EXPOSÉ $\mathrm{VI_B}$

GÉNÉRALITÉS SUR LES SCHÉMAS EN GROUPES

par J.-E. Bertin

Cet exposé, qui ne correspond à aucun exposé oral du séminaire, est destiné à **318**
regrouper un certain nombre de résultats techniques couramment utilisés concernant les schémas en groupes. (*)

1. Morphismes de groupes localement de type fini sur un corps

1.1. — Soient A un anneau local artinien, G et H deux A-groupes et $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ un morphisme de A-groupes. Alors u induit un homomorphisme de groupes $u(\mathrm{A}) : \mathrm{G}(\mathrm{A}) \to \mathrm{H}(\mathrm{A})$. Comme H(A) opère sur H par translation à droite, $u(\mathrm{A})$ définit par restriction une opération de G(A) sur H. Cette opération est compatible avec le morphisme u et l'opération de G(A) sur G définie par translation à droite. Comme G(A) opère transitivement sur les points strictement rationnels de G ($\mathrm{VI_A}$ 0.4), on voit que ces points « se comportent tous de la même manière à l'égard de u » ; de là sourdent les propriétés suivantes :

Proposition 1.2. — *Soit* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme* quasi-compact *de* A*-groupes* localement de type fini *sur* A. *Alors l'ensemble* $u(\mathrm{G})$ *est* fermé *dans* H *et on a* $\dim \mathrm{G} = \dim u(\mathrm{G}) + \dim \operatorname{Ker} u$.

Comme u commute avec les symétries de G et H, l'image $u(\mathrm{G})$ est invariante **319**
par la symétrie de H ; il en est donc de même de l'adhérence $\overline{u(\mathrm{G})}$ de $u(\mathrm{G})$ dans H. Soit d'autre part L l'ensemble des points de $\mathrm{H} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{H}$ dont les deux projections appartiennent à $u(\mathrm{G})$; il est clair que L est l'image du morphisme $u \times_{\mathrm{A}} u : \mathrm{G} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G} \to \mathrm{H} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{H}$; donc le morphisme de multiplication de H envoie L dans $u(\mathrm{G})$, autrement dit $u(\mathrm{G}) \cdot u(\mathrm{G}) = u(\mathrm{G})$. D'autre part le lemme 1.2.1 ci-dessous montre que $\overline{\mathrm{L}}$, adhérence de L dans H, est l'ensemble des points de $\mathrm{H} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{H}$ dont les deux projections appartiennent à $\overline{u(\mathrm{G})}$; donc $\overline{u(\mathrm{G})} \cdot \overline{u(\mathrm{G})} = \overline{u(\mathrm{G})}$ de sorte que le sous-schéma réduit de G qui a pour

(*) Cet exposé a été assez sérieusement remanié depuis son édition multigraphiée, notamment les §§ 10 et 11 ont été entièrement rerédigés.

espace sous-jacent $\overline{u(\mathrm{G})}$ est muni naturellement d'une structure de groupe dans la catégorie $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\text{réd}}$, où k est le corps résiduel de A (cf. $\mathrm{VI_A}$ 2).

Montrons la première assertion de 1.2 : quitte à remplacer A par la clôture algébrique de son corps résiduel k, nous pouvons supposer que A est un corps k algébriquement clos (cf. EGA IV_2, 2.3.12). Quitte à remplacer u par $u_{\text{réd}} : \mathrm{G}_{\text{réd}} \to \mathrm{H}_{\text{réd}}$, on peut supposer G et H réduits ; dans ce cas, ainsi que nous venons de le voir, $\overline{u(\mathrm{G})}$ est l'espace sous-jacent à un sous-schéma en groupes réduit de G ; nous pouvons donc supposer u dominant. Alors $\mathrm{G}(k)$ opère transitivement dans l'ensemble des composantes connexes de H et il suffit de montrer que $u(\mathrm{G}) \cap \mathrm{H}^0$ est fermé : on est ramené au cas où H est connexe, donc irréductible et de type fini ($\mathrm{VI_A}$ 4). Alors u est de type fini puisque quasi-compact et localement de type fini ; comme H est noethérien, $u(\mathrm{G})$ est constructible (EGA IV_1, 1.8.5), donc contient un ouvert V de H (EGA 0_{IV}, 9.2.3), et alors $\mathrm{H} = \mathrm{V} \cdot \mathrm{V} \subset u(\mathrm{G}) \cdot u(\mathrm{G}) = u(\mathrm{G})$ ($\mathrm{VI_A}$ 0.5).

Montrons la seconde assertion. Rappelons tout d'abord que le foncteur $\operatorname{Ker} u$
320 (cf. Exp. I) est représentable par $u^{-1}(e)$, où e désigne l'élément neutre de H. Lorsque u est localement de type fini, $\operatorname{Ker} u$ est donc localement de type fini sur A. On se ramène comme précédemment, grâce cette fois-ci à EGA IV_2, 4.1.4, au cas où A est un corps algébriquement clos k, où G et H sont irréductibles et de type fini et où u est dominant : en effet, k étant algébriquement clos, il est clair que les composantes connexes de G, sur l'ensemble desquelles $\mathrm{G}(k)$ opère transitivement, ont toutes même dimension, et que si u^0 est la restriction de u à G^0, alors $(\operatorname{Ker} u)^0 \subset \operatorname{Ker} u^0$, et $\dim \operatorname{Ker} u^0 = \dim \operatorname{Ker} u$. On voit de même qu'alors u est de type fini sur k. Si h désigne le point générique de H, $\dim u^{-1}(h) = \dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{H}$ (EGA IV_3, 10.6.1 (ii)). D'après EGA IV_3, 9.2.3 et 9.2.6, l'ensemble des $y \in \mathrm{H}$ tels que $\dim u^{-1}(y) = \dim u^{-1}(h)$ contient un ouvert non vide V. Puisque u est dominant, $\mathrm{U} = u^{-1}(\mathrm{V})$ est alors un ouvert non vide de G, et contient un point fermé x de G, puisque G est un schéma de Jacobson (EGA IV_3, 10.4.6). Alors la translation à droite r_x est un isomorphisme de $\operatorname{Ker} u$ sur $u^{-1}(u(x))$, si bien que :

$$\dim \operatorname{Ker} u = \dim u^{-1}(u(x)) = \dim u^{-1}(h) = \dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{H}.$$

Lemme 1.2.1. — *Soient* $f : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ *et* $g : \mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}$ *deux morphismes* quasi-compacts et dominants *de schémas sur un anneau local artinien* A *; alors* $f \times_{\mathrm{A}} g : \mathrm{X}' \times_{\mathrm{A}} \mathrm{Y}' \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{Y}$ *est dominant.*

En effet, on a $f \times_{\mathrm{A}} g = (f \times_{\mathrm{A}} \mathrm{id}_{\mathrm{Y}'}) \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{X}} \times_{\mathrm{A}} g)$. Il suffit donc de montrer que $f \times_{\mathrm{A}} \mathrm{id}_{\mathrm{Y}'}$ et $\mathrm{id}_{\mathrm{X}} \times_{\mathrm{A}} g$ sont dominants. On peut pour cela remplacer A par son corps résiduel k. Dans ce cas, X et Y′ sont plats sur $\mathrm{A} = k$, et comme $f \times_{\mathrm{A}} \mathrm{id}_{\mathrm{Y}'}$ (resp. $\mathrm{id}_{\mathrm{X}} \times_{\mathrm{A}} g$) est déduit de f (resp. g) par le changement de base plat $\mathrm{Y}' \to \mathrm{A}$ (resp. $\mathrm{X} \to \mathrm{A}$), il est dominant (et quasi-compact), d'après EGA IV_2, 2.3.7.

321 ***Contre-exemple 1.2.2.*** — Soient k un corps de caractéristique 0, G le k-groupe constant $\mathbb{Z}$ et H le k-groupe additif $\mathbb{G}_{a,k}$. Soit $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ un morphisme de k-groupes. Si $u \neq 0$, $u(\mathrm{G})$ n'est pas fermé dans H.

Proposition 1.3. — *Soient k un corps,* G *un k-groupe localement de type fini, u :* $\mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de k-groupes, x un point de* G*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *u est quasi-fini* (*resp. non ramifié, resp. plat, resp. lisse, resp. étale*) *au point x.*

(ii) *u est localement quasi-fini* (*resp. non ramifié, resp. plat, resp. lisse, resp. étale*).

Il suffit de montrer que (i) entraîne (ii). D'après (EGA IV 2.7.1 et 17.7.1), on peut supposer k algébriquement clos et $x \in \mathrm{G}(k)$. Soit alors U l'ouvert non vide de G formé des points où u est quasi-fini (resp. non ramifié, resp. plat, resp. lisse, resp. étale). Il suffit de montrer que tout point fermé y de G appartient à U, puisque G est un schéma de Jacobson (EGA IV 10.4.6). Il existe alors une translation qui envoie x sur y, ce qui montre que u est quasi-fini (resp. non ramifié, resp. plat, resp. lisse, resp. étale) en y.

Corollaire 1.3.1. — *Soient k un corps et* G *un k-groupe. Alors, pour que* G *soit localement quasi-fini* (*resp. non ramifié, lisse, étale*) *sur k, il faut et il suffit que* G *soit quasi-fini* (*resp. non ramifié, lisse, étale*) *sur k en un point.*

Il suffit d'appliquer 1.3 au cas où H est le k-groupe unité, compte-tenu de ce que l'ensemble des points en lesquels G est de type fini sur k est ouvert, et du lemme suivant :

Lemme 1.3.1.1. — *Soient k un corps et* G *un k-groupe. S'il existe un ouvert non vide* 322
U *de* G *tel que* U *soit localement de type fini sur k, alors* G *est localement de type fini sur k.*

Soient $x \in \mathrm{G}$ et $y \in \mathrm{U}$. Soit k' une extension de k composée des extensions $\kappa(x)$ et $\kappa(y)$. Posons $\mathrm{G}' = \mathrm{G} \otimes_k k'$, $\mathrm{U}' = \mathrm{U} \otimes_k k'$. Il existe alors un point rationnel $x' \in \mathrm{G}'$ au-dessus de x et un point rationnel $y' \in \mathrm{U}'$ au-dessus de y. Alors $\mathrm{V}' = x' \cdot {y'}^{-1} \cdot \mathrm{U}'$ est un ouvert contenant x' et localement de type fini sur k'. La projection $\mathrm{G}' \to \mathrm{G}$ étant ouverte (EGA IV_2, 2.4.6), la projection de V' sur G est un ouvert V de G contenant x et localement de type fini sur k, d'après (EGA IV 17.7.5).

Corollaire 1.3.2. — *Soient* A *un anneau local artinien,* G *et* H *deux* A*-groupes localement de type fini, $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ un morphisme de* A*-groupes. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *u est universellement ouvert,*

(ii) *u est ouvert,*

(iii) *u est ouvert en un point de* G*,*

(iv) *l'application $u^0 : \mathrm{G}^0 \to \mathrm{H}^0$ déduite de u est dominante, ou ce qui revient au même* (1.2 *et* $\mathrm{VI_A}$ 4), *u^0 est surjective,*

(v) *il existe une composante connexe* $\mathrm{G}^{\frown}$ *de* G *telle que, si* $\mathrm{H}^{\frown}$ *désigne la composante connexe de* H *contenant* $u(\mathrm{G}^{\frown})$, *l'application $u^{\frown} : \mathrm{G}^{\frown} \to \mathrm{H}^{\frown}$ déduite de u soit dominante.*

Il est clair que (i) entraîne (ii), et que (ii) entraîne (iii). Puisque G^0 (resp. $G^{\frown}$) est ouvert dans G (VI_A 3) et que H^0 (resp. $H^{\frown}$) est irréductible (VI_A 4.1), on voit que
323 (ii) entraîne (iv) (resp. que (iii)) entraîne (v). Reste donc à montrer que (v) implique (i) (car, (iv) étant un cas particulier de (v), cela montrera aussi que (iv) entraîne (i)).

L'ouvert $G^{\frown}$ (resp. $h^{\frown}$) de G (resp. H) sera muni de sa structure de schéma induit, et $u^{\frown}$ désignera le morphisme $u^{\frown} : G^{\frown} \to H^{\frown}$ déduit de u. Soit k le corps résiduel de A. Puisque $G^{\frown}$ est quasi-compact sur A (VI_A 4.1) et que $H^{\frown}$ est séparé sur A (VI_A 2), $u^{\frown}$ est quasi-compact, donc $u^{\frown} \otimes_A k$ est quasi-compact et dominant ; il en est de même de $u^{\frown} \otimes_A \overline{k}$ (où $\overline{k}$ désigne la clôture algébrique de k) d'après (EGA IV 2.3.7). Puisque $G^{\frown} \otimes_A \overline{k}$ est réunion de composantes connexes de $G \otimes_A \overline{k}$, il est clair que $G \otimes_A \overline{k}$, $H \otimes_A \overline{k}$, et $u \otimes_A \overline{k}$, vérifient l'assertion (v). Nous sommes ainsi ramenés au cas où $A = k$ est un corps algébriquement clos, compte tenu de (EGA IV 2.6.4).

Dans ce cas, nous pouvons de plus remplacer u par $u_{\text{réd}}$, et nous sommes ramenés au cas où H est réduit. Alors $H^{\frown}$ est réduit, et le théorème de platitude générique (EGA IV_2, 6.9.1) affirme que, puisque $u^{\frown}$ est dominant, $u^{\frown}$ (donc aussi u) est plat au point générique de $G^{\frown}$, si bien que u est plat (1.3), donc universellement ouvert (EGA IV_2, 2.4.6).

Proposition 1.4. — *Soient* A *un anneau local artinien,* G *et* H *deux* A*-groupes localement de type fini, et* $u : G \to H$ *un morphisme quasi-compact de* A*-groupes.Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) u *est* propre*,*

(ii) *il existe* $h \in H$ *tel que la fibre* $u^{-1}(h)$ *soit* non vide et propre sur $\kappa(h)$*,*

(iii) $\operatorname{Ker} u$ *est* propre*.*

Il est clair que (i) entraîne (iii), et que (iii) entraîne (ii). D'autre part, il résulte des
324 hypothèses que u est de type fini et séparé (EGA I 5.5.1) (puisque G est séparé (VI_A 2)). Il reste donc à montrer que l'assertion (ii) entraîne que u est universellement fermé, si bien que nous pouvons supposer A égal à son corps résiduel k, et même que k est algébriquement clos et que $h \in H(k)$ (EGA IV 2.6.4). Nous avons vu (1.2) qu'alors $u(G)$ est l'ensemble sous-jacent à un sous-schéma en groupes réduit fermé de H ; toute immersion fermée étant propre (EGA II, 5.4.2), nous pouvons supposer que u est surjectif, et que H est réduit. Puisque u est surjectif, le groupe $G(k)$ opère transitivement sur l'ensemble des points fermés de H ; quel que soit le point fermé y de H, $u^{-1}(y)$ est donc propre sur $\kappa(y)$. D'après (EGA IV 9.6.1), l'ensemble des $y \in H$ tels que $u^{-1}(y)$ ne soit pas propre sur $k(y)$ est localement constructible ; puisqu'il ne contient aucun point fermé, il est vide (EGA IV 10.1.2). Considérons alors le point générique de H^0. D'après (EGA IV 8.10.5) utilisé suivant la méthode 8.1.2 b), il existe un ouvert non vide V de H^0 tel que la restriction de u au-dessus de l'ouvert V soit propre. Il est clair alors que les $g \cdot V$ ($g \in G(k)$) forment un recouvrement ouvert de H tel que, pour tout $g \in G(k)$, la restriction de u au-dessus de l'ouvert $g \cdot V$ soit propre ; on en déduit que u est propre (EGA IV 2.4.3 (vii)).

***Corollaire 1.4.1.* —** *Soient* A *un anneau local artinien,* G *et* H *deux* A*-groupes localement de type fini,* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de* A*-groupes. Les assertion suivantes sont équivalentes :*

(i) *u est* localement quasi-fini*,*

(ii) *u est* quasi-fini en un point*,*

(iii) $\mathrm{Ker}\, u$ est discret*,*

(iv) *la restriction de u à chaque composante connexe de* G *est* finie*.*

Enfin, si u est quasi-compact*, ces assertions sont équivalentes à la suivante :* **325**

(v) *u est* fini*.*

Il est clair que (iv) entraîne (iii), que (iii) entraîne (ii) (EGA I, 6.4.4), et que dans le cas où u est quasi-compact, les assertions (iv) et (v) sont équivalentes. On a déjà vu en 1.3 que les assertions (i) et (ii) sont équivalentes.

Montrons enfin que (i) entraîne (iv). Soit $\mathrm{G}^{\frown}$ une composante connexe de G ; puisque $\mathrm{G}^{\frown}$ est de type fini sur A ($\mathrm{VI_A}$ 4.1) et que H est séparé ($\mathrm{VI_A}$ 2), la restriction $u^{\frown}$ de u à $\mathrm{G}^{\frown}$ est de type fini et séparé, puisque $\mathrm{G}^{\frown}$ est séparé sur A (EGA I 5.5.1). Il suffit donc de montrer que $u^{\frown}$ est universellement fermé ; nous pouvons donc supposer que A est égal à son corps résiduel k, et même que k est algébriquement clos (EGA IV 2.6.4), car $\mathrm{G}^{\frown} \otimes_{\mathrm{A}} \overline{k}$, où $\overline{k}$ désigne la clôture algébrique de k, est la somme d'un nombre fini de composantes connexes de $\mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} \overline{k}$. Soit alors g un point fermé de $\mathrm{G}^{\frown}$, si $u^0 : \mathrm{G}^0 \to \mathrm{H}$ est la restriction de u à G^0, on a $u^{\frown} = r_{u(g^{-1})} \circ u^0 \circ r_g$, où r_g désigne la translation à droite par g, et pour montrer que $u^{\frown}$ est propre, il suffit de montrer que u^0 est propre. Par hypothèse, u est localement quasi-fini, donc la fibre $\mathrm{Ker}\, u$ est discrète (et non vide) ; nous avons vu que u^0 est de type fini, donc la fibre $\mathrm{Ker}\, u^0$ est finie (EGA II 6.2.2), donc propre, et non vide ; donc u^0 est propre (1.4), donc fini (EGA III 4.4.2) puisqu'il est quasi-fini.

***Corollaire 1.4.2.* —** *Soient* A *un anneau local artinien,* G *et* H *deux* A*-groupes localement de type fini,* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme* quasi-compact *de* A*-groupes. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *u est une* immersion fermée*,*

(ii) *u est un* monomorphisme*,*

(iii) $\mathrm{Ker}\, u$ *est isomorphe au k-groupe unité.* **326**

En particulier, tout sous-schéma en groupes de H est fermé*.*

Il est clair que (i) entraîne (ii), et si l'on considère les foncteurs que représentent respectivement G et H, il est immédiat que les conditions (ii) et (iii) sont équivalentes. Enfin, si $\mathrm{Ker}\, u$ est le k-groupe unité, $\mathrm{Ker}\, u$ est une fibre propre et non vide, donc (1.4), u est un monomorphisme propre, et de présentation finie puisque H est localement noethérien (EGA IV 6.1), donc est une immersion fermée (EGA IV_3, 8.11.5).

Le dernière assertion résulte de ce que, puisque H est localement noethérien, toute immersion $\mathrm{G} \to \mathrm{H}$ est quasi-compacte (EGA I, 6.6.4).

Contre-exemple 1.4.3. — Soient k un corps de caractéristique 0, G le k-groupe constant $\mathbb{Z}$ et H le k-groupe $\mathbb{G}_a$. Soit $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ un morphisme de k-groupes. Si $u \neq 0$, $\operatorname{Ker} u = 0$, mais u n'est pas une immersion fermée (cf. 1.2.2).

Nous utiliserons plus loin les deux résultats suivants qui auraient dû figurer dans l'Exposé $\mathrm{VI_A}$:

Lemme 1.5. — *Soient k un corps et* G *un k-groupe* localement de type fini. *Toute composante irréductible de* G *a* même dimension *que* G, *autrement dit, quel que soit $g \in \mathrm{G}$, on a* $\dim_g \mathrm{G} = \dim \mathrm{G}$.

Les deux assertions sont équivalentes (EGA IV_3, 10.6.3 et 10.7.1). Soit $\mathrm{G}^\frown$ une composante irréductible de G. Alors si $\overline{k}$ désigne la clôture algébrique de k, $\mathrm{G}^\frown \otimes_k \overline{k}$ est réunion de composantes irréductibles de $\mathrm{G} \otimes_k \overline{k}$ (EGA IV 4.4.1) ; on est donc ramené au cas où k est algébriquement clos (EGA IV 4.1.4). Dans le cas, $\mathrm{G}^\frown$ se déduit de G^0 par translation, donc $\dim \mathrm{G}^\frown = \dim \mathrm{G}^0 = \dim \mathrm{G}$.

327 ***Proposition 1.6.*** — *Soient* S *un schéma de caractéristique zéro,* G *un* S*-schéma en groupes localement de présentation finie le long de la section unité e. Puisque* G *soit lisse sur* S *le long de la section unité, il faut et il suffit que le $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-Module $\omega_{\mathrm{G/S}} = \varepsilon^*(\Omega^1_{\mathrm{G/S}})$, (appelé Module conormal à la section unité de* G*), soit localement libre.*

Rappelons qu'un schéma S est dit de *caractéristique zéro* si pour tout point fermé x de S, le corps $\kappa(x)$ est de caractéristique zéro.

Rappelons aussi (II 11) que, si π désigne le morphisme structural $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$, on a $\Omega^1_{\mathrm{G/S}} = \pi^*(\omega_{\mathrm{G/S}})$, si bien qu'il revient au même de dire que le $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-Module $\omega_{\mathrm{G/S}}$ est localement libre, ou que le $\mathscr{O}_\mathrm{G}$-Module $\Omega^1_{\mathrm{G/S}}$ est localement libre.

La proposition est alors une conséquence immédiate de (EGA IV_4, 16.12.2 et 17.12.5).

Corollaire 1.6.1 **(**Cartier**).** — *Etant donné un corps k de* caractéristique zéro, *tout k-groupe* localement de type fini *sur k est* lisse *sur k.*

En effet, il est alors clair que le k-Module $\omega_{\mathrm{G}/k}$ est localement libre, donc (1.7) G est lisse sur k au point unité e, et donc lisse sur k (1.3.1).

2. « Propriétés ouvertes » des groupes et des morphismes de groupes localement de présentation finie

2.0. — Dans tout ce qui suit, S désignera un schéma quelconque ; un S-schéma en groupes sera appelé un S-*groupe* G. Etant donné un S-groupe G, nous noterons π ou π_G le morphisme structural $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$, ε la section unité, c la symétrie et μ le morphisme de multiplication $\mathrm{G} \times_\mathrm{S} \mathrm{G} \to \mathrm{G}$.

328 Etant donnée une propriété $\mathscr{P}(u)$ pour un morphisme de S-schémas $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, nous dirons que $\mathscr{P}(u)$ est *stable par changement de base* si, chaque fois que u vérifie $\mathscr{P}(u)$, il en est de même du morphisme $u_{(\mathrm{Y}')}$, quel que soit le S-morphisme $\mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}$.

On dit que $\mathscr{P}(u)$ est de *nature locale pour la topologie* $\mathcal{T}$ (cf. IV 4 et 6) si $\mathscr{P}(u)$ vérifie les deux conditions suivantes :

a) $\mathscr{P}(u)$ est stable par changement de base,

b) chaque fois qu'il existe une famille de S-morphisme $\mathrm{Y}_i \to \mathrm{Y}$ couvrante pour la topologie $\mathcal{T}$ et telle que chacun des morphismes $u_{(\mathrm{Y}_i)}$ vérifie $\mathscr{P}(u)$, alors u vérifie $\mathscr{P}(u)$.

Proposition 2.1. — *Soit* $\mathscr{P}(u)$ *une propriété pour un morphisme de* S*-schémas. Supposons que* $\mathscr{P}(u)$ *soit de nature locale pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte. Soient* G *et* H *deux* S*-groupes et* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de* S*-groupes. Supposons* G *plat et universellement ouvert sur* S*. Soit* W *le plus grand ouvert de* H *au-dessus duquel* u *vérifie la propriété* $\mathscr{P}(u)$ *et soit* $\mathrm{V} = u^{-1}(\mathrm{W})$*. Alors il existe un ouvert* U *de* S *tel que* V *soit un sous-schéma en groupes ouvert de* $\mathrm{G} \mid \mathrm{U}$*.*

L'existence d'un plus grand ouvert W de H au-dessus duquel u vérifie $\mathscr{P}(u)$ résulte de ce que $\mathscr{P}(u)$ est de nature locale pour la topologie de Zariski. Puisque π_{G} est universellement ouvert, $\pi_{\mathrm{G}}(\mathrm{V})$ est un ouvert U de S. Il suffit de montrer que V est un sous-schéma en groupes de $\mathrm{G}|\mathrm{U}$. Nous pouvons donc supposer que $\mathrm{U} = \mathrm{S}$.

Posons alors $\mathrm{G}' = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$, $\mathrm{H}' = \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$, $\mathrm{V}' = \mathrm{V} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$, $\mathrm{W}' = \mathrm{W} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$ et $u' = u_{(\mathrm{V})}$; soit W'_1 le plus grand ouvert de H' au-dessus duquel u' vérifie $\mathscr{P}(u)$; puisque V est plat et universellement ouvert sur S, il en est de même de H' sur H, et le lemme 2.1.1 ci-dessous montre que $\mathrm{W}'_1 = \mathrm{W}'$. Considérons alors l'automorphisme de V- **329**
schémas a (resp. b) de G' (resp. H'), translation à droite par le symétrique de la section diagonale δ (resp. par le symétrique de $u(\delta)$), défini par $a(g, v) = (g \cdot v^{-1}, v)$, (resp. $b(h, v) = h \cdot u(v^{-1}), v)$),quels que soient le morphisme $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$, $g \in \mathrm{G}(\mathrm{T})$, $v \in \mathrm{V}(\mathrm{T})$ et $h \in \mathrm{H}(\mathrm{T})$. Il est clair que $u' \circ a = b \circ u'$, ce qui montre que W' est stable par b, donc que V' est stable par a, si bien que V est un sous-schéma en groupes de G.

Lemme 2.1.1. — *Soit* $\mathscr{P}(u)$ *une propriété pour un* S*-morphisme* u*. Supposons* $\mathscr{P}(u)$ *de nature locale pour la topologie fpqc. Soit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un* S*-morphisme de schémas, et soit* $g : \mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}$ *un* S*-morphisme plat et ouvert. Soit* W (*resp.* W'_1) *le plus grand ouvert de* Y (*resp.* Y') *au-dessus duquel* f (*resp.* $f' = f_{(\mathrm{Y}')}$) *vérifie* $\mathscr{P}(u)$*. Alors* $\mathrm{W}'_1 = \mathrm{W} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}'$*.*

Posons $\mathrm{W}' = \mathrm{W} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}'$; puisque $\mathscr{P}(u)$ est stable par changement de base, il est clair que $\mathrm{W}' \subset \mathrm{W}'_1$. Posons $\mathrm{W}_1 = g(\mathrm{W}'_1)$, $\mathrm{V}_1 = f^{-1}(\mathrm{W}_1)$ et $\mathrm{V}'_1 = \mathrm{V}_1 \times_{\mathrm{W}_1} \mathrm{W}'_1$; il est clair que $\mathrm{V}'_1 = f'^{-1}(\mathrm{W}'_1)$. Puisque g est plat et ouvert, le morphisme $\mathrm{W}'_1 \to \mathrm{W}_1$ déduit de g est fidèlement plat et ouvert, donc couvrant pour la topologie (fpqc). Puisque le morphisme $\mathrm{V}'_1 \to \mathrm{W}'_1$ déduit de f' vérifie $\mathscr{P}(u)$, il en est de même du morphisme $\mathrm{V}_1 \to \mathrm{W}_1$ déduit de f, donc $\mathrm{W}_1 \subset \mathrm{W}$, et $\mathrm{W}'_1 \subset g^{-1}(\mathrm{W}_1) \subset g^{-1}(\mathrm{W}) = \mathrm{W}'$; donc $\mathrm{W}' = \mathrm{W}'_1$, cqfd.

Remarque 2.1.2. — Un grand nombre de propriétés pour un morphisme sont de nature locale pour la topologie (fpqc) (cf. EGA IV_2, 2.6 et 2.7) ; citons celles d'être plat, lisse, non ramifié, étale (EGA IV_4, 17.7.3), localement quasi-fini.

La démonstration de 2.1 n'utilise en fait que des *changements de base par des morphismes plats* ; la proposition s'appliquera donc à une propriété vérifiant la condition b) de 2.0 relativement à la topologie (fpqc), et stables par changements de base par
330 des morphismes plats (exemple : celle d'être quasi-compact et dominant).

Bien entendu, on peut énoncer une proposition analogue concernant les propriétés de nature locale pour une topologie $\mathcal{T}$ plus fine que la topologie de Zariski, la condition à vérifier sur G étant alors que π_{G} soit universellement ouvert et couvrant pour la topologie $\mathcal{T}$.

En particulier, si G est plat et localement de présentation finie sur S, on a un énoncé analogue pour les propriétés stables par changements de base par des morphismes plats et localement de présentation finie, et vérifiant la condition b) de 2.0 relativement à la topologie (fpqc) (par exemple, celles d'être régulier, réduit, de Cohen-Macaulay, etc... (EGA IV_2, 6.8)).

Proposition 2.2. — *Soient* G *et* H *deux* S*-groupes et* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de* S*-groupes. Alors :*

(i) *Supposons* G *ou* H *plat sur* S*, et* G *ou* H *localement de présentation finie sur* S*, alors le plus grand ouvert* V *de* G *tel que la restriction de* u *à* V *soit plate et localement de présentation finie* (*resp. lisse, resp. étale*) *est un sous-schéma en groupes ouvert de* G|U*, où* U *désigne un ouvert convenable de* S.

(ii) *Supposons* G *ou* H *universellement ouvert sur* S*, alors le plus grand ouvert* V *de* G *tel que la restriction de* u *à* V *soit universellement ouverte est un sous-schéma en groupes ouvert de* G|U*, où* U *est un ouvert convenable de* S.

Montrons d'abord (i). Montrons que la restriction π_{V} de π_{G} à V est plate et localement de présentation finie :

331 a) Si π_{G} est plat (resp. localement de présentation finie), il en est de même de π_{V}.

b) Si π_{H} est plat (resp. localement de présentation finie), il en est de même de π_{V}, comme composé de la restriction de u à V et de π_{H}.

Donc, dans les quatre cas envisagés dans l'énoncé, π_{V} est plat et localement de présentation finie, donc universellement ouvert (EGA IV_2, 2.4.6). Posons $\mathrm{U} = \pi_{\mathrm{V}}(\mathrm{V})$; U est donc un ouvert de S. Il suffit alors de montrer que V est un sous-schéma en groupes ouvert de G|U ; nous pouvons donc supposer que U = S.

Posons alors $\mathrm{G}' = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$, $\mathrm{H}' = \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$, $\mathrm{V}' = \mathrm{V} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$ et $u' = u_{(\mathrm{V})}$. Alors, V étant plat et localement de présentation finie sur S, il en est de même de H′ sur H. D'après EGA IV_4, 17.7.4, V′ est alors le plus grand ouvert de G′ tel que la restriction de u' à V′ soit plate et localement de présentation finie (resp. lisse, resp. étale). Les automorphismes a et b étant définis comme dans la démonstration de 2.1, il est alors clair que V′ est stable par a, donc que V est un sous-schéma en groupes de G.

Montrons (ii). La restriction π_{V} de π_{G} à V est un morphisme universellement ouvert, soit parce qu'il en est de même de π_{G}, soit comme composé de la restriction de u à V et de π_{H} dans le cas où π_{H} est universellement ouvert. Posons $\mathrm{U} = \pi_{\mathrm{V}}(\mathrm{V})$; U est alors un ouvert de S. Il suffit de montrer que V est un sous-schéma en groupes ouvert de G|U. Nous pouvons donc supposer que U = S.

Posons comme précédemment $G' = G \times_S V$, $H' = H \times_S V$, $V' = V \times_S V$ et $u' = u_{(V)}$. Alors $\pi_V : V \to S$ est surjectif et universellement ouvert, il en est de même de $G' \to G$, si bien que V' est le plus grand ouvert de G' tel que la restriction de **332** u' à V' soit universellement ouverte, en vertu de (EGA IV_3, 14.3.4 et (ii)). Les automorphismes a et b étant définis comme précédemment, il est alors clair que V' est stable par a, donc que V est un sous-schéma en groupes de G.

Corollaire 2.3. — *Soit* G *un* S*-groupe. Le plus grand ouvert* V *de* G *tel que* V *soit plat et localement de présentation finie* (*resp. lisse, étale, universellement ouvert*) *sur* S *est un sous-schéma en groupes ouvert de* G|U, *où* U *désigne un ouvert convenable de* S.

Il suffit d'appliquer 2.2 au cas où H est le S-groupe unité et où u est l'unique morphisme de S-groupes $G \to H$, car alors π_H est un morphisme et $\pi_G = \pi_H \circ u$.

Corollaire 2.4. — *Soit* G *un* S*-groupe ; supposons qu'il existe un voisinage* X *de la section unité tel que* X *soit plat et localement de présentation finie* (*resp. lisse, resp. étale, resp. universellement ouvert*) *sur* S *; il existe alors un sous-schéma en groupes ouvert* V *de* G *tel que* V *soit plat et localement de présentation finie* (*resp. lisse, resp. étale, resp. universellement ouvert*) *sur* S.

Il suffit d'appliquer 2.3 en remarquant qu'ici avec les notations de 2.2, on a $\varepsilon(S) \subset V$, donc $U = S$.

Proposition 2.5. — *Soit* $u : G \to H$ *un morphisme de* S*-groupes.*

(i) *Supposons que* G *soit plat et de présentation finie sur* S *aux points de sa section unité, et que* H *soit de présentation finie sur* S *aux points de sa section unité. Alors l'ensemble* U *des points* $s \in S$ *tels que* u_s *soit plat* (*resp. lisse, resp. étale*) *est ouvert dans* S.

Si, en particulier, on suppose G *plat sur* S, *et* G *et* H *localement de présentation* **333** *finie sur* S, *alors l'ensemble* V *des points de* G *où* u *est plat* (*resp. lisse, resp. étale*) *est égal à* G|U.

(ii) *Supposons que* u *soit localement de présentation finie* (*resp. localement de type fini*) *aux points de la section unité de* G, *et que, pour tout* $s \in S$, G_s *soit localement de type fini sur* $\kappa(s)$ (*condition vérifiée si* G *est de type fini sur* S *aux points de la section unité* (1.3.1.1)). *Alors, l'ensemble* U *des* $s \in S$ *tels que* u_s *soit non ramifié* (*resp. localement quasi-fini*) *est ouvert dans* S.

Si on suppose de plus que u *est localement de présentation finie* (*resp. localement de type fini*), *alors l'ensemble* V *des points de* G *où* u *est non ramifié* (*resp. quasi-fini*) *est égal à* G|U.

Montrons (i). Notons d'abord (1.3.1.1) que, pour tout $s \in S$, G_s est localement de type fini sur $\kappa(s)$. Soit Y l'ensemble des points de H où π_H est de présentation finie, et soit X l'ensemble des points de $u^{-1}(Y)$ où π_G est plat et de présentation finie. Rappelons (EGA IV 1.4.2 et 11.3.1) que X (resp. Y) est ouvert dans G (resp. H). Soit $u_X : X \to Y$ le morphisme déduit de u. Puisque Y (resp. X) contient la section unité de H (resp. G), la restriction π_X de π_G à X est surjective, et le morphisme $S \to X$

déduit de ε_{G} est une S-section de X. Soit $\mathrm{V_X}$ l'ensemble des points de X où u_{X} est plat (resp. lisse, resp. étale). Soit $x \in \mathrm{X}$ et posons $s = \pi_{\mathrm{X}}(x)$; alors d'après (EGA IV 11.3.10), (resp. 11.3.10 et 17.5.1, resp. 11.3.10 et 17.6.1), x appartient à $\mathrm{V_X}$ si et seulement si u_s est plat (resp. lisse, resp. étale) au point x, ou, ce qui revient au même (1.3), si et seulement si u_s est plat (resp. lisse, resp. étale). Par conséquent, on
334 a $\mathrm{U} = \varepsilon_{\mathrm{G}}^{-1}(\mathrm{V_X})$ et $\mathrm{V_X} = \pi_{\mathrm{X}}^{-1}(\mathrm{U})$. Rappelons (EGA IV 11.3.1 (resp. 17.3.7)) que $\mathrm{V_X}$ est ouvert dans X, donc dans G, si bien que U est ouvert dans S.

La seconde assertion résulte de ce qu'on vient de voir, car alors, X = G, Y = H, $\mathrm{V_X} = \mathrm{V}$, donc $\mathrm{V} = \pi_{\mathrm{G}}^{-1}(\mathrm{U})$.

L'assertion (ii) se montre de manière analogue, en utilisant (1.3) et le fait que pour qu'un S-morphisme $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ localement de présentation finie (resp. localement de type fini) soit non ramifié (resp. quasi-fini) en un point $x \in \mathrm{X}$, il faut et il suffit que, si s désigne la projection de x sur S, u_s soit non ramifié (resp. quasi-fini) au point x (EGA IV 17.4.2 et $\mathrm{Err}_{\mathrm{III}}$ 20).

Corollaire 2.6. — *Soit* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de* S-*groupes qui soit un morphisme* radiciel (*ce qui est le cas si* u *est un* monomorphisme (EGA I, 3.5.4)). *On suppose* G *et* H localement de présentation finie *sur* S *et* G plat *sur* S. *Alors l'ensemble* U *des* $s \in \mathrm{S}$ *tels que* u_s *soit une immersion ouverte est* ouvert *dans* S, *et la restriction de* u *au-dessus de* U *est une* immersion ouverte.

D'après 2.5 (i), l'ensemble U′ des points $s \in \mathrm{S}$ tels que u_s soit étale est ouvert dans S. Puisque u est radiciel, il en est de même de u_s, quel que soit $s \in \mathrm{S}$, donc d'après EGA IV_4, 17.9.1, on a U = U′, ce qui montre que U est ouvert. Enfin, d'après 2.5 (i), la restriction de u au-dessus de U est étale ; puisque u est radiciel, cette restriction est une immersion ouverte (EGA IV_4, 17.9.1).

Proposition 2.7. — *Soit* G *un* S-*groupe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est* non ramifié *sur* S aux points de la section unité,

(ii) *la section unité est une* immersion ouverte,

335 (iii) G *est* de présentation finie *sur* S aux points de la section unité, *et quel que soit* $s \in \mathrm{S}$, G_s *est* non ramifié *sur* $\kappa(s)$.

Si, de plus, on suppose G localement de présentation finie *sur* S, *alors chacune des trois conditions précédentes est équivalente à la suivante :*

(iv) G *est* non ramifié *sur* S.

L'équivalence des assertions (i) et (ii) résulte du lemme plus général 2.7.1 ci-dessous. Remarquons (1.3.1.1) que l'une ou l'autre des conditions (i) ou (iii) entraîne que, quel que soit $s \in \mathrm{S}$, G_s est localement de type fini sur $\kappa(s)$. Alors (EGA IV_4, 17.4.1), l'assertion (i) équivaut au fait que, quel que soit $s \in \mathrm{S}$, G_s est non ramifié sur $\kappa(s)$ au point e_s, unité de G_s, ou encore (1.3.1), au fait que G_s est non ramifié sur $\kappa(s)$, donc les assertions (i) et (iii) sont équivalentes. Enfin, si G est localement de présentation finie sur S, les assertions (iii) et (iv) sont équivalentes (EGA IV_4, 17.4.1).

Lemme 2.7.1. — *Soit* G *un* S*-schéma muni d'une section* ε*. Pour que* G *soit* non ramifié sur S aux points de cette section*, il faut et il suffit que* ε *soit une* immersion ouverte.

On sait déjà que la condition est nécessaire (EGA IV_4, 17.4.1 $a) \Rightarrow b'')$). Réciproquement, si ε est une immersion ouverte, alors la restriction à $\varepsilon(\mathrm{S})$ du morphisme structural $\mathrm{C} \to \mathrm{S}$ est un isomorphisme, donc G est non ramifié sur S aux points de $\varepsilon(\mathrm{S})$.

Corollaire 2.8. — *Soit* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de* S*-groupes. Supposons que* u *soit localement de présentation finie* (*resp. localement de type fini*) *et que pour tout* $s \in \mathrm{S}$, G_s *soit localement de type fini sur* $\kappa(s)$*. Les conditions suivantes sont équivalentes :* **336**

(i) u *est non ramifié* (*resp. localement quasi-fini*),

(ii) *quel que soit* $s \in \mathrm{S}$, $u_s : \mathrm{G}_s \to \mathrm{H}_s$ *est non ramifié,* (*resp. localement quasi-fini*),

(iii) $\operatorname{Ker} u$ *est non ramifié* (*resp. localement quasi-fini*) *sur* S,

(iv) *la section unité* $\mathrm{S} \to \operatorname{Ker} u$ *est une immersion ouverte* (*resp. les fibres de* $\operatorname{Ker} u$ *sont* discrètes).

Il est clair que les assertions (i) et (i)) sont équivalentes (EGA IV_4, 17.4.1 (resp. $\mathrm{Err}_{\mathrm{III}}$ 20). Le rappel 2.8.1 ci-dessous montre que (i) entraîne (iii). De plus, (iii) entraîne que, quel que soit $s \in \mathrm{S}$, si e_s désigne l'élément unité de H_s, $(\operatorname{Ker} u)_s = \operatorname{Ker} u_s = u_s^{-1}(e_s)$ est non ramifié (resp. localement quasi-fini) sur $k(s)$, donc (puisque $k(s) \xrightarrow{\sim} k(e_s)$) que u_s est non ramifié (resp. quasi-fini) au point unité de G_s, donc que u_s est non ramifié (resp. localement quasi-fini) (1.3). Donc (iii) entraîne (ii). Enfin, les assertions (iii) et (iv) sont équivalentes (2.7).

Rappel 2.8.1. — Rappelons (I) qu'étant donné un morphisme $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ de S-groupes, on appelle *noyau de* u, et on note $\operatorname{Ker} u$, le sous-foncteur en groupes de G défini en posant, quel que soit le morphisme $f : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$

$$\operatorname{Ker} u(\mathrm{T}) = \{a \in \mathrm{G}(\mathrm{T}) \mid u \circ a = \varepsilon_{\mathrm{H}} \circ f\}.$$

Il est clair (EGA I 4.4.1) que ce foncteur est représentable par le S-groupe $\mathrm{G} \times_{\mathrm{H}} \mathrm{S} = u^{-1}(\varepsilon_{\mathrm{H}}(\mathrm{S}))$, noté simplement $\operatorname{Ker} u$. En particulier, le morphisme structural $\operatorname{Ker} u \to \mathrm{S}$ se déduit de u par changement de base.

Lemme 2.9. — *Soit* $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ *un morphisme admettant une* S*-section* ε.

(i) *Si* π *est injectif, il est entier* (*)*.* **337**

(ii) *Si* π *est* localement de type fini*, et si, pour tout* $s \in \mathrm{S}$, π_s *est un* isomorphisme*, alors* π *est un* isomorphisme (**).

(*) C'est aussi un cas particulier de EGA IV_4, 18.12.11, car π est évidemment un homéomorphisme universel.

(**) C'est aussi une conséquence immédiate de EGA IV_4, 18.12.6.

Remarquons tout d'abord que, d'après le lemme 2.9.1 ci-dessous, π, étant un homéomorphisme, est un morphisme affine.

Si π est injectif, ε est surjectif. Puisque ε est une immersion surjective, $\varepsilon(\mathrm{S})$ est isomorphe au sous-schéma fermé de G défini par un Nilidéal $\mathcal{I}$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$. Puisque ε est une S-section du morphisme π, on a une décomposition en somme directe : $\mathscr{O}_{\mathrm{X}} = \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \oplus \mathcal{I}$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Modules. Puisque $\mathcal{I}$ est un Nilidéal de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$, $\mathcal{I}$ est évidemment entier sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, donc $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ est entier sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, et π est entier.

Supposons maintenant que π soit localement de type fini. Alors ε est localement de présentation finie (EGA IV 1.4.3 (v)), donc $\mathcal{I}$ est un idéal *de type fini* de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ (EGA IV_1, 1.4.1). Quel que soit $s \in \mathrm{S}$, on a $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_s} = \kappa(s) \oplus \mathcal{I} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \kappa(s)$. Par hypothèse, ε est un isomorphisme, donc $\mathcal{I} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \kappa(s) = 0$, pour tout $s \in \mathrm{S}$, donc a fortiori $\mathcal{I} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}}} \kappa(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{X}$, ce qui entraîne, d'après le lemme de Nakayama, que $\mathcal{I} = 0$, donc que π est un isomorphisme.

Lemme 2.9.1. — *Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de schémas qui soit un* homéomorphisme *; alors f est un morphisme* affine [(*)].

338 Il suffit de montrer que tout point $y \in \mathrm{Y}$ possède un voisinage ouvert W tel que la restriction de f au-dessus de W soit un morphisme affine. Soit donc $y \in \mathrm{Y}$, et soit V un voisinage ouvert affine de y dans Y. Soit $\mathrm{V}' = f^{-1}(\mathrm{V})$. Alors V' est un voisinage ouvert de $x = f^{-1}(y)$ dans X. Il existe un voisinage ouvert affine W' de x dans X contenu dans V'. Posons alors $\mathrm{W} = f(\mathrm{W}')$. Alors W est un voisinage ouvert de y dans Y contenu dans le schéma affine V, donc W est séparé. Puisque W' est un schéma affine, la restriction de f au-dessus de W est alors un morphisme affine (EGA II, 1.2.3).

Corollaire 2.10. — *Soit* G *un* S*-groupe* localement de type fini*. Supposons que, quel soit $s \in \mathrm{S}$, G_s soit le $\kappa(s)$-groupe unité, alors* G *est le* S*-groupe unité.*

Plus généralement :

Corollaire 2.11. — *Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un* S*-morphisme* localement de type fini*. Pour que f soit un* monomorphisme*, il faut et il suffit que pour tout $s \in \mathrm{S}$, f_s soit un* monomorphisme*.*

Il est clair que la condition est nécessaire ; montrons qu'elle est suffisante. Si, pour tout $s \in \mathrm{S}$, f_s est un monomorphisme, a fortiori pour tout $y \in \mathrm{Y}$, f_y est un monomorphisme ; nous pouvons donc supposer que $\mathrm{Y} = \mathrm{S}$.

D'après EGA I, 5.3.8, pour montrer que f est un monomorphisme, il suffit de montrer que $\Delta_f : \mathrm{X} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ est un isomorphisme, ou, ce qui revient au même, que la première projection $p : \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ est un isomorphisme. Mais, si f_s est un monomorphisme, il résulte de même de EGA I, 5.3.8, que la première projection $\mathrm{X}_s \times_{\kappa(s)} \mathrm{X}_s \to \mathrm{X}_s$ (qui s'identifie à p_s) est un isomorphisme. Or p possède la S-section
339 Δ_f, donc le lemme 2.9 affirme que si pour tout $s \in \mathrm{S}$, p_s est un isomorphisme, alors il en est de même de p, cqfd.

(*) cf. EGA IV_4, 18.12.7.1 pour un résultat un peu plus général, se prouvant par la même démonstration.

Corollaire 2.12. — *Soit* G *un* S*-schéma possèdant une* S*-section* ε. *Supposons que le morphisme structural* $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ *soit* fermé. *Soit* $s \in \mathrm{S}$ *tel que* π *soit* de présentation finie au point $\varepsilon(s)$, *et que* $\varepsilon_s : \mathrm{Spec}(\kappa(s)) \to \mathrm{G}_s$ *soit un* isomorphisme (*ou, ce qui revient au même, que* $\pi_s : \mathrm{G}_s \to \mathrm{Spec}\,\kappa(s)$ *soit un isomorphisme*). *Alors il existe un voisinage ouvert* U *de* s *dans* S *tel que* $\varepsilon \times_{\mathrm{S}} \mathrm{U} : \mathrm{U} \to \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{U}$ *soit un* isomorphisme.

Soit V l'ensemble des points de G où π est non ramifié ; on sait que V est ouvert (EGA 17.3.7) et contient $\varepsilon(s)$. Donc $\mathrm{U} = \varepsilon^{-1}(\mathrm{V})$ est un ouvert de S contenant s, et tel que pour tout $t \in \mathrm{U}$, π soit non ramifié en $\varepsilon(t)$. On vérifie aisément que si π est fermé, il en est de même de $\pi \times_{\mathrm{S}} \mathrm{U}$, donc nous pouvons supposer que U = S.

Alors $\mathrm{G} - \varepsilon(\mathrm{S})$ est une partie fermée X de G (2.7.1), ne rencontrant pas G_s donc, puisque π est fermé, $\pi(\mathrm{X})$ est une partie fermée F de S ne rencontrant pas s ; posons $\mathrm{U} = \mathrm{S} - \mathrm{F}$; alors U est un ouvert de S tel que $\varepsilon \times_{\mathrm{S}} \mathrm{U}$ soit un isomorphisme de U sur $\mathrm{G}|\mathrm{U}$.

3. Composante neutre d'un groupe localement de présentation finie

3.0. — Etant donnée une partie A (resp. B) d'un S-schéma X (resp. Y), par abus de notation, $\mathrm{A} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{B}$ désignera la partie de $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$ formée des points dont la première projection appartient à A et à la deuxième à B.

Etant donnée une partie A d'un S-groupe G, nous dirons que A est *stable pour la loi de groupe de* G si on a : $c(\mathrm{A}) \subset \mathrm{A}$ et $\mu(\mathrm{A} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{A}) \subset \mathrm{A}$.

Définition 3.1. — Soit T un S-foncteur en groupes vérifiant la condition suivante : 340

(+) quel que soit $s \in \mathrm{S}$, le foncteur $\mathrm{T}_s = \mathrm{T} \otimes_{\mathrm{S}} \kappa(s)$ est représentable.

Soit alors T^0_s la composante connexe de l'élément neutre du $\kappa(s)$-groupe T_s. On définit un sous-S-foncteur en groupes de T, appelé *composante neutre de* T, noté T^0, en posant quel que soit le morphisme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$:

$$\mathrm{T}^0(\mathrm{S}') = \{u \in \mathrm{T}(\mathrm{S}') \mid \forall\, s \in \mathrm{S}, \quad u_s(\mathrm{S}'_s) \subset \mathrm{T}^0_s\}.$$

On a ainsi défini le foncteur $\mathrm{T} \mapsto \mathrm{T}^0$ de $(\widehat{\mathbf{Sch}}_{/\mathrm{S}})$-gr. dans $(\widehat{\mathbf{Sch}}_{/\mathrm{S}})$-gr.

Remarque 3.2. — (i) Soit T un S-foncteur en groupes vérifiant la condition (+), alors Lie $(\mathrm{T}^0/\mathrm{S})$ = Lie (T/S), en vertu de l'exposé II.

(ii) Si T et T′ sont deux S-foncteurs en groupes vérifiant (+), alors :

a) si $\mathrm{T} \subset \mathrm{T}'$, alors $\mathrm{T}^0 \subset \mathrm{T}'^0$,

b) si $\mathrm{T} \subset \mathrm{T}'$ et $\mathrm{T}'^0 \subset \mathrm{T}$, alors $\mathrm{T}^0 = \mathrm{T}'^0$,

c) si pour tout $s \in \mathrm{S}$, T_s est *localement de type fini* sur $\kappa(s)$, alors T^0 satisfait la propriété (+), et on a $(\mathrm{T}^0)^0 = \mathrm{T}^0$.

Proposition 3.3. — *Soit* T *un* S*-foncteur en groupes vérifiant la condition* (+) *et soit* S′ *un* S*-schéma : alors* $(\mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}')^0 = \mathrm{T}^0 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$, *autrement dit le foncteur* $\mathrm{T} \mapsto \mathrm{T}^0$

commute aux changements de base, i.e. le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(\widehat{\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}}})\text{-gr.} \arrow[r, "\mathrm{T}\mapsto\mathrm{T}^0"] \arrow[d] & (\widehat{\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}}})\text{-gr.} \arrow[d] \\
(\widehat{\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}'}})\text{-gr.} \arrow[r] & (\widehat{\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}'}})\text{-gr.}
\end{tikzcd}$$

341 Il suffit en effet de vérifier que, pour tout $s' \in \mathrm{S}'$, dont on désigne par s l'image dans S, on a : $\mathrm{T}^0_s \otimes_{\kappa(s)} \kappa(s') = ((\mathrm{T} \times_\mathrm{S} \mathrm{S}') \otimes_{\mathrm{S}'} \kappa(s'))^0$, ce qui résulte de $\mathrm{VI_A}$ 1.1, car $(\mathrm{T} \times_\mathrm{S} \mathrm{S}') \otimes_{\mathrm{S}'} \kappa(s') = \mathrm{T}_s \otimes_{\kappa(s)} \kappa(s')$.

Cas particulier 3.4. — Soit G un S-schéma en groupes ; notons $\underline{\mathrm{G}^0}$ le sous-ensemble de G réunion des G^0_s lorsque s parcourt S. Alors $\underline{\mathrm{G}^0}$ est une partie de G stable pour la loi de groupe de G (cf. 3.0), et quel que soit le morphisme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ on a :

$$\mathrm{G}^0(\mathrm{S}') = \{u \in \mathrm{G}(\mathrm{S}') \mid u(\underline{\mathrm{S}'}) \subset \underline{\mathrm{G}^0}\}.$$

Lorsque $\underline{\mathrm{G}^0}$ est une partie ouverte de G, il est clair que G^0 est représentable par le sous-schéma de G induit sur l'ouvert $\underline{\mathrm{G}^0}$.

Proposition 3.5. — *Soient* S *un schéma* quasi-compact et quasi-séparé*, et* G *un* S-*groupe à* fibres localement de type fini*. Il existe alors un* ouvert quasi-compact U *de* G *contenant* $\underline{\mathrm{G}^0}$.

La section unité ε étant une immersion, $\varepsilon(\mathrm{S})$ est un sous-espace quasi-compact de G, donc il existe un ouvert quasi-compact V de G qui contient $\varepsilon(\mathrm{S})$. Puisque S est quasi-séparé, et que V est quasi-compact, V est quasi-compact sur S (EGA IV_1, 1.2.4), donc $\mathrm{V} \times_\mathrm{S} \mathrm{V}$ est quasi-compact sur S, donc quasi-compact. Alors $\mathrm{V} \cdot \mathrm{V} = (\mathrm{V} \times_\mathrm{S} \mathrm{V})$ est quasi-compact. Posons $\mathrm{V}_s = \mathrm{V} \cap \mathrm{G}_s$, $\mathrm{V}^0_s = \mathrm{V} \cap \mathrm{G}^0_s$. Alors V^0_s est un ouvert de G^0_s, dense dans G^0_s puisque G^0_s est irréductible ($\mathrm{VI_A}$ 4), donc $\mathrm{V}^0_s \cdot \mathrm{V}^0_s = \mathrm{G}^0_s$ ($\mathrm{VI_A}$ 0.5), ce qui montre que $\mathrm{V}_{s.s} \supset \mathrm{G}^0_s$, donc que $\mathrm{V} \cdot \mathrm{V} \supset \underline{\mathrm{G}^0}$. Enfin, puisque $\mathrm{V} \cdot \mathrm{V}$ est quasi-compact, il existe un ouvert quasi-compact U de G contenant $\mathrm{V} \cdot \mathrm{V}$ et a fortiori $\underline{\mathrm{G}^0}$.

Corollaire 3.6. — *Soit* G *un* S-*groupe à* fibres localement de type fini et connexes*. Alors* G *est* quasi-compact sur S*.*

342 Notre assertion étant locale sur S (EGA I, 6.6.1), on est ramené au cas où S est affine ; d'après 3.5, il existe alors un ouvert quasi-compact U de G contenant $\underline{\mathrm{G}^0} = \mathrm{G}$, donc G est quasi-compact, donc quasi-compact sur le schéma affine S (EGA I, 6.6.1 (v)).

Proposition 3.7. — *Soit* G *un* S-*groupe localement de présentation finie ; alors* $\underline{\mathrm{G}^0}$ *est ind-constructible dans* G*. Si on suppose que* G *est quasi-séparé sur* S*, et que* S *est quasi-compact et quasi-séparé, alors* $\underline{\mathrm{G}^0}$ *est constructible. Par conséquent si* G *est quasi-séparé sur* S*,* $\underline{\mathrm{G}^0}$ *est localement constructible.*

Montrons d'abord la première assertion. Puisque π est localement de présentation finie, étant donné $s \in \mathrm{S}$, il existe un ouvert U de G contenant $\varepsilon(s)$ et un ouvert V de S contenant s tels que $\pi(\mathrm{U}) \subset \mathrm{V}$ et que le morphisme $\pi' : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ déduit de π soit de présentation finie. Posons alors $\mathrm{T} = \varepsilon^{-1}(\mathrm{U})$ et $\mathrm{W} = \pi'^{-1}(\mathrm{T})$. Alors le morphisme $\pi'' : \mathrm{W} \to \mathrm{T}$ déduit de π' est de présentation finie, et admet comme section le morphisme $\varepsilon'' : \mathrm{T} \to \mathrm{W}$ déduit de ε. Pour tout $t \in \mathrm{T}$, G^0_t étant irréductible ($\mathrm{VI_A}$ 4), $\mathrm{W} \cap \mathrm{G}^0_t$ est dense dans G^0_t, donc irréductible, donc connexe : c'est la composante connexe de $\pi''^{-1}(t)$ contenant $\varepsilon''(t)$. La réunion W^0 des $\mathrm{W} \cap \mathrm{G}^0_t$, pour $t \in \mathrm{T}$, est localement constructible dans W, d'après (EGA IV 9.7.12). Mais il résulte de ($\mathrm{VI_A}$ 0.5) que $\mathrm{W}^0 \cdot \mathrm{W}^0$ est égal à $\underline{\mathrm{G}^0} \cap \pi^{-1}(\mathrm{T})$. Or, puisque π est localement de présentation finie, il en est de même de μ ($\mathrm{VI_A}$ 1), donc du morphisme $\mu'' : \mathrm{W} \times_{\mathrm{T}} \mathrm{W} \to \pi^{-1}(\mathrm{T})$ déduit de μ. Par conséquent $\underline{\mathrm{G}^0} \cap \pi^{-1}(\mathrm{T}) = \mu''(\mathrm{W}^0 \times_{\mathrm{T}} \mathrm{W}^0)$ est ind-constructible dans $\pi^{-1}(\mathrm{T})$ (EGA IV 1.9.5 (viii)), car puisque W^0 est localement constructible dans W, il est clair sur $\mathrm{W}^0 \times_{\mathrm{T}} \mathrm{W}^0$ est localement constructible dans $\mathrm{W} \times_{\mathrm{T}} \mathrm{W}$. Ce qui montre que $\underline{\mathrm{G}^0}$ est ind-constructible dans G.

Supposons maintenant S quasi-compact et quasi-séparé et G quasi-séparé sur S ; **343**
alors (3.5), il existe un ouvert quasi-compact U de G contenant $\underline{\mathrm{G}^0}$. Puisque G est quasi-séparé sur S, G est quasi-séparé, donc l'ouvert U est rétrocompact (EGA IV_1, 1.2.7), et il suffit de montrer que $\underline{\mathrm{G}^0}$ est constructible dans U (EGA 0_{III}, 9.1.8). De plus, U étant quasi-compact, donc quasi-compact sur S (EGA IV_1, 1.2.4), et quasi-séparé sur S, la restriction de à U est de présentation finie, et d'après (EGA IV_3, 9.7.12), $\underline{\mathrm{G}^0}$ est localement constructible dans U, donc constructible dans U, puisque U est quasi-compact et quasi-séparé (EGA IV_1, 1.8.1).

Corollaire 3.8. — *Soient* S_0 *un schéma* quasi-compact et quasi-séparé*,* I *un ensemble préordonné filtrant croissante,* $(\mathscr{A}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ *un système inductif de* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}$*-Algèbres commutatives et* quasi-cohérentes*,* $\mathscr{A} = \varinjlim \mathscr{A}_i$*,* $\mathrm{S}_i = \operatorname{Spec} \mathscr{A}_i$ *pour* $i \in \mathrm{I}$*, et* $\mathrm{S} = \operatorname{Spec} \mathscr{A}$ (cf. EGA II, 1.3.1). *Soit* G *un* S_0*-schéma en groupes* localement de présentation finie*. Alors d'application canonique* $\varinjlim \mathrm{G}^0(\mathrm{S}_i) \to \mathrm{G}^0(\mathrm{S})$ *est* bijective*.*

Puisque G est localement de présentation finie sur S, l'application canonique $\varinjlim \mathrm{G}(\mathrm{S}_i) \to \mathrm{G}(\mathrm{S})$ est bijective, d'après EGA IV_2, 8.14.2 c). Il s'ensuit immédiatement que l'application canonique $\varinjlim \mathrm{G}^0(\mathrm{S}_i) \to \mathrm{G}^0(\mathrm{S})$ est injective. Montrons qu'elle est surjective. Soit $s \in \mathrm{G}^0(\mathrm{S}) \subset \mathrm{G}(\mathrm{S})$. Il existe $i \subset \mathrm{I}$ tel que s se factorise au moyen de $s_i \in \mathrm{G}(\mathrm{S}_i)$ à travers $\mathrm{S} \to \mathrm{S}_i$; par hypothèse, $s^{-1}(\underline{\mathrm{G}^0}) = \mathrm{S}$. Mais, d'après 3.7, G^0 est ind-constructible dans S, donc $s_i^{-1}(\underline{\mathrm{G}^0})$ l'est dans S_i. Il résulte alors de EGA IV_2, 8.3.4, qu'il existe un indice $j \geqslant i$ tel que $s_j^{-1}(\underline{\mathrm{G}^0}) = \mathrm{S}_j$, où s_j est l'application déduite de s_i par le changement de base $\mathrm{S}_j \to \mathrm{S}_i$. Cela montre que $s_j \in \mathrm{G}^0(\mathrm{S}_j)$, donc que s provient d'un élément de $\varinjlim \mathrm{G}^0(\mathrm{S}_i)$. **344**

Proposition 3.9. — *Soit* G *un* S*-groupe* localement de présentation finie*. Supposons que* G^0 *soit* représentable*; alors le morphisme canonique* $i : \mathrm{G}^0 \to \mathrm{G}$ *est une* immersion ouverte*; de plus,* G^0 *est* quasi-compact *sur* S.

Puisque G^0 est un sous-foncteur du foncteur G, le morphisme i est un monomorphisme, donc est radiciel. D'après le définition du foncteur G^0, on vérifie immédiatement sur la définition (EGA IV_4, 17.1.1) que i est un morphisme formellement étale (en remarquant que $\underline{G^0}$ est l'image de i dans G). Enfin, il résulte de la caractérisation (EGA IV_3, 8.14.2 c)) des S-schémas localement de présentation finie à l'aide du foncteur qu'ils représentent, et de 3.8, que, puisque G est localement de présentation finie sur S, il en est de même de G^0. Donc i est localement de présentation finie ; c'est donc un morphisme radiciel et étale ; donc une immersion ouverte (EGA IV_4, 17.9.1).

La dernière assertion résulte de 3.6.

Théorème 3.10. — *Soit* G *un* S*-groupe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est* lisse *sur* S aux points de la section unité.

(ii) G *est* plat et localement de présentation finie *sur* S aux points de la section unité*, et pour tout* $s \in S$*,* G_s *est* lisse *sur* $\kappa(s)$.

(iii) *Il existe un sous-schéma en groupes ouvert* G' *de* G*,* lisse *sur* S.

(iv) G^0 *est* représentable *par un sous-schéma ouvert de* G*,* lisse *sur* S.

Il est clair que (iv) entraîne (iii), que (iii) entraîne (i), que (i) entraîne (iii) (2.4) et que (i) équivaut à (ii) (1.3.1 et EGA IV 17.5.1).

Montrons enfin que (iii) entraîne (iv). Le lemme 3.10.1 ci-dessous montre que G'
345 contient $\underline{G^0}$, et que $\underline{G'^0} = \underline{G^0}$. Comme il suffit de montrer que $\underline{G^0}$ est ouvert dans G (3.4), on peut supposer que $G' = G$. Alors π est localement de présentation finie, donc, étant donné $s \in S$, on peut construire, comme dans la démonstration de 3.7, un ouvert T de S contenant s, et l'ouvert W tels que le morphisme $\pi'' : W \to T$ déduit de π' soit de présentation finie et admette comme section le morphisme $\varepsilon'' : T \to W$ déduit de ε. Pour tout $t \in T$, $W \cap G^0_t$ est alors la composante connexe de $\pi''^{-1}(t)$ contenant $\varepsilon''(t)$. Puisque π est lisse, il en est de même de π'' qui est donc réduit et de présentation finie : alors (EGA IV 15.6.5), la réunion W^0 des $W \cap G^0_t$ pour $t \in T$ est ouverte dans W. Mais il résulte de (VI_A 0.5) que $W^0 \cdot W^0$ est égal à $\underline{G^0} \cap \pi^{-1}(T)$. Pour montrer que $\underline{G^0}$ est ouvert, il suffit de montrer que tout $s \in S$ possède un voisinage T dans S tel que $\underline{G^0} \cap \pi^{-1}(T)$ soit ouvert dans $\pi^{-1}(T)$. Nous pouvons donc supposer désormais que $T = S$; il reste à montrer que $W^0 \cdot W^0$ est ouvert dans G. Puisque π est universellement ouvert, il en est de même de μ (VI_A 1). Donc puisque W^0 est ouvert dans G, il en est de même de $W^0 \cdot W^0 = \mu(W^0 \times_S W^0)$.

Ce résultat sera amélioré en 4.4.

Lemme 3.10.1. — *Soit* G *un* S*-groupe à* fibres localement de type fini*. Alors tout sous-schéma en groupes ouvert* G' *de* G *contient* $\underline{G^0}$*, et vérifie :* $\underline{G^0} = \underline{G'^0}$.

Soit $s \in S$; posons $G''_s = G'_s \cap G^0_s$; alors G''_s est un ouvert de G^0_s, qui est dense dans G^0_s puisque G^0_s est irréductible (VI_A 4), donc $G''_s \cdot G''_s = G^0_s$ (VI_A 0.5), ce qui montre que $G^0_s = G''_s \cdot G''_s \subset G'_s \cdot G'_s = G'_s$, donc que $\underline{G^0} \subset G'$. Donc G^0 est un sous-foncteur du foncteur G', et il résulte de 3.2 (ii) c) que $G'^0 = G^0$, donc $\underline{G'^0} = G^0$.

346 ***Proposition 3.11.*** — *Soient* G *et* H *deux* S*-groupes localement de présentation finie, et* $u : G \to H$ *un morphisme de* S*-groupes ; alors, si* u *est plat, l'application* $u^0 : \underline{G^0} \to \underline{H^0}$

déduite de u *est surjective ; la réciproque est vraie si* G *est plat sur* S *et si* H *est à fibres réduites.*

Supposons donc u plat ; alors pour tout $s \in \mathrm{S}$, u_s est plat et localement de présentation finie, donc ouvert (EGA 2.4.6), donc le morphisme $u_s^0 : \mathrm{G}_s^0 \to \mathrm{H}_s^0$ est dominant. Puisque G_s^0 est de type fini sur $\kappa(s)$ ($\mathrm{VI_A}$ 4) et que H_s est séparé sur $\kappa(s)$ ($\mathrm{VI_A}$ 2), u_s^0 est quasi-compact (EGA I, 6.6.4) donc surjectif (1.2). Donc u^0 est surjectif.

Réciproquement, supposons u^0 surjectif, G plat sur S et H à fibres réduites. Alors, pour tout $s \in \mathrm{S}$, u_s^0 est surjectif, et H_s est réduit ; donc H_s^0 est localement noethérien et intègre, et u_s^0 est de type fini, donc plat au point générique de G_s (EGA IV 6.9.1), donc u_s est plat (1.3), si bien que u est plat (EGA IV 11.3.11).

4. Dimension des fibres des groupes localement de présentation finie

Proposition 4.1. **—** *Soit* G *un* S-*schéma* localement de type fini*, muni d'une* S-section ε*, et tel que pour tout* $s \in \mathrm{S}$*, on ait* $\dim \mathrm{G}_s = \dim_{\varepsilon(s)} \mathrm{G}_s$ *(ce qui est le cas si* G *est un* S-*groupe* (1.5)*). Alors la fonction* $s \mapsto \dim \mathrm{G}_s$ *est semi-continue supérieurement dans* S*. Si de plus,* G *est localement de présentation finie sur* S*, cette fonction est localement constructible.*

Soit $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ le morphisme structural. Le théorème de Chevalley (EGA IV_3, 13.1.3) affirme que la fonction $x \mapsto \dim_x \pi^{-1}(\pi(x))$ est semi-continue supérieurement **347**
dans G. Or, pour tout $s \in \mathrm{S}$, $\dim \mathrm{G}_s = \dim \pi^{-1}(s) = \dim_{\varepsilon(s)} \pi^{-1}(\pi(\varepsilon(s)))$;et puisque la fonction $s \mapsto \varepsilon(s)$ est continue dans S, la fonction composée $s \mapsto \dim \mathrm{G}_s$ est semi-continue supérieurement dans S.

Supposons G localement de présentation finie sur S. Pour montrer que la fonction $s \mapsto \dim \mathrm{G}_s$ est localement constructible, on voit en raisonnant comme précédemment qu'il suffit de montrer que la fonction $x \mapsto \dim_x \pi^{-1}(\pi(x))$ est localement constructible dans G, ce qui résulte de EGA IV_3, 9.9.1.

Proposition 4.2. **—** *Soit* G *un* S-*schéma* localement de présentation finie*, muni d'une* S-section ε *et vérifiant les deux conditions suivantes :*

a) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$ *et tout* $x \in \mathrm{G}_s$*, on a* $\dim \mathrm{G}_s = \dim_x \mathrm{G}_s$ *(ou, ce qui revient au même, pour tout* $s \in \mathrm{S}$*, toutes les composantes irréductibles de* G_s *ont même dimension).*

b) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$*, si on note* G_s^0 *la composante connexe de* G_s *contenant* $\varepsilon(s)$*,* G_s^0 *est* géométriquement irréductible.

(*Rappelons qu'un* S-*groupe* G *vérifie les conditions* a) *et* b) (1.5 *et* $\mathrm{VI_A}$ 4.1)). *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est* universellement ouvert *sur* S aux points de G_s^0.

(i bis) G *est* universellement ouvert *sur* S *en les points de* $\varepsilon(s)$.

(ii) *La fonction* $t \mapsto \dim \mathrm{G}_t$ *est* constante dans un voisinage de s *dans* S.

Evidemment (i) $\Rightarrow$ (i bis). Montrons que (i) bis entraîne (ii). Soit T l'ensemble des $t \in \mathrm{S}$ tels que $\dim \mathrm{G}_t = \dim \mathrm{G}_s$. D'après 4.1, T est localement constructible, donc
348 (EGA IV 1.10.1) pour montrer que T est un voisinage de s, il suffit de montrer que toute générisation s' de s appartient à T. Or (EGA IV 14.3.13 b')) si x désigne le point générique de G_s^0, on a, pour toute générisation s' de s : $\dim \mathrm{G}_{s'} \geqslant \dim_x \mathrm{G}_s = \dim \mathrm{G}_s$; or, d'après (4.1), la fonction $s \mapsto \dim \mathrm{G}_s$ étant semi-continue supérieurement, on a $\dim \mathrm{G}_{s'} \leqslant \dim \mathrm{G}_s$; donc $s' \in \mathrm{T}$, cqfd

Montrons que (ii) entraîne (i). Puisque π est localement de présentation finie, il existe un ouvert U de G contenant $\varepsilon(s)$ et un ouvert V de S contenant s tels que $\pi(\mathrm{U}) \subset \mathrm{V}$ et que le morphisme $\pi' : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ déduit de π soit de présentation finie. Posons alors $\mathrm{T} = \varepsilon^{-1}(\mathrm{U})$ et $\mathrm{W} = \pi'^{-1}(\mathrm{T}) = \mathrm{U} \cap \pi^{-1}(\mathrm{T})$. Alors le morphisme π'' : $\mathrm{W} \to \mathrm{T}$ déduit de π' est de présentation finie et admet comme section le morphisme $\varepsilon'' : \mathrm{T} \to \mathrm{W}$ déduit de ε. De plus, pour tout $t \subset \mathrm{T}$, G_t^0 étant irréductible, $\mathrm{W} \cap \mathrm{G}_t^0$ est dense dans G_t^0, donc irréductible, donc connexe : c'est donc la composante connexe de $\pi''^{-1}(t)$ contenant $\varepsilon''(t)$. D'après (EGA IV_3, 10.7.1 et 10.6.2), $\mathrm{W} \cap \mathrm{G}_t^0$ étant un ouvert dense de G_t^0, on a $\dim(\mathrm{W} \cap \mathrm{G}_t^0) = \dim \mathrm{G}_t^0 = \dim \mathrm{G}_t$, donc la fonction $t \mapsto \dim \mathrm{W} \cap \mathrm{G}_t^0$ est constante dans un voisinage de s dans T. Montrons enfin que, quel que soit $t \in \mathrm{T}$, $\mathrm{W} \cap \mathrm{G}_t^0$ est géométriquement irréductible : soit K une extension de $\kappa(t)$, alors $(\mathrm{W} \cap \mathrm{G}_t^0) \otimes_{\kappa(t)} \mathrm{K} = (\mathrm{W} \otimes_{\kappa(t)} \mathrm{K}) \cap (\mathrm{G}_t^0 \otimes_{\kappa(t)} \mathrm{K})$ est un ouvert non vide de $\mathrm{G}_t^0 \otimes_{\kappa(t)} \mathrm{K}$, qui est irréductible, donc est irréductible.

Nous sommes alors dans les conditions d'application de EGA IV_3, 15.6.6 (ii), qui affirme que π'' (donc π) est universellement ouvert aux points de $\mathrm{W} \cap \mathrm{G}_s^0$. Mais, d'après EGA IV_3, 14.3.3.1 (ii), le sous-ensemble de G_s formé des points où π est universellement ouvert est formé dans G_s ; puisqu'il contient $\mathrm{W} \cap \mathrm{G}_s^0$, il contient donc son adhérence G_s^0, cqfd.

349 ***Corollaire 4.3.*** — *Soit* G *un* S-*groupe* plat et localement de présentation finie. *Alors la fonction* $s \mapsto \dim \mathrm{G}_s$ *est* localement constante *sur* S.

Cela résulte immédiatement de 4.2, car tout morphisme plat et localement de présentation finie est universellement ouvert (EGA IV_2, 2.4.6).

Corollaire 4.4. — *Soit* G *un* S-*groupe* localement de présentation finie *sur* S aux points de la section unité. *Considérons les conditions :*

(i) G *est* lisse *sur* S aux points de la section unité (cf. 3.10).

(ii) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$, G_s *est* lisse *sur* $\kappa(s)$, *et la fonction* $s \mapsto \dim \mathrm{G}_s$ *est* localement constante *sur* S.

(iii) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$, G_s *est* lisse *sur* $\kappa(s)$, *et il existe un* voisinage V de la section unité *tel que la restriction à* V *du morphisme structural* $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ *soit universellement ouverte.*

(iv) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$, G_s^0 *est* lisse *sur* $\kappa(s)$, *et* G^0 *est* représentable *par un sous-schéma en groupes ouvert de* G, universellement ouvert *sur* S.

Alors on a les implications suivantes : (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv).

Si on suppose de plus S réduit, *alors les conditions* (i) *à* (iv) *sont équivalentes, et impliquent que* G^0 *est* lisse *sur* S.

Montrons que (i) entraîne (ii). D'après (EGA IV 17.10.2) la fonction $x \mapsto \dim_x \pi^{-1}(\pi(x)) = \dim \pi^{-1}(\pi(x))$ (1.5) est continue au voisinage de la section unité ; donc la fonction $s \mapsto \dim \mathrm{G}_s$ est continue dans S, donc localement constante dans S. D'autre part, pour tout $s \in \mathrm{S}$, G_s est lisse sur $\kappa(s)$ (1.3.1).

Montrons que (ii) entraîne (iv). La question est locale sur S, car il suffit de montrer que $\underline{\mathrm{G}^0}$ est ouvert dans G (3.4), les propriétés de G^0 citées dans l'énoncé résultant 350
alors de (2.4, 4.2). Etant donné $s \in \mathrm{S}$, construisons comme dans la démonstration de (3.10), W, T, π'', ε'' et W^0. Il résulte alors de EGA IV_3, 15.6.7, que W^0 est ouvert dans W. Il résulte de (4.2) que π est universellement ouvert en tout point de W^0, donc ($\mathrm{VI_A}$ 1) μ est universellement ouvert en tout point de $\mathrm{W}^0 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{W}^0$, ce qui montre que $\mathrm{W}^0 \cdot \mathrm{W}^0$ est ouvert, et on termine comme dans la démonstration du théorème 3.10.

Il est clair que (iv) entraîne (iii).

Le fait que (iii) entraîne (ii) résulte de (4.2) appliqué à V.

Montrons enfin que si S est réduit, (iv) entraîne (i) : on peut supposer évidemment $\mathrm{G} = \mathrm{G}^0$, donc G est de présentation finie sur S en vertu de (5.4) ci-dessous, et la conclusion résulte alors de (EGA IV_3, 15.6.7) (impliquant que G est *plat* sur S) et de (3.10).

5. Séparation des groupes et espaces homogènes

Proposition 5.1. — *Pour qu'un* S*-groupe* G *soit* séparé*, il faut et il suffit que la section unité de* G *soit une* immersion fermée*.*

La condition est nécessaire (EGA I, 5.4.6) ; elle est suffisante en vertu du diagramme cartésien suivant (cf. $\mathrm{VI_A}$ 3) :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \arrow[r, "\mu \circ (\mathrm{id_G} \times c)"] & \mathrm{G} \\ \mathrm{G} \arrow[u, "\Delta_{\mathrm{G/S}}"] \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{S} \arrow[u, "\varepsilon"'] \end{tikzcd} .$$

Proposition 5.2. — *Si* S *est discret, tout* S*-groupe est séparé.*

En effet, S est alors égal à $\coprod_{s \in \mathrm{S}} \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$, et il suffit de montrer que pour tout $s \in \mathrm{S}$, $\mathrm{G} | \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$ est séparé (EGA I 5.5.5), ce qui résulte de $\mathrm{VI_A}$ 2, puisque $\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$ est 351
un anneau local artinien.

Théorème 5.3. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-schéma en groupes localement de présentation finie sur* S *et universellement ouvert le long de la section unité,* H *un* S*-schéma sur lequel* G *opère de façon que le morphisme :*

$$\mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{H} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{H}$$
$$(g, h) \mapsto (gh, h)$$

soit surjectif (*intuitivement* H *est un espace homogène sous* G)*. On suppose de plus que pour tout* $s \in \mathrm{S}$*, il existe un sous-schéma ouvert* U *de* H, séparé *sur* S*, tel que* U_s *soit dense dans* H_s*. Alors* H *est séparé sur* S.

Corollaire 5.4. — *Soient* S, G, H *comme ci-dessus et, supposons de plus* H *à fibres connexes, alors* X *est séparé sur* S *et quasi-compact sur* S.

En effet, comme H_s est connexe, H_s est aussi irréductible (s'il n'est pas vide) de sorte que si U est un ouvert affine de H tel que U_s soit non vide, U_s est dense dans H_s, et le théorème s'applique.

Corollaire 5.5. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-schéma en groupes, localement de présentation finie, à fibres connexes, et universellement ouvert sur* S*. Alors* G *est séparé et de présentation finie sur* S.

En effet, on vient de voir que G est séparé sur S, donc quasi-séparé. D'autre part G est quasi-compact sur S d'après 3.6.

5.6. — *Démonstration de* 5.3. Avant d'établir 5.3, prouvons quelques lemmes. Le lemme suivant remplace avantageusement EGA IV_3, 19.5.10 en ce qu'il est indépendant d'hypothèses noethériennes.

352 ***Lemme 5.6.1.*** — *Soient* S *un schéma,* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *un* S*-schéma localement de présentation finie,* s *un point de* S*,* x *un point fermé de* X_s*,* z *le point générique d'une composante irréductible* Z *de* X_s*, contenant* x *telle que* $\dim_x(\mathrm{X}_s) = \dim \mathrm{Z}$ *et supposons que* f *soit universellement ouvert en* z (*donc aussi en* x)*. Alors il existe un morphisme* $g : \mathrm{S}'' \to \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *avec* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *étale de présentation finie couvrant* s*,* $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}'$*, fini, de présentation finie, surjectif, tel que* $g^{-1}(s)$ *soit réduit à un point* s''*, et un* S*-morphisme* $h : \mathrm{S}'' \to \mathrm{X}$ *tel que* $h(s'') = \mathrm{X}$.

Il est clair que l'on peut supposer X affine de présentation finie sur S, puis par passage à la limite remplacer S par Spec $\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$, puis supposer S strictement hensélien, de point fermé s. Soit alors $n = \dim_x \mathrm{X}_s$. Le choix d'un système de paramètres de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_s,x}$ et le « Main Theorem », montrent alors, que quitte à restreindre X, il existe un S-morphisme quasi-fini et de présentation finie $u : \mathrm{X} \to \mathrm{S}[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n] = \mathrm{Y}$. De plus $u(x)$ est un point fermé de Y_s et on peut supposer que $u^{-1}(u(x))$ a un espace sous-jacent réduit à un point. Soit V le sous-schéma de X image réciproque par u d'une section de Y au-dessus de S passant par $u(x)$. Donc V est quasi-fini sur S et contient x comme unique point au-dessus de s. Comme S est hensélien, $\mathrm{V} = \mathrm{V}' \coprod \mathrm{V}''$, avec V' fini sur S et V'' au-dessus de $\mathrm{S} - s$, de sorte que V' est spectre d'un anneau local. Montrons que $\mathrm{V}' \to \mathrm{S}$ est surjectif. Pour cela, on peut remplacer S par le sous-schéma fermé réduit sous-jacent à une composante irréductible de S, puis supposer S normal, donc géométriquement unibranche. Comme f est universellement ouvert en z, il existe une composante irréductible $\mathfrak{z}$ de X contenant z et équidimensionnelle *sur* S (de dimension relative n) au point z. Comme u est quasi-fini et Y de dimension relative n, nécessairement $\mathfrak{z}$ domine Y. Toujours parce que u est quasi-fini, $\mathfrak{z}$ va être aussi
353 équidimensionnelle *sur* Y au point x. Comme $\mathscr{O}_{\mathrm{Y},u(x)}$ est géométriquement unibranche (EGA IV_3, 14.4.1.1.), le théorème de Chevalley nous dit que u est universellement

ouvert en x, donc V et aussi V′ sont universellement ouverts sur S en x, a fortiori, V′ domine S.

Corollaire 5.6.2. — *Soient* S, G, H, s, *comme dans le théorème,* U *un sous-schéma ouvert de* H *tel que* U_s *soit dense dans* H_s*, et soit* T *une partie de* H_s*. Alors il existe un morphisme* $g : \mathrm{S}'' \to \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *comme dans le lemme* 1 *et un élément* $b \in \mathrm{G}(\mathrm{S}'')$ *tel que* $g^{-1}(\mathrm{T})$ *soit contenu dans* $b \cdot \mathrm{U}$.

Quitte à restreindre S, on peut supposer qu'il existe un voisinage ouvert V de la section unité de G qui est de présentation finie et universellement ouvert sur S. On va construire b dans $\mathrm{V}(\mathrm{S}'')$. On voit alors que l'on peut encore remplacer S par le spectre d'un hensélisé strict de $\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$. On peut supposer les $a_i \in \mathrm{T}$ *fermés* dans H_s. Si certains des points a_i ont des corps résiduels qui sont des extensions (nécessairement radicielles finies) non triviales de $\kappa(s)$, quitte à faire une suite finie d'extensions plates, finies, de présentation finie, du type $\mathscr{O}_{\mathrm{S},s} \to \mathscr{O}_{\mathrm{S},s}[\mathrm{T}]/(\mathrm{T}^p - x)$ $(x \in \mathscr{O}_{\mathrm{S},s})$, on voit que l'on peut supposer les a_i rationnels. L'hypothèse faite sur H entraîne qu'il existe, pour $i = 0, 1, \ldots, n$, des points fermés b'_i de $\mathrm{G}_s \times \mathrm{X}_s$ qui s'en vont, par le morphisme canonique, sur les points (a_i, a_0) de $\mathrm{X}_s \times \mathrm{X}_s$. Procédant comme plus haut, on peut supposer les b'_i rationnels, donc de la forme (b_i, h_0), où $b_i \in \mathrm{G}_s(\kappa(s))$ est tel que $a_i = b_i \cdot a_0$. Soit alors W_s l'ouvert de G_s image réciproque de U_s par le morphisme : $b \mapsto b \cdot a_0$. L'hypothèse faite sur U_s entraîne que W_s est dense dans G_s. Si b_s est un point rationnel de G_s, on a alors les équivalences suivantes :

$$a_i \in b_s \cdot \mathrm{U}_s \iff b_s^{-1} b_i \cdot a_0 \in \mathrm{U}_s \iff b_s^{-1} b_i \in \mathrm{W}_s \iff b_s \in b_i \mathrm{W}_s^{-1}.$$

Comme W_s est dense dans G_s, il en est de même des $b_i \mathrm{W}_s^{-1}$ et de leur intersection. On **354**
peut donc trouver un point fermé x de $\mathrm{V}_s \cap [\cap_i b_i \mathrm{W}_s^{-1}]$. Quitte à faire une extension finie surjective, de présentation finie, on peut supposer, d'après le lemme 1, qu'il existe une section b de G passant par x. Il est clair que la section b répond à la question.

Lemme 5.6.3. — *Soit* X *un* S*-schéma. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) X *est séparé sur* S.

(ii) *Pour tout* S*-schéma* T*, toute section* $h : \mathrm{T} \to \mathrm{X}_\mathrm{T}$ *est une immersion fermée.*

(iii) *Pour tout* S *schéma réduit* T*, deux morphismes* f_1 *et* f_2 *:* $\mathrm{T} \to \mathrm{X}$ *qui coïncident sur un ouvert dense* U *de* T *coïncident.*

(iv) *Pour tout* S*-schéma* T*, tout point* $t \in \mathrm{T}$ *et tout couple de points rationnels* x_1*,* x_2 *de* $\mathrm{X}_t = \mathrm{X} \times_\mathrm{S} \operatorname{Spec} \kappa(t)$*, il existe un morphisme* $g : \mathrm{T}'' \to \mathrm{T}' \to \mathrm{T}$ *avec* $\mathrm{T}' \to \mathrm{T}$ *ouvert,* $\mathrm{T}'' \to \mathrm{T}'$ *fermé dominant, tel que* $g^{-1}(t) \neq \varnothing$*, et enfin un sous-schéma ouvert* V *de* $\mathrm{X}_{\mathrm{T}''}$, séparé sur T''*, qui contienne* $g^{-1}(x_1)$ *et* $g^{-1}(x_2)$*.*

(i) $\Rightarrow$ (iv) : on prend $\mathrm{T}'' = \mathrm{T}$ et $\mathrm{V} = \mathrm{X}_\mathrm{T}$.

(iv) $\Rightarrow$ (iii) : on peut supposer $\mathrm{T} = \mathrm{S}$. Comme T est réduit, pour voir que $f_1 = f_2$, il suffit alors de voir que $f_1 = f_2$ ensemblistement. Soit donc $t \in \mathrm{T}$ et montrons que $f_1(t) = f_2(t)$. Soit $g : \mathrm{T}'' \to \mathrm{T}' \to \mathrm{T}$ comme dans (iv). Comme U est dense dans T et que $\mathrm{T}' \to \mathrm{T}$ est ouvert, l'image réciproque U′ de U dans T′ est dense dans T′. Soit U′ l'image réciproque de U′ dans T″ et $\overline{\mathrm{U}''}$ son adhérence dans T″. Comme $\mathrm{T}'' \to \mathrm{T}'$ est fermé dominant, $\overline{\mathrm{U}''} \to \mathrm{T}'$ est surjectif, donc $\overline{\mathrm{U}''} \wedge g^{-1}(t)$ n'est pas vide. Il est clair

355 alors que l'on peut remplacer U et T par les sous-schémas réduits de T″ ayant U″ et $\overline{\mathrm{U}''}$ pour espaces sous-jacents et remplacer f_1 et f_2 par leurs images réciproques par le changement de base $\overline{\mathrm{U}''} \to \mathrm{T}$. Bref, nous pouvons supposer qu'il existe un ouvert V de $\mathrm{X_T}$, séparé sur T qui contient $f_1(t)$ et $f_2(t)$. Soit $\mathrm{W} = f_1^{-1}(\mathrm{V}) \wedge f_2^{-1}(\mathrm{V})$, c'est un ouvert de T, contenant t, et $\mathrm{U} \cap \mathrm{W}$ est dense dans W. On peut donc remplacer T par W. Mais alors il est clair que $f_1 = f_2$, donc $f_1(t) = f_2(t)$.

(iii) ⇒ (ii). On peut supposer T réduit. Soit E le sous-schéma $h(\mathrm{T})$ de $\mathrm{X_T}$ et soit $\overline{\mathrm{E}}$ le sous-schéma fermé réduit de $\mathrm{X_T}$ ayant l'adhérence de E pour espace sous-jacent, de sorte que E est un sous-schéma ouvert dense de E. Après changement de base $\overline{\mathrm{E}} \to \mathrm{S}$; on a deux sections de $\mathrm{X}_{\overline{\mathrm{E}}}$ qui coïncident sur E, donc elle coïncident et par suite $\mathrm{E} = \overline{\mathrm{E}}$.

(ii) ⇒ (i). On prend T = X et pour h la section diagonale.

Le théorème résulte alors trivialement du lemme 2 iv) ⇒ i) et du corollaire au lemme 1.

***Contre-exemple 5.6.4.* —** Tout S-groupe G n'est pas séparé. Soit S un schéma ayant un point fermé non isolé s ; soit G le schéma obtenu en recollant deux exemplaires de S le long de l'ouvert $\mathrm{S} - \{s\}$, on voit aisément que G n'est pas séparé sur S, et qu'il est muni d'une structure naturelle de groupe dont toutes les fibres sont neutres, sauf la fibre G_s qui est isomorphe au groupe à deux éléments $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

***Corollaire 5.6.5.* —** *Soit* G *un* S*-groupe localement de présentation finie, à fibres connexes, et universellement ouvert sur* S *; alors* G *est de présentation finie sur* S.

356 Cela résulte de 5.3 et 3.6.

***Remarque 5.6.6.* —** Une démonstration analogue à celle du théorème 5.3, mais utilisant 4.7 permet d'établir le résultat suivant :

Soit G un S-groupe *localement de présentation finie* et universellement ouvert sur S aux points de $\underline{\mathrm{G}}^0$. Soient σ et τ deux S-sections de G^0 (i.e. soient $\sigma, \tau \in \mathrm{G}^0(\mathrm{S})$). Alors le sous-schéma de S des coïncidences de σ et τ est *fermé.*

6. Sous-foncteurs et sous-schémas en groupes (*)

***Définition 6.1.* —** (i) Soient X un S-foncteur (c'est-à-dire un foncteur de $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})^\circ$ dans (**Ens**)), G un S-foncteur en groupes, u et v deux S-morphismes de X dans G. On appelle *transporteur de* u *dans* v et on note $\underline{\mathrm{Transp}}(u, v)$ le sous S-foncteur T de G défini par $\mathrm{T}(\mathrm{S}') = \{g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}') \mid (\operatorname{int} g) \circ u_{\mathrm{S}'} = v_{\mathrm{S}'}\}$.

(ii) Soient G un S-foncteur en groupes, X et Y deux sous S-foncteurs de G ; on appelle *transporteur de* X *dans* Y (resp. *transporteur strict de* X *dans* Y) et on note

(*) Sur ce même thème, voir également les résultats de XI 6, dont la place naturelle serait dans le présent exposé $\mathrm{VI_B}$. On y trouvera en particulier des critères de représentabilité pour certains sous-foncteurs en groupes d'un schéma en groupes donné.

$\underline{\mathrm{Transp}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ (resp. $\underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$) le sous-S-foncteur T de G défini par $\mathrm{T}(\mathrm{S}') = \{g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}') \mid (\operatorname{int} g)(\mathrm{X}_{\mathrm{S}'}) \subset \mathrm{Y}_{\mathrm{S}'} (\text{resp. } (\operatorname{int} g)(\mathrm{X}_{\mathrm{S}'}) = \mathrm{Y}_{\mathrm{S}'})\}$. Notons qu'on a

$$\underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \cap c(\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y},\mathrm{X})),$$

où c désigne la symétrie de G.

(iii) Soient G un S-foncteur en groupes, X un S-foncteur, u un S-morphisme de X dans G ; on appelle *centralisateur de u* le sous-S-foncteur en groupes $\underline{\mathrm{Centr}}(u) = \underline{\mathrm{Transp}}(u,u)$ de G.

(iv) Soient G un S-foncteur en groupes, H un sous-S-foncteur de G, i le S-morphisme canonique $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$; on appelle *centralisateur* (resp. *normalisateur de* H *dans* G) le sous-S-foncteur en groupes de G $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Centr}}(i) = \underline{\mathrm{Transp}}(i,i)$ (resp. $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H},\mathrm{H})$). Enfin, on appelle *centre de* G le S-foncteur en groupes $\underline{\mathrm{Centr}}\,\mathrm{G} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{G}$.

Proposition 6.2. — *Soit* G *un* S*-groupe. Considérons pour un sous-foncteur* T *du foncteur* G*, la propriété suivante :*

$(+_{\mathrm{f}})$ pour tout $s \in \mathrm{S}$, T_s est représentable par un sous-schéma *fermé* de G_s.

(i) *Soient* X *un* S*-schéma et u et v deux* S*-morphismes de* X *dans* G*. Alors* $\underline{\mathrm{Transp}}(u,v)$ *vérifie la condition* $(+_{\mathrm{f}})$.

(ii) *Soient* $u : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *et* $v : \mathrm{Y} \to \mathrm{G}$ *deux* monomorphismes *de schémas ;*

(1) *si, pour tout* $s \in \mathrm{S}$, v_s *est une* immersion fermée*, alors* $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ *vérifie la condition* $(+_{\mathrm{f}})$ *;*

(2) *si, pour tout* $s \in \mathrm{S}$, u_s *et* v_s *sont des* immersions fermées*, alors* $\underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ *vérifie la condition* $(+_{\mathrm{f}})$.

(iii) *Soit* $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un* monomorphisme *; alors* $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H}$ *vérifie la condition* $(+_{\mathrm{f}})$ *; si, de plus, pour tout* $s \in \mathrm{S}$, u_s *est une* immersion fermée*, alors* $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H}$ *vérifie la condition* $(+_{\mathrm{f}})$.

(iv) *Soit* $u : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *un morphisme ; alors* $\underline{\mathrm{Centr}}(u)$ *vérifie la condition* $(+_{\mathrm{f}})$.

Il suffit de démontrer (i) et (ii) ; l'assertion (i) résulte de VIII 6.5 b) (*) appliqué aux S-morphismes : $q_1, q_2 : \mathrm{G} \rightrightarrows \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{G})$ définis par $q_1(g) = (\operatorname{int} g) \circ u$ et $q_2(g) = v$, compte tenu de ce que pour tout $s \in \mathrm{S}$, G_s est séparé (VI_{A} 2). L'assertion (ii) résulte de VIII 6.5 e).

Remarque 6.3. — Soient k un corps algébriquement clos, G un k-groupe et H un sous-schéma en groupes de G ; supposons G et H de type fini sur k et réduits ; alors 357
$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H}$ (resp. $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H}$) est représentable par un sous-schéma en groupes de G, *dont le sous-schéma réduit associé* n'est autre que le normalisateur (resp. le centralisateur) de H dans G au sens de Bible.

(*) Le lecteur observera que les développements de (VIII n°6 et de XI n°6) ne dépendent pas des numéros antérieurs de ces exposés, ni des exposés VI et VII, et auraient pu venir dès le présent exposé, où était leur place naturelle.

Proposition 6.4. — *Soient* G *un* S*-groupe, et* $u : X \to G$ *un monomorphisme de* S*-schémas. Posons* $T = \underline{\mathrm{Transp}}_G(X, X)$*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) T *est un sous-foncteur* en groupes *de* G.

(ii) $T = \underline{\mathrm{Transpstr}}_G(X, X) = \underline{\mathrm{Norm}}_G X$.

Ces conditions sont vérifiées dans chacun des deux cas suivants :

a) X *est* de présentation finie *sur* S.

b) T *est* représentable *par un schéma* de présentation finie *sur* S.

L'équivalence des conditions (i) et (ii) résulte de ce que, quel que soit le morphisme $S' \to S$, quels que soient t, $t' \in T(S')$, on a $t \cdot t' \in T(S')$, et de ce que $\underline{\mathrm{Transpstr}}_G(X, X) = T \cap c(T)$ (cf. 6.1 (ii)).

Plaçons-nous dans le cas a). Soit $t \in T(S)$, alors $\mathrm{int}(t)$ est un monomorphisme de X dans X, donc un S-automorphisme de X (EGA IV_4, 17.9.6), si bien que t appartient à $\underline{\mathrm{Transpstr}}_G(X, X)$, d'où a).

Dans le cas b), il est clair que $\mu(T \times_S T) \subset T$, et l'assertion résulte du lemme suivant :

Lemme 6.4.2. — *Soit* G *un* S*-schéma* de présentation finie*, muni d'une loi associative* (au sens de EGA 0_{III} 8.2.5)*. Supposons que pour tout* S*-schéma* S′ *et tout* $g \in G(S')$*, les translations à droite et à gauche par* g *dans l'ensemble* G(S′) *soient* injectives *et que* $G(S) \neq \varnothing$*. Alors* G *est un* S-groupe.

Il suffit de montrer que, quel que soit le S-schéma S′, l'ensemble G(S′) est un groupe ; or, de l'hypothèse résulte aussitôt que les translations à droite et à gauche
358 par tout élément $g \in G(S')$ dans $G_{S'}$ sont des S-monomorphismes de $G_{S'}$ dans $G_{S'}$. Ce sont donc des S-*automorphismes*, puisque G est de présentation finie sur S (EGA IV_4, 17.9.6), si bien que les translations à droite et à gauche par g dans l'ensemble G(S′) sont bijectives, et on est ramené au lemme suivant :

Lemme 6.4.3. — *Soit* G *un ensemble non vide muni d'une loi associative telle que les translations à droite et à gauche soient bijectives. Alors* G *est un groupe.*

La démonstration est laissée au lecteur.

Définition 6.5. — Soient G un S-groupe et soit $u : H \to G$ un *monomorphisme.* On appelle *centralisateur connexe de* H *dans* G et on note $\underline{\mathrm{Centr}}^0_G H$ la composante neutre du foncteur $\underline{\mathrm{Centr}}_G H$ (cf. 3.1 et 6.2 (iv)). Lorsque pour tout $s \in S$, u_s est une immersion fermée (ce qui a lieu lorsque H est un S-schéma en groupes, que G et H sont localement de type fini sur S et que u est un S-morphisme de groupes quasi-compact (1.4.2)), on appelle *normalisateur connexe de* H *dans* G, et on note $\underline{\mathrm{Norm}}^0_G H$ la composante neutre du foncteur $\underline{\mathrm{Norm}}_G H$. Etant donné un morphisme $u : X \to G$, on définit de même le foncteur $\underline{\mathrm{Centr}}^0(u)$.

Proposition 6.5.1. — *Soient* G *un* S*-groupe* localement de présentation finie *et* quasi-séparé *sur* S, H *un* S*-groupe* lisse à fibres connexes *et* $u : H \to G$ *un* monomorphisme.

Soit N *le normalisateur de* H *dans* G (cf. I ou 6.1). *On verra* (XI 6.11) [(*)] *que* N *est* représentable *par un sous-schéma en groupes* fermé *de* G *et* de présentation finie *sur* G. *Ceci étant, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le morphisme canonique* $H \to N$ *est une* immersion ouverte.

(ii) $N^0 = H$ (cf. 3.10).

(iii) *Pour tout* $s \in S$, *on a :* $H_s = (N_s)^0$. 359

La condition (i) entraîne (ii) d'après le lemme 3.10.1, puisque $H^0 = H$. D'autre part, il est clair que (ii) entraîne (iii), car $H_s = (N^0)_s = (N_s)^0$.

Montrons enfin que (iii) entraîne (i). Puisque $H_s = (N^0)_s$, quel que soit $s \in S$, alors $H_s \to N_s$ est une immersion ouverte. De plus, H et N sont localement de présentation finie sur S, et H est plat sur S, donc (EGA IV_4, 17.9.5), $H \to N$ est une immersion ouverte.

Définition 6.6. — Soient G un S-foncteur en groupes, H un sous-S-foncteur en groupes ; on dit que H est *invariant* (resp. *central*, resp. *caractéristique*) dans G si $\underline{\mathrm{Norm}}_G\, H = G$ (resp. si $\underline{\mathrm{Centr}}_G\, H = G$, resp. si, quels que soient le S-schéma T et l'automorphisme $a \in \mathrm{Aut}_{\text{T-gr.}}(G_T)$ on a : $a(H_T) \subset H_T$), autrement dit, si, quel que soit le S-schéma T, le sous-groupe H(T) de G(T) est invariant dans G(T) (resp. central dans G(T), resp. invariant par tout automorphisme de G_T).

Si H est central (resp. caractéristique), il est invariant.

Remarque 6.7. — Soient G et H deux S-groupes et $u : H \to G$ un *monomorphisme*. Pour que H soit invariant (resp. central, resp. caractéristique) dans G, il faut et il suffit que le morphisme

$$\mu \circ \big(c \circ \mathrm{pr}_2,\, \mu \circ (u \times \mathrm{id}_G)\big) : H \underset{S}{\times} G \longrightarrow G$$

(défini par $(h, g) \mapsto g^{-1} \cdot hg$ quels que soient $g \in G(S')$ et $h \in H(S')$) se factorise à travers u (resp. soit égal à $u \circ \mathrm{pr}_1$, resp. que pour tout S-schéma T et tout T-automorphisme de groupe a de $G \times_S T$, $a \circ u(T)$ se factorise à travers $u(T)$).

Exemple 6.8. — Soit G un S-foncteur en groupes. Alors $\underline{\mathrm{Centr}}\, G$ est caractéristique et central. Si, pour tout $s \in S$, G_s est *représentable*, G^0 est caractéristique. Cela résulte 360
des définitions et de 3.3.

7. Sous-groupes engendrés ; groupe des commutateurs

Dans ce numéro, k désigne un corps fixé.

Proposition 7.1. — *Soient* G *un* k*-groupe,* $(X_i)_{i\in I}$ *une famille de* k*-schémas séparables* (EGA IV 4.6.2) *; pour tout* $i \in I$, *soit* $f_i : X_i \to G$ *un* k*-morphisme.*

[(*)] Voir la note (∗) de la page précédente.

(i) *Il existe un plus petit sous-k-schéma en groupes fermé de* G *majorant chacun des* f_i*, soit* $\Gamma_{\mathrm{G}}((f_i)_{i\in\mathrm{I}})$*. C'est un k-schéma séparable, donc* lisse *dans le cas où* G *est supposé* localement de type fini *sur k.*

(ii) *Posons* $\mathrm{X} = \coprod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{X}_i$*, et soit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *le morphisme dont la restriction à* X_i *est* f_i*, pour tout* $i \in \mathrm{I}$*. Posons* $\mathrm{X}^1 = \mathrm{X} \coprod \mathrm{X}$*, soit* $f^1 : \mathrm{X}^1 \to \mathrm{G}$ *le morphisme dont les restrictions à* X *sont respectivement* f *et* $c \circ f$*. Pour tout* $n > 1$*, posons* $\mathrm{X}^n = \mathrm{X}^1 \times_k \mathrm{X}^{n-1}$ *et* $f^n = \mu \circ (f^1 \times_k f^{n-1}) : \mathrm{X}^n \to \mathrm{G}$*.Alors* $\Gamma_{\mathrm{G}}((f_i)_{i\in\mathrm{I}})$ *est le sous-schéma* réduit *de* G *ayant pour espace sous-jacent l'adhérence de la réunion des* $f^n(\mathrm{X}^n)$*, pour* $n > 1$*.*

(iii) *Pour tout k-schéma* S*,* $\Gamma_{\mathrm{G}}((f_i)_{i\in\mathrm{I}})_{\mathrm{S}}$ *est le* plus petit sous-schéma en groupes fermé *de* G_{S} *majorant chacun des* $f_{i,\mathrm{S}} : \mathrm{X}_{\mathrm{S}} \to \mathrm{G}_{\mathrm{S}}$*. Si on suppose que* G *est localement de type fini sur k, alors* $\Gamma_{\mathrm{G}}((f_i)_{i\in\mathrm{I}})_{\mathrm{S}}$ *est le plus petit sous-schéma en groupes de* G_{S} *majorant chacun des* $f_{i,\mathrm{S}}$*.*

Remarquons tout d'abord que, pour démontrer (i) et (iii), en définissant X et f comme dans (ii), on est ramené au cas où I est réduit à un élément.

Soit H le sous-schéma réduit de G d'ensemble sous-jacent $\overline{\bigcup_{n\geqslant 1} f^n(\mathrm{X}^n)}$. Alors H est séparable (EGA IV 11.10.7). Il est clair que tout sous-schéma fermé de G qui domine f domine aussi H. Donc pour montrer (i) et (ii), il suffit de montrer que H est un
361 sous-schéma *en groupes* de G, donc que la restriction de c à H et la restriction de μ à $\mathrm{H} \times_k \mathrm{H}$ se factorisent à travers l'injection $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$. Puisque H est séparable, $\mathrm{H} \times_k \mathrm{H}$ est réduit, et il suffit de vérifier que $c(\mathrm{H}) \subset \mathrm{H}$ et que $\mu(\mathrm{H} \times_k \mathrm{H}) \subset \mathrm{H}$ (ensemblistement). Mais d'après EGA IV_3, 11.10.6, la réunion des $f^n_{(\mathrm{H})}(\mathrm{X}^n \times_k \mathrm{H})$ est dense dans $\mathrm{H} \times_k \mathrm{H}$. De même, quel que soit $n \geqslant 1$, la réunion des $f^m_{(\mathrm{X}^n)}(\mathrm{X}^n \times_k \mathrm{X}^m)$, pour $m \geqslant 1$, est dense dans $\mathrm{X}^n \times_k \mathrm{H}$. Donc il suffit de montrer que $\mu(f^n_{(\mathrm{H})}(f^m_{(\mathrm{X}^n)}(\mathrm{X}^n \times_k \mathrm{X}^m))) \subset \mathrm{H}$ et que $c(f^n(\mathrm{X}^n)) \subset \mathrm{H}$. Or $\mu(f^n_{(\mathrm{H})}(f^m_{(\mathrm{X}^n)}(\mathrm{X}^n \times_k \mathrm{X}^m))) = \mu((f^n \times_k f^m)(\mathrm{X}^n \times_k \mathrm{X}^m)) = f^{n+m}(\mathrm{X}^{n+m}) \subset \mathrm{H}$;et, puisque $c(f^1(\mathrm{X}^1)) \subset f^1(\mathrm{X}^1)$, on a, quel que soit n, $c(f^n(\mathrm{X}^n)) \subset f^n(\mathrm{X}^n) \subset \mathrm{H}$. Ceci démontre (i) et (ii).

Montrons maintenant (iii). Soit G' un sous-schéma en groupes *fermé* de G_{S} majorant f_{S} ; il s'agit de montrer que G' majore H_{S}, ou, ce qui revient au même, que $\mathrm{H}_{\mathrm{S}} = \mathrm{H}_{\mathrm{S}} \times_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}}} \mathrm{G}'$. Posons $\mathrm{H}'_{\mathrm{S}} = \mathrm{H}_{\mathrm{S}} \times_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}}} \mathrm{G}' = \mathrm{G}' \cap \mathrm{H}_{\mathrm{S}}$. Puisque G' et H_{S} majorent tous deux les f^n_{S}, il en est de même de H'_{S}. Or (EGA IV_3, 11.10.6), puisque la famille des $f^n : \mathrm{X}^n \to \mathrm{H}$ est schématiquement dominante, il en est de même de la famille des $f^n_{\mathrm{S}} : \mathrm{X}^n_{\mathrm{S}} \to \mathrm{H}_{\mathrm{S}}$, si bien que H'_{S}, qui majore chacun des f^n_{S}, est égal à H_{S} (EGA IV_3, 11.10.1 c)). Montrons maintenant la seconde assertion de (iii) dans le cas où G est localement de type fini sur k. Soit G' un sous-schéma en groupes de G_{S} majorant f_{S}. Il s'agit de même de montrer que, si on pose $\mathrm{H}'_{\mathrm{S}} = \mathrm{H}_{\mathrm{S}} \times_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}}} \mathrm{G}'$, on a $\mathrm{H}'_{\mathrm{S}} = \mathrm{H}_{\mathrm{S}}$. Il suffit pour cela de montrer que H'_{S} est fermé dans H_{S} et d'appliquer le raisonnement précédent. Il suffit donc de montrer que H_{S} et H'_{S} ont même ensemble sous-jacent, a fortiori il suffit de montrer que, pour tout $s \in \mathrm{S}$, $\mathrm{H}_{\mathrm{S},s} = \mathrm{H}'_{\mathrm{S},s}$. Mais alors $\mathrm{H}'_{\mathrm{S},s} = \mathrm{G}'_{\mathrm{S}} \times_{\kappa(s)} \mathrm{H}_{\mathrm{S},s}$; et G'_s, étant un sous-$\kappa(s)$-schéma en groupes de $\mathrm{G}_{\mathrm{S},s'}$ est fermé (1.4), donc $\mathrm{H}'_{\mathrm{S},s}$ est fermé dans $\mathrm{H}_{\mathrm{S},s}$; et alors le raisonnement du début, appliqué à $\mathrm{H}'_{\mathrm{S},s}$, à $\mathrm{H}_{\mathrm{S},s}$ et aux $f^n_{\mathrm{S},s}$ montre que $\mathrm{H}'_{\mathrm{S},s} = \mathrm{H}_{\mathrm{S},s}$, cqfd

Définition et remarque 7.2. — (i) Etant donné un k-groupe G, une famille $(X_i)_{i \in I}$ de k-schémas séparables et pour chaque $i \in I$, un k-morphisme $f_i : X_i \to G$, on appelle *sous-schéma en groupes fermé de* G *engendré par la famille* $(f_i)_{i \in I}$, et nous noterons dans ce numéro $\Gamma_G((f_i)_{i \in I})$, le plus petit sous-schéma en groupes fermé de G majorant chacun des f_i. Dans le cas où i est l'injection d'un sous-schéma X de G séparable sur k, on écrit $\Gamma_G(X)$ au lieu de $\Gamma_G(i)$. 362

(ii) Il est clair que si X_1 et X_2 sont deux k-schémas séparables et $f_1 : X_1 \to G$ et $f_2 : X_2 \to G$ deux k-morphismes tels que les ensembles $\overline{f_1(X_1)}$ et $\overline{f_2(X_2)}$ soient égaux, alors $\Gamma_G(f_1) = \Gamma_G(f_2)$.

(iii) Soit E une partie de G telle que le sous-schéma réduit $\overline{E}$ de G soit séparable. On appelle *sous-schéma en groupes fermé de* G *engendré par* E, et on note $\Gamma_G(E)$ le sous-schéma en groupes $\Gamma_G(i)$, où i est l'injection du sous-schéma réduit $\overline{E}$ de G dans G.

(iv) Dans le cas où G est localement de type fini sur k, tout sous-schéma en groupes de G étant fermé (1.4), on parlera de « sous-schéma en groupes engendré » au lieu de « sous-schéma en groupes fermé engendré ».

(v) Soit X un k-schéma séparable et $f : X \to G$ un k-morphisme. Supposons que $f(X)$ contienne l'élément unité e de G. Posons $X'^1 = X \times_k X$ et $f'^1 = \mu \circ (f \times_k (c \circ f))$, et pour $n > 1$, $X'^n = X'^1 \times_k X'^{n-1}$ et $f'^n = \mu \circ (f'^1 \times_k f'^{n-1})$. Alors $\Gamma_G(f)$ est le sous-schéma réduit de G dont l'espace sous-jacent est l'adhérence de la réunion, pour $n \geqslant 1$ des $f'^n(X'^n)$. En effet, puisque $f(X)$ contient e, on a : $f(X) \subset f'^1(X'^1) \subset f^2(X^2)$ (notation de 7.1 (ii)). Puisqu'on a aussi $f^1(X^1) \subset f'^1(X'^1) \subset f^2(X^2)$, pour qu'il existe un entier n tel que $f^n(X^n) = \Gamma_G(f)$, il faut et il suffit qu'il existe un entier m tel que $f'^m(X'^m) = \Gamma_G(f)$.

(vi) Il résulte de la remarque précédente que, *si* X *est un k-schéma séparable et géométriquement connexe, et si* $f : X \to G$ *est un k-morphisme tel que* $f(X)$ *contienne l'élément neutre de* G, *alors le k-groupe* $\Gamma_G(f)$ *est connexe.* En effet, chacun des X'^n est alors connexe, si bien que la réunion des $f'^n(X'^n)$ (qui contiennent chacun e) est connexe, il en est donc de même de son adhérence $\Gamma_G(f)$. 363

(vii) Soient A et B deux sous-k-schémas en groupes séparables d'un k-groupe G. On appelle *sous-schéma en groupes des commutateurs de* A *et* B dans G et on note $(A, B)_G$ ou simplement (A, B) le sous-schéma en groupes fermé de G engendré par le morphisme $\nu : A \times_k B \to G$ défini par : $(a, b) \mapsto a \cdot b \cdot a^{-1} \cdot b^{-1}$ pour $a \in A(S)$ et $b \in B(S)$. Lorsque G est séparable sur k, on appelle *groupe dérivé de* G, et on note $\underline{Der}(G)$, le groupe (G, G). Pour qu'un k-groupe séparable G soit commutatif, il faut et il suffit que $\underline{Der}(G)$ soit le k-groupe unité.

(viii) Il nous arrivera de poser $\Gamma'_G = \bigcup_{n>1} f^n(X^n)$ (avec les notations de 7.1 (ii)). Notons que $\Gamma'_G(f)$ est une partie de G stable pour la loi de groupe (au sens de 3.0).

Corollaire 7.3. — *Soient* G *un k-groupe,* X *un k-schéma séparable,* $f : X \to G$ *un k-morphisme. Soit* S *un k-schéma.*

(i) *Soit* $u \subset \mathrm{End}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G_S})$ *tel que l'on ait l'inclusion de préfaisceaux :* $u(f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X_S})) \subset f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X_S})$ (*où* $f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X_S})$ *désigne le* sous-préfaisceau *de* $\mathrm{G_S}$ *image de* $\mathrm{X_S}$ *par* f_{S}). *Alors, on a* $u((\Gamma_{\mathrm{G}}(f))_{\mathrm{S}}) \subset (\Gamma_{\mathrm{G}}(f))_{\mathrm{S}}$ (*en tant que préfaisceaux*).

(i bis) *Soit* $u \in \mathrm{Aut}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G_S})$ *tel qu'on ait* $u(f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X_S}) = f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X_S})$ (*en tant que préfaisceaux*) *; alors on a* $u((\Gamma_{\mathrm{G}}(f))_{\mathrm{S}}) = (\Gamma_{\mathrm{G}}(f))_{\mathrm{S}}$ (*en tant que préfaisceaux*).

(ii) *Soit* $u \in \mathrm{End}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G_S})$ *tel que la restriction de* u *au préfaisceau* $f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X_S})$ *soit l'identitité ; alors la restriction de* u *au schéma* $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)_{\mathrm{S}}$ *est l'automorphisme identique.*

364 (iii) *Soit* Y *un* k*-schéma séparable et* $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{G}$ *un* k*-morphisme. Supposons que, quel que soit le* k*-schéma* S', *pour tout* $a \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$ *et* $f \in \mathrm{Y}(\mathrm{S}')$, $f \circ a$ *et* $g \circ b$ *commutent* (*resp.* $(\mathrm{int}(f \circ a))(g_{\mathrm{S}'}(\mathrm{Y}_{\mathrm{S}'})) = g_{\mathrm{S}'}(\mathrm{Y}_{\mathrm{S}'})$). *Alors on a* $\Gamma_{\mathrm{G}}(f) \subset \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\Gamma_{\mathrm{G}}(g)$ (*resp.* $\Gamma_{\mathrm{G}}(f) \subset \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\,\Gamma_{\mathrm{G}}(g)$) (*en tant que préfaisceaux*).

(iv) *Soit* x *un point de* G *rationnel sur* k. *Alors le* k*-groupe* $\Gamma_{\mathrm{G}}(\{x\})$ *est commutatif.*

(v) *Soient* A *et* B *deux sous-schémas en groupes de* G *séparables sur* k. *Si* A *et* B *sont invariants* (*resp. caractéristiques*), *il en est de même de* (A, B).

Montrons (i). Posons $\mathrm{H} = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)_{\mathrm{S}}$ et $\mathrm{H}' = u^{-1}(\mathrm{H})$. D'après (7.1 (iii)), il suffit de montrer que f_{S} se factorise à travers H'. Par hypothèse, $u \circ f_{\mathrm{S}}$ appartient à $u(f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X_S}))(\mathrm{X})$, donc à $(f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X_S}))(\mathrm{X})$, donc a fortiori à $\mathrm{H}(\mathrm{X})$, ce qui signifie que $u \circ f_{\mathrm{S}}$ se factorise à travers l'injection canonique de H dans $\mathrm{G_S}$, donc que f_{S} se factorise à travers H', cqfd.

Il est clair que (i bis) est une conséquence de (i).

Montrons (ii). Puisque G est séparé sur k ($\mathrm{VI_A}$ 0.2) $\mathrm{G_S}$ est séparé sur S, donc la section unité de $\mathrm{G_S}$ est une immersion fermée (5.1), si bien que $\mathrm{Ker}(\mu \circ (u, c))$ est un sous-schéma en groupes fermé de $\mathrm{G_S}$ (μ (resp. c) désignant la multiplication (resp. la symétrie) de $\mathrm{G_S}$). Par hypothèse, le préfaisceau $\mathrm{Ker}(\mu \circ (u, c))$ contient le préfaisceau $f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X_S})$, donc $\mathrm{Ker}(\mu \circ (u, c))$ contient $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)_{\mathrm{S}}$ (7.1 (iii)).

Montrons (iii). Rappelons (6.2 (iii)) que $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\Gamma_{\mathrm{G}}(g)$ (resp. $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\,\Gamma_{\mathrm{G}}(g)$) est représentable par un sous-schéma en groupes fermé de G. Par hypothèse compte tenu de (ii) (resp. (i)), $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\Gamma_{\mathrm{G}}(g)$ (resp. $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\,\Gamma_{\mathrm{G}}(g)$) contient $f(\mathrm{X})$ en tant que préfaisceau, il contient donc $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$, cqfd.

365 L'assertion (iv) est un cas particulier de (iii), où l'on prend pour f et g l'injection du schéma réduit de G ayant pour espace sous-jacent le point fermé $\{x\}$ dans G. Ce sous-schéma est séparable puisque $\kappa(x) = k$.

Montrons enfin (v). Soient S un k-schéma, et u un automorphisme intérieur (resp. un automorphisme de S-groupes) de $\mathrm{G_S}$. Par hypothèse, $u(\mathrm{A_S}) = \mathrm{A_S}$, et $u(\mathrm{B_S}) = \mathrm{B_S}$; on en déduit aisément, avec les notations de (7.2 (vii)) que $u(\nu_{\mathrm{S}}(\mathrm{A_S} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{B_S}) = \nu_{\mathrm{S}}(\mathrm{A_S} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{B_S})$; donc, d'après (i), on a $u((\mathrm{A}, \mathrm{B})) = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$, cqfd.

Proposition 7.4. — *Soient* G *un* k*-groupe localement de type fini,* X *un* k*-schéma séparable, de type fini, et soit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *un* k*-morphisme. Supposons que* X *soit géométriquement connexe et que* $f(\mathrm{X})$ *contienne l'élément neutre* e *de* G. *Alors* (*notations de* 7.1 (ii)), *il existe un entier* N *tel qu'on ait :*

$$f^{\mathrm{N}}(\mathrm{X}^{\mathrm{N}}) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f) \qquad (\textit{ensemblistement}).$$

D'après 7.1 (iii) et EGA IV_2, 2.6.1, nous pouvons supposer k algébriquement clos. D'après la remarque (7.2 (vi)), nous pouvons supposer que $G = G^0$; enfin, d'après la remarque (7.2 (v)), il suffit de montrer qu'il existe un entier N tel que (notations de (7.2 (v))) l'on ait : $f'^{\mathrm{N}}(\mathrm{X}'^{\mathrm{N}}) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$.

Premier cas. Supposons X *irréductible.* Alors les $\overline{f'^n(\mathrm{X}'^n)}$ forment une suite croissante de fermés irréductibles dans l'espace G, qui est noethérien, puisque $\mathrm{G} = \mathrm{G}^0$ est de type fini sur k ($\mathrm{VI_A}$ 2.4). Donc cette suite est stationnaire, et il existe un entier m tel que $\overline{f'^m(\mathrm{X}'^m)} = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$. De plus, puisque X et G sont de type fini sur k, les f'^n sont de type fini sur k. Par conséquent, $f'^m(\mathrm{X}'^m)$ est constructible dans G (EGA IV_1, 1.8.5), donc contient un ouvert U de son adhérence $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ (EGA 0_{IV}, 9.2.3). Alors ($\mathrm{VI_A}$ 0.5), on a $\Gamma_{\mathrm{G}}(f) \subset \mathrm{U}\cdot\mathrm{U} \subset f'^{2m}(\mathrm{X}'^{2m}) \subset \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$, si bien que $f'^{2m}(\mathrm{X}'^{2m}) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$.

Deuxième cas. Supposons que X ait deux composantes irréductibles A_1 et A_2. Alors **366**
il existe $a \in (\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2)(k)$, puisque X est connexe. Donc les quatre parties irréductibles $\mathrm{A}_i \times_k \mathrm{A}_j$ $(i, j = 1, 2)$ recouvrent $\mathrm{X} \times_k \mathrm{X}$, et l'image de chacune d'entre elles par f'^1 contient e. Si f'^1_{ij} désigne la restriction de f'^1 au sous-schéma réduit $\mathrm{A}_i \times_k \mathrm{A}_j$, posons

$$\mathrm{Y} = (\mathrm{A}_1 \underset{k}{\times} \mathrm{A}_1) \underset{k}{\times} (\mathrm{A}_1 \underset{k}{\times} \mathrm{A}_2) \underset{k}{\times} (\mathrm{A}_2 \underset{k}{\times} \mathrm{A}_2) \underset{k}{\times} (\mathrm{A}_2 \underset{k}{\times} \mathrm{A}_1) \qquad \text{et}$$

$$g = \mu \circ \Big(\big(\mu \circ (f'^1_{11} \underset{k}{\times} f'^1_{12})\big) \underset{k}{\times} \big(\mu \circ (f'^1_{22} \underset{k}{\times} f'^1_{21})\big) \Big).$$

Alors Y est irréductible, réduit et de type fini, donc on vient de voir qu'il existe un entier m tel que $g'^m(\mathrm{Y}'^m) = \Gamma_{\mathrm{G}}(g)$. Mais en fait, $f'^1(\mathrm{X}'^1) \subset g(\mathrm{Y}) \subset f'^4(\mathrm{X}'^4)$, si bien que $\Gamma_{\mathrm{G}}(f) = \Gamma_{\mathrm{G}}(g)$ et que $f'^{4m}(\mathrm{X}'^{4m}) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$.

Cas général. Raisonnons par récurrence sur le nombre des composantes irréductibles de X (ce nombre est fini puisque X, étant de type fini sur k, est noethérien). Supposons la proposition démontrée dans le cas où X a au plus $r-1$ composantes irréductibles, et supposons qu'il en ait r, à savoir $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_r$. Alors e appartient à l'un des A_i ; supposons par exemple que $e \in \mathrm{A}_1$. Posons alors $\mathrm{Y} = \Gamma_{\mathrm{G}}(f_r)$, où f_r désigne la restriction de f au sous-schéma réduit $\mathrm{A}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{A}_{r-1}$ (nous supposons la numérotation des A_i choisie de façon que ce schéma soit connexe, ce qui est toujours possible). Posons $\mathrm{Z} = \overline{f(\mathrm{A}_r)}$. Alors Y est un sous-groupe irréductible réduit et fermé de G (7.2 (vi)). Soit alors $\mathrm{T} = \mathrm{Y} \cup \mathrm{Z}$ et i l'injection du sous-schéma fermé réduit T de G.Il est clair (7.2 (ii)) que $\Gamma_{\mathrm{G}}(i) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ et que T est connexe (car puisque X est connexe, $\mathrm{A}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{A}_{r-1}$ et A_r ont en commun un point a, et Y et Z ont en commun le point $f(a)$). De plus, $e \in \mathrm{T}$, et T a au plus deux composantes irréductibles, puisque Y et Z sont irréductibles. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un entier m tel que, si on **367**
note X_r le sous-schéma réduit $\mathrm{A}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{A}_{r-1}$ de X, on ait : $f'^m_r(\mathrm{X}'^m_r) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f_r) = \mathrm{Y}$. Donc, puisque $\mathrm{X}'_r \subset \mathrm{X}$ et $\mathrm{Z} \subset \overline{f(\mathrm{X})}$, on a $f(\mathrm{X}) \subset \mathrm{Y} \cup \mathrm{Z} \subset f'^m(\mathrm{X}'^m)$. D'autre part, puisque T a au plus deux composantes irréductibles, on a déjà vu qu'il existe un entier p tel que $i'^p(\mathrm{T}'^p) = \Gamma_{\mathrm{G}}(i)$. Or $\Gamma_{\mathrm{G}}(i) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$, et $\mathrm{T} \subset \overline{f'^m(\mathrm{X}'^m)}$, donc $\overline{f'^{mp}(\mathrm{X}'^{mp})} = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$, et on montre, comme dans le premier cas, que cette dernière égalité entraîne $f'^{2mp}(\mathrm{X}'^{2mp}) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$, cqfd

Lemme 7.5. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-schéma en groupes,* X *un* S*-préschéma,* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *un* S*-morphisme. On suppose* X *et* G localement de présentation finie *sur* S*, et que pour tout* $s \in \mathrm{S}$ *et pour tout* point maximal g *de* G_s*, il existe un point* x *de* X *tel que* $f(x) = g$ *et que* f *soit* plat en x*. Alors le morphisme* $\mu\circ(f \times_{\mathrm{S}} f) : \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *est* couvrant *pour la topologie* (fppf).

Notons que l'ensemble V des points de X en lesquels f est plat est ouvert et que $f|\mathrm{V}$ est un morphisme ouvert (EGA IV 11.3.1) ; donc quitte à remplacer X par V, on peut supposer f plat. Il suffira donc de prouver qu'il en est de même de $\mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{U} \to \mathrm{G}$. Or, $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$ étant localement de présentation finie et plat, il en est de même de $\mu : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ (qui est isomorphe à un morphisme déduit du précédent $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$ par un changement de base $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$, cf. $\mathrm{VI_A}$ 0.1) donc aussi du morphisme induit $\mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{U} \to \mathrm{G}$. Pour prouver qu'il est surjectif, il suffit de regarder fibre par fibre, où cela résulte de $\mathrm{VI_A}$ 0.5.

Proposition 7.6. — *Soient* G *un* k*-groupe localement de type fini,* X *un* k*-schéma*
368 *séparable et localement de type fini, et* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *un* k*-morphisme. Pour que le foncteur* $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ *soit le faisceau associé pour la topologie* (fppf) (*ou la topologie* (fpqc)) *au sous-préfaisceau en groupes de* G *engendré par l'image du morphisme de foncteurs* f*, il faut et il suffit que l'on ait :*

$$\bigcup_{n\geqslant 1} f^n(\mathrm{X}^n) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f).$$

Lorsque G *est de type fini sur* k*, cette condition implique déjà qu'il existe un entier* n *tel que* $f^n : \mathrm{X}^n \to \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ *soit couvrant* (fpqc) (*et a fortiori surjectif*).

Posons $\mathrm{X}^\infty = \coprod_{n\geqslant 1} \mathrm{X}^n$; soit $f^\infty : \mathrm{X}^\infty \to \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ le morphisme dont la restriction à chacun des X^n est le morphisme $\mathrm{X}^n \to \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ déduit de f^n. Le faisceau considéré dans l'énoncé est alors le faisceau image de X^∞ par f^∞ ; donc (IV 4.3), dire que le foncteur $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ est le faisceau considéré revient à dire que f^∞ est couvrant. Montrons que, pour que f^∞ soit couvrant, il faut et il suffit que f^∞ soit surjectif. La condition est évidemment nécessaire ; réciproquement, si f^∞ est surjectif, alors : $\mu \circ (f^\infty \times_k f^\infty) : \mathrm{X}^\infty \times_k \mathrm{X}^\infty \to \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ est couvrant (7.5) ; or puisque $\mathrm{X}^n \times_k \mathrm{X}^m$ est canoniquement isomorphe à X^{n+m}, et que dans cet isomorphisme, $\mu\circ(f^n \times_k f^m)$ correspond à f^{n+m}, il est clair que $\mu\circ(f^\infty \times_k f^\infty)$ se factorise à travers f^∞, si bien que f^∞ est couvrant. Enfin, dire que f^∞ est surjectif revient à dire que $\bigcup_{n\geqslant 1} f^n(\mathrm{X}^n) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$. Si G donc $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ est de type fini, on en conclut qu'il existe n avec $f^n(\mathrm{X}^n) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$, car les $f^n(\mathrm{X}^n)$ sont des parties ind-constructibles des $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ (EGA IV 1.8.4) de réunion $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$, et on applique EGA IV 1.9.9. Cela achève de prouver 7.6.

Remarque 7.6.1. — Evidemment les conditions équivalentes de 7.6 impliquent que le faisceau F envisagé est représentable. La réciproque est fausse en général (prendre X réduit à un point !). Noter cependant qu'il résulte de EGA IV_3, 8.14.2 que si F
369 est représentable, il est localement de présentation finie sur k, donc la question est alors si le monomorphisme dominant $\mathrm{F} \to \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ est un isomorphisme, ou encore, une immersion fermée. Ce sera le cas en vertu de 1.4.2. si F est de type fini, par exemple

si F connexe (3.5), par exemple si X est connexe et si $f(\mathrm{X})$ contient l'élément unité de G.

Lemme 7.7. — *Soient* k *un corps* algébriquement clos, G *un* k*-groupe* localement de type fini*,* X *un* k*-schéma séparable et localement de type fini,* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *un* k*-morphisme et* H *un sous-schéma en groupes de* G *tel que* $\mathrm{H} \subset f(\mathrm{X})$*. Posons* $\Gamma' = \bigcup_{n\geqslant 1} f^n(\mathrm{X}^n)$*. Soit* Γ'_0 (*resp.* H_0) *le groupe des points de* $\mathrm{G}(k)$ *appartenant à* Γ' (*resp. à* H) (cf. 7.2 (viii))*. Supposons que* H_0 *soit d'indice fini dans* Γ'_0*. Alors il existe un entier* m *tel que* $f^m(\mathrm{X}^m) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ (*cf.* 7.6)*, et* $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ *est réunion d'un nombre* fini *de translatés de* H.

Quel que soit $n \geqslant 1$, $f^n(\mathrm{X}^n)$ est une partie ind-constructible de G (EGA IV_1, 1.9.5 (viii)), il en est donc de même de Γ', si bien que, puisque G est un schéma de Jacobson, Γ'_0 est dense dans Γ'. Par hypothèse, il existe une suite finie $a_1, \dots, a_r$ de points de Γ'_0 telle que $\Gamma'_0 = a_1\mathrm{H}_0 \cup \cdots \cup a_r\mathrm{H}_0$, d'où $\Gamma_{\mathrm{G}}(f) = \overline{\Gamma'} = \overline{\Gamma'_0} = \overline{a_1 \cdot \mathrm{H}_0 \cup \ldots \cup a_r.\mathrm{H}_0} = \overline{a_1.\mathrm{H}_0} \cup \ldots \cup \overline{a_r.\mathrm{H}_0} = a_1.\overline{\mathrm{H}_0} \cup \ldots \cup a_r.\overline{\mathrm{H}_0}$ puisque la translation par a_i est un homéomorphisme de G sur G, si bien que $\Gamma_{\mathrm{G}}(f) = a_1\mathrm{H} \cup \cdots \cup a_r\mathrm{H}$. Il est d'autre part clair qu'il existe un entier p tel que chacun des a_i ($1 \leqslant i \leqslant r$) appartienne à $f^p(\mathrm{X}^p)$. Enfin, puisque $\mathrm{H} \subset f(\mathrm{X})$, quel que soit i, on a : $a_i \cdot \mathrm{H} \subset f^{p+1}(\mathrm{X}^{p+1})$, si bien que $f^{p+1}(\mathrm{X}^{p+1}) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$.

Proposition 7.8. — *Soient* G *un* k*-groupe* localement de type fini*,* A *et* B *deux sous-*k*-schémas en groupes séparables* (*i.e. lisses*) *de* G*. Supposons remplie l'une des conditions* a) *ou* b) *suivantes :*

a) A *et* B *sont* invariants et de type fini *sur* k*.*

b) A *est* connexe *et* B *est* de type fini *sur* k*.* 370

Alors (A, B) *est* de type fini *sur* k*, et le foncteur défini par* (A, B) *est le faisceau associé pour la topologie* (fppf) (*ou la topologie* (fpqc)) *au préfaisceau en groupes des commutateurs de* A *et* B *dans* G*. De plus,* $(\mathrm{A}, \mathrm{B})^0 = (\mathrm{A}, \mathrm{B}^0) \cdot (\mathrm{A}^0, \mathrm{B})$.

D'après 7.6, pour montrer que (A, B) est le faisceau associé désiré, il suffit de montrer qu'il existe un entier n tel que $\nu^n(\mathrm{A} \times_k \mathrm{B})^n) = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$ (notations de (7.2 (vii))). Pour montrer cela, ainsi que pour montrer les deux autres assertions, on peut supposer k algébriquement clos (7.1 (iii), EGA IV 2.6.1 et 2.7.1. et $\mathrm{VI_A}$ 1.1).

Soient alors $\mathrm{B}^0, \dots, \mathrm{B}^p$ les composantes connexes de B et $\mathrm{A}^0, \dots, \mathrm{A}^q$ celles de A (ces composantes sont en nombre fini puisque A et B sont supposés de type fini sur k, donc noethériens). Soit ν_{ij} la restriction de ν à $\mathrm{A}^i \times_k \mathrm{B}^j$. Alors chacun des A^i et des B^j est irréductible ($\mathrm{VI_A}$ 4.1), il en est donc de même de $\mathrm{A}^0 \times_k \mathrm{B}^j$ et de $\mathrm{A}^i \times_k \mathrm{B}^0$. Puisque l'élément neutre de G appartient à A^0 et à B^0, il appartient à $\nu_{0j}(\mathrm{A}^0 \times_k \mathrm{B}^j)$ et à $\nu_{i0}(\mathrm{A}^i \times_k \mathrm{B}^0)$. Alors chacun des $\Gamma_{\mathrm{G}}(\nu_{0j})$ et des $\Gamma_{\mathrm{G}}(\nu_{i0})$ est connexe (7.2 (vi)). De même, si u_{0j} (resp. u_{i0}) désigne l'injection de $\Gamma_{\mathrm{G}}(\nu_{0j})$ (resp. $\Gamma_{\mathrm{G}}(\nu_{i0})$) dans G, $(\mathrm{A}^0, \mathrm{B}) = \Gamma_{\mathrm{G}}((u_{0j})_{j=0}^p)$ et $(\mathrm{A}, \mathrm{B}^0) = \Gamma_{\mathrm{G}}((u_{i0})_{i=0}^q)$sont connexes. De plus, on déduit aisément de 7.4 et des constructions précédentes, qu'il existe un indice r tel que $(\mathrm{A}^0, \mathrm{B})$ et $(\mathrm{A}, \mathrm{B}^0)$ soient inclus dans $\nu^r((\mathrm{A} \times_k \mathrm{B})^r)$. Dans le cas b), on a $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = (\mathrm{A}^0, \mathrm{B})$, et on a terminé.

Plaçons-nous maintenant dans le cas a). Soit H le sous-schéma en groupes de G
371 engendré par la réunion de (A, B^0) et de (A^0, B) ; toujours d'après 7.4, H est connexe, et il existe un entier m tel que $\nu^m((A \times_k B)^m) \supset H$. Donc l'ensemble sous-jacent à H n'est autre que $(A, B^0) \cdot (A^0, B)$.

Etant donnée une partie X de G stable pour la loi de groupe (cf. 3.0), nous noterons X_0 le groupe des points fermés de G appartenant à X. Posons $\Gamma' = \bigcup_{q \geqslant 1} \nu^q((A \times_k B)^q)$. Alors, d'après la prop. 7.9 ci-dessous, on a : $(A^0 B)_0 = (A^0_0, B_0)$, $(A, B^0)_0 = (A_0, B^0_0)$ et $\Gamma'_0 = (A_0, B_0)$, si bien que $H_0 = (A^0_0, B_0) \cdot (A_0, B^0_0)$ est d'indice fini dans Γ'_0 (Bible exp. 3, appendice) puisque A_0 et B_0 sont invariants, et que A^0_0 (resp. B^0_0) est l'indice fini dans A (resp. B). Nous sommes alors dans les conditions du lemme 7.7 : puisque $\nu^m((A \times_k B)^m)H$, il existe un entier p tel que $\nu^{mp}((A \times_k B)^{mp}) = (A, B)$, et il existe une suite finie $a_1, \ldots, a_n$ de points fermés de G telle que : $(A, B) = a_1 H \cup \cdots \cup a_n H$. Alors, puisque H est de type fini sur k, chacun des $a_i H$ est quasi-compact, donc leur réunion (A, B) est quasi-compacte, donc de type fini sur k. Puisque H est irréductible, il en est de même de chacun des $a_i H$ et puisque $e \in H$, il est clair que $H = (A, B)^0$, cqfd

Proposition 7.9. — *Soient k un corps algébriquement clos,* G *un k-groupe localement de type fini.*

(i) *Soient* A *et* B *deux parties ind-constructibles de* G. *Notons* $A_0 = A(k) \subset G(k)$ *l'ensemble des points fermés de* G *appartenant à* A. *Alors* $(A \cdot B)_0 = A_0 \cdot B_0$*, le second produit étant pris dans le groupe* $G_0 = G(k)$*.*

(ii) *Soient* X *un k-schéma séparable et localement de type fini, et* $f : X \to G$ *un k-morphisme. Posons* $\Gamma'_G(f) = \bigcup_{n \geqslant 1} f^n(X^n)$*. Alors* $\Gamma'_G(f)_0$ *est le sous-groupe de* $G_0 = G(k)$ *engendré par* $f(X)_0$*.*

372 (iii) *En particulier, soient* A *et* B *deux sous-schémas en groupes lisses de* G *; posons* $\Gamma' = \bigcup_{n \geqslant 1} \nu^n(A \times_k B)^n)$ (notations de 7.2 (vii))*. Alors* Γ'_0 *est le groupe des commutateurs de* A_0 *et* B_0 *dans* G_0*.*

Montrons d'abord la première assertion. Il est clair que $A_0 \cdot B_0 \subset (A \cdot B)_0$. Réciproquement, soit $z \in (A, B)_0$. Alors $\mu^{-1}(z)$ est un fermé de $G \times_k G$, et $A \times_k B$ (cf. 3.0) est une partie ind-constructible de $G \times_k G$, si bien que $\mu^{-1}(z) \cap (A \times_k B)$ est une partie ind-constructible non vide de $G \times_k G$; elle contient donc un point fermé de G (EGA IV 10.1.2) dont les projections x et y sont des points fermés de G (EGA IV 10.4.7) tels que $x \in A$, $y \in B$ et $x \cdot y = z$, si bien que $(A, B)_0 = A_0 \cdot B_0$.

Pour montrer la seconde assertion, remarquons que, f^n étant localement de type fini, $f^n(X^n)$ est une partie ind-constructible de G (EGA IV_4, 1.9.5). La première assertion permet alors de montrer par récurrence que, si on pose $A = f(X)_0$, on a : $f^n(X^n)_0 = (A \cup A^{-1})^n$, et par conséquent, $(\Gamma'_G(f))_0 = \bigcup_{n \geqslant 1} (f^n(X^n))_0 = \bigcup_{n \geqslant 1} (A \cup A^{-1})^n$, qui est le sous-groupe de G_0 engendré par $A = f(X)_0$.

La troisième assertion résulte de la seconde et des définitions.

Corollaire 7.10. — *Sous les conditions de* 7.8*, si k est algébriquement clos, alors* $(A, B)(k)$ *est le sous-groupe des commutateurs de* $A(k)$ *et* $B(k)$ *dans* $G(k)$*.*

En effet, il suffit d'appliquer 7.9 (iii), 7.8 et 7.6.

8. Schémas en groupes résolubles et nilpotents

8.1. — Soient $\mathscr{C}$ une catégorie, $\mathcal{T}$ une topologie sur $\mathscr{C}$ (cf. IV § 4), G un préfaisceau en groupes sur $\mathscr{C}$, A et B deux sous-préfaisceaux en groupes de G. On note $\underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ le préfaisceau en groupes des commutateurs des préfaisceaux A et B dans le préfaisceau G. Si G, A et B sont des *faisceaux*, on note $\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ le faisceau associé au **373**
préfaisceau $\underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$.

Si A est invariant dans G, on montre aisément que $\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{G}, \mathrm{G})$ (resp. $\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{G}, \mathrm{A})$) est le plus petit sous-faisceau en groupes invariant C de G tel que le faisceau quotient G/C (resp. A/C) soit commutatif (resp. central dans G/C).

Proposition 8.2. — *Soient $\mathscr{C}$ une catégorie, $\mathcal{T}$ une topologie sur $\mathscr{C}$,* G *un faisceau en groupes sur $\mathscr{C}$, n un entier positif ou nul. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Si on pose :* $\mathrm{K}_0 = \mathrm{G}$*, et pour* $p \geqslant 1$*,* $\mathrm{K}_p = \underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{K}_{p-1}, \mathrm{K}_{p-1})$ (*resp.* $\mathrm{K}_p = \underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{G}, \mathrm{K}_{p-1})$)*, alors* K_n *est le préfaisceau en groupes unité.*

(ii) *Si on pose* $\mathrm{K}'_0 = \mathrm{G}$*, et pour* $p \geqslant 1$*,* $\mathrm{K}'_p = \underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{K}'_{p-1}, \mathrm{K}'_{p-1})$ (*resp.* $\mathrm{K}'_p = \underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{G}, \mathrm{K}'_{p-1})$)*, alors* K'_n *est le faisceau en groupes unité.*

(iii) *Il existe une suite* $\mathrm{H}_0 = \mathrm{G}, \mathrm{H}_1, \ldots, \mathrm{H}_n$ *de sous-faisceaux* invariants *de* G*, telle que, quel que soit i, le faisceau quotient* $\mathrm{H}_i/\mathrm{H}_{i+1}$ (*resp.* G/H_i) *soit commutatif* (*resp. central dans* $\mathrm{G}/\mathrm{H}_{i+1}$)*, et que* H_n *soit le faisceau unité.*

Il est clair que $\mathrm{K}_n \subset \mathrm{K}'_n$; par conséquent (ii) entraîne (i). Montrons que (i) entraîne (ii). Il résulte de (IV, Remarque 4.4.7) que si on note $\overline{\mathrm{A}}$ le faisceau associé à un préfaisceau A, et si A et B sont deux sous-préfaisceaux en groupes de G, alors on a : $\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\overline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{B}}) \subset \overline{\underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A}, \mathrm{B})}$. On en déduit aisément par récurrence qu'on a $\mathrm{K}'_p \subset \overline{\mathrm{K}}_p$, donc $\mathrm{K}'_n \subset \overline{\mathrm{K}}_n$; par conséquent, si K_n est le préfaisceau unité, $\overline{\mathrm{K}}_n = \mathrm{K}_n$ est le faisceau unité, donc K'_n est le faisceau unité.

Enfin les conditions (ii) et (iii) sont équivalentes d'après la remarque (8.1).

Lorsque ces conditions sont satisfaites, le faisceau G est dit *résoluble de classe n* **374**
(resp. *nilpotent de classe n*). Lorsqu'il existe un entier n tel que ces conditions soient satisfaites, on dit que G est *résoluble* (resp. *nilpotent*). On notera que cette condition est indépendante de $\mathcal{T}$.

Proposition 8.3. — *Soient k un corps,* S *un k-schéma non vide,* Ω *une extension* algébriquement close *de k,* G *un k-groupe* lisse de type fini. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est résoluble de classe n* (*resp. nilpotent de classe n*).

(ii) $\mathrm{G} \times_k \mathrm{S}$ *est résoluble de classe n* (*resp. nilpotent de classe n*).

(iii) *Le groupe* $\mathrm{G}(\Omega)$ *est résoluble de classe n* (*resp. nilpotent de classe n*).

(iv) *Si on pose* $\mathrm{K}_0 = \mathrm{G}$*, et pour* $p \geqslant 1$*,* $\mathrm{K}_p = (\mathrm{K}_{p-1}, \mathrm{K}_{p-1})$ (*resp.* $\mathrm{K}_p = (\mathrm{G}, \mathrm{K}_{p-1})$) (*cf.* 7.8)*,* K_n *est le k-groupe unité.*

L'équivalence des conditions (i) et (ii) résulte de la proposition 8.2, étant donné que la formation du préfaisceau en groupes des commutateurs commute aux changements de base (IV 1.3).

L'équivalence des conditions (i) et (iv) résulte de (7.8)

Pour montrer que les conditions (iii) et (iv) sont équivalentes, on peut supposer que $k = \Omega$, et alors l'équivalence des conditions (iii) et (iv) résulte de 7.10.

Proposition 8.4. — *Soit* G *un* S*-groupe* de présentation finie*, tel que pour tout* $s \in \mathrm{S}$*,* G_s *soit* lisse *sur* $\kappa(s)$*. Soit* T *l'ensemble des* $s \in \mathrm{S}$ *tels que* G_s *soit* résoluble (*resp.* nilpotent)*. Alors* T *est localement constructible dans* S*. Si on suppose de plus*
375 G *plat et séparé sur* S (*i.e. lorsque* G *est lisse de présentation finie et séparé sur* S)*, alors* T *est fermé dans* S*.*

376 Il est clair qu'on peut supposer S affine d'anneau A. Il existe alors, d'après 10.1 et 10.10 b), (*) un sous-anneau noethérien A′ de A et un A′-groupe de type fini G′ tel que $\mathrm{G}' \otimes_{\mathrm{A}'} \mathrm{A}$ soit isomorphe à G. De plus (EGA IV 10.8.5 et 11.2.6), si G est plat et séparé sur S, on peut supposer G′ plat et séparé sur $\operatorname{Spec} \mathrm{A}'$. De même (EGA IV, 9.7.7 et 9.3.3), on peut supposer que, pour tout $s' \in \mathrm{S}'$, $\mathrm{G}'_{s'}$ est lisse sur $\kappa(s')$. D'autre part puisque, si s' désigne l'image de s dans $\operatorname{Spec} \mathrm{A}'$, on a : $\mathrm{G}'_{s'} \otimes_{\kappa(s')} \kappa(s) \simeq \mathrm{G}_s$, pour que G_s soit résoluble (resp. nilpotent), il faut et il suffit qu'il en soit de même de $\mathrm{G}'_{s'}$ (8.3). Nous somme donc ramenés au cas où S est un schéma affine noethérien.

Montrons alors que T est constructible. En appliquant le critère (EGA 0_{III}, 9.2.3), on voit, en raisonnant comme précédemment, qu'on est ramené à montrer que, dans le cas où S est noethérien et *intègre*, T ou $\mathrm{S} - \mathrm{T}$ contient un ouvert non vide de S.

Supposons donc S intègre noethérien de point générique η. Posons, quel que soit $s \in \mathrm{S}$, $\mathrm{K}^0_s = \mathrm{G}_s$, et $\mathrm{K}^p_s = (\mathrm{K}^{p-1}_s, \mathrm{K}^{p-1}_s)$ (resp. $\mathrm{K}^p_s = (\mathrm{G}, \mathrm{K}^{p-1}_s)$). Montrons d'abord que la suite des sous-schémas fermés K^p_η est stationnaire ; il résulte de (7.3(v)) que chacun des K^p_η est *invariant*, donc la suite des K^p_η est décroissante ; cette suite est alors stationnaire puisque G_η est noethérien ; il existe donc un entier n tel que, pour tout $p \geqslant n$, on ait : $\mathrm{K}^p_\eta = \mathrm{K}^n_\eta$.

377 D'autre part, nous verrons en 10.12 et 10.13 qu'il existe un ouvert non vide S′ de S et un S′-groupe *de présentation finie* D tel que pour tout $s \in \mathrm{S}'$, on ait $\mathrm{D}_s = \mathrm{K}^n_s$ et $(\mathrm{D}_s, \mathrm{D}_s) = \mathrm{D}_s$ (resp. $(\mathrm{G}_s, \mathrm{D}_s) = \mathrm{D}_s$). Nous pouvons supposer que $\mathrm{S}' = \mathrm{S}$. Alors, quel que soit $s \in \mathrm{S}$, et quel que soit $p \geqslant n$, on a $\mathrm{D}_s = \mathrm{K}^p_s$, si bien que G_s est résoluble (resp. nilpotent) si et seulement si D_s est isomorphe au $\kappa(s)$-groupe unité.

Mais d'après EGA IV_3, 9.6.1 (xi), l'ensemble des $s \in \mathrm{S}'$ tels que le morphisme structural $\mathrm{D}_s \to \operatorname{Spec} \kappa(s)$ soit un isomorphisme est constructible, donc ou bien est rare, ou bien contient un ouvert non vide de S.

Montrons que si G est plat et séparé sur S, T est fermé ; puisque T est localement constructible, pour que T soit fermé (EGA IV 1.10.1), il faut et il suffit que T soit stable par spécialisation.

(*) Nous nous servirons au cours de cette démonstration de résultats établis au numéro 10, qui ne dépendent, pas plus que le numéro 9, du présent n°8.

Soit donc $s \in \mathrm{S}$ et s' une spécialisation de s dans S. Puisqu'on s'est ramené au cas où S est noethérien, d'après EGA II, 7.1.9, il existe un de valuation discrète A et un morphisme $\mathrm{Spec(A)} \to \mathrm{S}$ tel que s (resp. s') soit l'image du point générique α (resp. du point fermé a) de Spec(A). Il suffit alors de montrer que si on pose $\mathrm{G}' = \mathrm{G} \otimes_{\mathrm{S}} \mathrm{A}$, et si G'_α est résoluble (resp. nilpotent), il en est de même de G'_a. Remarquons que, puisque G est plat et séparé sur S, G'_α est plat et séparé sur A, de sorte qu'on est ramené au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète A.

Puisque G'_α est supposé résoluble (resp. nilpotent), il existe un entier q tel que K^q_α (avec les notations introduites précédemment) soit isomorphe au $\kappa(\alpha)$-groupe unité. Soit $\overline{\mathrm{K}^n}$ l'adhérence schématique (au sens de EGA 2.8.5) de K^n_α dans G. Montrons, par récurrence sur p, que $(\overline{\mathrm{K}^p_\alpha})_a \supset \mathrm{K}^p_a$. Notons d'abord que, puisque G est *plat* sur A, $\overline{\mathrm{G}_\alpha}$ est égal à G (EGA IV_2, 2.8.5), donc $(\overline{\mathrm{K}^0_\alpha})_a = \mathrm{K}^0_a$. 378

Notons $\overline{\nu}$, $\overline{\nu}_a$, ν_a, ν_α les morphismes :

$$\overline{\mathrm{K}^p_\alpha} \underset{\mathrm{A}}{\times} \overline{\mathrm{K}^p_\alpha} \longrightarrow \mathrm{G},\quad (\overline{\mathrm{K}^p_\alpha})_a \underset{\kappa(a)}{\times} (\overline{\mathrm{K}^p_\alpha})_a \longrightarrow \mathrm{G}_a,\quad \mathrm{K}^p_a \underset{\kappa(a)}{\times} \mathrm{K}^p_a \longrightarrow \mathrm{G}_a,\quad \mathrm{K}^p_\alpha \underset{\kappa(\alpha)}{\times} \mathrm{K}^p_\alpha \longrightarrow \mathrm{G}_\alpha$$

resp.

$$\mathrm{G} \underset{\mathrm{A}}{\times} \overline{\mathrm{K}^p_\alpha} \longrightarrow \mathrm{G},\quad \mathrm{G}_a \underset{\kappa(a)}{\times} (\overline{\mathrm{K}^p_\alpha})_a \longrightarrow \mathrm{G}_a,\quad \mathrm{G}_a \underset{\kappa(a)}{\times} \mathrm{K}^p_a \longrightarrow \mathrm{G}_a,\quad \mathrm{G}_\alpha \underset{\kappa(\alpha)}{\times} \mathrm{K}^p_\alpha \longrightarrow \mathrm{G}_\alpha,$$

définis comme dans 7.2 (vii). Alors, puisque ν_α se factorise à travers K^{p+1}_α, $\overline{\nu}$ se factorise à travers $\overline{\mathrm{K}^{p+1}_\alpha}$, qui est évidemment un sous-schéma en groupes de G, donc $\overline{\mathrm{K}^{p+1}_\alpha}$ contient $\Gamma_{\mathrm{G}}(\overline{\nu})$. D'après 7.1 (iii), $\Gamma_{\mathrm{G}}(\overline{\nu})_a = \Gamma_{\mathrm{G}_a}(\overline{\nu}_a)$; d'après, l'hypothèse de récurrence,

$$\mathrm{K}^p_a \underset{\kappa(a)}{\times} \mathrm{K}^p_a \subset (\overline{\mathrm{K}^p_\alpha})_a \underset{\kappa(a)}{\times} (\overline{\mathrm{K}^p_\alpha})_a \qquad \text{resp.} \qquad \mathrm{G}_a \underset{\kappa(a)}{\times} \mathrm{K}^p_a \subset \mathrm{G}_a \underset{\kappa(a)}{\times} (\overline{\mathrm{K}^p_\alpha})_a,$$

si bien que $\mathrm{K}^{p+1}_a = \Gamma_{\mathrm{G}_a}(\nu_a) \subset \Gamma_{\mathrm{G}_a}(\overline{\nu}_a) \subset (\overline{\mathrm{K}^{p+1}_\alpha})_a$.

Mais puisque K^q est isomorphe $\kappa(\alpha)$-groupe unité, et que le A-groupe unité est plat sur A et est isomorphe à un sous-schéma fermé de G (puisque G est *séparé* sur A, cf. 5.1), il résulte de EGA IV_2, 2.8.5 que $\overline{\mathrm{K}^q_\alpha}$ est isomorphe au A-groupe unité, donc que $\mathrm{K}^q_a \subset (\overline{\mathrm{K}^q_\alpha})_a$ est isomorphe au $\kappa(a)$-groupe unité, si bien que G_a est résoluble (resp. nilpotent), cqfd

9. Faisceaux quotients

Le présent numéro se borne pour l'essentiel à un rappel dans le cas particulier d'espaces homogènes, de groupes, de faits généraux bien connus sur le passage au quotient par des relations d'équivalences plates (cf. Exp. IV).

Définition 9.1. — Etant donné un *monomorphisme* $u : \mathrm{G}' \to \mathrm{G}$ de S-groupes, on note G/G' (resp. $\mathrm{G}'\backslash\mathrm{G}$) et on appelle *faisceau quotient à droite* (resp. *à gauche*) *de* G *par* G′ le faisceau (pour la topologie (fpqc)) quotient de G par la relation d'équivalence 379 définie par le monomorphisme : $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}' \xrightarrow{\delta\circ(\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times u)} \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$ (resp. $\mathrm{G}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \xrightarrow{\gamma\circ(u\times \mathrm{id}_{\mathrm{G}})}$

$G \times_S G$)où δ (resp. γ) désigne l'automorphisme de $G \times_S G$ défini par $(g, h) \mapsto (g, gh)$ (resp. $(h, g) \mapsto hg, g)$) pour $g \in G(T)$ et $h \in G'(T)$.

Proposition 9.2. — *Soit* $u : G' \to G$ *un* monomorphisme *de* S-*groupes. Supposons que* G/G' *soit* représentable *par un* S-*schéma* G''. *Alors :*

(i) *Le morphisme canonique* $p : G \to G''$ *est* couvrant *pour la topologie* (fpqc).

(ii) *Si on pose* $\varepsilon'' = p \circ \varepsilon$ (*ce morphisme s'appelle* section unité de G''), *les diagrammes suivants sont cartésiens :*

$$\begin{tikzcd} G \times_S G' \arrow[r, "\mu\circ(\mathrm{id}_G \times u)"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & G \arrow[d, "p"] \\ G \arrow[r, "p"] & G'' \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} G' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\pi'"'] & G \arrow[d, "p"] \\ S \arrow[r, "\varepsilon''"] & G'' \end{tikzcd} \quad .$$

En particulier, u est une immersion.

(iii) *Il existe sur* G'' *une structure unique de* S-*schéma à* groupe d'opérateurs *à gauche* G, *telle que p soit un morphisme de* S-*schémas à groupe d'opérateurs* G.

(iv) *Si on suppose de plus que* G' *est* invariant *dans* G, *il existe sur* G'' *une structure unique de* S-groupe *telle que p soit un morphisme de* S-*groupes.*

(v) *Soit* S_0 *un* S-*schéma ; posons* $G_0 = G \times_S S_0$, *et* $G'_0 = G' \times_S S_0$ *; alors* G_0/G'_0 *est représentable par* $G''_0 = G'' \times_S S_0$.

(vi) *Soit* $\mathscr{P}$ *une propriété pour un* S-*morphisme. Supposons* $\mathscr{P}$ stable par chan-
380 gement de base *; alors si* $p : G \to G''$ *vérifie* $\mathscr{P}$, *il en est de même du morphisme structural* $\pi' : G' \to S$.

(vii) *Soit* $\mathscr{P}$ *une propriété pour un* S-*morphisme. Supposons* $\mathscr{P}$ de nature locale pour la topologie (fpqc) (*cf.* 2.0 *et* 2.1.2). *Alors, pour que le morphisme* $p : G \to G''$ *vérifie* $\mathscr{P}$, il faut et il suffit *qu'il en soit de même de* $\pi' : G' \to S'$.

(viii) *Soit* $\mathscr{P}$ *une propriété pour un* S-*morphisme ; supposons* $\mathscr{P}$ de nature locale pour la topologie (fpqc), *et* stable par composition *; alors, si les morphismes structuraux* $G'' \to S$ *et* $G' \to S$ *vérifient* $\mathscr{P}$, *il en est de même du morphisme structural* $G \to S$.

(ix) *Supposons* G réduit *; alors* G'' *est* réduit.

(x) *Pour que* G'' *soit* séparé *sur* S, *il faut et il suffit que u soit une immersion fermée, ou encore que* ε'' *soit une immersion fermée.*

(xi) *Pour que* G' *soit* plat *sur* S, *il faut et il suffit que p soit un morphisme* plat (*ou, ce qui revient au même,* fidèlement plat).

Dans ce cas, pour que G'' *soit* plat *sur* S, *il faut et il suffit que* G *soit* plat *sur* S.

(xii) *Pour que* G' *soit* plat et localement de présentation finie *sur* S, *il faut et il suffit que* $p : G \to G''$ *soit* fidèlement plat et localement de présentation finie.

Sous ces conditions, pour que G'' *soit* localement de présentation finie (*resp.* localement de type fini, de type fini, lisse, étale, non ramifié, localement quasi-fini, quasi-fini) *sur* S, *il suffit qu'il en soit de même de* G *sur* S, (*et la condition est également* nécessaire dans les deux premiers cas, *cf.* (viii)).

(xiii) *Supposons* G' plat et de présentation finie *sur* S.

a) *Alors* p *est* de présentation finie et fidèlement plat *;*

b) *de plus, pour que* G *soit* de présentation finie *sur* S*, il faut et il suffit qu'il en soit de même de* G''*.*

Rappelons que la relation d'équivalence considérée est effective universelle (IV 4.9). 381
Alors les assertions (i), (iii), (iv), (v) et la première assertion de (ii) résultent de IV 4.3, 2.2, 2.4, 4.5 et 3.2 (iii). La seconde assertion de (ii) résulte de la première, comme le montre le diagramme cartésien suivant, puisque $(G \times_S G') \times_G S$ est isomorphe à G' :

$$\begin{tikzcd}
G' \arrow[r, "((\varepsilon\circ\pi'),\, \mathrm{id}_{G'})"] \arrow[d, "\pi'"'] & G \times_S G' \arrow[r, "\mu\circ(\mathrm{id}_G \times u)"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & G \arrow[d, "p"] \\
S \arrow[r, "\varepsilon"] & G \arrow[r, "p"] & G''
\end{tikzcd}
.$$

Enfin, il est clair que ε'' est une S-section de G'', donc une immersion (EGA I, 5.3.13) ; d'après le diagramme cartésien précédent, il en est de même de u, ce qui achève de montrer (ii). De plus, (vi) est une conséquence immédiate du second diagramme cartésien de (ii).

Montrons (vii). D'après (i), p est couvrant pour la topologie (fpqc) ; donc, d'après (ii), pour montrer que p vérifie $\mathscr{P}$, il suffit de montrer que la première projection $\mathrm{pr}_1 : G \times_S G' \to G$ vérifie $\mathscr{P}$, ce qui résulte de ce que $\mathscr{P}$ est stable par changement de base, puisque pr_1 provient de π' par changement de base.

Il est clair que (viii) résulte de (vii), car $\pi = \pi'' \circ p$, où $\pi'' : G'' \to S$ désigne le morphisme structural.

Montrons (ix). D'après (i), p est un épimorphisme ; muisque G est réduit, p se factorise à travers l'immersion $G''_{\text{réd}} \to G$, qui est donc aussi un épimorphisme, donc un isomorphisme (IV 4.4).

Montrons (x). Si G'' est séparé sur S, ε'' est une immersion fermée (EGA I 5.4.6). d'après (ii), si ε'' est une immersion fermée, il en est de même de u ; enfin, si u est une immersion fermée, il en est de même de $\delta \circ (\mathrm{id}_G \times u) : G \times_S G' \to G \times_S G$; donc, d'après le lemme (9.2.1) ci-dessous, G'' est séparé sur S. 382

L'assertion (xi) résulte de (vii) et de EGA IV_2, 2.2.13.

L'assertion (xii) résulte de (vii), de EGA IV_4, 17.7.5 et 17.7.7, et de ce que, p étant universellement ouvert, quel que soit $s \in S$, si l'espace sous-jacent à G_s est discret, il en est de même de l'espace sous-jacent à G''_s.

Enfin, l'assertion (xiii) résulte de (vii), (viii), et de EGA IV_4, 17.7.5.

Lemme 9.2.1. — *Soient* X *un* S*-schéma et* R *une relation d'équivalence définie sur* X *par le monomorphisme* $v : R \to X \times_S X$*. Supposons* R *effective. Alors :*

(i) *v est une immersion.*

(ii) *Pour que* $Y = X/R$ *soit séparé sur* S*, il faut et il suffit que v soit une* immersion *fermée.*

Rappelons (IV 3.2) que par définition le morphisme naturel $R \to X \times_Y X$ est un *isomorphisme*. On en déduit (EGA I, 5.3.5) le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "v"] \arrow[d] & X \times_S X \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "\Delta_{Y/S}"] & Y \times_S Y \end{tikzcd} .$$

Alors, puisque $\Delta_{Y/S}$ est une immersion (EGA I, 5.3.9), il en est de même de v. De même, si Y est séparé sur S, $\Delta_{Y/S}$ est une immersion fermée, donc il en est de même de v. Réciproquement, puisque p est couvrant pour la topologie (fpqc) (IV 4.3), que la propriété pour un morphisme d'être une immersion fermée est de nature locale pour
383 la topologie (fpqc) (EGA IV_2, 2.7.1) et que $p \times_S p$ est aussi couvrant pour la topologie (fpqc) (IV 2.3), si v est une immersion fermée, il en est de même de $\Delta_{Y/S}$, donc Y est séparé sur S.

Remarque 9.2.2. — Sous les hypothèses générales de 9.2, si on suppose G′ *plat* et *localement de présentation finie* sur S, alors p est couvrant pour la topologie (fpqc) (9.2 (vii)), donc les assertions (vii) et (viii) de 9.2 peuvent être étendues aux propriétés $\mathscr{P}$ de nature locale pour la topologie (fppf).

Remarque 9.3. — a) La question de savoir si un quotient G/G′ est ou non représentable est souvent délicate ; dans ce séminaire nous démontrons la représentabilité de certains quotients particuliers.

En général, pour pouvoir affirmer que le quotient G/G′ est représentable, il ne suffit pas de supposer G et G′ de présentation finie sur S et G′ plat sur S, car même lorsque G et G′ sont lisses sur S, il se peut que G soit à fibres connexes, et que G′ ne soit pas fermé dans G ; par suite G/G′ devrait être séparé (5.3 ce qui est en contradiction avec 9.2 (x). Pour obtenir un tel contre-exemple, on peut prendre pour S le spectre d'un anneau de valuation discrète, poser $G = \mathbb{G}_{m,S}$. Considérons d'autre part un entier $n > 1$, *inversible* sur S ; alors $\boldsymbol{\mu}_n = \mathrm{Ker}(G \xrightarrow{n} G)$ est un sous-groupe fermé de G étale sur S (cf. VIIA). Soit G′ le sous-groupe ouvert de $\boldsymbol{\mu}_n$ obtenu en ôtant de $\boldsymbol{\mu}_n$ la partie fermée de la fibre fermée de $\boldsymbol{\mu}_n$ complémentaire de l'origine. Alors G′ n'est pas fermé dans G, donc G/G′ n'est pas représentable. (On peut aussi fabriquer de tels exemples où G′ est lisse à fibres connexes.)

b) Il n'est pas exclu que G/G′ soit représentable en revanche, lorsque G et G′ sont
384 *de présentation finie* sur S, et que G′ est *plat* sur S et *fermé* dans G (*) . Sous ces hypothèses, on sait que G/G′ est représentable dans les cas particuliers suivants :

1° – S est le spectre d'un anneau artinien (cf. VI_A 2).
2° – G′ est propre sur S et G quasi-projectif sur S (cf. V 1).
3° – S est régulier de dimension 1 (Raynaud, à paraître).

(*) C'est trop optimiste, comme le montre M. Raynaud dans sa thèse (loc. cit. X 14).

10. Passage à la limite projective dans les schémas en groupes et les schémas à groupe d'opérateurs

10.0. — Rappelons le résultat essentiel de EGA IV_3, § 8.8 : Etant donnée la situation suivante : S_0 un schéma *quasi-compact et quasi-séparé*, I un ensemble préordonné filtrant croissant, $(\mathscr{A}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ un système inductif de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}$-Algèbres commutatives quasi-cohérentes, $\mathscr{A} = \varinjlim \mathscr{A}_i$, $\mathrm{S}_i = \operatorname{Spec} \mathscr{A}_i$ pour $i \in \mathrm{I}$, et $\mathrm{S} = \operatorname{Spec} \mathscr{A}$, alors la catégorie des S-schémas *de présentation finie* est déterminée à équivalence près par la donnée des catégories des S_i-schémas de présentation finie, des foncteurs entre ces catégories $\rho_{ij} : \mathrm{X}_i \mapsto \mathrm{X}_i \times_{\mathrm{S}_i} \mathrm{S}_j$ pour $i \leqslant j$, et isomorphismes de transitivité $\rho_{jk} \circ \rho_{ij} \xrightarrow{\sim} \rho_{ik}$. Précisons. Etant donné $j \in \mathrm{I}$, et un S_j-schéma de présentation finie X_j, nous poserons, pour tout $i \in \mathrm{I}$ tel que $i \geqslant j$, $\mathrm{X}_i = \mathrm{X}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i$, et $\mathrm{X} = \mathrm{X}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}$. Alors (EGA IV_3, 8.8.2) :

(i) Etant donné $j \in \mathrm{I}$, et deux S_j-schémas de présentation finie X_j et Y_j, l'application canonique de $\varinjlim_{i\geqslant j} \operatorname{Hom}_{\mathrm{S}_i}(\mathrm{X}_i, \mathrm{Y}_i)$ dans $\operatorname{Hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ est bijective.

(ii) Pour tout S-schéma de présentation finie X, il existe un indice $j \in \mathrm{I}$, un S_j-schéma de présentation finie X_j et un S-isomorphisme $\mathrm{X} \xrightarrow{\sim} \mathrm{X}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}$.

On en conclut (EGA IV_3, 8.8.3) que, chaque fois qu'on aura un diagramme D 385
portant sur un nombre fini d'objets et de flèches de la catégorie des S-schémas de présentation finie, on peut trouver un indice $i \in \mathrm{I}$ et un diagramme D_i dans la catégorie des S_i-schémas de présentation finie, tels que le diagramme D provienne à isomorphisme près du diagramme D_i par changement de base $\mathrm{S} \to \mathrm{S}_i$. On peut même trouver i et D_i tels que tout carré cartésien de D provienne d'un carré cartésien de D_i.

10.1. — De plus, un grand nombre de propriétés courantes pour un morphisme, stables par changement de base, possèdent la propriété suivante ; étant donné un indice $j \in \mathrm{I}$, deux S_j-schémas de présentation finie X_j et Y_j et un S_j-morphisme $u_j : \mathrm{X}_j \to \mathrm{Y}_j$, pour que $u = u_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}$ ait la propriété $\mathscr{P}$, il faut et il suffit qu'il existe un indice $i \in \mathrm{I}$ tel que $j \leqslant i$ et que $u_i = u_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i$ ait la propriété $\mathscr{P}$. Il en est ainsi dans le cas où $\mathscr{P}$ est l'une des propriétés suivantes pour un morphisme : être séparé, surjectif, radiciel, affine, quasi-affine, fini, quasi-fini, propre, projectif, quasi-projectif, un isomorphisme, un monomorphisme, une immersion, une immersion ouverte, une immersion fermée , lisse, non ramifié ou étale (EGA IV 8.10.5, 11.2.6 et 17.7.6).

Remarquons qu'il en est encore ainsi *dans le cas où $\mathscr{P}$ est la propriété d'être couvrant pour la topologie fidèlement plate localement de présentation finie* (notée fppf) ; en effet, étant donnés deux S-schémas de présentation finie X et Y, et un S-morphisme $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, il résulte de IV, 3.1 (i) que, pour que u soit couvrant pour la topologie (fppf), il faut et il suffit qu'il existe un S-schéma Z et un S-morphisme $v : \mathrm{Z} \to \mathrm{Y}$ fidèlement plat et de présentation finie qui se factorise à travers u.

Le but de ce numéro est de donner des variantes de ce genre de résultats pour la ca- 386
tégorie des S-groupes de présentation finie, celle des S-schémas à groupe d'opérateurs, et pour certaines propriétés pour des monomorphismes de groupes (être invariant, central à faisceau quotient représentable, etc.).

Les deux résultats préliminaires de ce type sont les suivants :

10.2. — *Dans la situation rappelée au début de* (10.0)*, soient* $j \in \mathrm{I}$, G_j *et* H_j *deux* S_j*-groupes de présentation finie ; posons, pour tout* $i \in \mathrm{I}$ *tel que* $j \leqslant i$, $\mathrm{G}_i = \mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i$, $\mathrm{G} = \mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}$*, et définissons de même* GH_i *et* H*. Alors l'application canonique de* $\varinjlim_{i \geqslant j} \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_i\text{-gr.}}(\mathrm{G}_i, \mathrm{H}_i)$ *dans* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}\text{-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ *est bijective.*

10.3. — *Dans la situation rappelée au début de* (10.0)*, soit* G *un* S*-groupe de présentation finie ; alors il existe un indice* $j \in \mathrm{I}$*, un* S_j*-groupe de présentation finie* G_j*, et un* S*-isomorphisme de groupes de* G *sur* $\mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}$.

Les assertions 10.2 et 10.3 sont des conséquences faciles de 10.0 et 10.1, compte tenu de l'interprétation de la structure de S-groupe donnée en EGA 0_{III}, 8.2.5 et 8.2.6.

10.4. — *Soient* $j \in \mathrm{I}$, G_j *et* H_j *deux* S_j*-groupes de présentation finie, et* $u_j : \mathrm{G}_j \to \mathrm{H}_j$ *un morphisme de* S_j*-groupes. Pour que* $u = u_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}$ *soit un monomorphisme central* (*resp. un monomorphisme invariant*)*, il faut et il suffit qu'il existe* $i \in \mathrm{I}$, $i \geqslant j$ *tel que* $u_i = u_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i$ *ait la même propriété.*

C'est une conséquence immédiate de 10.0 et 10.1, compte-tenu de la caractérisation donnée en 6.7 des monomorphismes de groupes centraux et invariants.

387

Corollaire 10.5. — *Soit* $j \in \mathrm{I}$*, et soit* G_j *un* S_j*-groupe de présentation finie. Pour que* $\mathrm{G} = \mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}$ *soit commutatif, il faut et il suffit qu'il existe* $i \in \mathrm{I}$, $i \geqslant j$*, tel que* $\mathrm{G}_i = \mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_j$ *soit commutatif.*

En effet, il revient au même de dire qu'un S-groupe est commutatif, ou que, considéré comme sous-schéma en groupes de lui-même, il est central.

Proposition 10.6. — *Dans la situation rappelée au début de* 10.0*, soient* $j \in \mathrm{I}$, G_j *un* S_j*-groupe de présentation finie,* G'_j *un sous-schéma en groupes de* G_j *plat et de présentation finie sur* S_j*. Pour que* $(\mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S})/(\mathrm{G}'_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S})$ *soit représentable pour la topologie* (fpqc)*, il faut et il suffit qu'il existe* $i \in \mathrm{I}$, $i \geqslant j$*, tel que* $(\mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i)/(\mathrm{G}'_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i)$ *soit représentable. .*

C'est une conséquence du lemme plus général suivant :

Lemme 10.7. — *Soit* $\mathcal{T}$ *la topologie* (fppf) *ou* (fpqc) *; soient* $j \in \mathrm{I}$, X_j *un* S_j*-schéma* de présentation finie*, et* R_j *une relation d'équivalence sur* X_j *définie par un* S_j*-monomorphisme* $v_j : \mathrm{R}_j \to \mathrm{X}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{X}_j$ *tel que le morphisme* $\mathrm{pr}_{1,j} \circ v_j : \mathrm{R}_j \to \mathrm{X}_j$ *déduit de* v_j *par composition avec la première projection* $\mathrm{X}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{X}_j \to \mathrm{X}_j$ *soit* plat et de présentation finie*. Alors, pour que le faisceau quotient* $(\mathrm{X}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S})/(\mathrm{R}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S})$ *pour la topologie* $\mathcal{T}$ *soit représentable, il faut et il suffit qu'il existe* $i \in \mathrm{I}$, $i \geqslant j$*, le faisceau quotient* $(\mathrm{X}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i)/(\mathrm{R}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i)$ *pour la topologie* $\mathcal{T}$ *soit représentable.*

Compte tenu des énoncés de EGA IV_2, 8.8.2, 8.8.3, 8.10.5 et 11.2.6 rappelés en 10.0, ce lemme est conséquence du résultat suivant :

Lemme 10.8. — *Soit* $\mathcal{T}$ *la topologie* (fppf) *ou* (fpqc) *; soient* X *un* S*-schéma* de pré-
388 sentation finie (*resp.* localement de présentation finie), R *une relation d'équivalence sur* X *définie par un monomorphisme* $v : \mathrm{R} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ *tel que* $\mathrm{pr}_1 \circ v$ *soit* plat et de présentation finie (*resp.* plat et localement de présentation finie). *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le faisceau quotient* X/R *pour la topologie* $\mathcal{T}$ *est* représentable.

(ii) *Il existe un* S*-schéma* de présentation finie (*resp.* localement de présentation finie) Y *et un morphisme* fidèlement plat $p : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *tel que le diagramme*

$$(\mathrm{D})\qquad \begin{tikzcd} \mathrm{R} \arrow[r, "\mathrm{pr}_1 \circ v"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2 \circ v"'] & \mathrm{X} \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{X} \arrow[r, "p"'] & \mathrm{Y} \end{tikzcd}$$

(où pr_1 et pr_2 sont les projections $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \rightrightarrows \mathrm{X}$) *soit cartésien.*

Notons d'abord que d'après IV, 3.2 et 4.3, pour que le faisceau X/R pour la topologie $\mathcal{T}$ soit représentable par Y, il faut et il suffit que le diagramme (D) soit cartésien et que p soit couvrant pour la topologie $\mathcal{T}$.

Montrons que (i) entraîne (ii). L'hypothèse (i) implique que le diagramme (D) est cartésien, donc que $\mathrm{pr}_1 \circ v$ se déduit de p par changement de base par p, et que p est couvrant pour la topologie (fpqc). Puisque $\mathrm{pr}_1 \circ v$ est fidèlement plat et de présentation finie, (resp. fidèlement plat et localement de présentation finie), il en est de même de p (EGA IV_2, 2.7.1), et comme X est de présentation finie (resp. localement de présentation finie) sur S, il en est de même de Y (EGA IV 17.7.4).

Montrons que (ii) entraîne (i). Il suffit de montrer que p est couvrant pour la topologie fppf ; or p est fidèlement plat par hypothèse, et est localement de présentation 389
finie car X et Y sont localement de présentation finie sur S.

10.9. — *Dans la situation rappelée au début de* (10.0)*, soient* $j \in \mathrm{I}$*, et* G_j *un* S_j*-groupe de présentation finie. Pour que* $\mathrm{G}^0 = (\mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S})^0$ *soit représentable, il faut et il suffit qu'il existe* $i \in \mathrm{I}$*,* $i \geqslant j$*, tel que* $(\mathrm{G}_i)^0 = (\mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i)^0$ *soit représentable.*

La condition est suffisante (3.3).

Montrons que la condition est nécessaire. En effet, G^0 est de présentation finie sur S et ouvert dans G (3.9). D'après (10.0), il existe $i \in \mathrm{I}$, $i \geqslant j$, et un sous-schéma en groupes ouvert G_i^0 de G_i tel que $\mathrm{G}_i^0 \times_{\mathrm{S}_i} \mathrm{S} = \mathrm{G}^0$. Le morphisme structural $\mathrm{G}^0 \to \mathrm{S}$ est connexe (i.e. à fibres géométriquement connexes (VI_{A} 1.1)). Alors, (EGA IV 9.3.3 et 9.7.7), quitte à augmenter i, on peut supposer que le morphisme structural $\mathrm{G}_i^0 \to \mathrm{S}$ est connexe, donc que l'espace sous-jacent à G_i^0 n'est autre que $\underline{(\mathrm{G}_i)^0}$ (3.10.1), donc que G_i^0 représente $(\mathrm{G}_i)^0$.

10.10. — Rappelons deux cas particuliers très utiles de la situation énoncée en 10.0 :

a) Etant donné un point x d'un schéma X, on pose $\mathrm{S}_0 = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ et on considère la famille $(\mathrm{S}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ filtrante décroissante des voisinages ouverts affines de x ; alors S =

$\operatorname{Spec} \mathscr{O}_{X,x}$. En particulier, si x est le point générique d'un schéma intègre X, on trouve $S = \operatorname{Spec} \kappa(x)$.

b) On pose $S_0 = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, et on considère la famille $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ préordonnée par inclu-
390 sion des sous-$\mathbb{Z}$-algèbres de type fini de l'anneau d'un schéma affine S. Etant donné que les $\mathscr{A}_i$ sont des anneaux noethériens, cela permet dans de nombreux cas de passer du cas noethérien au cas général.

Nous allons maintenant donner deux résultats concernant le cas particulier envisagé en a).

***Proposition 10.11.* —** *Soient* S *un schéma intègre de point générique* η*,* G *un* S*-groupe de présentation finie,* X *un* S*-schéma de présentation finie,* u *et* v *deux* S*-morphismes de* X *dans* G*,* $i : H \to G$ *et* $j : K \to G$ *deux monomorphismes de présentation finie. Alors :*

(i) *il existe un ouvert non vide* S' *de* S *tel que si on note* G' (*resp.* H'*, resp.* X'*, resp.* u'*, resp.* v') *la restriction de* G (*resp.* H*, resp.* X*, resp.* u*, resp.* v) *au-dessus de l'ouvert* S' *de* S*, le foncteur* $\underline{\mathrm{Transp}}(u', v')$ (*resp.* $\underline{\mathrm{Centr}}(u')$*, resp.* $\underline{\mathrm{Centr}}_{G'} H'$) *soit représentable par un sous-*S'*-schéma fermé de présentation finie* T'_1 (*resp.* C'_1*, resp.* C'_2) *de* G'*.*

(ii) *supposons que* K_η *soit fermé dans* G_η (*ce qui est le cas si* K *est un sous-*S*-schéma en groupes de* G (1.4.2))*; alors il existe un ouvert non vide* S' *de* S *tel que si on note* G' (*resp.* H'*, resp.* K') *la restriction de* G (*resp.* H*, resp.* K) *au-dessus de l'ouvert* S' *de* S*, le foncteur* $\underline{\mathrm{Transp}}_{G'}(H', K')$ (*resp.* $\underline{\mathrm{Norm}}_{G'} K'$) *soit représentable par un sous-*S'*-schéma fermé de présentation finie* T'_2 (*resp.* N') *de* G'*.*

(iii) *supposons que* H_η *et* K_η *soient fermés dans* G_η (*ce qui est le cas si* H *et* K *sont des sous-schémas en groupes de* G (1.4.2))*; alors il existe un ouvert non vide* S' *de* S *tel que si on note* G' (*resp.* H'*, resp.* K') *la restriction de* G (*resp.* H*, resp.* K)
391 *au-dessus de l'ouvert* S' *de* S*, le foncteur* $\underline{\mathrm{Transpstr}}_{G'}(H', K')$ *soit représentable par un sous-*S'*-schéma fermé de présentation finie de* G'*.*

Puisque G_η, X_η, H_η, K_η sont plats sur le corps $\kappa(\eta)$, et que G_η est séparé sur $\kappa(\eta)$ ($\mathrm{VI_A}$ 2), d'après (10.2, 10.10 a), EGA IV 8.8.2 et 8.10.5), il existe un ouvert affine S' de S tel que G' soit un S'-groupe de présentation fini, plat et séparé sur S', et que X', H' et K' soit plats et de présentation finie sur S'. Si on suppose H_η (resp. K_η) fermé dans G_η, on peut choisir S' de sorte que H' (resp. K') soit fermé dans G'. D'après (EGA IV 11.3.15), quitte à remplacer S' par un ouvert affine de S', on peut supposer que G', H', K' et X' sont essentiellement libres sur S' (au sens de VIII (6.1)). Il résulte alors de (VIII 5.5 b) et e) [(*)] que, sous les hypothèses de l'énoncé, les foncteurs considérés sont représentables par des sous-schémas fermés (donc de présentation finie sur S') de G'.

***Proposition 10.12.* —** *Soient* S *un schéma intègre,* G *un* S*-groupe de présentation finie,* A *et* B *deux sous-schémas en groupes de présentation finie de* G*, à fibre générique lisse, tels que* A *soit à fibre générique connexe* (*resp.* A *et* B *soient invariants dans*

[(*)] Voir la note (∗) dans la démonstration de la proposition 6.2.

G). *Alors il existe un ouvert non vide* S' *de* S *et un sous-schéma en groupes fermé,* D'*, de présentation finie, à fibres lisses, de* $G' = G|S'$*, tel que* D' *soit à fibres connexes* (*resp. soit invariant dans* G')*, et que* D' *représente le faisceau associé, pour la topologie* (fppf) *ou* (fpqc)*, au préfaisceau en groupes des commutateurs de* A *et* B *dans* G. *En particulier, pour tout* $s \in S'$*, on a* $D'_s = (A_s, B_s)$ *avec les notations de* (7.2 (vii)).

Soit η le point générique de S ; posons $D'_\eta = (A_\eta, B_\eta)$. D'après (7.8) (resp. 7.3 v)), 392
D'_η est connexe (resp. invariant dans G_η). D'après (10.1 et 10.10 a)), il existe un ouvert non vide S' de S et un sous-S'-schéma en groupes D' de présentation finie et fermé dans G', à fibres séparables (EGA IV 9.7.7 et 9.3.3), ayant D'_η pour fibre au point η, et tel que D' soit à fibres connexes (i.e. géométriquement connexes (VI_A 1.1)) (resp. soit invariant dans G') (EGA IV 9.7.7 et 9.3.3 (resp. (10.4))). De plus, nous avons vu, au cours de la démonstration de (7.8), qu'il existe un entier n tel que $\nu_\eta^n((A_\eta \times_{\kappa(\eta)} B_\eta)^n) = D'$, où $\nu_\eta : A_\eta \times_{\kappa(\eta)} B_\eta \to G_\eta$ est défini comme en (7.2 (vii)). Nous pouvons définir, par les mêmes formules qu'en (7.2 (vii)) et 7.1 (ii)), les morphismes $\nu' : A' \times_{S'} B' \to G'$ et $\nu'^n : (A' \times_{S'} B')^n \to G'$, on a bien $\nu'^n_{(\kappa(\eta))} = \nu^n_\eta$. Par conséquent (EGA IV 8.8.3, 8.10.5 et 11.2.6), on peut choisir S' tel que le morphisme ν'^n soit plat et se factorise à travers D', et que le morphisme $(A' \times_{S'} B')^n \to D'$ déduit de ν'^n soit surjectif. Alors (7.5) le morphisme $(A' \times_{S'} B')^{n+1} \to D'$ déduit de ν'^{n+1} est couvrant pour la topologie fppf (et a fortiori pour la topologie fpqc). Donc D' représente le faisceau associé, pour la topologie fppf ou fpqc, au préfaisceau des commutateurs de A et B dans G. De plus, pour tout $s \in S'$, le morphisme $(A_s \times_{\kappa(s)} B_s)^n \to D'_s$ déduit de ν_s^n est surjectif ; donc (7.6), (A_s, B_s) représente le faisceau des commutateurs de A_s et B_s dans G_s (pour la topologie fppf ou fpqc), d'où $D'_s = (A_s, B_s)$.

Corollaire 10.13. — *Soient* S *un schéma intègre de point générique* η*,* G *un* S*-groupe de présentation finie,* D *un sous-*S*-schéma en groupes de présentation finie de* G *à fibres lisses et invariant dans* G. *Supposons qu'on ait* $(D_\eta, D_\eta) = D_\eta$ (*resp.* $(G_\eta, D_\eta) =$
D_η)*. Il existe alors un ouvert non vide* S' *de* S *tel que pour tout* $s \in S'$*, on ait* 393
$(D_s, D_s) = D_s$ (*resp.* $(G_s, D_s) = D_s$).

Cela résulte immédiatement de 10.12 et de EGA IV_3, 8.8.2.5.

Les énoncés 10.2 et 10.3 concernant la catégorie des S-groupes de présentation finie s'étendent à la catégorie des couples formés d'un S-groupe de présentation finie et d'un S-schéma de présentation finie à groupe d'opérateurs G. De façon précise :

10.14. — (i) Dans la situation rappelée au début de (10.0), soient $j \in I$ et G_j et G'_j deux S_j-groupes de présentation finie, H_j (resp. H'_j) un S_j-schéma de présentation finie à groupe d'opérateurs G_j (resp. G'_j). Posons, pour $i \in I$, $i > j$, $G_i = G_j \times_{S_j} S_i$ et $G = G_j \times_{S_j} S$, et définissons de même G'_i, G', H_i, H, H'_i et H'. Notons $\mathrm{Dihom}_{S\text{-gr.}}((G,H),(G',H'))$ l'ensemble des di-morphismes de S-groupes et de S-schémas à groupe d'opérateurs du couple (G, H) dans le couple (G', H'). Alors l'application canonique de $\varinjlim_{i \geqslant j} \mathrm{Dihom}_{S_i\text{-gr.}}((G_i, H_i),(G'_i, H'_i))$ dans $\mathrm{Dihom}_{S\text{-gr.}}((G,H),(G',H'))$ est bijective.

(ii) Dans la situation rappelée au début de (10.0), soient G un S-groupe de présentation finie et H un S-schéma de présentation finie à groupe d'opérateurs G ; il existe alors un indice $j \in \mathrm{J}$, un S_j-groupe de présentation finie G_j, un S_j-schéma de présentation finie H_j à groupe d'opérateurs G_j et un di-isomorphisme de S-groupes et de S-schémas à groupes d'opérateurs de $(\mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}, \mathrm{H}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S})$ sur (G, H).

Définition 10.15. **—** Etant donné un S-foncteur en groupes G et un S-foncteur H à groupes d'opérateurs G, on dit que H est un S-*foncteur en espaces homogènes sous* G *pour la topologie* $\mathcal{T}$, si le morphisme canonique $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H} \to \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}$ (*défini par*
394 $(g, h) \mapsto (g \cdot h, h)$ pour $g \in \mathrm{G}(\mathrm{T})$, $h \in \mathrm{H}(\mathrm{T})$) est un épimorphisme de faisceaux pour la topologie $\mathcal{T}$.

Si G est un S-groupe et si H est un S-schéma à groupe d'opérateurs G, dire que H est un S-schéma en espaces homogènes sous G pour la topologie $\mathcal{T}$ revient donc à dire que le morphisme canonique $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H} \to \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}$ défini comme précédemment est couvrant pour la topologie $\mathcal{T}$ (IV 4.3).

De même, dire qu'un S-schéma H à groupe d'opérateurs un S-groupe G est un fibré principal homogène sous G pour la topologie $\mathcal{T}$ (IV 1.5) revient à dire (IV 5.1.6 (ii)) que le morphisme canonique $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H} \to \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}$ est un isomorphisme et que le morphisme structural $\mathrm{H} \to \mathrm{S}$ est couvrant pour la topologie $\mathcal{T}$.

10.16. — *Dans la situation rappelée au début de* (10.0)*, soient* $j \in \mathrm{I}$, G_j *un* S_j*-groupe de présentation finie,* H_j *un* S_j*-schéma de présentation finie à groupe d'opérateurs* G_j*. Pour que* $\mathrm{H} = \mathrm{H}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}$ *soit un* S*-schéma en espaces homogènes sous* $\mathrm{G} = \mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}$ (*resp. un fibré principal homogène sous* G) *pour la* topologie fidèlement plate localement de présentation finie*, il faut et il suffit qu'il existe un indice* $i \in \mathrm{I}$*,* $i \geqslant j$*, tel que* $\mathrm{H}_i = \mathrm{H}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i$ *soit un* S_i*-schéma en espaces homogènes sous* $\mathrm{G}_i = \mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i$ (*resp. un fibré principal homogène sous* G_i)*.*

Compte tenu de (10.14) et de (EGA IV 8.8.2, 8.8.3 et 8.10.5), l'énoncé résulte de la propriété concernant les morphismes couvrants pour la topologie fppf rappelée en (10.0).

11. Schémas en groupes affines

395

11.0. Notations. — Soient S un schéma, X un S-schéma, $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ le morphisme structural ; on pose $\mathscr{A}(\mathrm{X}) = f_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$.

Lemme 11.1. **—** *Soient* X *et* Y *deux* S*-schémas* quasi-compacts et quasi-séparés *sur* S*,* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *et* $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ *les morphismes structuraux. Alors l'homomorphisme canonique*

$$\varphi : \mathscr{A}(\mathrm{X}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{Y}) \longrightarrow \mathscr{A}(\mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{Y})$$

est un isomorphisme *dans chacun des cas suivants :*

a) f *et* g *sont* affines*,*

b) g (*ou* f) *est* plat et affine*,*

c) g *est* plat *et* $f_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$ *est un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-Module* plat*.*

Dans le cas b), on peut supposer que c'est g qui est plat et affine. Posons $\mathrm{S}' = \operatorname{Spec} \mathscr{A}(\mathrm{X})$, $\mathrm{Y}' = \mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$, $g' = g \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ et notons v le morphisme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. Alors Y est quasi-compact et quasi-séparé sur S, et, ou bien S′ est plat sur S (cas c) d'après (EGA III (1.4.15.5)), ou bien g est affine (cas a) et b)). Alors (EGA III 1.4.15 et IV 1.2.7 ou II 1.5.2), on a : $g'_*(\mathscr{O}'_{\mathrm{Y}}) = v^* g_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}) = \mathscr{A}(\mathrm{Y}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$.

D'après (EGA II 1.2.7), f se factorise à travers v au moyen d'un morphisme $p : \mathrm{G} \to \mathrm{S}'$, et on a : $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y} = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}'} \mathrm{Y}'$ et $p_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}) = \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$. Puisque v et f sont quasi-compacts et quasi-séparés, il en est de même de p (EGA IV 1.2.2 et 1.2.4). Ou bien Y est plat sur S (cas b) et c)) et alors Y′ est plat sur S′, ou bien X est affine sur S (cas a)), et alors p est un isomorphisme. Dans le premier cas, on peut de nouveau 396
appliquer (EGA III 1.4.15 et IV 1.2.7), et dans les deux cas, on trouve : $p'_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}}) = g'^* p_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}) = g'^*(\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}) = \mathscr{O}_{\mathrm{Y}'}$, ou $p' = p \times_{\mathrm{S}'} \mathrm{Y}'$.

D'où : $\mathscr{A}(\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}) = v_* g'_* p'_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}}) = v_* g'_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}'}) = v_*(\mathscr{A}(\mathrm{Y}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}) = \mathscr{A}(\mathrm{Y}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{X})$ d'après (EGA II 1.4.7).

Corollaire 11.2. — *On définit un foncteur* $\mathrm{X} \mapsto \operatorname{Spec} \mathscr{A}(\mathrm{X})$ *de la sous-catégorie pleine des* $\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}}$ *des* X*-schémas plats quasi-compacts et quasi-séparés sur* S *tel que* $\mathscr{A}(\mathrm{X})$ *soit un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-Module plat, dans celle des* S*-schémas plats et affines sur* S*. Ce foncteur commute aux produits finis, donc transforme* S*-groupes en* S*-groupes.*

Définition 11.3. — Etant donné un S-groupe G plat, quasi-compact et quasi-séparé sur S, tel que $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ soit plat sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, nous noterons G_{af}, et nous appellerons *enveloppe affine* de G, le S-groupe $\mathrm{G}_{\mathrm{af}} = \operatorname{Spec} \mathscr{A}(\mathrm{G})$.

11.4. — Soient $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ deux $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Modules quasi-cohérents, notons $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathbb{V}(\mathscr{F}), \mathbb{V}(\mathscr{E}))$ le S-foncteur des morphismes de S-foncteurs de $\mathbb{V}(\mathscr{F})$ dans $\mathbb{V}(\mathscr{E})$, et $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbb{V}(\mathscr{F}), \mathbb{V}(\mathscr{E}))$ le sous-S-foncteur de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathbb{V}(\mathscr{F}), \mathbb{V}(\mathscr{E}))$ formé des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-homomorphismes de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-foncteurs en modules (cf. I). Alors $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbb{V}(\mathscr{F}), \mathbb{V}(\mathscr{E}))(\mathrm{T})$ est en correspondance biunivoque canonique avec $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}\text{-Mod.}}(\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{T}}, \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{T}})$, i.e. on a $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbb{V}(\mathscr{F}), \mathbb{V}(\mathscr{E})) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbb{W}(\mathscr{E}), \mathbb{W}(\mathscr{F}))$.

Soit X un S-schéma. Alors l'ensemble des morphismes de S-foncteurs de X dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathbb{V}(\mathscr{F}), \mathbb{V}(\mathscr{E}))$ est en correspondance biunivoque avec $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathbb{V}(\mathscr{F}), \mathbb{V}(\mathscr{E}))$,
donc l'ensemble des morphismes de S-foncteurs de X dans $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbb{V}(\mathscr{F}), \mathbb{V}(\mathscr{E}))$ est 397
en correspondance biunivoque avec un sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathbb{V}(\mathscr{F}), \mathbb{V}(\mathscr{E})) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}\text{-Mod.}}(\mathscr{E}, \mathscr{A}(\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathbb{V}(\mathscr{F})))$ (EGA II 1.7.13).

Proposition 11.5. — *Soient* X *un* S*-schéma quasi-compact quasi-séparé sur* S*,* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *le morphisme structural,* $\mathscr{E}$ *et* $\mathscr{F}$ *deux* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-Modules quasi-cohérents. On suppose vérifiée l'une des deux conditions suivantes :*

a) *f est affine*

b) *$\mathscr{F}$ est plat sur* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*.*

Alors :

(i) *l'homomorphisme canonique* $\varphi : \mathscr{A}(\mathrm{X}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathcal{S}(\mathscr{F}) \to \mathscr{A}(\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathbb{V}(\mathscr{F}))$ *est un isomorphisme (où* $\mathcal{S}(\mathscr{F})$ *désigne l'Algèbre symétrique de* $\mathscr{F}$*).*

(ii) *l'ensemble des morphismes de* S*-foncteurs de* X *dans* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathbb{V}(\mathscr{F}), \mathbb{V}(\mathscr{E}))$ *est en correspondance biunivoque avec* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S\text{-Mod.}}(\mathscr{E}, \mathscr{A}(X) \otimes \mathscr{F})$.

Pour montrer i), d'après (11.1 a) et b)), il suffit de montrer que si $\mathscr{F}$ est plat sur $\mathscr{O}_S$, alors $\mathbb{V}(\mathscr{F})$ est plat sur S. D'après (EGA III 1.4.15.5) il suffit de voir que si $\mathscr{F}$ est plat sur $\mathscr{O}_S$, il en est de même de $\mathcal{S}(\mathscr{F})$, ce qui est un corollaire d'un résultat dû à Daniel LAZARD, suivant lequel tout module plat sur un anneau est une limite inductive filtrante de modules libres de type fini.

Montrons maintenant ii). Soit α un morphisme de S-foncteurs de X dans $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathbb{V}(\mathscr{F}), \mathbb{V}(\mathscr{E}))$; il lui correspond un homomorphisme ρ de $\mathscr{O}_S$-Modules de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{A}(X \times_S \mathbb{V}(\mathscr{F})) = \mathscr{A}(X) \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathcal{S}(\mathscr{F})$ tel que si ρ est une S-section de X, l'homomorphisme $(\mathscr{A}(\eta) \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{S}(\mathscr{F})}) \circ \rho : \mathscr{E} \to \mathscr{O}_S \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathcal{S}(\mathscr{F}) = \mathcal{S}(\mathscr{F})$ corresponde à $\alpha(\eta)$. Mais puisque $\alpha(\eta) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathbb{V}(\mathscr{F}), \mathbb{V}(\mathscr{E}))(S)$, $\mathscr{A}(\eta) \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{S}(\mathscr{F})}$ se factorise à travers
398 l'homomorphisme canonique injectif $\mathscr{F} \to \mathcal{S}(\mathscr{F})$. On a donc, pour chaque S-section η de X un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & \mathscr{A}(X) \otimes \mathcal{S}(\mathscr{F}) \arrow[d] \arrow[dl, "\mathscr{A}(\eta)\otimes\mathrm{id}"'] \\
\mathcal{S}(\mathscr{F}) & \mathscr{F} \arrow[l]
\end{tikzcd} \quad ,$$

ce qui montre que ρ se factorise à travers l'homomorphisme canonique injectif $\mathscr{A}(X) \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F} \to \mathscr{A}(X) \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathcal{S}\mathscr{F}$, donc ρ peut être considéré comme un homomorphisme de $\mathscr{O}_S$-Modules de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{A}(X) \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F}$.

Réciproquement, soit

$$\rho \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S\text{-Mod.}}(\mathscr{E}, \mathscr{A}(X) \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F}) \subset \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S\text{-Mod.}}(\mathscr{E}, \mathscr{A}(X \underset{S}{\times} \mathbb{V}(\mathscr{F}));$$

il lui correspond un morphisme α de X dans $\mathrm{Hom}_S(\mathbb{V}(\mathscr{F}), \mathbb{V}(\mathscr{E}))$. Pour tout S-schéma T et toute T-section η de $X \times_S T$, $\alpha(\eta)$ correspond à $\mathscr{A}(\eta) \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{S}(\mathscr{F}) \otimes \mathscr{O}_T}$, homomorphisme de $\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_T$ dans $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_T$, donc $\alpha(\eta) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathbb{V}(\mathscr{F}), \mathbb{V}(\mathscr{E}))(T)$, ce qui montre que α est un morphisme de X dans $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathbb{V}(\mathscr{E}), \mathbb{V}(\mathscr{F}))$, ce qui prouve ii).

11.6. — Soient G un S-groupe plat, quasi-compact et quasi-séparé sur S, tel que $\mathscr{A} = \mathscr{A}(G)$ soit un $\mathscr{O}_S$-Module plat, et $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_S$-Module quasi-cohérent et plat. Notons qu'un morphisme de S-foncteurs de G dans $\mathrm{End}_{\mathscr{O}_S}(\mathbb{W}(\mathscr{E})) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathbb{V}(\mathscr{E}), \mathbb{V}(\mathscr{E}))$ définit une opération de G sur $\mathscr{E}$, si et seulement si le morphisme correspondant $\theta : G \times_S \mathbb{V}(\mathscr{E}) \to \mathbb{V}(\mathscr{E})$ vérifie les deux conditions suivantes :

1) si $\mu : G \times_S G \to G$ désigne le morphisme structural, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
G \times_S G \times_S \mathbb{V}(\mathscr{E}) \arrow[r, "\mathrm{id}_G \times \theta"] \arrow[d, "\mu \times \mathrm{id}_{\mathbb{V}(\mathscr{E})}"'] & G \times_S \mathbb{V}(\mathscr{E}) \arrow[d, "\theta"] \\
G \times_S \mathbb{V}(\mathscr{E}) \arrow[r, "\theta"] & \mathbb{V}(\mathscr{E})
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

2) si $\varepsilon : \mathrm{S} \to \mathrm{G}$ est la section unité de G, le diagramme 399

$$\begin{tikzcd} \mathrm{S} \times_{\mathrm{S}} \mathbb{V}(\mathscr{E}) \arrow[rr, "\varepsilon \times \mathrm{id}_{\mathbb{V}(\mathscr{E})}"] & & \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathbb{V}(\mathscr{E}) \arrow[dl, "\theta"] \\ & \mathbb{V}(\mathscr{E}) \arrow[ul, "\cong"] & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Il revient alors au même de dire que le morphisme $\rho : \mathscr{E} \to \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{E}$ déduit de θ vérifie les deux axiomes suivants :

(CM 1) Si $\Delta : \mathscr{A} \to \mathscr{A} \otimes \mathscr{A} = \mathscr{A}(\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G})$ est l'homomorphisme $\mathscr{A}(\theta)$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \otimes \mathscr{A} \otimes \mathscr{E} & \mathscr{A} \otimes \mathscr{E} \arrow[l, "\mathrm{id}_{\mathscr{A}} \otimes \rho"'] \\ \mathscr{A} \otimes \mathscr{E} \arrow[u, "\Delta \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{E}}"] & \mathscr{E} \arrow[l, "\rho"] \arrow[u, "\rho"'] \end{tikzcd}$$

est commutatif.

(CM 2) Si $\eta : \mathscr{A} \to \mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ est l'homomorphisme $\mathscr{A}(\varepsilon)$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \otimes \mathscr{E} & & \mathscr{A} \otimes \mathscr{E} \arrow[ll, "\eta \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{E}}"'] \\ & \mathscr{E} \arrow[ul, "\cong"] \arrow[ur, "\rho"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Il revient au même de dire que le morphisme $\theta_{\mathrm{af}} : \mathrm{G}_{\mathrm{af}} \times_{\mathrm{S}} \mathbb{V}(\mathscr{E}) \to \mathbb{V}(\mathscr{E})$ correspondant à ρ définit une opération de G_{af} sur $\mathscr{E}$ (comparer I, 4.2).

Par conséquent, il y a correspondance biunivoque entre opérations de G sur $\mathscr{E}$ et opérations de G_{af} sur $\mathscr{E}$. 400

Lemme 11.7. — *Soient* G *un* S*-groupe quasi-compact et quasi-séparé sur* S*, plat et tel que* $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ *soit un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-Module plat* $\mathscr{A}$*, et* $\mathscr{E}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-Module quasi-cohérent. On suppose soit que* G *est affine sur* S*, soit que* $\mathscr{E}$ *est plat sur* S*. Soit* $\rho : \mathscr{E} \to \mathscr{A} \otimes \mathscr{E}$ *un homomorphisme définissant une opération de* G *sur* $\mathscr{E}$*. Soit* $\mathscr{E}_0$ *un sous-*$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-Module quasi-cohérent de* $\mathscr{E}$ *tel que l'homomorphisme* $\mathscr{E}_0 \to \mathscr{A} \otimes \mathscr{E}$ *déduit de* ρ *se factorise à travers l'homomorphisme canonique* (*injectif, grâce au fait que* $\mathscr{A}$ *est plat !*) $\mathscr{A} \otimes \mathscr{E}_0 \to \mathscr{A} \otimes \mathscr{E}$ *au moyen de l'homomorphisme* $\rho_0 : \mathscr{E}_0 \to \mathscr{A} \otimes \mathscr{E}_0$*. Alors* ρ *définit une opération de* G *sur* $\mathscr{E}_0$ (*qu'on appellera* opération induite *sur* $\mathscr{E}_0$ *par* ρ*, et on dira que* $\mathscr{E}_0$ *est* stable *sous* ρ).

Cela résulte immédiatement des définitions et de (11.6). On remarquera cependant qu'en général l'application canonique $\mathbb{W}(\mathscr{E}_0) \to \mathbb{W}(\mathscr{E})$ n'est pas injective.

Lemme 11.8. — *Soient* G *un* S*-groupe quasi-séparé et quasi-compact sur* S *tel que* $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ *soit un* $\mathscr{O}_\mathrm{S}$*-Module libre* $\mathscr{A}$ *de base* (φ_i)*,* $\mathscr{E}$ *un* $\mathscr{O}_\mathrm{S}$*-Module quasi-cohérent. On suppose soit que* G *est affine sur* S*, soit que* G *et* $\mathscr{E}$ *sont plats sur* S*. Soit* $\rho : \mathscr{E} \to \mathscr{A} \otimes \mathscr{E}$ *un homomorphisme définissant une opération de* G *sur* $\mathscr{E}$*,et soit* $x \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{E})$*. Posons* $\rho(x) = \sum \varphi_i \otimes x_i$*, où les* $x_i \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{E})$ *sont bien déterminés par cette relation). Alors le sous-module* $\mathscr{F}$ *de* $\mathscr{E}$ *engendré par les* x_i *est stable sous* ρ*, quasi-cohérent et de type fini sur* $\mathscr{O}_\mathrm{S}$*, et* $x \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{F})$*.*

Il est clair que $\mathscr{F}$ est quasi-cohérent et de type fini. L'axiome (CM 1) montre que $\sum \Delta(\varphi_i) \otimes x_i = \sum \varphi_i \otimes \rho(x_i)$; d'autre part, $\Delta(\varphi_i) = \sum \varphi_j \otimes a_{ij}$, d'où $\sum \varphi_j \otimes a_{ij} \otimes x_i =$
401 $\sum \varphi_i \otimes \rho(x_i)$,d'où, puisque les φ_i forment une base de $\mathscr{A}$, $\rho(x_i) = \sum a_{ji} \otimes x_i$, où $a_{ji} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{A})$, ce qui montre que $\rho(\mathscr{F}) \subset \mathscr{A} \otimes \mathscr{F}$, donc $\mathscr{F}$ est stable sous ρ. Enfin l'axiome (CM 2) montre que $x = \sum_i \eta(\varphi_i) x_i \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{F})$.

Proposition 11.9. — *Soit* G *un* S*-groupe quasi-compact quasi-séparé sur* S *tel que* $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\mathrm{G})$ *devienne localement libre après extension fidèlement plate quasi-compacte de la base* S *(ce qui est le cas par exemple lorsque* G *est un groupe réductif, comme nous le verrons dans* XXV*), et soit* $\mathscr{E}$ *un* $\mathscr{O}_\mathrm{S}$*-Module quasi-cohérent. On suppose soit que* G *est affine sur* S*, et soit* G *et* $\mathscr{E}$ *sont plats sur* S*. Soit* $\rho : \mathscr{E} \to \mathscr{A} \otimes \mathscr{E}$ *un homomorphisme définissant une opération de* G *sur* $\mathscr{E}$*. Alors, pour tout sous-*$\mathscr{O}_\mathrm{S}$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$ *de* $\mathscr{E}$ *il existe un plus petit sous-*$\mathscr{O}_\mathrm{S}$*-Module quasi-cohérent* $\widetilde{\mathscr{F}}$ *de* $\mathscr{E}$ *contenant* $\mathscr{F}$ *qui soit stable sous* ρ*. Sa formation commute à toute extension de la base* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$*. Lorsque* $\mathscr{F}$ *est de type fini, il en est de même de* $\widetilde{\mathscr{F}}$*.*

On se ramène aisément par descente fidèlement plate au cas où $\mathscr{A}$ est un $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-Module libre, auquel cas la proposition est conséquence du lemme 11.8.

Corollaire 11.10. — *Soient* S *un schéma quasi-compact et quasi-séparé,* G *un* S*-groupe quasi-séparé et quasi-compact sur* S*, tel que* $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ *devienne localement libre après extension fidèlement plate quasi-compacte de la base* S*, et soit* $\mathscr{E}$ *un* $\mathscr{O}_\mathrm{S}$*-Module quasi-cohérent. On suppose soit que* G *est affine sur* S*, soit que* G *et* $\mathscr{E}$ *sont plats sur* S*. On se donne une opération de* G *sur* $\mathscr{E}$*. Alors* $\mathscr{E}$ *est limite inductive d'une famille filtrante croissante de sous-*$\mathscr{O}_\mathrm{S}$*-Modules quasi-cohérents de type fini de* $\mathscr{E}$ *stables sous* G*.*

C'est une conséquence immédiate de (11.9) car $\mathscr{E}$ est limite inductive de ses sous-Modules quasi-cohérents de type fini (EGA I 9.4.9, IV 1.7.7).

402 ***Remarque 11.10.1.*** — J.-P. Serre a remarqué que dans 11.9 (donc aussi dans 11.10) il suffisait de supposer que pour toute ouvert affine U de S, il existe un morphisme fidèlement plat $\mathrm{U}' \to \mathrm{U}$, avec U' affine d'anneau A', tel que $\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{U}} \mathscr{O}_{\mathrm{U}'}$ soit défini par un A'-module *projectif* (pas nécessairement libre). De plus, lorsque S est localement noethérien régulier et de dimension 1, cette hypothèse peut être remplacée par la seule hypothèse que G soit plat sur S (ce qui implique que $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ est plat) ; voir à ce sujet

J.-P. Serre, Groupes de Grothendieck des schémas en groupes réductifs déployés, Pub. Math. IHES n° 39, p. 37-52.

***Proposition 11.11.* —** *Soit* G *un groupe algébrique sur le corps k. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est affine.*

(ii) G *est quasi-affine.*

(iii) *On peut faire opérer* G *fidèlement sur un k-schéma quasi-affine.*

(iv) *On peut faire opérer* G *fidèlement sur un vectoriel sur k (pas nécessairement de dimension finie).*

(v) G *est isomorphe à un sous-groupe fermé d'un groupe* $\mathrm{GL}(n)_k$.

Démonstration. On a (i) $\Rightarrow$ (ii) trivialement, et (ii) $\Rightarrow$ (iii), car G opère fidèlement sur lui-même par translations à gauche. On a (iii) $\Rightarrow$ (iv), car si G opère sur X quasi-compact et quasi-séparé sur k, il opère aussi sur le vectoriel $\Gamma(\mathrm{X}, \mathscr{O}_\mathrm{X})$, grâce au fait que la formation de $f_*(\mathscr{O}_\mathrm{X})$ ($f : \mathrm{X} \to \operatorname{Spec} k$ le morphisme structural) commute à tout changement de base $\mathrm{S} \to \operatorname{Spec} k$ (EGA IV 1.7.12) ; donc il opère sur l'enveloppe affine $\mathrm{X}' = \operatorname{Spec}(\Gamma(\mathrm{X}, \mathscr{O}_\mathrm{X}))$, et le morphisme canonique $\mathrm{X} \to \mathrm{X}'$ est évidemment compatible **403**
avec l'action de G ; ceci dit, si X est quasi-affine i.e. $\mathrm{X} \to \mathrm{X}'$ est une immersion ouverte, et si G opère fidèlement sur X, il opère fidèlement sur X', ou ce qui revient au même, sur le vectoriel $\mathrm{V} = \Gamma(\mathrm{X}, \mathscr{O}_\mathrm{X})$, ce qui prouve l'implication (iii) $\Rightarrow$ (iv).

Supposons maintenant (iv), i.e. que G opère fidèlement sur le vectoriel V. Alors, en vertu de 11.10, V est limite inductive de sous-espaces vectoriels V_i de dimension finie, stables sous l'action de G. Si K_i est le noyau de l'action induite de G sur V_i, i.e. de $\mathrm{G} \to \underline{\mathrm{Aut}}(\mathrm{V}_i)$, alors K_i est un sous-schéma fermé de G, et l'hypothèse que G opère fidèlement s'exprime aussitôt par le fait que l'intersection des K_i est le sous-groupe unité de G. Comme G est noethérien, il s'ensuit que l'un des K_i est déjà réduit au groupe unité, donc que $\mathrm{G} \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{V}_i}$ est un monomorphisme. C'est donc une immersion fermée en vertu de 1.4.2, ce qui prouve que (iv) $\Rightarrow$ (v). Comme (v) $\Rightarrow$ (i) trivialement, cela prouve 11.11.

***Remarque 11.11.1.* —** M. Raynaud nous signale qu'on peut généraliser 11.11 au cas d'un schéma en groupes quasi-compact et quasi-séparé G sur un schéma S localement noethérien régulier de dimension $\leqslant 1$, en supposant de plus G *plat* sur S. On a alors l'équivalence des conditions suivantes :

(i) G est affine sur S.

(ii) G est quasi-affine sur S.

(iii) On peut faire opérer G fidèlement sur un S-schéma quasi-affine.

(iv) On peut faire opérer G fidèlement sur un Module quasi-cohérent plat sur S.

(v) (Si G est de type fini sur S et S noethérien), G est isomorphe à un sous-groupe **404**
fermé d'un $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathrm{V})$, où V est un Module localement libre de type fini sur S.

***Lemme 11.12.* —** *Soient k un corps,* G *un k-groupe quasi-compact. Posons* $\mathrm{A} = \mathscr{A}(\mathrm{G})$. *Etant donné $x \in \mathrm{A}$, il existe une sous-k-algèbre de type fini* V *de* A *telle que $x \in \mathrm{V}$,* *que* $\Delta(\mathrm{V}) \subset \mathrm{V} \otimes_k \mathrm{V}$ *et* $u(\mathrm{V}) \subset \mathrm{V}$*, où* u *désigne l'involution de* A *correspondant à la symétrie de* G.

D'après 11.3, on peut remplacer G par G_{af}, donc on peut supposer G affine.

Soit (φ_i) une base de A. Alors $\Delta(x) = \sum \varphi_i \otimes a_i$ et $\Delta(\varphi_i) = \sum \varphi_j \otimes b_{ji}$; l'axiome (HA 1) de (I, 2) montre que $\sum \varphi_i \otimes \Delta(a_i) = \sum \Delta(\varphi_i) \otimes a_i$, d'où $\Delta(a_i) = \sum b_{ij} \otimes a_j$. Soit alors V la sous-$k$-algèbre de A engendrée par les b_{ij} et les $u(b_{ij})$. Il est clair que V est une k-algèbre de type fini. L'axiome (HA 1) montre aussi que $\sum \Delta(\varphi_j) \otimes b_{ji} = \sum \varphi_j \otimes \Delta(b_{ji})$, et on en déduit que $\Delta(b_{ij}) = \sum b_{ik} \otimes b_{kj}$ et que $\Delta(u(b_{ij})) = \sum u(b_{kj}) \otimes u(b_{ik})$. Puisque Δ est un homomorphisme d'algèbres, on en déduit que $\Delta(\mathrm{V}) \subset \mathrm{V} \otimes_k \mathrm{V}$ et $u(\mathrm{V}) \subset \mathrm{V}$. Enfin l'axiome (HA 2) de (I, 2) montre que $a_i = \sum \eta(a_j) b_{ij}$ et que $x = \sum \eta(\varphi_i) a_i$, si bien que $x \in \mathrm{V}$.

Proposition 11.13. — *Soient* k *un corps et* G *un* k*-groupe* affine *d'algèbre* A*. Alors* G *est limite projective d'un système filtrant croissant de* k*-groupes affines de type fini, dont les morphismes de transition sont* fidèlement plats*.*

Comme l'ensemble des sous-k-algèbres de type fini de A stables par Δ et u est stable par engendrement, A est limite inductive d'une famille filtrante croissante $(\mathrm{B}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ de
405 sous-k-algèbres de type fini stables par Δ et u. Alors, chaque algèbre B_i, munie de l'homomorphisme $\mathrm{B}_i \to \mathrm{B}_i \otimes_k \mathrm{B}_i$ déduit de Δ et de la restriction de u à B_i est munie d'une structure d'hyperalgèbre associative augmentée involutive, donc (I, 2) est la k-algèbre d'un k-groupe affine G_i, de type fini sur k. Enfin, puisque $\mathrm{A} = \varinjlim \mathrm{V}_i$, $\mathrm{G} = \varprojlim \mathrm{G}_i$ (EGA IV 8.2.3). Les morphismes de transition sont fidèlement plats d'après le lemme suivant :

Lemme 11.14. — *Soient* k *un corps,* G *et* H *deux* k*-groupes affines de type fini,* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de* k*-groupes, et* $u^\natural : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ *l'homomorphisme de* k*-algèbres correspondant. Pour que* u *soit fidèlement plat, il faut et il suffit que* $u^\natural$ *soit injectif.*

La condition est évidemment nécessaire (EGA IV 2.2.3 et 0_{IV} 6.6.1). Montrons qu'elle est suffisante. Posons $\mathrm{K} = \operatorname{Ker} u$. Alors G/K est un k-groupe de type fini ($\mathrm{VI_A}$ 2), et u se factorise en $\mathrm{G} \xrightarrow{p} \mathrm{G/K} \xrightarrow{v} \mathrm{H}$, où p est fidèlement plat ($\mathrm{VI_A}$ 2) et où v est un monomorphisme de k-groupes de type fini, donc une immersion fermée (1.4.2). Puisque H est un schéma affine, et que v est une immersion fermée, G/K est un schéma affine (EGA I 4.2.3), et, si on note C l'algèbre de G/K, l'homomorphisme $v^\natural : \mathrm{B} \to \mathrm{C}$ est surjectif (*loc. cit.*). Or, puisque $u^\natural$ est injectif, et que $u^\natural = p^\natural \circ v^\natural$, $v^\natural$ est aussi injectif : c'est un isomorphisme, donc v est un isomorphisme, et, puisque p est fidèlement plat, il en est de même de u.

Définition 11.15. — Etant donné un corps k, un k-espace vectoriel V, un k-groupe G opérant sur V, et un vecteur $v \in \mathrm{V}$, on dit que v est *semi-invariant* sous G si le sous-espace vectoriel kv est stable sous G.

406 Notons A l'algèbre de G, et $\rho : \mathrm{V} \to \mathrm{A} \otimes_k \mathrm{V}$ l'application linéaire qui définit l'opération de G sur V. Dire que v est semi-invariant sous G revient à dire qu'il existe $\lambda \in \mathrm{A}$ tel que, pour tout $w \in kv$, $\rho(w) = \lambda \otimes w$. Lorsque $v \neq 0$, l'élément $\lambda \in \mathrm{A}$ est bien déterminé par cette relation, on l'appellera *poids* de l'élément semi-invariant v.

Dire que v est semi-invariant d'invariant λ revient à dire que $\varphi(g, v) = \lambda(g)v$ pour tout $g \in \mathrm{G}(k)$, où $\lambda : \mathrm{G} \to \mathbb{G}_{m,k}$ est le morphisme définit par λ. On voit donc que λ est un caractère de G, appelé *caractère associé* à l'élément semi-invariant v.

Théorème 11.16 (Chevalley). — *Soient k un corps,* G *un k-groupe algébrique affine,* H *un sous-schéma en groupes fermé de* G*. Alors il existe un nombre fini d'éléments a_i linéairement indépendants de l'algèbre* A *de* G*, tels que* H *soit le plus grand sous-schéma en groupes fermé de* G *sous lequel les a_i soient semi-invariants; on peut de plus supposer que tous les a_i ont même poids sous* H.

Rappelons que, puisque G est affine, il en est de même de H (I 4.2.3). Soit A (resp. B) l'algèbre de G (resp. H); d'après EGA I 4.2.3, il existe un idéal I de A tel que B soit isomorphe à A/I. Puisque G opère sur lui-même par translations à gauche, il opère aussi sur A, cette opération se traduisant par l'application diagonale $\Delta : \mathrm{A} \to \mathrm{A} \otimes_k \mathrm{A}$ (I, 2 et 7.2). Puisque G est de type fini sur k, A est de type fini sur k, donc I admet un système fini de générateurs $(g_1, \ldots, g_r)$. Il résulte de (11.9) qu'il existe un sous-espace vectoriel V de dimension finie de A stable sous G, et contenant chacun des g_i. Posons alors $\mathrm{W} = \mathrm{V} \cap \mathrm{I}$, c'est un espace vectoriel sur k de dimension finie, dont nous noterons d la dimension. Puisque V contient tous **407**
les g_i, W engendre l'idéal I. Notons $p : \mathrm{A} \to \mathrm{A/I} = \mathrm{B}$ l'application canonique, et $q = p \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{A}} = \mathrm{A} \otimes_k \mathrm{A} \to (\mathrm{A/I}) \otimes_k \mathrm{A}$. Alors l'action de H sur A est déterminée par $q \circ \Delta : \mathrm{A} \to \mathrm{B} \otimes_k \mathrm{A}$. Puisque H est un sous-schéma en groupes de G, l'application diagonale $\mathrm{A/I} \to (\mathrm{A/I}) \otimes_k (\mathrm{A/I}) = ((\mathrm{A/I}) \otimes_k \mathrm{A})/((\mathrm{A/I}) \otimes_k \mathrm{I})$ se déduit de $q \circ \Delta$ par passage au quotient, ce qui montre que $(q \circ \Delta)(\mathrm{I}) \subset (\mathrm{A/I}) \otimes_k \mathrm{I}$, autrement dit, I est stable sous H. Puisque V est stable sous G, donc sous H, on voit que W est stable sous H.

Posons $\mathrm{E} = \bigwedge^d \mathrm{V}$, soit $(w_1, \ldots, w_d)$ une base de W sur k, et soit $(e_0, \ldots, e_n)$ une base de E sur k contenant $e_0 = w_1 \wedge \ldots \wedge w_d$. L'opération de G sur v détermine canoniquement une opération de G sur $\bigwedge^d \mathrm{V}$, qui définit une application linéaire $\rho : \mathrm{E} \to \mathrm{A} \otimes_k \mathrm{E}$. Posons $\rho(e_i) = \sum a^i_j \otimes e_j$, et $a_i = a^0_i$. Puisque W est stable sous H, si on pose $\sigma = (p \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{E}}) \circ \rho : \mathrm{E} \to (\mathrm{A/I}) \otimes_k \mathrm{E}$, il est clair que $\sigma(e_0)$ est proportionnel à e_0, autrement dit, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on a $a_i \in \mathrm{I}$. L'axiome (CM 1) de (I, 7.2) appliqué à $\rho(e_0) = \sum a_i \otimes e_i$ montre que $\sum \Delta(a_i) \otimes e_i = \sum a_i \otimes \rho(e_i) = \sum a_i \otimes a^i_j \otimes e_j$, d'où on déduit que $\Delta(a_i) = a_0 \otimes a_i + \sum_{j \geqslant 1} a_j \otimes a^j_i$; donc, puisque pour $j \geqslant 1$, $a_j \in \mathrm{I}$, on voit que $q \circ \Delta(a_i) = p(a_0) \otimes a_i$, si bien que pour $1 \leqslant i \leqslant n$, a_i est semi-invariant sous H de poids $p(a_0)$, indépendant de i. Extrayons du système $(a_1, \ldots, a_n)$, un système maximal de vecteurs linéairement indépendants, dont on peut supposer qu'il se note $(a_1, \ldots, a_m)$. Alors les a_i, $i = 1, \ldots, m$ sont linéairement indépendants, semi-invariants sous H, et de même poids.

Réciproquement, soit H′ un sous-schéma en groupes fermé de G sous lequel chacun des a_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ est semi-invariant. Montrons que $\mathrm{H}^1 = \mathrm{H}$. Il existe de même un idéal I′ de A tel que l'algèbre B′ de H′ soit isomorphe à A/I′ ; notons $p' : \mathrm{A} \to \mathrm{A/I'}$ **408**
l'application canonique, et $q' = p' \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{A}}$. Par hypothèse, pour $1 \leqslant i \leqslant m$, il existe $\lambda_i \in \mathrm{B'}$ tel que $q' \circ \Delta(a_i) = \sum p'(a_j) \otimes a^j_i = \lambda_i \otimes a_i$. Or l'axiome (CM 2) de (I, 7.2) montre que $e_i = \sum \eta(a^i_j) e_j$, donc que $\eta(a^i_j) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker);

l'égalité $\sum p'(a_j) \otimes \eta(a_j^i) = \lambda_j \otimes \eta(a_i)$ s'écrit donc $p'(a_i) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$, car $\eta(a_i) = \eta(a_i^0) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$; par conséquent, on a $a_i \in \mathrm{I}'$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$, si bien que $a_i \in \mathrm{I}'$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Donc, si on pose $\sigma' = (p' \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{E}}) \circ \Delta$, $\sigma'(e_0) = \sum p'(a_i) \otimes e_i$ est proportionnel à e_0, de sorte que $q' \circ \Delta(\mathrm{W}) \subset (\mathrm{A}/\mathrm{I}') \otimes_k \mathrm{W}$, autrement dit que W est stable sous H′. Puisque W engendre l'idéal I, I est stable sous H′, donc $q' \circ \Delta(\mathrm{I}) \subset (\mathrm{A}/\mathrm{I}') \otimes_k \mathrm{I}$, et $q' \circ \Delta$ définit par passage au quotient une application linéaire $\mathrm{A}/\mathrm{I} \to (\mathrm{A}/\mathrm{I}') \otimes_k (\mathrm{A}/\mathrm{I}) = ((\mathrm{A}/\mathrm{I}') \otimes_k \mathrm{A})/((\mathrm{A}/\mathrm{I}') \otimes_k \mathrm{I})$ donc la restriction à $\mathrm{H}' \times_k \mathrm{H}$ du morphisme de multiplication de G se factorise à travers H, ce qui implique que H′ est un sous-schéma en groupes de H, cqfd

Théorème 11.17 **(**Chevalley**). —** *Soient k un corps,* G *un k-groupe affine* (*non nécessairement algébrique*), *et* H *un sous-schéma en groupes fermé de* G invariant *dans* G *; alors le faisceau quotient* (*pour la topologie* (fpqc)) G/H *est représentable par un k-groupe* affine.

Premier cas : Supposons d'abord G algébrique. D'après ($\mathrm{VI_A}$ 2), le conoyau K de l'injection $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$ existe, le morphisme canonique $p : \mathrm{G} \to \mathrm{K}$ est couvrant pour la topologie (fpqc), et K représente le faisceau quotient G/H pour la topologie (fpqc) ; il s'agit donc de montrer que K est affine.

Supposons d'abord k algébriquement clos, G réduit et connexe et H réduit. D'après (*BIBLE* 4, cor. du th. 1), il existe une représentation linéaire de dimension finie
409 $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL(V)}$ telle que $(\mathrm{Ker}\,\rho)_{\text{réd}} = \mathrm{H}$. Par 11.11, $\mathrm{G}/\mathrm{Ker}\,\rho$ est affine donc $(\mathrm{G}/\mathrm{H})/(\mathrm{Ker}\,\rho/\mathrm{H})$ est affine, donc aussi G/H, le groupe $\mathrm{Ker}\,\rho/\mathrm{H}$ étant fini.

Si k est algébriquement clos, et G et H réduits, alors $(\mathrm{G}/\mathrm{H})/(\mathrm{G}^0/\mathrm{H} \cap \mathrm{G}^0)$ est fini, comme quotient de G/G^0, et $\mathrm{G}^0/\mathrm{H} \cap \mathrm{G}^0$ est affine, donc G/H est affine.

Dans le cas où k est algébriquement clos, et G et H quelconques, $(\mathrm{G} \times_k \mathrm{H})_{\text{réd}}$ est isomorphe à $(\mathrm{G}_{\text{réd}}) \times_k (\mathrm{H}_{\text{réd}})$, donc $(\mathrm{G}_{\text{réd}})/(\mathrm{H}_{\text{réd}})$ est isomorphe à $(\mathrm{G}/\mathrm{H})_{\text{réd}}$. Puisque $(\mathrm{G}_{\text{réd}})/(\mathrm{H}_{\text{réd}})$ est affine, il en est de même de G/H (EGA I 5.1.10), car, puisque G/H est de type fini sur k, son nilradical est nilpotent.

Dans le cas où k est quelconque, $(\mathrm{G} \otimes_k \overline{k})/(\mathrm{H} \otimes_k \overline{k})$ est isomorphe à $(\mathrm{G}/\mathrm{H}) \otimes_k \overline{k}$ (9.2 v)), donc puisque le premier est affine, il en est de même du second, donc G/H est affine.

Deuxième cas : Cas général. D'après (11.13), l'algèbre A de G est limite inductive d'une famille filtrante croissante $(\mathrm{A}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de sous-algèbres de type fini de A stables par l'application diagonale et l'involution. D'après (EGA I 4.2.3), H est affine, et si on note B l'algèbre de H, l'homomorphisme $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ déduit de l'injection $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$ est surjectif. Posons $\mathrm{I} = \mathrm{Ker}(\mathrm{A} \to \mathrm{B})$, $\mathrm{I}_i = \mathrm{I} \cap \mathrm{A}_i$ et $\mathrm{B}_i = \mathrm{A}_i/\mathrm{I}_i$; puisque la structure d'hyperalgèbre associative augmentée involutive de A passe au quotient à travers I, on vérifie aisément que celle de A_i passe au quotient à travers I_i, si bien que B_i est l'algèbre d'un k-groupe affine de type fini H_i ; il est clair que $\mathrm{B} = \varinjlim \mathrm{B}_i$. D'après (EGA I 4.2.3), H_i est isomorphe à un sous-schéma en groupes fermé de G_i.
410 D'après (6.7) le fait que H soit invariant dans G s'exprime en disant qu'un certain morphisme $\mathrm{H} \times_k \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ se factorise à travers l'injection $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$, autrement dit que l'homomorphisme correspondant $\mathrm{A} \to \mathrm{B} \otimes_k \mathrm{A}$ se factorise à travers l'homomorphisme canonique $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$; on vérifie aisèment que l'homomorphisme $\mathrm{A}_i \to \mathrm{B}_i \otimes_k \mathrm{A}_i$ défini

de manière analogue se factorise à travers $A_i \to B_i$, donc que H_i est invariant dans G_i. D'après ce qui a été vu précédemment, G_i étant de type fini sur k, G_i/H_i est représentable par un k-groupe affine K_i, dont nous noterons C_i l'algèbre. Posons alors $C = \varinjlim C_i$, et soit $K = \varprojlim K_i$ le k-schéma affine d'algèbre K (EGA IV 8.2.3).

Montrons que K représente G/K ; pour cela, il suffit de vérifier que $H \times_k G \xrightarrow{\sim} G \times_k G$, et que le morphisme $G \to K$ est couvrant pour la topologie (fpqc) (IV, 4.3). Or pour chaque i, ou $H_i \times_k G_i \xrightarrow{\sim} G_i \times_{k_i} G_i$, donc il en est de même du morphisme obtenu en passant à la limite projective ; enfin chacun des morphismes $G_i \to K_i$ est fidèlement plat (9.2 (xi)), autrement dit C_i est fidèlement plat sur A_i ; puisque $A = \varinjlim A_i$ et $C = \varinjlim C_i$, on en déduit que C est fidèlement plat sur A, si bien que $G \to K$ est un morphisme fidèlement plat. Puisque ce morphisme est affine, il est quasi-compact, donc couvrant pour la topologie (fpqc), cqfd.