

EXPOSÉ VI_A

GÉNÉRALITÉS SUR LES GROUPES ALGÈBRIQUES

par P. GABRIEL

Dans tout ce chapitre, A désignera un anneau local artinien de corps résiduel k . Un schéma en groupes G sur $\text{Spec } A$ sera appelé simplement un A -groupe. Cet A -groupe est dit *localement de type fini* si le schéma sous-jacent est localement de type fini sur A ; il est dit *algébrique* si le schéma sous-jacent est de type fini sur A . 287

0. Remarques préliminaires

0.1. — Considérons d'abord un schéma en groupes G sur un schéma quelconque S . Nous appelons *multiplication* le morphisme structural $\mu : G \times_S G \rightarrow G$ et *inversion* le morphisme $c : G \rightarrow G$ qui est défini par les égalités $c(T)(x) = x^{-1}$ (T étant un schéma sur S et x un élément de $G(T)$). Si U et V sont des parties de l'ensemble sous-jacent à G , nous notons $U \cdot V$ l'image par le morphisme multiplication de la partie de $G \times_S G$ formée des points dont la première projection appartient à U , la deuxième à V . De même, les notations U^{-1} et $c(U)$ sont équivalentes.

Soient pr_1 la projection de $G \times_S G$ sur le premier facteur et $\sigma : G \times_S G \rightarrow G \times_S G$ le morphisme de composantes pr_1 et μ . Pour tout S -schéma T , $\sigma(T)$ est l'application $(x, y) \mapsto (x, xy)$; il s'ensuit que σ est un automorphisme. Le composé de cet automorphisme et de la projection pr_2 de $G \times_S G$ sur le deuxième facteur est le morphisme multiplication. Lorsque G est *plat* sur S , pr_2 donc μ sont des morphismes *plats* ; lorsque G est *lisse* sur S , pr_2 donc μ sont des morphismes *lisses*, etc... 288

0.2. — Nous supposons à partir de maintenant que S est le spectre d'un anneau local artinien A de corps résiduel k . Nous désignons par $(\mathbf{Sch}/k)_{\text{réd}}$ la catégorie des schémas réduits sur k . Pour tout schéma X sur A , le schéma réduit $X_{\text{réd}}$ est un objet de $(\mathbf{Sch}/k)_{\text{réd}}$ et le foncteur $X \mapsto X_{\text{réd}}$ est adjoint à droite à l'inclusion de $(\mathbf{Sch}/k)_{\text{réd}}$ dans $(\mathbf{Sch}/A)$. Il s'ensuit que, pour tout A -groupe G , $G_{\text{réd}}$ est un groupe dans la catégorie $(\mathbf{Sch}/k)_{\text{réd}}$.

Réciproquement, si k est un corps parfait, l'inclusion de $(\mathbf{Sch}/k)_{\text{réd}}$ dans $(\mathbf{Sch}/k)$ commute aux produits de sorte que les groupes dans la catégorie $(\mathbf{Sch}/k)_{\text{réd}}$ s'identifient aux schémas en groupes sur k dont le schéma sous-jacent est réduit. En particulier, pour tout k -groupe G , $G_{\text{réd}}$ est un sous-schéma en groupes de G ; ce sous-groupe n'est pas invariant dans G en général : par exemple, si k est un corps de caractéristique 3, le groupe constant $(\mathbb{Z}/(2))_k$ opère de façon non triviale dans le groupe diagonalisable $D_k(\mathbb{Z}/(3))$ (I.4.1 et I.4.4); si G désigne le produit semi-direct de $D_k(\mathbb{Z}/(3))$ par $(\mathbb{Z}/(2))_k$ défini par cette opération, $G_{\text{réd}}$ s'identifie à $(\mathbb{Z}/(2))_k$ et n'est pas invariant dans G .

289 Si k est un corps quelconque et H un groupe dans la catégorie $(\mathbf{Sch}/k)_{\text{réd}}$, $(H \otimes_k k^{p^{-\infty}})_{\text{réd}}$ est un schéma en groupes sur $k^{p^{-\infty}}$. Comme $H \otimes_k k^{p^{-\infty}}$ a même espace topologique sous-jacent que $(H \otimes_k k^{p^{-\infty}})_{\text{réd}}$, on voit que les groupes de $(\mathbf{Sch}/k)_{\text{réd}}$ ont en commun avec les k -groupes certaines propriétés topologiques invariantes par extension du corps de base : par exemple, il résultera de 0.3 et des remarques qu'on vient de faire que tout groupe de $(\mathbf{Sch}/k)_{\text{réd}}$ est séparé.

Nous rencontrerons dans la suite des groupes de $(\mathbf{Sch}/k)_{\text{réd}}$ chaque fois que nous aurons affaire à une partie localement fermée non vide U d'un A -groupe G telle que $U \cdot U = U$ et $U^{-1} = U$: en effet, le sous-schéma réduit de G défini par U est un groupe de $(\mathbf{Sch}/k)_{\text{réd}}$.

0.3. — Un A -groupe G est toujours séparé : la diagonale de $G \times_A G$ s'identifie en effet au foncteur de $(\mathbf{Sch}/A)^\circ$ à valeurs dans $(\mathbf{Ens})$ qui associe à tout schéma S sur A l'image réciproque de l'élément neutre de $G(S)$ par l'application $\varphi(S) : (x, y) \mapsto xy^{-1}$ de $G(S) \times G(S)$ dans $G(S)$. On a par conséquent un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} G \times_A G & \xrightarrow{\varphi} & G \\ \text{morphisme diagonal} \uparrow & & \uparrow \text{section unité} \\ G & \longrightarrow & \text{Spec } A \end{array}$$

de sorte que le morphisme diagonal, qui est déduit d'une immersion fermée par changement de base est lui-même une immersion fermée.

290 **0.4.** — Soit G un A -groupe. Nous dirons qu'un point g de G est *strictement rationnel* sur A s'il existe un A -morphisme $s : \text{Spec } A \rightarrow G$ qui envoie le seul point de $\text{Spec } A$ sur g . On sait qu'un tel s définit un automorphisme r_s du schéma G sur A qu'on appelle translation à droite par s : pour tout morphisme $\pi : S \rightarrow \text{Spec } A$, $r_s(S)$ est l'automorphisme $x \mapsto x \cdot (G(\pi)(s))$.

De même, on note ℓ_s la translation à gauche par s , c'est-à-dire l'automorphisme de G défini par les égalités $(\ell_s(S))(x) = (G(\pi)(s)) \cdot x$.

Comme $G \otimes_A k$ et G ont même espace topologique sous-jacent $\underline{G}$, que $G \otimes_A k$ est un k -groupe et que $s \otimes_A k$ dépend seulement de g et non de s , on voit que les automorphismes de $\underline{G}$ induits par r_s et ℓ_s (ou par $r_{s \otimes k}$ et $\ell_{s \otimes k}$) dépendent seulement de g et non de s ; lorsque P est une partie de $\underline{G}$, nous pouvons donc noter $P \cdot g$ et $g \cdot P$ au lieu de $r_s(P)$ et $\ell_s(P)$, ce qui est conforme à 0.1.

0.5. — Considérons maintenant deux ouverts partout denses U et V d'un A -groupe localement de type fini G . Le produit $U \cdot V$ (cf. 0.1) est alors égal à tout l'espace sous-jacent à G : en effet, comme G et $G \otimes_A k$ ont même espace sous-jacent, on peut supposer, quitte à remplacer A par k et G par $G \otimes_A k$ que A est un corps k . Dans ce cas le morphisme multiplication est plat et localement de type fini (cf. 0.1), donc ouvert, de sorte que $U \cdot V$ est un ouvert de G . Si $\bar{k}$ est une clôture algébrique de k , on a évidemment $(U \cdot V) \otimes_k \bar{k} = (U \otimes_k \bar{k}) \cdot (V \otimes_k \bar{k})$; d'après SGA 1 VIII § 4, il suffit donc de prouver qu'on a $G \otimes_k \bar{k} = (U \otimes_k \bar{k}) \cdot (V \otimes_k \bar{k})$ et on est ramené au cas où k est algébriquement clos. Dans ce dernier cas, il suffit de prouver que $U \cdot V$ contient tout point fermé x de G ; si k est algébriquement clos, un tel x est strictement rationnel et les ouverts partout denses $U^{-1} \cdot x$ et V ont en commun un point fermé v ; si u est l'élément de $G(k)$ défini par l'égalité $x = u \cdot v$, $u^{-1} \cdot x$ appartient alors à $U^{-1} \cdot x$ de sorte que u appartient à U , ce qui prouve l'assertion. 291

1. Propriétés locales d'un A -groupe localement de type fini

292

Nous allons voir d'abord que, si G est localement de type fini et plat sur A , on peut « rendre strictement rationnel tout point fermé de $G \gg$ au moyen d'une extension finie et plate de la base.

1.1. — Sauf mention expresse du contraire, nous supposons à partir de maintenant que G est un A -groupe localement de type fini. Lorsque A est un corps, nous obtiendrons dans l'exposé VII_B des résultats très précis sur les anneaux locaux de G . Nous nous contentons ici de quelques résultats élémentaires :

Proposition 1.1.1. — Soit x un point d'un A -groupe G localement de type fini et plat sur A . Alors l'anneau local $\mathcal{O}_{G,x}$ est de Cohen-Macaulay et il existe un système $a_1, \dots, a_n$ de paramètres de $\mathcal{O}_{G,x}$ tel que $\mathcal{O}_{G,x}/(a_1, \dots, a_n)$ soit un A -module plat.

Nous supposons d'abord A égal à son corps résiduel k ; il suffit de prouver alors que $\mathcal{O}_{G,x}$ est de Cohen-Macaulay et on peut se limiter au cas où x est un point fermé (cf. EGA 0_{IV}, 16.5.13). D'après le lemme 1.1.2 ci-dessous, G contient un point fermé y tel que $\mathcal{O}_{G,y}$ soit de Cohen-Macaulay. D'après SGA 1, I § 9, il revient au même de dire que, pour toute extension finie K du corps de base k et tout point $\bar{y}$ de $\bar{G} = G \otimes_k K$ au-dessus de y , $\mathcal{O}_{\bar{G},\bar{y}}$ est de Cohen-Macaulay. Si l'extension K a été choisie assez grande (i.e. si K contient l'extension normale de k engendrée par les corps résiduels $k(y)$ et $k(x)$), $\bar{y}$ est (strictement) rationnel sur K ainsi que tout point $\bar{x}$ de $\bar{G}$ au-dessus de x . Comme l'automorphisme $r_{\bar{x}} \circ (r_{\bar{y}})^{-1}$ applique $\bar{y}$ sur $\bar{x}$, il s'ensuit que $\mathcal{O}_{\bar{G},\bar{x}}$, donc $\mathcal{O}_{G,x}$ (SGA 1, I § 9) sont de Cohen-Macaulay. 293

Lorsque A est de nouveau supposé quelconque, le raisonnement précédent s'applique à $k \otimes_A G$ de sorte que $k \otimes_A \mathcal{O}_{G,x}$ est de Cohen-Macaulay. Si $a_1, \dots, a_n$ est une suite d'éléments de $\mathcal{O}_{G,x}$ dont l'image dans $k \otimes_A \mathcal{O}_{G,x}$ est un système de paramètres, il résulte de SGA 1, IV 5.7 ou de EGA 0_{IV}, 15.1.16, que $a_1, \dots, a_n$ est une suite $\mathcal{O}_{G,x}$ -régulière et que $\mathcal{O}_{G,x}/(a_1, \dots, a_n)$ est fini et plat sur A .

Lemme 1.1.2. — *Tout schéma non vide X , localement de type fini sur un anneau artinien A , contient un point fermé x dont l'anneau local est de Cohen-Macaulay.*

On peut évidemment supposer X affine d'algèbre B et raisonner par récurrence sur $\dim X$ (l'assertion est claire si X est discret, tous les anneaux locaux étant alors artiniens). Comme B est de type fini sur A , si $\dim B > 0$, B contient un élément a non inversible et non diviseur de 0 ; le sous-schéma fermé $X' = \operatorname{Spec} B/(a)$ de X est alors de dimension strictement inférieure à $\dim X$ et contient par hypothèse de récurrence un point fermé x tel que $\mathcal{O}_{X',x}$ soit de Cohen-Macaulay. Comme on a $\mathcal{O}_{X',x} = \mathcal{O}_{X,x}/(a)$ et a est non inversible et non diviseur de 0 dans $\mathcal{O}_{X,x}$, $\mathcal{O}_{X,x}$ est de Cohen-Macaulay (Voir aussi EGA IV₂, 6.11.3).

Proposition 1.2. — *Soient A un anneau artinien, G un A -groupe localement de type fini et plat sur A et x un point fermé de G . Il existe alors une A -algèbre A' locale, finie et libre sur A telle que tout point de $G \otimes_A A'$ au-dessus de x soit strictement rationnel sur A' .*

On sait en effet qu'il existe une A -algèbre A_1 locale, finie et libre sur A et telle que le corps résiduel de A_1 contienne l'extension normale de k engendrée par le corps résiduel $k(x)$ de x . Dans ce cas, tous les points $g_1, \dots, g_n$ de $G \otimes_A A_1$ au-dessus de $g \in G$ ont même corps résiduel que A_1 (i.e. $g_1, \dots, g_n$ sont rationnels sur A_1 au sens de V, § 4 ; e)). Soient donc $B_1, \dots, B_n$ les anneaux locaux de $g_1, \dots, g_n$. D'après 1.1.1, $B_1, \dots, B_n$ possèdent des quotients $B'_1, \dots, B'_n$ qui sont artiniens et plats sur A_1 . Si on pose $A' = B'_1 \otimes_{A_1} \dots \otimes_{A_1} B'_n$, les algèbres $B_i \otimes_{A_1} A'$ sont toutes locales et elles ont un quotient isomorphe à A' , de sorte que A' répond à la question.

1.3. — Soit e l'élément neutre (ou *origine*) de G , c'est-à-dire l'image du seul point de $\operatorname{Spec} A$ par la section unité $\operatorname{Spec} A \rightarrow G$. Par définition même, e est strictement rationnel sur A .

Proposition 1.3.1. — *Soient G un groupe localement de type fini et plat sur un anneau artinien A et K la clôture parfaite du corps résiduel k de A . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $G \otimes_A K$ est réduit.
- (i bis) Si $\mathcal{O}_{G,e}$ est l'anneau local de l'origine de G , $\mathcal{O}_{G,e} \otimes_A K$ est réduit.
- (ii) G est lisse sur A .
- (ii bis) G est lisse sur A à l'origine.

Au moyen de SGA 1, II.2.1, on se ramène tout de suite au cas où A est un corps ($A = k$). Les implications (i) $\Rightarrow$ (i bis), (ii) $\Rightarrow$ (ii bis), (ii) $\Rightarrow$ (i) et (ii bis) $\Rightarrow$ (i bis) sont évidentes, de sorte qu'il suffit de prouver que (i bis) entraîne (ii). Or, si $\bar{k}$ désigne la clôture algébrique de k , il résulte de (i bis) que $\mathcal{O}_{G,e} \otimes_k \bar{k}$ est réduit. De plus, si x est un point fermé quelconque de $\bar{G} = G \otimes_k \bar{k}$, il y a exactement un $\bar{k}$ -morphisme $s : \operatorname{Spec} \bar{k} \rightarrow G \otimes_k \bar{k}$ dont l'image est x ; la translation à droite r_s induit alors un isomorphisme de $\mathcal{O}_{G,e} \otimes_k \bar{k}$ sur $\mathcal{O}_{\bar{G},x}$ de sorte que $\mathcal{O}_{\bar{G},x}$, donc $\bar{G}$ sont réduits. Mais, comme $\bar{G}$ est aussi localement de type fini sur $\bar{k}$, $\bar{G}$ contient au moins un point y fermé

dans $\overline{G}$ et lisse sur $\overline{k}$. Comme, d'autre part, les anneaux locaux des points fermés de G sont tous isomorphes à $\mathcal{O}_{G,e} \otimes_k \overline{k}$, on voit que tous ces anneaux locaux sont réguliers, de sorte que $\overline{G}$ est lisse sur $\overline{k}$, donc G lisse sur k .

2. Composantes connexes d'un A-groupe localement de type fini

296

2.1. — Considérons d'abord un A-groupe quelconque G et soit G' la composante connexe de l'origine e de G . Cette composante connexe est évidemment fermée de sorte que nous pouvons l'identifier au sous-schéma fermé *réduit* de G qui a G' pour espace sous-jacent.

Proposition 2.1.1. — *Pour toute extension K du corps résiduel k de A , $G' \otimes_A K$ a pour espace sous-jacent la composante connexe de l'origine dans le K -groupe $G \otimes_A K$ (G' est géométriquement connexe).*

Soit en effet $(G \otimes_A K)'$ la composante connexe de l'origine dans $G \otimes_A K$. Comme l'image de $(G \otimes_A K)'$ dans G est connexe et contient l'élément neutre de G , cette image est contenue dans G' de sorte que $(G \otimes_A K)'$ est contenu dans l'image réciproque $G' \otimes_A K$ de G' dans $G \otimes_A K$. La proposition résulte donc de la connexité de $G' \otimes_A K$ qui est prouvée dans le lemme 2.1.2 :

Lemme 2.1.2. — *Soient X et Y deux schémas connexes sur un corps k . Si X contient un point rationnel, $X \times_k Y$ est connexe.*

Nous donnons ci-dessous une démonstration directe de ce résultat de EGA IV₂ (4.5.8 et 4.5.14).

Supposons d'abord Y non vide, connexe et affine d'algèbre B . Dans ce cas, $X \times_k Y$ est le spectre de la $\mathcal{O}_X$ -Algèbre quasi-cohérente $\mathcal{B} = \mathcal{O}_X \otimes_k B$. Nous voulons montrer que toute partie U de $X \times_k Y$ qui est ouverte, fermée et non vide, coïncide avec $X \times_k Y$. Et en effet U est affine sur X et a pour $\mathcal{O}_X$ -Algèbre affine un facteur direct de $\mathcal{B}$. Il résulte donc du lemme 2.1.3 ci-dessous que l'image de U dans X est ouverte et fermée, i.e. coïncide avec X tout entier. Cette image contient en particulier un point rationnel x de X , de sorte que U rencontre l'image réciproque de x dans $X \times_k Y$. Comme cette dernière est isomorphe à Y , donc est connexe, U contient cette image réciproque. Le même résultat serait valable pour le complémentaire de U dans $X \times_k Y$, si U était distincte de $X \times_k Y$, ce qui serait absurde.

297

Si Y est maintenant un k -schéma quelconque, ce qui précède montre que les fibres de la projection canonique $X \times_k Y \rightarrow Y$ sont connexes. Si x est un point rationnel de X , ces fibres rencontrent toutes le sous-schéma $\{x\} \times_k Y$ qui est lui-même connexe, d'où la proposition.

Lemme 2.1.3. — *Soient X un schéma et $\mathcal{A}$ une $\mathcal{O}_X$ -Algèbre quasi-cohérente qui est un facteur direct d'un $\mathcal{O}_X$ -Module libre. L'image de $\text{Spec } \mathcal{A}$ dans X est alors ouverte et fermée.*

Soit V cette image. Il est clair que V est contenue dans le support de $\mathcal{A}$. Réciproquement, si x appartient au support de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_x$ est non nul et est un $\mathcal{O}_{X,x}$ -module

libre (Kaplansky). Par conséquent la fibre de $\text{Spec } \mathcal{A}$ en x , qui est affine d'algèbre $\mathcal{A}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x)$, n'est pas vide. On voit donc que l'image de $\text{Spec } \mathcal{A}$ coïncide avec le support de $\mathcal{A}$.

Si s est la section unité de $\mathcal{A}$, l'égalité $s_x = 0$ entraîne que s est nul dans un voisinage du point x de sorte que le support de $\mathcal{A}$ est fermé. On peut supposer d'autre part que $\mathcal{A}$ est un facteur direct de la somme directe d'une famille $(\mathcal{O}_X^\alpha)$ d'exemplaires
 298 de $\mathcal{O}_X$. Soit alors φ^α la restriction à $\mathcal{A}$ de la projection canonique de $\prod_\alpha \mathcal{O}_X^\alpha$ sur $\mathcal{O}_X^\alpha$; si x est un point de X , tout homomorphisme de $\mathcal{O}_{X,x}$ -modules $\psi_x : \mathcal{A}_x \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ est de la forme $a \mapsto \sum_\alpha \xi^\alpha \varphi^\alpha(a)$ où (ξ^α) est une famille d'éléments de $\mathcal{O}_{X,x}$. Comme $\mathcal{A}_x$ est libre et non nul, on peut choisir les ξ^α et a de telle façon qu'on ait $1 = \sum_\alpha \xi^\alpha \varphi^\alpha(a) = \xi^{\alpha_1} \varphi^{\alpha_1}(a) + \dots + \xi^{\alpha_n} \varphi^{\alpha_n}(a)$. L'égalité $1 = \xi^{\alpha_1} \varphi^{\alpha_1}(a) + \dots + \xi^{\alpha_n} \varphi^{\alpha_n}(a)$ reste alors valable dans un voisinage de x , ce qui montre que a , donc $\mathcal{A}$ sont non nuls dans un voisinage de x (« le support d'un module projectif est ouvert »).

2.2. — Les notations étant toujours celles de 2.1, il est clair que G' est un schéma réduit au-dessus de $\text{Spec } k \subset \text{Spec } A$. Le lemme 2.1.2 montre que $G' \times_k G'$ est connexe, de sorte que $(G' \times_k G')_{\text{réd}}$ est le sous-schéma réduit de $G \times_A G$ qui a pour espace sous-jacent la composante connexe de l'origine. En particulier, le morphisme multiplication $\mu : G \times_A G \rightarrow G$ induit un morphisme $\mu' : (G' \times_k G')_{\text{réd}} \rightarrow G'$ qui fait de G' un groupe dans la sous-catégorie pleine de $(\mathbf{Sch}/k)$ formée des k -schémas réduits.

2.3. — Conformément à nos conventions de 1.1, nous supposons de nouveau à partir de maintenant que G est *localement de type fini* sur A . Alors G est localement noethérien, donc localement connexe, de sorte que la composante connexe de l'élément neutre est ouverte dans G . Nous noterons G^0 le sous-schéma induit par G sur cet ouvert, de sorte qu'avec les notations de 2.1 on a $G' = (G^0)_{\text{réd}}$. Il résulte évidemment
 299 de 2.2 que G^0 est un *sous-schéma en groupes* de G que nous appellerons *la composante neutre* de G .

Soient G^α une composante connexe quelconque de G et $\nu^\alpha : G^\alpha \times_A G^0 \rightarrow G$ le morphisme défini par les égalités $(\nu^\alpha(S))(g, \gamma) = g\gamma g^{-1}$ ($S \in (\mathbf{Sch}/A)$, $g \in G^\alpha(S)$, $\gamma \in G^0(S)$). Si e est l'origine de G , la restriction de ν^α à $G^\alpha \times_A \{e\}$ est le morphisme nul; comme $G^\alpha \times_A G^0$ est connexe d'après 2.1.2, on voit que ν^α se factorise à travers G^0 de sorte que G^0 est un *A-sous-groupe invariant* de G (car ce qui précède entraîne, que pour tout schéma S sur A , $G^0(S)$ est un sous-groupe invariant de $G(S)$).

Proposition 2.4. — *La composante neutre d'un A-groupe G localement de type fini est géométriquement irréductible et est de type fini sur A .*

Soit $\bar{k}$ la clôture algébrique du corps résiduel k de A et montrons d'abord que G^0 est géométriquement irréductible, c'est-à-dire que $G^0 \otimes_A \bar{k}$ est irréductible. D'après 2.2 $(G \otimes_A \bar{k})_{\text{réd}}$ est un $\bar{k}$ -groupe localement de type fini et réduit, donc lisse sur $\bar{k}$ (1.3.1). A fortiori les anneaux locaux de $(G \otimes_A \bar{k})_{\text{réd}}$ sont intègres, de sorte que les composantes connexes de $G \otimes_A \bar{k}$, en particulier $G^0 \otimes_A \bar{k}$, sont irréductibles.

Montrons maintenant que G^0 est de type fini sur A . Comme G^0 est localement de type fini sur A , il suffit de prouver que G^0 est quasi-compact. Pour cela, soit V un ouvert affine de G^0 . Comme G^0 est irréductible, cet ouvert est dense dans G^0 de sorte

que $V \cdot V$ coïncide avec G^0 (0.5) ; comme $V \cdot V$ est l'image de $V \times_A V$ par le morphisme multiplication, $V \cdot V$ est quasi-compact.

Corollaire 2.4.1. — *Toute composante connexe de G est irréductible et de type fini sur A .* 300

On peut supposer en effet A égal à son corps résiduel k . Soit alors H une composante connexe de G , x un point fermé de H , $k(x)$ le corps résiduel de x et K l'extension normale de k engendrée par $k(x)$. La projection canonique $\pi : H \otimes_k K \rightarrow H$ est ouverte et fermée de sorte que toute composante connexe de $H \otimes_k K$ est la somme des images de $G^0 \otimes_k K$ par les translations définies par les points de $\pi^{-1}(x)$. Comme $H \otimes_k K$ est de type fini, H l'est.

Si H n'était pas irréductible, on pourrait choisir x de telle façon que x appartienne à deux composantes irréductibles distinctes. L'anneau local $\mathcal{O}_{H,x}$ aurait alors deux idéaux premiers minimaux distincts, ainsi que l'anneau local de tout point de $H \otimes_k K$ au-dessus de x (« going down theorem » de Cohen-Seidenberg, cf. Bourbaki, *Alg. comm.* chap. VI) ; or nous venons de voir que $H \otimes_k K$ est la somme directe d'un certain nombre d'exemplaires de $G^0 \otimes_k K$, qui est irréductible ...

3. Construction de groupes-quotients (cas des groupes de type fini)

301

3.1. — Soient A un anneau local artinien et $u : F \rightarrow G$ un homomorphisme de A -groupes. Si $\mu : F \times_A F \rightarrow F$ et $\nu : G \times_A G \rightarrow G$ désignent les morphismes multiplication et λ le morphisme composé

$$F \times_A G \xrightarrow{u \times G} G \times_A G \xrightarrow{\nu} G,$$

on rappelle que le quotient à gauche $F \backslash G$ de G par F est le conoyau du (Sch/A) -groupe G_* décrit ci-dessous :

$$F \times_A F \times_A G \begin{array}{c} \xrightarrow{F \times \lambda} \\ \xrightarrow{\mu \times G} \\ \xrightarrow{\text{pr}_{2,3}} \end{array} F \times_A G \begin{array}{c} \xrightarrow{\lambda} \\ \xrightarrow{\text{pr}_2} \end{array} G$$

(pr_2 et $\text{pr}_{2,3}$ sont les projections de $F \times_A G$ et $F \times_A (F \times_A G)$ sur les deuxièmes facteurs). Nous dirons que G_* est le groupe de base G défini par u (confer V, 2a ; comme dans l'exposé V, nous ne suivons pas en VI_A la convention de IV, 4.6.15).

Comme l'unique A -morphisme $F \rightarrow \text{Spec } A$ est universellement ouvert (EGA IV₂, 2.4.9), pr_2 est un morphisme ouvert ; il en va donc de même pour λ qui est composé de pr_2 et de l'automorphisme σ de $F \times_A G$ qui est défini par les formules suivantes : $\sigma(S)(x, y) = (x, u(S)(x) \cdot y)$ où S est un A -schéma variable, x et y appartenant à $F(S)$ et $G(S)$. On voit de la même façon que pr_2 et λ sont plats lorsque F est plat sur A .

Remarquons aussi pour terminer ces préliminaires que tout A -morphisme $s : \text{Spec } A \rightarrow G$ définit un automorphisme du groupe G_* qui induit sur G , $F \times_A G$ 302

et $F \times_A F \times_A G$, les automorphismes r_s , $\text{id}_F \times_A r_s$ et $\text{id}_F \times_A \text{id}_F \times_A r_s$, respectivement. Nous noterons encore r_s cet automorphisme de G_* et nous dirons que r_s est la translation à droite définie par s (confer 0.4).

3.2 Théorème. — Soient F et G des groupes plats et localement de type fini sur un anneau local artinien A . Soit $u : F \rightarrow G$ un homomorphisme de A -groupes quasi-compact et de noyau fini. Alors :

(i) Le quotient à gauche $F \backslash G$ de G par F existe et la suite

$$F \times_A G \xrightleftharpoons[\text{pr}_2]{\lambda} G \xrightarrow{\text{canonique}} F \backslash G$$

est exacte dans la catégorie de tous les espaces annelés.

(ii) Le morphisme canonique $G \rightarrow F \backslash G$ est surjectif et ouvert, et $F \backslash G$ est une somme directe de schémas de type fini sur A .

(iii) Le morphisme canonique $F \times_A G \rightarrow G \times_{(F \backslash G)} G$ est surjectif.

(iv) Si u est un monomorphisme, $F \times_A G \rightarrow G \times_{(F \backslash G)} G$ est un isomorphisme et $G \rightarrow F \backslash G$ est plat.

Dans la démonstration de ce théorème, A' désignera une A -algèbre locale, finie et libre sur A . Si R est une relation faisant intervenir A' , nous dirons que $R(A')$ est vraie quand A' est assez grande s'il existe une algèbre A_1 locale, finie et libre sur A telle que la relation $R(A')$ soit vérifiée pour chaque algèbre A' locale, finie et libre sur A_1 .
303 Nous allons d'abord prouver notre théorème lorsque F et G sont de type fini sur A :

3.2.1. — Supposons un instant que tout point de G possède un voisinage ouvert et saturé W tel que le groupoïde induit par G_* sur W possède une quasi-section (cf. V § 6). Le théorème 3.2 résulte alors de V 6.1. Nous allons montrer qu'en outre toute partie finie de $F \backslash G$ est alors contenue dans un ouvert affine.

Si U est une quasi-section du groupoïde induit par G_* sur un ouvert saturé W de G , $U \otimes_A A'$ est en effet une quasi-section du $(\mathbf{Sch}/A')$ -groupoïde induit par $G_* \otimes_A A'$ sur $W \otimes_A A'$. De plus, si U_* est le $(\mathbf{Sch}/A)$ -groupoïde induit par G_* sur U , $U_* \otimes_A A'$ s'identifie au $(\mathbf{Sch}/A')$ -groupoïde induit par $G_* \otimes_A A'$ dans $U \otimes_A A'$. Il résulte donc des démonstrations de l'exposé V que la construction du quotient $X = F \backslash G$ commute à l'extension $A \rightarrow A'$ de la base du type considéré ici.

Soient donc $x_1, \dots, x_n$ des points de $F \backslash G$ que nous pouvons supposer fermés et $g_1, \dots, g_n$ des points fermés de G se projetant sur $x_1, \dots, x_n$; soient U un ouvert affine partout dense de $F \backslash G$, V l'image réciproque de U dans G et soit A' une A -algèbre assez grande pour les besoins de notre cause : alors l'image réciproque de $g_1, \dots, g_n$ dans $G \otimes_A A'$ est formée de points $g'_1, \dots, g'_p$ qui sont strictement rationnels sur A' (1.2) ; en outre, si A' est assez grande, l'ouvert partout dense $\bigcap_i (V \otimes_A A')^{-1} \cdot g'_i$ contient un point x strictement rationnel sur A' . On a donc $x \in (V \otimes_A A')^{-1} \cdot g'_i$ d'où $g'_i \in (V \otimes_A A') \cdot x$. Comme $(V \otimes_A A') \cdot x$ est l'image de $V \otimes_A A'$ par un automorphisme du groupoïde $G_* \otimes_A A'$, l'image $(U \otimes_A A') \cdot x$ de $(V \otimes_A A') \cdot x$ dans $(F \backslash G) \otimes_A A'$ est l'image de $U \otimes_A A'$ par l'automorphisme induit sur $(F \backslash G) \otimes_A A'$. Donc $(U \otimes_A A') \cdot x$ est un ouvert affine de $(F \backslash G) \otimes_A A'$ contenant $g'_1, \dots, g'_p$.
304

Pour terminer la démonstration on montre comme dans V § 5.b) que $(U \otimes_A A') \cdot x$ contient un ouvert affine W' qui contient $g'_1, \dots, g'_p$ et qui est saturé pour la relation d'équivalence

$$(F \backslash G) \otimes_A A' \otimes_A A' \rightrightarrows (F \backslash G) \otimes_A A'$$

induite par les deux injections canoniques de A' dans $A' \otimes_A A'$. L'image de W' dans $F \backslash G$ contient alors $g_1, \dots, g_n$ et est un ouvert affine de $F \backslash G$ (V 4.1).

3.2.2. — Pour toute algèbre A' sur A (du type considéré en 4.1), désignons maintenant par $U(A')$ l'ensemble des points de $G \otimes_A A'$ ayant un voisinage ouvert et saturé W tel que le groupoïde induit par $G_* \otimes_A A'$ sur W possède une quasi-section. Il est bien clair que $U(A')$ est saturé pour les opérations de $G(\text{Spec } A')$ sur $G \otimes_A A'$. Nous allons voir que, lorsque A' est assez grande, $U(A')$ est égale à $G \otimes_A A'$:

La preuve se fait par récurrence sur $\dim(G - U(A))$: soient $g_1, \dots, g_n$ des points fermés appartenant aux diverses composantes irréductibles de $G - U(A)$; si A' est assez grande, les points $g'_1, \dots, g'_p$ de $G \otimes_A A'$ se projetant sur $g_1, \dots, g_n$ sont strictement rationnels sur A' ; de même, $U(A) \otimes_A A'$ contient un point strictement rationnel x ($U(A)$ n'est pas vide d'après V 8.1). Par conséquent, $U(A')$ contient $(U(A) \otimes_A A') \cdot x^{-1}g'_i$ pour tout i ; donc $U(A')$ contient $g'_1, \dots, g'_p$ et on a

$$\dim(G \otimes_A A' - U(A')) < \dim(G - U(A)).$$

L'hypothèse de récurrence entraîne alors l'existence d'une algèbre A'' sur A' telle qu'on ait $U(A'') = (G \otimes_A A') \otimes_{A'} A'' = G \otimes_A A''$.

3.2.3. — Nous sommes maintenant en mesure de prouver l'existence de $F \backslash G$ quand F et G sont de type fini sur A : soit A' assez grande sur A pour que $U(A')$ coïncide avec $G \otimes_A A'$ (confer 3.2.2). Nous poserons $A'' = A' \otimes_A A'$ et, pour tout A -schéma X , nous désignerons par X' et X'' les produits fibrés $X \otimes_A A'$ et $X \otimes_A A''$. D'après 3.2.1 et 3.2.2, les quotients $F' \backslash G'$ et $F'' \backslash G''$ existent et on a le diagramme commutatif

$$(*) \quad \begin{array}{ccccc} F'' \times_{A''} G'' & \xrightarrow{\text{pr}_2''} & G'' & \xrightarrow{p''} & F'' \backslash G'' \\ \downarrow w_1 \quad \downarrow w_2 & \searrow \lambda'' & \downarrow v_1 \quad \downarrow v_2 & & \downarrow u_1 \quad \downarrow u_2 \\ F' \times_{A'} G' & \xrightarrow{\text{pr}_2'} & G' & \xrightarrow{p'} & F' \backslash G' \\ \downarrow h & \searrow \lambda' & \downarrow g & & \\ F \times_A G & \xrightarrow{\text{pr}_2} & G & & \end{array} .$$

Dans ce diagramme, pr_2' et λ' (resp. pr_2'' et λ'') sont obtenus à partir de pr_2 et λ par des changements de base évidents ; les morphismes g et h sont induits par l'injection canonique $A \rightarrow A'$. On y désigne par p' et p'' les morphismes canoniques ; les morphismes v_1, v_2 et w_1, w_2 sont induits par les deux injections canoniques de A' dans A'' ; enfin, si $\pi' : F' \backslash G' \rightarrow \text{Spec } A'$ est le morphisme structural, il résulte de ce que la construction du quotient $F' \backslash G'$ commute aux deux changements de base $f_1,$

$f_2 : \text{Spec } A'' \rightrightarrows \text{Spec } A'$ qu'on a des isomorphismes canoniques i_1 et i_2 de $F'' \backslash G''$ sur $(F' \backslash G') \times_{\pi', f_1} \text{Spec } A''$ et $(F' \backslash G') \times_{\pi', f_2} \text{Spec } A''$.

Or, lorsqu'on a un diagramme du type (*), $\text{Coker}(\text{pr}_2, \lambda)$ existe si et seulement si il en va de même pour $\text{Coker}(u_1, u_2)$, et ces deux conoyaux s'identifient. L'existence de $F \backslash G$ résultera donc de celle de $\text{Coker}(u_1, u_2)$. Or il résulte de la compatibilité de la formation de $F \backslash G$ avec les extensions de la base considérées ici que le morphisme composé

$$(F' \backslash G') \times_{\pi', f_1} \text{Spec } A'' \xrightarrow{i_1^{-1}} F'' \backslash G'' \xrightarrow{i_2} (F' \backslash G') \times_{\pi', f_2} \text{Spec } A''$$

est une donnée de descente sur $F' \backslash G'$ relativement à $f : \text{Spec } A' \rightarrow \text{Spec } A$. D'après SGA VIII § 7.6 et 3.2.1 cette donnée de descente est effective, c'est-à-dire que $\text{Coker}(u_1, u_2)$ existe (on pourrait d'ailleurs utiliser directement V 4.1).

3.2.4. — Pour terminer la preuve du théorème 3.2 dans le cas où F et G sont de type fini sur A , il reste à étudier le quotient $F \backslash G$. D'après V 6.1, les assertions (ii), (iii) et (iv) « deviennent vraies » après le changement de base $f : \text{Spec } A' \rightarrow \text{Spec } A$; d'après EGA IV₂, 2.6.1, 2.6.2 et 2.7.1, ces assertions étaient donc vraies avant le changement de base. Enfin, pour prouver la deuxième assertion de (i), il n'y a qu'à se reporter à V § 6.c).

4. Construction de groupes-quotients (cas général)

307

Nous supposons maintenant satisfaites les hypothèses du théorème 3.2, F et G n'étant pas nécessairement de type fini sur A .

4.1. — Considérons tout d'abord une composante connexe G^α de G et montrons que le saturé $\overline{G^\alpha}$ de G^α pour la relation d'équivalence définie par le groupoïde G_* est une partie ouverte et fermée de G (autrement dit est la réunion de certaines composantes connexes de G). Ce saturé est l'image de $F \times_A G^\alpha$ par λ , donc est ouvert dans G (confer § 3.1). Si k est le corps résiduel de A et $\bar{k}$ une clôture algébrique de k , il reste à montrer que l'image de $(F \times_A G^\alpha) \otimes_A k$ par $\lambda \otimes_A k$ est fermée dans $G \otimes_A k$, ou encore, d'après SGA 1, VIII.4.4, que l'image de $(F \times_A G^\alpha) \otimes_A \bar{k}$ par $\lambda \otimes_A \bar{k}$ est fermée. Comme $G^\alpha \otimes_A \bar{k}$ est la réunion d'un nombre fini de composantes connexes de $G \otimes_A \bar{k}$, on est ramené au cas où A est un corps algébriquement clos, ce que nous allons supposer : dans ce cas, $\overline{G^\alpha}$ est la réunion des images de G^α par les translations à gauche $\ell_{u(x)}$, où x parcourt les points fermés de F ; l'assertion résulte donc de ce que ces images sont des composantes connexes de G .

4.2. — Prenons en particulier pour G^α la composante connexe G^0 de l'origine de G . Alors $\overline{G^0}$ contient évidemment l'image de F par u qui n'est autre que la classe d'équivalence de l'origine. D'autre part, si F^β est une composante connexe de F , $F^\beta \times_A G^0$ est connexe (2.1.2) de sorte que l'image de $F^\beta \times_A G^0$ par λ est contenue dans la composante connexe de $u(F^\beta)$ dans G . Autrement dit, $\overline{G^0}$ est la réunion des composantes connexes qui rencontrent l'image de F .

On remarquera aussi que le sous-schéma ouvert de G qui a $\overline{G^0}$ pour espace sous-jacent est un sous-groupe de G (que nous notons encore $\overline{G^0}$) : en effet le morphisme inversion de G conserve l'image de F et commute les composantes connexes de G qui rencontrent cette image ; il suffit donc de montrer que $\nu : G \times_A G \rightarrow G$ applique $\overline{G^0} \times_A \overline{G^0}$ dans $\overline{G^0}$ et pour cela on peut supposer que A est un corps algébriquement clos (avec les notations de 4.1, $\overline{G^0} \otimes_A \bar{k}$ s'identifie en effet au saturé de $(G \otimes_A \bar{k})^0$ par la relation d'équivalence définie par l'homomorphisme $u \otimes_A \bar{k}$) ; si G^γ et G^δ sont alors des composantes connexes de $\overline{G^0}$, $G^\gamma \times_A G^\delta$ est connexe et son image par ν rencontre l'image de F ; par conséquent, $u(G^\gamma \times_A G^\delta)$ est contenu dans une composante connexe de G rencontrant $u(F)$, c.q.f.d.

308

4.3. — Il résulte de ce qui précède que le groupoïde G_* de base G défini par u est la somme directe des groupoïdes $\overline{G_*^\alpha}$ induits par G_* sur les différentes parties ouvertes et fermées de G de la forme $\overline{G^\alpha}$. Le conoyau de G_* est donc la somme directe des conoyaux de ces groupoïdes $\overline{G_*^\alpha}$, qu'on est amené à étudier séparément.

Considérons tout d'abord le groupoïde $\overline{G_*^0}$ induit par G_* sur $\overline{G^0}$. Il est clair que $\overline{G_*^0}$ est le groupoïde de base $\overline{G^0}$ défini par l'homomorphisme de F dans $\overline{G^0}$ induit par u (§ 3.1). Le conoyau dont nous voulons prouver l'existence s'identifie donc à $F \backslash \overline{G^0}$. Considérons d'autre part le groupoïde

$$\begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{\ell'_2} & & & \\ G_2^0 & \xrightarrow{\ell'_1} & G_1^0 & \xrightarrow[\ell_0]{\ell_1} & G_0^0 = G^0 \\ & \xrightarrow{\ell'_0} & & & \end{array}$$

induit par $\overline{G_*^0}$ sur G^0 . Si l'on se reporte à la construction explicitée en V § 3.b), l'objet noté alors $Y_0 \times_{X_0} X_1$ n'est autre que $F \times_A G^0$, de sorte que G_1^0 est l'image réciproque de G^0 par le morphisme $F \times_A G^0 \rightarrow \overline{G^0}$ induit par λ . Je dis que cette image réciproque est $F_0 \times_A G^0$, si l'on note F_0 l'image réciproque de G^0 par u : en effet, si F^β est une composante connexe de F_0 et e l'élément neutre de G , $F^\beta \times_A G^0$ est connexe (2.1.2) et $\lambda(F \times_A G^0)$ est contenu dans G^0 ; réciproquement, si F^β est une composante connexe de F non contenue dans F_0 , l'image de $F^\beta \times_A G^0$ est encore connexe et contient $u(F^\beta)$; si $u(F^\beta)$ n'est pas contenu dans G^0 , $\lambda(F^\beta \times_A G^0)$ ne rencontre pas G^0 .

309

Il résulte de ce qui précède que le groupoïde G_*^0 induit par G_* sur G^0 est le groupoïde de base G^0 défini par l'homomorphisme $F_0 \rightarrow G^0$ induit par u : d'après le paragraphe 4, ce groupoïde possède un conoyau qui n'est autre que $F_0 \backslash G^0$. Je dis maintenant que $F_0 \backslash G^0$ s'identifie à $F \backslash \overline{G^0}$: en effet, la démonstration est analogue à celle de l'assertion (i) du lemme V § 6.1 ; considérons le diagramme :

$$\overline{G^0} \xleftarrow{v} F \times_A G^0 \xrightarrow{\text{pr}_2} G^0, \quad ,$$

où v est le morphisme induit par λ . Comme pr_2 possède une section, pr_2 est un épimorphisme effectif et universel de sorte que $F_0 \backslash G^0$ coïncide avec $\text{Coker}(v_0, v_1)$, où

$$\begin{array}{ccccc}
 & \xrightarrow{v'_2} & & & \\
 V_2 & \xrightarrow{v'_1} & V_1 & \xrightarrow{v_1} & V = F \times_A G^0 \\
 & \xrightarrow{v'_0} & & \xrightarrow{v_0} & \\
 \end{array}$$

310 est l'image réciproque du groupoïde G_*^0 par pr_2 (cf. V § 3.a), c'est-à-dire également l'image réciproque de $\overline{G}_*^0$ par le morphisme composé

$$F \times_A G^0 \xrightarrow{\text{inclusion}} F \times_A \overline{G}^0 \xrightarrow{\text{pr}_2} \overline{G}^0.$$

De même, comme v est fidèlement plat et quasi-compact, $F \backslash \overline{G}^0$ coïncide avec le conoyau de l'image réciproque de $\overline{G}_*^0$ par le changement de base v . Or cette image réciproque est isomorphe à V_* d'après V § 3c); il résulte de là que l'inclusion canonique de G_*^0 dans $\overline{G}_*^0$ induit un isomorphisme de $F_0 \backslash G^0$ sur $F \backslash \overline{G}^0$.

On remarque enfin que : *la construction de $F \backslash \overline{G}^0$ commute aux changements de base finis et localement libres*, parce qu'il en va de même pour $F_0 \backslash G^0$.

4.4. — Il reste à construire le conoyau du groupoïde $\overline{G}_*^\alpha$ lorsque G^α est une composante connexe quelconque de G : si A' est une A -algèbre locale, finie et libre assez grande (confer 3.2), $G^\alpha \otimes_A A'$ est la réunion d'un nombre fini de composantes connexes $G'_1, \dots, G'_n$ de $G \otimes_A A'$ qui possèdent toutes un point strictement rationnel. Pour tout i , il existe donc une translation à droite r_i de $G \otimes_A A'$ qui applique $G^0 \otimes_A A'$ sur G'_i ; cette translation induit un isomorphisme du groupoïde $\overline{G}_*^0 \otimes_A A'$ sur $(\overline{G}'_i)_*$, de sorte que le groupoïde induit par $G_* \otimes_A A'$ sur le saturé de G'_i possède un conoyau. Comme $(\overline{G}^\alpha)_* \otimes_A A'$ est la somme directe d'un certain nombre d'entre les $(\overline{G}'_i)_*$, $(\overline{G}^\alpha)_* \otimes_A A'$ possède un conoyau; ce conoyau est la somme directe d'un certain nombre d'exemplaires de $(F_0 \otimes_A A') \backslash (G^0 \otimes_A A')$ de sorte que toute partie finie de ce conoyau est contenue dans un ouvert affine; de plus, la construction de ce conoyau commute aux extensions finies et localement libres de la base. On voit donc comme en 3.2.3 que ce conoyau est de la forme $Y \otimes_A A'$, où Y est un conoyau de $(\overline{G}^\alpha)_*$.

311

4.5. — Nous avons donc construit $F \backslash G$. Les autres assertions du théorème 3.2 se ramènent directement à des assertions concernant les groupoïdes $\overline{G}_*^\alpha$. Comme en V § 6, il suffit de prouver (ii), (iii) et (iv); d'après SGA VIII il suffit de vérifier les assertions correspondantes du groupoïde $\overline{G}_*^\alpha \otimes_A A'$ qui est isomorphe à la somme directe d'un nombre fini d'exemplaires de $\overline{G}_*^0 \otimes_A A'$ (confer 4.4), de sorte qu'on est ramené au groupoïde $\overline{G}_*^0$. Pour ce dernier on continue de calquer la preuve établie en V § 6 comme on a commencé à le faire en 4.3.

4.6. — Ajoutons pour terminer ce paragraphe quelques remarques concernant le lemme 6.1 et le § 9.a) de l'exposé V : avec les hypothèses et les notations de V § 9.a), nous cherchons une condition sous laquelle la construction du conoyau du $(\mathbf{Sch}/S)$ -groupoïde X_* commute à une extension $\pi : S' \rightarrow S$ de la base. Comme les conoyaux de X_* et X'_* s'identifient aux conoyaux des groupoïdes U_* et U'_* induits par X_* et X'_* sur les quasi-sections U et U' , on est ramené au cas d'un $(\mathbf{Sch}/S)$ -groupoïde vérifiant les

hypothèses du théorème V 4.1. Si $g : U_0 \rightarrow Y$ est le morphisme canonique de $U_0 = U$ sur le conoyau Y de U_* , nous voulons que la suite de $\mathcal{O}_{Y'}$ -Modules

$$(*) \quad \mathcal{O}_{Y'} \longrightarrow g'_*(\mathcal{O}_{U'_0}) \rightrightarrows (gu_1)'_*(\mathcal{O}_{U'_1}) = (gu_0)'_*(\mathcal{O}_{U'_1})$$

soit exacte. Si S est localement noethérien et X_0 de type fini sur S , ou bien si (d_0, d_1) est un couple d'équivalence, il résulte de EGA III₁, 1.4.5 que la suite $(*)$ s'identifie à l'image réciproque de la suite 312

$$(**) \quad \mathcal{O}_Y \longrightarrow g_*(\mathcal{O}_{U_0}) \rightrightarrows g_*u_{1*}(\mathcal{O}_{U_1}) = g_*u_{0*}(\mathcal{O}_{U_1})$$

chaque fois que S' est plat sur S . Comme $(**)$ est une suite exacte, on voit que la construction du conoyau de X_* commute aux extensions plates de la base sous les hypothèses mentionnées.

4.7. — Considérons maintenant le cas du groupoïde G_* du théorème 3.2 lorsqu'on suppose provisoirement F et G de type fini sur A . D'après 3.2.2 il existe une algèbre A' locale, finie et libre sur A telle que le groupoïde $G_* \otimes_A A'$ possède « localement » des quasi-sections. Pour toute extension $T \rightarrow \text{Spec } A$ de la base, la suite

$$(F'' \backslash G'') \times_{\text{Spec } A} T \rightrightarrows (F' \backslash G') \times_{\text{Spec } A} T \longrightarrow (F \backslash G) \times_{\text{Spec } A} T$$

déduite du diagramme $(*)$ de 3.2.3 est exacte. Si l'on suppose de plus T plat sur $\text{Spec } A$, $(F'' \backslash G'') \times_{\text{Spec } A} T$ et $(F' \backslash G') \times_{\text{Spec } A} T$ s'identifient respectivement aux conoyaux de $(G_* \otimes_A A'') \times_{\text{Spec } A} T$ et $(G_* \otimes_A A') \times_{\text{Spec } A} T$. Le diagramme déduit de $(*)$, 3.2.3 par le changement de base $T \rightarrow \text{Spec } A$ montre alors que $(F \backslash G) \times_{\text{Spec } A} T$ s'identifie au conoyau de $G_* \times_{\text{Spec } A} T$. Un raisonnement analogue est valable dans le cas général :

Sous les hypothèses du théorème 3.2, pour tout A -schéma plat T , $(F \backslash G) \times_{\text{Spec } A} T$ s'identifie au quotient à gauche de $G \times_{\text{Spec } A} T$ par $F \times_{\text{Spec } A} T$.

5. Compléments

313

5.1. — Nous reprenons les notations du § 3 et les hypothèses du théorème 3.2; on a alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} F \times_A G \times_A G & \xrightarrow{F \times \nu} & F \times_A G \\ \text{pr}_2 \times G \downarrow \lambda \times G & & \text{pr}_2 \downarrow \lambda \\ G \times_A G & \xrightarrow{\nu} & G \\ \text{can.} \times G \downarrow & & \downarrow \text{can.} \\ (F \backslash G) \times_A G & \xrightarrow{\rho} & F \backslash G \end{array},$$

qui satisfait aux égalités $\text{pr}_2 \circ (F \times \nu) = \nu \circ (\text{pr}_2 \times G)$ et $\lambda \circ (F \times \nu) = \nu \circ (\lambda \times G)$. En outre, comme G est supposé *plat* sur A , la suite verticale de gauche est exacte d'après

4.7, de sorte que ν induit un morphisme de A-schémas :

$$\rho : (F \backslash G) \times_A G \longrightarrow F \backslash G .$$

Ce morphisme ρ fait opérer G à droite sur $F \backslash G$ comme on le vérifie immédiatement ; de plus, le morphisme canonique $G \rightarrow F \backslash G$ commute aux opérations de G à droite sur G et $F \backslash G$.

5.2. — Lorsque l'homomorphisme de A-groupes $u : F \rightarrow G$ est un *monomorphisme*, on peut retrouver 5.1 en se servant des résultats de l'exposé IV. En effet, le morphisme canonique $p : G \rightarrow F \backslash G$ est fidèlement plat et ouvert d'après 3.2 ; il est donc couvrant pour la topologie (fpqc) (IV 6.3.1) et l'on peut appliquer les corollaires IV.5.2.2 et IV.5.2.4. En particulier, *si nous supposons, en plus des hypothèses de 3.2, que u est l'inclusion dans G d'un sous-groupe invariant F , il existe sur $F \backslash G$ une et une seule structure de A-groupe telle que le morphisme canonique $p : G \rightarrow F \backslash G$ soit un homomorphisme de A-groupes.*

5.3. — Nous allons maintenant passer en revue quelques énoncés de l'exposé IV :

5.3.1. — Les énoncés IV 5.2.7 et IV 5.3.1 se traduisent comme suit : soient F et G deux groupes *localement de type fini et plats* sur A , F étant un sous-groupe *invariant fermé* de G . Les applications $H \mapsto F \backslash H$ et $H' \mapsto H' \times_{(F \backslash G)} G$ définissent une *correspondance biunivoque* entre les A-sous-groupes *plats* de G contenant F et les A-sous-groupes *plats* de $F \backslash G$. Dans cette bijection les sous-groupes *fermés* (resp. *invariants*) de G contenant F correspondent aux sous-groupes *fermés* (resp. *invariants*) de $F \backslash G$.

5.3.2. — La proposition IV 5.2.9 implique le résultat suivant : soient F , H et G des groupes *localement de type fini et plats* sur A ; on suppose F contenu et fermé dans G , H contenu dans G et contenant F , F invariant dans H . Dans ces conditions, $F \backslash H$ opère librement à gauche sur $F \backslash G$, le schéma quotient $(F \backslash H) \backslash (F \backslash G)$ existe et on a un isomorphisme canonique de schémas à groupe d'opérateurs G :

$$(F \backslash H) \backslash (F \backslash G) = H \backslash G .$$

5.3.3. — De IV 5.2.8, enfin, découle l'assertion que voici : soient F , H et G des groupes *localement de type fini et plats* sur A ; on suppose que F est contenu, *fermé et invariant* dans G , que H est contenu dans G et que $F \cap H$ est *plat* sur A . Soit alors $F \times_A^\tau H$ le A-groupe qui a pour schéma sous-jacent le produit $F \times_A H$, la multiplication étant définie par le morphisme « $((x, h), (y, h')) \mapsto (xhyh^{-1}, hh')$ » ; de même, soient $u : H \cap F \rightarrow F \times_A^\tau H$ le monomorphisme $x \mapsto (x^{-1}, x)$ et $F \cdot H$ le quotient $(F \cap H) \backslash (F \times_A^\tau H)$. Dans ces conditions il existe un isomorphisme canonique

$$F \backslash (F \cdot H) = (F \cap H) \backslash H .$$

5.4. — Soit $u : F \rightarrow G$ un homomorphisme quasi-compact de groupes localement de type fini et plats sur A ; supposons que le noyau de u soit également plat sur A . Dans ce cas, le groupe-quotient $(\text{Ker } u) \backslash F$ existe d'après le théorème 3.2 et 5.2 ; de plus, u induit un monomorphisme $v : \text{Ker } u \backslash F \rightarrow G$ (IV 5.2.6) et, $\text{Ker } u \backslash F$ est plat sur A d'après 3.2 (iv). D'autre part, $\text{Ker } u \backslash F$ s'identifie au faisceau-quotient de $\widehat{F}$ par $\text{Ker } \widehat{u}$ pour la topologie (fpqc) de $(\mathbf{Sch}/A)$ (confer 5.2) ; il en résulte que $F \backslash G$ s'identifie à $(\text{Ker } u \backslash F) \backslash G$ car le faisceau-quotient $\widehat{F} \backslash \widehat{G}$ pour la topologie canonique s'identifie au faisceau-quotient $(\text{Ker } \widehat{u} \backslash \widehat{F}) \backslash \widehat{G}$. A fortiori v induit un isomorphisme de $(\text{Ker } u) \backslash F$ sur l'image réciproque dans G du point distingué de $F \backslash G$ (de sorte que v est une immersion fermée ; confer VI_B). Lorsque F et G sont des A -groupes commutatifs, cette image réciproque est l'image de u dans la catégorie des A -groupes abéliens, alors que $(\text{Ker } u) \backslash F$ est la *coimage* de u . D'où :

Théorème. — *La catégorie des groupes commutatifs de type fini sur un corps est abélienne.*

En effet, lorsque A est un corps, $\text{Ker } u$ est plat sur A quelque soit u .

5.5. — Soit G un groupe localement de type fini et plat sur un anneau artinien local **316**
 A . On sait que la composante connexe de l'origine G^0 est un sous-groupe invariant de G (2.3). Ce sous-groupe G^0 opère à gauche sur toutes les composantes connexes G^α de G de sorte que $G^0 \backslash G$ est la somme directe des $G^0 \backslash G^\alpha$. En particulier, la composante connexe de l'origine dans $G^0 \backslash G$ n'est autre que $G^0 \backslash G^0 \cong \text{Spec } A$ et $G^0 \backslash G \rightarrow \text{Spec } A$ est un isomorphisme local à l'origine ; par conséquent, $G^0 \backslash G$ est non ramifié sur $\text{Spec } A$ (3.3) ; comme $G^0 \backslash G$ est également plat sur $\text{Spec } A$ d'après le théorème 3.2 (iv), on voit que $G^0 \backslash G$ est un groupe étale sur $\text{Spec } A$.

5.6. — Soient maintenant k un corps parfait et G un groupe localement de type fini sur k . Nous avons vu (0.2) que $G_{\text{réd}}$ est alors un sous-schéma en groupes de G . De plus, la classe d'équivalence de l'origine de G pour l'opération de $G_{\text{réd}}$ à gauche sur G est tout l'espace sous-jacent à G . Il résulte donc du théorème 4.2 que le quotient $G_{\text{réd}} \backslash G$ est le spectre d'une k -algèbre finie et locale.

Proposition. — *Soit $u : F \rightarrow G$ un homomorphisme de groupes localement de type fini sur un corps parfait k . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) u est plat.
- (ii) $u^0 : F^0 \rightarrow G^0$ est dominant et le morphisme $v : F_{\text{réd}} \backslash F \rightarrow G_{\text{réd}} \backslash G$ induit par u est plat.

Considérons en effet le diagramme commutatif suivant :

317

$$\begin{array}{ccccc}
 F_{\text{réd}} & \xrightarrow{i} & F & \xrightarrow{p} & F_{\text{réd}} \backslash F \\
 \downarrow u_{\text{réd}} & & \downarrow u & & \downarrow v \\
 G_{\text{réd}} & \xrightarrow{j} & G & \xrightarrow{q} & G_{\text{réd}} \backslash G,
 \end{array}$$

où i et j désignent les inclusions, p et q les projections canoniques. D'après le théorème 3.2 (iv) p et q sont fidèlement plats ; par conséquent, si u est plat, $qu = vp$ est plat, donc également v .

Réciproquement, si v est plat, F et G sont plats sur $G_{\text{réd}} \setminus G$; d'après SGA 1, IV 5.9 il suffit donc de monter que le morphisme $u^{-1}(G_{\text{réd}}) \rightarrow G_{\text{réd}}$ induit par u est plat ; cela est vrai parce que $G_{\text{réd}}$ est réduit (3.3.1).