quasi-fini, c'est-à-dire fini et localement libre (EGA III, 4.4.2) au-dessus de W . Comme la restriction de $\tilde{d}_1$ à $\tilde{d}_1^{-1}(W)$ est ouverte, $\tilde{d}_1(F_1)$ est un voisinage ouvert de z , et W est le plus grand ouvert de X_0 contenu dans $\tilde{d}_1(F_1)$ au-dessus duquel $\tilde{d}_1$ est à la fois plat et quasi-fini.

Nous allons voir dans le lemme 7.4 que les images réciproques de Φ par $\tilde{d}'_1$ et $\tilde{d}'_0$ s'identifient toutes les deux à l'ensemble des points de F_2 où $\tilde{d}'_2$ n'est pas à la fois plat et quasi-fini. Il s'ensuit que $d_0^{-1}(W) = \tilde{d}'_2(F_2) - \tilde{d}'_2(\tilde{d}'_0^{-1}\Phi)$ coïncide avec $d_1^{-1}(W) = \tilde{d}'_2(F_2) - \tilde{d}'_2(\tilde{d}'_1^{-1}\Phi)$, c'est-à-dire que W est saturé. Par conséquent, si on pose $W_1 = \tilde{d}_1^{-1}(W)$, l'égalité $d_0^{-1}(W) = d_1^{-1}(W)$ entraîne $\tilde{d}_2^{-1}d_0^{-1}(W) = \tilde{d}_2^{-1}d_1^{-1}(W)$ c'est-à-dire $\tilde{d}_0^{-1}(W_1) = \tilde{d}_1^{-1}(W_1)$. Comme $\tilde{d}_0$ est fidèlement plat et quasi-compact et

que le carré

$$\begin{array}{ccc} F_2 & \xrightarrow{\tilde{d}'_1} & F_1 \\ \tilde{d}'_0 \downarrow & & \downarrow \tilde{d}_0 \\ F_1 & \xrightarrow{\tilde{d}_0} & F \end{array}$$

est cartésien, il s'ensuit que W_1 est de la forme $\tilde{d}_0^{-1}(U)$, où U est un ouvert de F (SGA 1, VIII 4.4). Cet ouvert U de F est une quasi-section pour le groupoïde de base W induit par X_* . On peut donc choisir U_z égal à W .

Il nous reste donc à énoncer le lemme 7.4 dont la démonstration est classique :

281 **Lemme 7.4.** — *Considérons un carré cartésien de schémas*

$$\begin{array}{ccc} F_2 & \xrightarrow{v} & F_1 \\ d' \downarrow & & \downarrow d \\ X_1 & \xrightarrow{u} & X_0 \end{array}$$

et soit x un point de F_2 . Si u est plat, d' est plat en x si et seulement si d est plat en $v(x)$. Si d est localement de type fini, d' est quasi-fini en x si et seulement si d est quasi-fini en $v(x)$.

Nous avons donc prouvé qu'il existe un recouvrement de X_0 par des ouverts saturés W tels que le groupoïde W_* induit par X_* sur W possède une quasi-section. Modulo le lemme 6.1, ceci prouve le théorème 7.1 à l'exception peut-être du fait que p est propre. Pour ce dernier point, nous reprenons les notations de 6.a) en remplaçant le groupoïde X_* par W_* . Alors q est entier d'après le théorème 4.1, donc propre. Comme u est déduit de $w_0 : W_1 \rightarrow W_0$ par changement de base, u est propre; donc r est propre. Comme W_0 est quasi-projectif sur S , W_0 est séparé et de type fini au-dessus de Y ; de plus, v est surjectif; donc p est propre (EGA II, 5.4.3 (ii)).

8. Passage au quotient par une prérelation d'équivalence plate non nécessairement propre

Théorème 8.1. — *Soient S un schéma noethérien et*

$$\begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{d'_2} & & & \\ X_2 & \xrightarrow{d'_1} & X_1 & \xrightarrow{d_1} & X_0 \\ & \xrightarrow{d'_0} & & \xrightarrow{d_0} & \end{array}$$

282 *un (Sch/S)-groupoïde tel que d_1 soit plat et de type fini, que X_0 soit de type fini sur S et que le morphisme $X_1 \rightarrow X_0 \times_S X_0$ de composantes d_0 et d_1 soit quasi-fini.*

Il existe alors un ouvert W_0 de X_0 dense, saturé et satisfaisant aux propriétés suivantes :

- (i) Si $W_2 \xrightarrow{w'_i} W_1 \xrightarrow{w_j} W_0$ est le groupoïde induit par X_* sur W_0 , (w_0, w_1) possède un conoyau (V, p) dans $(\mathbf{Sch}/S)$; de plus, (V, p) est un conoyau de (w_0, w_1) dans la catégorie de tous les espaces annelés.
- (ii) p est surjectif, ouvert et V est de type fini sur S .
- (iii) Le morphisme $W_1 \rightarrow W \times_V W$ de composantes w_0 et w_1 est surjectif.
- (iv) Si (d_0, d_1) est un couple d'équivalence, $W_1 \rightarrow W \times_V W$ est un isomorphisme et p est fidèlement plat.

Nous allons montrer qu'on peut choisir W de telle façon que le $(\mathbf{Sch}/S)$ -groupoïde W_* induit par X_* possède une quasi-section (confer § 7). Le théorème 8.1 résultera alors du lemme 6.1.

Admettons provisoirement que, pour tout point $z \in X_0$ fermé relativement à S (confer § 7), il existe un ouvert W_z qui est saturé, possède une quasi-section et rencontre toutes les composantes irréductibles de X_0 passant par z . Alors l'extérieur $X_0 - \overline{W_z}$ de W_z dans X_0 est saturé (car le saturé $d_1(d_0^{-1}(X_0 - \overline{W_z}))$ de cet extérieur est ouvert et ne rencontre pas W_z). Si cet extérieur n'est pas vide, on peut y choisir un point z' fermé relativement à S et associer à z' un ouvert $W_{z'}$ comme ci-dessus; on peut d'ailleurs supposer $W_{z'}$ contenu dans $X_0 - \overline{W_z}$; alors W_z et $W_{z'}$ sont disjoints et le groupoïde induit par X_* sur $W_z \cup W_{z'}$ possède une quasi-section... Le processus doit s'arrêter parce que X_0 n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles. Il reste donc à construire W_z :

Pour cela il est loisible de supposer S affine; dans ce cas, soient y un point de X_1 tel que $d_1(y) = z$, X un ouvert affine de X_0 contenant $d_0(y)$, Y l'image réciproque de X dans X_1 par d_0 , enfin $u : Y \rightarrow X$ et $v : Y \rightarrow X_0$ les morphismes induits par d_0 et d_1 . Comme X est affine, donc quasi-projectif, on peut appliquer le lemme 7.2 : il y a donc un sous-schéma F de X_0 tel que $d_0^{-1}(F) \cap d_1^{-1}(z)$ soit non vide, que $d_0(d_0^{-1}(F) \cap d_1^{-1}(z))$ soit fini et que la restriction de d_1 à $d_0^{-1}(F)$ soit plate aux points de $v^{-1}(z)$. Ce fait nous permet de reprendre les notations du lemme 7.3 en désignant par F_1 et F_2 les images réciproques de F dans X_1 et X_2 , etc...

$$\begin{array}{ccccc}
 F_2 & \xrightleftharpoons[\tilde{d}'_0]{\tilde{d}'_1} & F_1 & \xrightarrow{\tilde{d}_0} & F \\
 \tilde{d}_2 \downarrow & & \downarrow \tilde{d}_1 & & \\
 X_1 & \xrightleftharpoons[d_0]{d_1} & X_0 & & .
 \end{array}$$

On montre alors comme en 7.3 que $\tilde{d}_1$ est quasi-fini aux points de $\tilde{d}_1^{-1}(z)$ de sorte qu'il est naturel de considérer l'ouvert F'_1 de F_1 formé des points où $\tilde{d}_1$ est à la fois plat et quasi-fini. D'après 7.4, les deux images réciproques de F'_1 par $\tilde{d}'_1$ et $\tilde{d}'_0$ sont formées des points de F_2 où $\tilde{d}_2$ est plat et quasi-fini, de sorte que ces deux images réciproques coïncident et que F'_1 est de la forme $\tilde{d}_0^{-1}(F')$, où F' est un ouvert de F (SGA 1, VIII 4.4). Quitte à remplacer F par F' , on peut donc supposer que $\tilde{d}_1$ est

quasi-fini et plat. Dans ce cas, nous désignons par W_z le plus grand ouvert de $\tilde{d}_1(F_1)$ au-dessus duquel $\tilde{d}_1$ est *fini* et plat. Cet ouvert W_z contient les points génériques des composantes irréductibles de X_0 passant par z . Il résulte alors de SGA 1, VIII, 6.5 et 5.7, que $\tilde{d}_0^{-1}(W_z)$ et $\tilde{d}_1^{-1}(W_z)$ coïncident tous les deux avec le plus grand ouvert de $\tilde{d}_2(F_2)$ au-dessus duquel $\tilde{d}_2$ est fini et plat. On voit par conséquent comme en 7.3 que les deux images réciproques de $\tilde{d}_1^{-1}(W_z)$ par $\tilde{d}'_0$ et $\tilde{d}'_1$ coïncident, donc que $\tilde{d}_1^{-1}(W_z)$ est de la forme $\tilde{d}_0^{-1}(U)$ où U est un ouvert de F qui est une quasi-section pour le groupoïde induit par X_* sur W_z .

9. Élimination des hypothèses noethériennes dans le théorème 7.1

284

a) Reprenons les notations et les hypothèses du lemme 6.1 et soit $\pi : S' \rightarrow S$ un changement de base arbitraire. Désignons par $f' : X' \rightarrow Y'$ le morphisme de S' -schémas déduit par l'extension π de la base d'un morphisme de S -schémas $f : X \rightarrow Y$. Avec cette convention, $p' : X'_0 \rightarrow Y'$ est surjectif ainsi que le morphisme $X'_1 \rightarrow X'_0 \times_{Y'} X'_0$ de composantes d'_0 et d'_1 . L'ensemble sous-jacent à Y' s'identifie donc au quotient de l'ensemble sous-jacent à X'_0 par la relation d'équivalence définie dans X'_0 par le S' -groupoïde X'_* . De plus, $q' : U' \rightarrow Y'$ est entier surjectif de sorte que la topologie de Y' est la topologie quotient de celle de U' , donc aussi de celle de X'_0 (confer la preuve du § 6.c).

D'un autre côté, il est clair que U' est une quasi-section du S' -groupoïde X'_* auquel on peut donc appliquer le lemme 6.1. En particulier, X'_* possède un conoyau (Y_1, p_1) et l'espace topologique sous-jacent à Y_1 s'obtient à partir de l'espace topologique sous-jacent à X'_0 en identifiant les points équivalents pour la relation définie par X'_* . Il s'ensuit que le morphisme canonique $Y_1 \rightarrow Y'$ est un homéomorphisme; je dis même que $Y_1 \rightarrow Y'$ est un *homéomorphisme universel* : en effet, si S'' est au-dessus de S' , soit Y_2 le conoyau de $(d_0 \times_S S'', d_1 \times_S S'')$. D'après ce qui précède, appliqué aux changements de base $S'' \rightarrow S'$ et $S'' \rightarrow S$, $Y_2 \rightarrow Y_1 \times_{S'} S''$ et $Y_2 \rightarrow Y \times_S S'' \simeq Y' \times_{S'} S''$ sont des homéomorphismes de sorte qu'il en va de même pour $Y_1 \times_{S'} S'' \rightarrow Y' \times_{S'} S''$.

285

b) Des remarques analogues s'appliquent évidemment au cas où le groupoïde X_* possède « localement » des quasi-sections (confer la démonstration du théorème 7.1).

Soient par exemple S un schéma arbitraire et $X_2 \xrightarrow{d'_j} X_1 \xrightarrow{d_i} X_0$ un **(Sch/S)**-groupoïde sur lequel on fait les hypothèses suivantes : X_0 est de présentation finie et quasi-projectif sur S ; d_1 est de présentation finie, propre et plat; le morphisme $X_1 \rightarrow X_0 \times_S X_0$ de composantes d_0 et d_1 est quasi-fini. Alors tout point x de X_0 a un voisinage ouvert W qui est saturé et tel que le groupoïde induit par X_* dans W possède une quasi-section :

En effet, la question est locale sur S de sorte qu'on peut supposer S affine. Il existe alors un anneau A de type fini sur $\mathbb{Z}$, un morphisme $S \rightarrow T = \text{Spec } A$ et un **(Sch/T)**-groupoïde Z_* tel que X_* s'identifie à $Z_* \times_T S$ (EGA IV, 8); de plus, on peut supposer que Z_* vérifie les conditions du théorème 7.1 (EGA IV, 8). Par conséquent Z_* possède « localement » des quasi-sections et on peut appliquer les remarques de a).

c) Il résulte de a) et de b) que les assertions (i), (iii) et (iv) du théorème 7.1 restent vraies sous les hypothèses de b). Lorsque de plus (d_0, d_1) est un couple d'équivalence, on voit que Y est de présentation finie sur S en appliquant la proposition suivante :

Proposition 9.1. — *Considérons les morphismes de schémas*

$$X_0 \xrightarrow{p} Y \xrightarrow{q} S$$

tels que qp soit de type fini (resp. de présentation finie) et p fidèlement plat de présentation finie. Alors q est de type fini (resp. de présentation finie)^().*

Comme p est surjectif et qp quasi-compact, q est quasi-compact. Donc on peut supposer S, Y et X_0 affines d'anneaux A, B, C : On a $B = \varinjlim B_i$, où les B_i parcourent les sous-algèbres de type fini de B . Comme C est de présentation finie sur B , il existe un indice i_0 , une B_{i_0} -algèbre de présentation finie C_{i_0} et un isomorphisme $C \simeq C_{i_0} \otimes_{B_{i_0}} B$; si on pose $C_i = C_{i_0} \otimes_{B_{i_0}} B_i$ pour $i \geq i_0$, on a donc $C \simeq C_i \otimes_{B_i} B$.

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & C \\ \uparrow & & \uparrow \\ B_i & \longrightarrow & C_i \\ \uparrow & & \\ A & & \end{array}$$

Comme C est fidèlement plat sur B , on tire de EGA IV 11 l'existence d'un $i_1 \geq i_0$ tel que C_{i_1} soit fidèlement plat sur B_{i_1} ; par conséquent C_i est fidèlement plat sur B_i pour $i \geq i_1$. Pour $i \geq i_1$, l'application canonique $C_i \rightarrow C$ est alors injective, car déduite de $B_i \rightarrow B$ par extension fidèlement plate de la base. Si C est de type fini sur A , il s'ensuit que l'application $C_i \rightarrow C$ donc aussi l'application $B_i \rightarrow B$ sont bijectives pour i assez grand.

286

Supposons maintenant C de présentation finie sur A : d'après ce qui précède, B est de type fini sur A , donc de la forme $\overline{B}/I$ où $\overline{B}$ est une algèbre de polynômes sur A à un nombre fini d'indéterminées, et I un idéal de B . Alors I est réunion de ses sous-idéaux de type fini I_α ; d'où l'égalité $B = \varinjlim B_\alpha$ avec $B_\alpha = \overline{B}/I_\alpha$. Procédant comme plus haut, on choisit un indice α_0 et une B_{α_0} -algèbre de présentation finie C_{α_0} tels qu'il existe un isomorphisme $C \simeq C_{\alpha_0} \otimes_{B_{\alpha_0}} B$. Pour $\alpha \geq \alpha_0$, on pose encore $C_\alpha = C_{\alpha_0} \otimes_{B_{\alpha_0}} B_\alpha$ de telle sorte qu'on a $C \simeq C_\alpha \otimes_{B_\alpha} B$ pour $\alpha \geq \alpha_0$. Toujours d'après EGA IV 11, on conclut comme plus haut que C_α est fidèlement plat sur B_α pour α assez grand. Dans ce cas, le noyau de l'application $C_\alpha \rightarrow C$ (resp. $C_\alpha \rightarrow C_\beta$ pour $\beta \geq \alpha$) s'identifie à $C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (I/I_\alpha)$ (resp. à $C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (I_\beta/I_\alpha)$). Comme C_α et C sont de présentation finie sur A et que $C_\alpha \rightarrow C$ est surjectif, $C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (I/I_\alpha)$ est un idéal de type fini et est réunion des idéaux $C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (I_\beta/I_\alpha)$. On a donc $C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (I_\beta/I_\alpha) = C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (I/I_\alpha)$ pour β assez grand, d'où aussi $I_\beta = I$ (car C_α est fidèlement plat sur B_α) ; donc B est de présentation finie sur A .

^(*)Cf. EGA IV₄, 17.7.5 pour un résultat plus général.