

EXPOSÉ VII_B

ÉTUDE INFINITÉSIMALE DES SCHÉMAS EN GROUPES

par P. GABRIEL

B) Groupes formels

L'étude des groupes formels est habituellement d'une simplicité extrême. Si cela n'apparaît pas clairement dans les pages qui suivent, la responsabilité en incombe à un arithméticien, qui prétend connaître des groupes formels sur « autre chose que des corps ». Nous avons donc déroulé pour les groupes formels « localement libres sur des limites projectives d'anneaux artiniens » les généralités qu'on énonce d'habitude pour les groupes formels définis sur un corps. Pour une étude plus détaillée de ces derniers, nous renvoyons au séminaire de géométrie algébrique 1964/65 de Heidelberg-Strasbourg. 476

0. Rappels sur les anneaux et modules pseudocompacts

Ce paragraphe contient quelques préliminaires techniques ; nous y rappelons et complétons quelques résultats de C.A. (Des catégories abéliennes, Bul. Soc. math. de France, 90, 1962).

0.1. — Un anneau *pseudocompact* à gauche est un anneau avec élément unité, topologique, séparé, complet et qui possède une base de voisinages de 0 formée d'idéaux à gauche $\mathfrak{l}$ de colongueur finie (i.e. $\text{long}_A(A/\mathfrak{l}) < +\infty$). Nous allons supposer ici que A est commutatif, de sorte qu'il n'y a pas à distinguer « entre la gauche et la droite ». En particulier, les quotients $A/\mathfrak{l}$ sont munis de structures d'anneau artinien et A s'identifie à la limite projective topologique de ces anneaux qu'on munit de la topologie discrète. 477

Un anneau local noethérien complet est évidemment pseudocompact.

0.1.1. — Un idéal fermé de A est l'intersection des idéaux ouverts qui le contiennent. Un idéal fermé maximal est donc ouvert. De plus, si $\mathfrak{l}$ est un idéal ouvert de A , les idéaux maximaux de $A/\mathfrak{l}$ correspondent biunivoquement aux idéaux maximaux fermés $\mathfrak{m}$ qui contiennent $\mathfrak{l}$. Le localisé $(A/\mathfrak{l})_{\mathfrak{m}}$ de $A/\mathfrak{l}$ par rapport à un idéal maximal fermé

$\mathfrak{m}$ est donc un anneau local si $\mathfrak{m}$ contient $\mathfrak{l}$ et est nul sinon. Comme l'anneau $A/\mathfrak{l}$ est artinien, il est produit direct d'un nombre fini d'anneaux locaux, ce qu'on peut écrire

$$A/\mathfrak{l} \simeq \prod_{\mathfrak{m} \in \Upsilon(A)} (A/\mathfrak{l})_{\mathfrak{m}}$$

en désignant par $\Upsilon(A)$ l'ensemble des idéaux maximaux fermés de A . On tire de là des isomorphismes « canoniques »

$$A \simeq \varprojlim_{\mathfrak{l}} (A/\mathfrak{l}) \simeq \varprojlim_{\mathfrak{l}} \prod_{\mathfrak{m}} (A/\mathfrak{l})_{\mathfrak{m}} \simeq \prod_{\mathfrak{m}} \varprojlim_{\mathfrak{l}} (A/\mathfrak{l})_{\mathfrak{m}} \simeq \prod_{\mathfrak{m}} A_{\mathfrak{m}},$$

où l'on a posé $A_{\mathfrak{m}} = \varprojlim_{\mathfrak{l}} (A/\mathfrak{l})_{\mathfrak{m}}$. Cette *composante locale* $A_{\mathfrak{m}}$ est une limite projective filtrante d'anneaux locaux ; c'est donc un anneau local qui est pseudocompact pour la topologie de la limite projective (les anneaux $(A/\mathfrak{l})_{\mathfrak{m}}$ sont artiniens et munis de la topologie discrète).

0.1.2. — Soit $\mathfrak{r}(A)$ l'intersection des idéaux maximaux fermés de A , c'est-à-dire le produit cartésien des idéaux $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ lorsqu'on identifie A à $\prod_{\mathfrak{m}} A_{\mathfrak{m}}$. Pour tout idéal ouvert $\mathfrak{l}$ de A , l'image de $\mathfrak{r}(A)$ dans $A/\mathfrak{l}$ est contenue dans le radical de $A/\mathfrak{l}$. Une certaine puissance de cette image est donc nulle, de sorte que $\mathfrak{r}(A)^n$ est contenu dans $\mathfrak{l}$ lorsque n est assez grand. La suite des $\mathfrak{r}(A)^n$ tend donc vers 0 ; il en va de même de la suite des x^n , lorsque x appartient à $\mathfrak{r}(A)$. Autrement dit, tout élément de $\mathfrak{r}(A)$ est topologiquement nilpotent et la réciproque est claire. Il s'ensuit que la suite de terme général $1 + x + \dots + x^n$ est convergente et converge vers $1/(1 - x)$ lorsque $x \in \mathfrak{r}(A)$. Cela montre que $\mathfrak{r}(A)$ est le radical de Jacobson de A (Bourb., Alg., chap. 8, Chap. 8, § 6, th. 1).

0.1.3. — Si A et B sont deux anneaux pseudocompacts, un homomorphisme de A dans B est, par définition, une application *continue* compatible avec l'addition, la multiplication et les éléments unité. Un tel homomorphisme envoie un élément topologiquement nilpotent de A sur un élément topologiquement nilpotent de B ; il applique donc le radical de A dans le radical de B .

0.2. — Soit A un anneau pseudocompact (commutatif). Un A -module *pseudocompact* M est un A -module topologique, séparé, complet, unitaire qui possède une base de voisinages de 0 formée de sous-modules M' tels que M/M' soit de longueur finie sur A . Si M et N sont deux A -modules pseudocompacts, un morphisme de M dans N est par définition une application A -linéaire continue. Les A -modules pseudocompacts forment une catégorie abélienne qui a pour cogénérateurs les A -modules pseudocompacts de longueur finie (dont la topologie est donc discrète). Si (M_i) est un système projectif de modules pseudocompacts, la limite projective des M_i a pour module sous-jacent la limite projective des modules sous-jacents, pour topologie celle de la limite projective. De plus, le foncteur limite projective est exact lorsque les indices forment un ensemble ordonné filtrant (Axiome AB5*). De même, si f est un morphisme de A -modules pseudocompacts, Coker f a pour module sous-jacent le conoyau des modules

sous-jacents et la topologie de Coker f est le quotient de celle du but de f (confer [C.A.], IV, §3).

0.2.1. — Chaque composante locale $A_{\mathfrak{m}}$ de A est un facteur direct de A , donc un objet projectif de la catégorie des A -modules pseudocompacts (A est manifestement projectif). Il résulte de C.A. (IV, §3, cor. 1 au théo. 3) que tout A -module pseudocompact projectif est un produit direct (topologique) de tels $A_{\mathfrak{m}}$.

Un A -module pseudocompact M est dit *topologiquement libre* s'il est isomorphe au produit d'une famille (A_i) d'exemplaires de A . Une famille (m_i) d'éléments de M est appelée une *pseudobase* de M si les applications A -linéaires de A_i dans M qui envoient l'élément unité de A sur m_i se prolongent en un isomorphisme de $\prod_i A_i$ sur M .

0.2.2. — Si M est un A -module pseudocompact, M^* désigne le A -module $\text{Hom}_c(M, A)$ formé des applications A -linéaires continues de M dans A . *Lorsque l'anneau A est artinien*, le foncteur $P \mapsto P^*$ est une anti-équivalence de la catégorie des A -modules pseudocompacts projectifs sur celle des A -modules projectifs. En particulier, *lorsque A est un corps*, $P \mapsto P^*$ est une anti-équivalence de la catégorie de tous les A -modules pseudocompacts (on parle aussi d'*espaces vectoriels linéairement compacts sur A*) sur celle des A -espaces vectoriels. 480

0.3. — Soient M et N deux A -modules pseudocompacts et $\text{Hom}_c(M, N)$ le groupe des morphismes de M dans N . Notons en outre $\mathbf{h}_c^M$ le foncteur qui associe à tout A -module pseudocompact de *longueur finie* N le groupe abélien $\text{Hom}_c(M, N)$. On sait alors que le foncteur $M \mapsto \mathbf{h}_c^M$ est une anti-équivalence de la catégorie des A -modules pseudocompacts sur celle des foncteurs exacts à gauche (C.A., II, théo.1). Si L et M sont deux A -modules pseudocompacts, on définit donc à isomorphisme près un A -module pseudocompact $L \hat{\otimes}_A M$ en exigeant que le foncteur $N \mapsto \text{Hom}_c(L \hat{\otimes}_A M, N)$ soit isomorphe au foncteur $N \mapsto \text{Bil}_c(L \times M, N)$, $\text{Bil}_c(L \times M, N)$ désignant l'ensemble des applications A -bilinéaires continues de $L \times M$ dans un module de longueur finie N .

On peut décrire $L \hat{\otimes}_A M$ comme la limite projective des A -modules (discrets) $(L/L') \otimes_A (M/M')$, L' et M' parcourant respectivement les sous-modules ouverts de L et de M : soit en effet $\varphi : L \times M \rightarrow N$ une application bilinéaire continue de $L \times M$ dans un A -module (discret) de longueur finie. D'après le lemme 0.3.1 ci-dessous, il existe des sous-modules ouverts L' et M' de L et M tels que $\varphi(L' \times M) = \varphi(L \times M') = \{0\}$. Cela signifie que l'application $\bar{\varphi} : L \otimes_A M \rightarrow N$, qui est induite par φ , est de la forme $\varphi' \circ p$, où p est la projection canonique de $L \otimes_A M$ sur $(L/L') \otimes_A (M/M')$. Si $\hat{\varphi}$ est obtenu en composant φ' avec la projection canonique de la limite projective $L \hat{\otimes}_A M$ sur $(L/L') \otimes_A (M/M')$, il est clair que l'application $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ est une bijection de $\text{Bil}_c(L \times M, N)$ sur $\text{Hom}_c(L \hat{\otimes}_A M, N)$. 481

Le module pseudocompact $L \hat{\otimes}_A M$ est donc le séparé complété de $L \otimes_A M$ pour la topologie linéaire définie par les noyaux des projections canoniques de $L \otimes_A M$ sur $(L/L') \otimes_A (M/M')$. Si x et y appartiennent à L et M , l'image de $x \otimes_A y$ dans le *produit tensoriel complété* $L \hat{\otimes}_A M$ sera notée $x \hat{\otimes}_A y$.

0.3.1. Lemme. — Soient L , M et N des A -modules pseudocompacts, N étant de longueur finie. Si $\varphi : L \times M \rightarrow N$ est une application A -bilinéaire continue, il existe des sous-modules ouverts L' et M' de L et M tels que $\varphi(L' \times M) = \varphi(L \times M') = \{0\}$.

En effet, $\varphi^{-1}(0)$ est un voisinage ouvert de $(0, 0)$, donc contient un ouvert de la forme $L' \times M'$, où L' et M' sont des sous-modules ouverts de L et M . Comme L/L' est de longueur finie, il existe des éléments $x_1, \dots, x_r$ de L tels que $L' + Ax_1 + \dots + Ax_r = L$. Si M' est « assez petit », on a aussi $\varphi(x_i, M') = 0$ pour tout i , parce que l'application $y \mapsto (x_i, y)$ est continue; on tire de là $\varphi(L, M') = \{0\}$; de même, $\varphi(L', M) = \{0\}$ si L' est assez petit.

0.3.2. — Soit $L' \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} L'' \rightarrow 0$ une suite exacte de A -modules pseudocompacts. Il est clair que la suite induite

$$0 \longrightarrow \text{Bil}_c(L'' \times M, N) \longrightarrow \text{Bil}_c(L \times M, N) \longrightarrow \text{Bil}_c(L' \times M, N)$$

482 est exacte pour tout A -module pseudocompact M et tout N de longueur finie. Cela signifie que la suite des foncteurs exacts à gauche représentés par $L'' \hat{\otimes}_A M$, $L \hat{\otimes}_A M$ et $L' \hat{\otimes}_A M$ est exacte, autrement dit que la suite

$$(*) \quad L' \hat{\otimes}_A M \xrightarrow{f \hat{\otimes} M} L \hat{\otimes}_A M \xrightarrow{g \hat{\otimes} M} L'' \hat{\otimes}_A M \rightarrow 0$$

est exacte : le foncteur produit tensoriel complété est exact à droite.

Prenons en particulier pour L l'anneau A , pour f l'inclusion d'un idéal fermé $\mathfrak{a}$ dans A , pour g la projection canonique de A sur $A/\mathfrak{a}$. On peut alors identifier $A \hat{\otimes}_A M$ à M au moyen de l'application $x \hat{\otimes}_A y \mapsto x \cdot y$. Comme l'image de $\mathfrak{a} \hat{\otimes}_A M$ est fermée dans M (C.A., IV, §3) et que l'image de $\mathfrak{a} \otimes_A M$ est partout dense dans $\mathfrak{a} \hat{\otimes}_A M$, l'image de $f \hat{\otimes}_A M$ n'est autre que l'adhérence $\overline{\mathfrak{a} \cdot M}$ du produit $\mathfrak{a} \cdot M$ dans M . La suite $(*)$ entraîne donc que $(A/\mathfrak{a}) \hat{\otimes}_A M$ s'identifie à $M/\overline{\mathfrak{a} \cdot M}$.

0.3.3. Lemme de Nakayama. — Soient A un anneau pseudocompact, M un A -module pseudocompact et $\mathfrak{a}$ un idéal de A contenu dans le radical $\mathfrak{r}(A)$. L'égalité $\overline{\mathfrak{a} \cdot M} = M$ entraîne alors $M = 0$.

Soient en effet M' un sous-module ouvert de M et M'' le quotient M/M' . Comme M'' est discret, $\mathfrak{a} \cdot M''$ est fermé dans M'' , donc égal à $\overline{\mathfrak{a} \cdot M''}$. D'après 0.3.2, l'application canonique de $M/\overline{\mathfrak{a} \cdot M}$ dans $M''/\overline{\mathfrak{a} \cdot M''}$ est surjective, de sorte qu'on a $\mathfrak{a} \cdot M'' = \overline{\mathfrak{a} \cdot M''} = M''$ si $\overline{\mathfrak{a} \cdot M} = M$; mais ceci entraîne $M'' = 0$, car M'' est un module de type fini sur A (Nakayama); par conséquent, tout sous-module ouvert M' de M est égal à M , qui est donc nul.

483 **0.3.4.** — On tire du lemme de Nakayama les conséquences habituelles : si $\mathfrak{a}$ est un idéal fermé contenu dans le radical de A et $f : M \rightarrow N$ un morphisme de A -modules pseudocompacts, f est surjectif si l'application induite f' de $M/\overline{\mathfrak{a}M}$ dans $N/\overline{\mathfrak{a}N}$ l'est (appliquer le lemme 0.3.3 à $\text{Coker } f$). De même, si N est projectif, f est inversible si f' l'est (en effet f est surjectif, donc possède une section; on applique alors 0.3.3 à $\text{Ker } f$).

Lorsque A est local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, on peut aussi déduire de 0.3.3 le *théorème d'échange* qui suit : si M est un A -module topologiquement libre de pseudobase $(m_i)_{i \in I}$ (0.2.1) et N un facteur direct (fermé) de M , il existe une pseudobase de M formée d'éléments de N et de certains m_i : en effet, cela est clair lorsque A est un corps (se servir alors de la dualité de 0.2.2 et appliquer le théorème d'échange habituel) ; par conséquent, $N/\mathfrak{m}N$ a pour supplémentaire un module topologiquement libre sur $A/\mathfrak{m}$ de pseudobase $(\overline{m}_i)_{i \in J}$, où $\overline{m}_i$ est l'image de m_i dans $M/\mathfrak{m}M$ et J une partie de I . Si P désigne le produit direct $\prod_{i \in J} Am_i$, l'application canonique de $N \oplus P$ dans M est « bijective modulo $\mathfrak{m}$ » ; elle est donc bijective d'après ce qui précède (pour une autre preuve voir C.A., IV, § 2, prop. 8).

0.3.5. — Considérons maintenant trois A -modules pseudocompacts L , M et N , N étant de longueur finie. Soit ψ un élément de l'ensemble $\text{Hom}_c(L, \text{Hom}_c(M, N))$ des applications A -linéaires continues de L dans le module $\text{Hom}_c(M, N)$ muni de la topologie discrète. Un tel ψ définit une application bilinéaire continue $\psi' : (\ell, m) \mapsto \psi(\ell)(m)$ de $L \times M$ dans N . On obtient donc une autre caractérisation de $\text{Hom}_c(L \widehat{\otimes}_A M, N)$, qu'on va utiliser lorsque M est la limite projective d'un système projectif *filtrant* de A -modules pseudo-compacts M_i . On a alors des isomorphismes naturels

$$\begin{aligned} \text{Hom}_c(L \widehat{\otimes}_A \varprojlim M_i, N) &\simeq \text{Hom}_c(L, \text{Hom}_c(\varprojlim M_i, N)) \\ &\simeq \text{Hom}_c(L, \varinjlim \text{Hom}_c(M_i, N)) \\ &\simeq \varinjlim \text{Hom}_c(L, \text{Hom}_c(M_i, N)) \\ &\simeq \varinjlim \text{Hom}_c(L \widehat{\otimes}_A M_i, N) \\ &\simeq \text{Hom}_c\left(\varprojlim (L \widehat{\otimes}_A M_i), N\right) \end{aligned}$$

qui permettent d'identifier $L \widehat{\otimes}_A (\varprojlim M_i)$ à $\varprojlim (L \widehat{\otimes}_A M_i)$.

0.3.6. — En particulier, le *produit tensoriel complété commute aux produits infinis*. Par exemple, comme l'anneau A est le produit de ses composantes locales $A_{\mathfrak{m}}$ (§ 0.1.1), tout A -module pseudocompact M ($\simeq A \widehat{\otimes}_A M$) s'identifie au produit des modules $M_{\mathfrak{m}} = A_{\mathfrak{m}} \widehat{\otimes}_A M$ (les *composantes locales* de M).

De même, soient M et N deux A -modules pseudo-compacts et considérons l'application $\varphi : M^* \otimes_A N^* \rightarrow (M \widehat{\otimes}_A N)^*$ (0.2.2) qui associe à un élément $f \otimes g$ de $M^* \otimes_A N^*$ l'application $m \widehat{\otimes} n \mapsto f(m)g(n)$ de $M \widehat{\otimes}_A N$ dans A . Cette application φ est bijective lorsque M est isomorphe à A . Comme les foncteurs $M \mapsto M^* \otimes_A N^*$ et $M \mapsto (M \widehat{\otimes}_A N)^*$ transforment un produit direct en somme directe *lorsque A artinien*, on voit que φ est un isomorphisme chaque fois que A est artinien et M topologiquement libre (ou plus généralement projectif).

0.3.7. — Pour tout idéal maximal fermé $\mathfrak{m}$ de A le foncteur $M \mapsto A_{\mathfrak{m}} \widehat{\otimes}_A M$ est évidemment exact. Comme tout A -module pseudocompact projectif P est un produit de modules de la forme $A_{\mathfrak{m}}$, il en résulte que le foncteur $M \mapsto P \widehat{\otimes}_A M$ est exact lorsque P est projectif. La réciproque est vraie :

Proposition. — Soient A un anneau pseudocompact, P un A -module pseudocompact. Le foncteur $M \mapsto P \widehat{\otimes}_A M$ est exact si et seulement si P est projectif.

Comme $P \widehat{\otimes}_A M$ est le produit de ses composantes locales

$$(P \widehat{\otimes}_A M)_{\mathfrak{m}} \simeq P_{\mathfrak{m}} \widehat{\otimes}_{A_{\mathfrak{m}}} M_{\mathfrak{m}},$$

on est ramené au cas où l'anneau A est local. On va prouver alors que P est *topologiquement libre* : pour cela soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A ; alors $P/\overline{\mathfrak{m}P}$ est un espace vectoriel linéairement compact sur $A/\mathfrak{m}$, donc un produit d'exemplaires de $A/\mathfrak{m}$. Il y a donc une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'exemplaires de A et un isomorphisme $\varphi : \prod_{i \in I} (A_i/\mathfrak{m}) \xrightarrow{\sim} P/\overline{\mathfrak{m}P}$. Comme $\prod_{i \in I} A_i$ est projectif, il y a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} A_i & \xrightarrow{\psi} & P \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ \prod_{i \in I} (A_i/\mathfrak{m}) & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & P/\overline{\mathfrak{m}P} \end{array}$$

où p et q désignent les projections canoniques. Appliquant le lemme de Nakayama à Coker ψ et notant que $(A/\mathfrak{m}) \widehat{\otimes}_A \psi$ n'est autre que φ , on voit que ψ est surjectif.

Posant alors $B = \prod_{i \in I} A_i$ et $N = \text{Ker } \psi$, on a le diagramme commutatif et exact suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & \xrightarrow{\quad} & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & \mathfrak{m} \widehat{\otimes}_A N & \longrightarrow & \mathfrak{m} \widehat{\otimes}_A B & \longrightarrow & \mathfrak{m} \widehat{\otimes}_A P \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A \widehat{\otimes}_A N & \longrightarrow & A \widehat{\otimes}_A B & \xrightarrow{\psi} & A \widehat{\otimes}_A P \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & (A/\mathfrak{m}) \widehat{\otimes}_A N & \longrightarrow & (A/\mathfrak{m}) \widehat{\otimes}_A B & \xrightarrow{\varphi} & (A/\mathfrak{m}) \widehat{\otimes}_A P \longrightarrow 0 \end{array} .$$

486 Le « lemme du serpent » appliqué aux deux premières lignes montre alors que le morphisme $(A/\mathfrak{m}) \widehat{\otimes}_A N \rightarrow (A/\mathfrak{m}) \widehat{\otimes}_A B$ est un monomorphisme. Comme φ est un isomorphisme et que la dernière ligne est exacte, $(A/\mathfrak{m}) \widehat{\otimes}_A N$ est nul ; d'où $N = 0$ d'après le « lemme de Nakayama » 0.3.3. Donc ψ est un isomorphisme.

0.3.8. Corollaire. — Soient A un anneau local, noethérien, complet et P un A -module pseudocompact. Alors P est topologiquement libre si et seulement si P est plat sur A .

En effet, l'application canonique de $M \otimes_A P$ dans $M \widehat{\otimes}_A P$ est bijective lorsque M est égal à A , donc lorsque M est noethérien (prendre une présentation finie de M et utiliser l'exactitude à droite du produit tensoriel et du produit tensoriel complété). Or P est plat si et seulement si le foncteur $M \mapsto M \otimes_A P$ est exact quand M parcourt

les modules noethériens. De même, on a vu dans la démonstration de la proposition 0.3.5 que P est topologiquement libre si la suite

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m} \hat{\otimes}_A P \longrightarrow A \hat{\otimes}_A P \longrightarrow (A/\mathfrak{m}) \hat{\otimes}_A P \longrightarrow 0$$

est exacte. Donc P est topologiquement libre si et seulement si le foncteur $M \mapsto M \hat{\otimes}_A P$ est exact quand M parcourt les modules noethériens. Le corollaire résulte donc de l'égalité $M \otimes_A P = M \hat{\otimes}_A P$ ci-dessus. 487

0.4. — Soit k un anneau pseudocompact. Une k -algèbre topologique A (avec élément unité et commutative) est dite *profinie* si le k -module topologique sous-jacent est pseudocompact. Si tel est le cas et si I est un k -sous-module ouvert de A , l'application composée φ

$$A \times A \xrightarrow{\text{mult.}} A \xrightarrow{\text{can.}} A/I$$

est continue. D'après le lemme 0.3.1, il existe un k -sous-module ouvert $\mathfrak{n}$ de A tel que $\varphi(A \times \mathfrak{n}) = 0$. Cela signifie que I contient l'idéal ouvert $A \cdot \mathfrak{n}$ et entraîne que A est un anneau pseudocompact.

Considérons de même un A -module topologique M dont le k -module sous-jacent est pseudocompact. Si M' est un k -sous-module ouvert de M , le lemme 0.3.1 appliqué à l'application

$$A \times M \xrightarrow{\text{mult.}} M \xrightarrow{\text{can.}} M/M'$$

montre que M' contient un A -sous-module ouvert, donc que M est aussi un A -module pseudocompact.

0.4.1. — Si A et B sont deux k -algèbres profinies, un morphisme de A dans B est, par définition, un homomorphisme continu de k -algèbres. La catégorie des k -algèbres profinies possède évidemment des limites projectives : l'algèbre sous-jacente à une limite projective est la limite projective des algèbres sous-jacentes ; la topologie est celle de la limite projective. De même, il y a des limites inductives finies : par exemple, si $f : A \rightarrow B$ et $g : A \rightarrow C$ sont deux morphismes de k -algèbres profinies, la somme amalgamée de B et C sous A a $B \hat{\otimes}_A C$ pour A -module topologique sous-jacent (d'après 0.4, f et g munissent B et C de structures de A -module pseudocompact) ; la multiplication de $B \hat{\otimes}_A C$ est évidemment telle qu'on ait $(b \hat{\otimes} c)(b' \hat{\otimes} c') = (bb') \hat{\otimes} (cc')$ si $b, b' \in B$ et $c, c' \in C$. 488

On notera désormais $\mathbf{Al}/k$ la catégorie des k -algèbres profinies.

0.4.2. — Une k -algèbre profinie C sera dite de *longueur finie* si le k -module sous-jacent est de longueur finie (donc discret) ; nous noterons $\mathbf{Alf}/k$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Al}/k$ formée des k -algèbres de longueur finie et, pour toute algèbre profinie A , $\mathbf{h}^A$ sera le foncteur $C \mapsto \text{Hom}_{\mathbf{Al}/k}(A, C)$ de $\mathbf{Alf}/k$ dans la catégorie **(Ens)**. Il est clair que $\mathbf{h}^A$ est un foncteur exact à gauche ; de plus, lorsque I parcourt les idéaux ouverts de A , les projections canoniques de A sur A/I induisent un isomorphisme

$$\text{Hom}_{\mathbf{Al}/k}(A, C) \xleftarrow{\sim} \varprojlim_I \text{Hom}_{\mathbf{Alf}/k}(A/I, C)$$

chaque fois que C est de longueur finie. Cela signifie que h^A est la limite inductive des foncteurs représentables $h^{A/I}$; si B est une autre k -algèbre profinie, on a donc des isomorphismes

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{A/I/k}(B, A) &\simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_{A/I/k}(B, A/I) \simeq \varprojlim h^B(A/I) \\ &\simeq \varprojlim \mathrm{Hom}(h^{A/I}, h^B) \simeq \mathrm{Hom}(h^A, h^B),\end{aligned}$$

489 qui montrent que le foncteur contravariant $h^? : A \mapsto h^A$ est pleinement fidèle.

En réalité, $h^?$ est une antiéquivalence de $A/I/k$ sur la catégorie des foncteurs exacts à gauche de $A/I/k$ dans **(Ens)**. Il suffit en effet, d'après ce qui précède, de montrer que tout foncteur exact à gauche F est isomorphe à un foncteur du type h^A ; pour cela, on peut construire A comme suit (TDTE II, § 3) : comme F est exact à gauche, il y a, pour toute k -algèbre de longueur finie C et pour tout élément ξ de $F(C)$, une plus petite sous-algèbre C' de C , telle que ξ appartienne à l'image de $F(C')$ dans $F(C)$; si l'on a $C' = C$, on dit que le couple (C, ξ) est *minimal*. Les couples minimaux forment une catégorie si l'on prend pour morphismes de (C, ξ) dans (D, η) les homomorphismes φ de C dans D tels que $(F\varphi)(\xi) = \eta$; il est clair qu'un tel φ est une surjection et que la catégorie des couples minimaux est « filtrante à gauche ». De plus, comme on peut manifestement se restreindre aux couples (C, ξ) tels que C appartienne à un ensemble contenant des k -algèbres de longueur finie de chaque type, le foncteur $(C, \xi) \mapsto C$, qui a pour catégorie de départ celle des couples minimaux et pour catégorie d'arrivée celle des k -algèbres profinies, possède une limite projective; on prend pour A cette limite projective.

L'existence d'une antiéquivalence de $A/I/k$ sur la catégorie des foncteurs exacts à gauche de $A/I/k$ dans **(Ens)**, entraîne par exemple que $A/I/k$ possède des limites inductives infinies : en effet, la catégorie des foncteurs exacts à gauche possède des limites projectives, qui sont définies par la formule

$$(\varprojlim F_i)(C) = \varprojlim F_i(C),$$

lorsque C est une k -algèbre de longueur finie et (F_i) un système projectif de foncteurs.

490 **0.5.** — Soient k et ℓ des anneaux pseudocompacts et $\varphi : k \rightarrow \ell$ un homomorphisme (0.1.3). Pour tout k -module pseudocompact M , nous notons $M \widehat{\otimes}_k \ell$ le séparé complété de $M \otimes_k \ell$ pour la topologie linéaire définie par les sommes des images de $M' \otimes_k \ell$ et $M \otimes_k \ell'$ dans $M \otimes_k \ell$ ((M', ℓ') parcourt les couples formés d'un sous-module ouvert de M et d'un idéal ouvert de ℓ); de même, si $m \in M$ et $x \in \ell$, nous notons $m \widehat{\otimes}_k x$ l'image canonique de $m \otimes_k x$ dans $M \widehat{\otimes}_k \ell$. Il est clair que $M \widehat{\otimes}_k \ell$ est un ℓ -module pseudocompact.

Associons à tout ℓ -module pseudocompact N et tout morphisme $f : M \otimes_k \ell \rightarrow N$ l'application $f' : m \mapsto f(m \widehat{\otimes}_k 1)$ de M dans N . Il est clair qu'on obtient ainsi une bijection de $\mathrm{Hom}_c(M \widehat{\otimes}_k \ell, N)$ sur l'ensemble des applications k -linéaires continues de M dans le k -module déduit de N par restriction des scalaires. On en déduit comme en 0.3.2 et 0.3.4 que le foncteur $M \mapsto M \widehat{\otimes}_k \ell$ est exact à droite et qu'il commute aux produits infinis et au produit tensoriel complété.

Enfin, si A est une k -algèbre profinie, il y a sur $A \widehat{\otimes}_k \ell$ une et une seule structure de ℓ -algèbre profinie telle que $(m \widehat{\otimes}_k x)(n \widehat{\otimes}_k y) = (mn) \widehat{\otimes}_k (xy)$ si $m, n \in A$ et $x, y \in \ell$. On dit que $A \widehat{\otimes}_k \ell$ est l'*algèbre déduite de A par l'extension des scalaires φ* . Le foncteur $A \rightarrow A \widehat{\otimes}_k \ell$ est exact à droite.

1. Variétés formelles sur un anneau pseudocompact

491

1.1. — On peut associer à tout anneau pseudocompact A un schéma formel (EGA I, 10.4.2) en procédant comme suit : l'espace topologique sous-jacent est l'ensemble $\Upsilon(A)$ des idéaux maximaux fermés de A , qu'on munit de la topologie discrète ; le faisceau structural a le produit cartésien $\prod_{\mathfrak{m} \in E} A_{\mathfrak{m}}$ pour espace des sections sur une partie E de $\Upsilon(A)$. Le schéma formel ainsi obtenu est noté $\mathrm{Spf} A$ (le *spectre formel* de A).

Si A et B sont deux anneaux pseudocompacts, un morphisme de $\mathrm{Spf} B$ dans $\mathrm{Spf} A$ consiste en la donnée d'une application f de $\Upsilon(B)$ dans $\Upsilon(A)$ et d'une famille d'homomorphismes f_y (0.1.3) de $A_{f(y)}$ dans B_y ($y \in \Upsilon(B)$). Un tel morphisme induit un homomorphisme de A (le produit des A_x , $x \in \Upsilon(A)$) dans B (le produit des B_y) et la réciproque est vraie : si $\varphi : A \rightarrow B$ est un homomorphisme continu d'algèbres, l'image réciproque $\varphi^{-1}(\mathfrak{n})$ d'un idéal maximal fermé (donc ouvert) de B est un idéal ouvert premier de A ; il est donc maximal dans A et on peut poser $\mathfrak{m} = \varphi^{-1}(\mathfrak{n}) = (\mathrm{Spf})(\mathfrak{n})$; l'application φ induit alors un homomorphisme de $A_{\mathfrak{m}}$ dans $B_{\mathfrak{n}}$.

On voit donc que le foncteur contravariant $A \mapsto \mathrm{Spf} A$ est pleinement fidèle. Bien que nous ne parlions ici que de schémas formels de la forme $\mathrm{Spf} A$, nous utiliserons le langage des schémas formels plutôt que celui des anneaux pseudocompacts pour appuyer nos assertions sur une intuition géométrique.

1.2. — Soit k un anneau pseudocompact. Nous appellerons *variété formelle* sur k tout schéma formel X au-dessus de $\mathrm{Spf} k$ qui est isomorphe à un k -schéma formel $\mathrm{Spf} A$ pour une certaine k -algèbre profinie A . L'algèbre A est alors isomorphe à l'*algèbre affine* de X , c'est-à-dire à l'algèbre des sections du faisceau structural $\mathcal{O}_X$ de X . D'après 1.1 le foncteur $A \mapsto \mathrm{Spf} A$ est une antiéquivalence de Al/k (0.4.1) sur la sous-catégorie pleine Vf/k de la catégorie des schémas formels sur $\mathrm{Spf} k$ dont les objets sont les k -variétés formelles.

492

La catégorie Vf/k possède des limites projectives et inductives : soient par exemple Y, Z des k -variétés formelles au-dessus d'une même k -variété formelle X et soient A, B, C les algèbres affines de X, Y, Z ; d'après 0.4.1, l'algèbre affine du produit fibré $Y \times_X Z$ s'identifie à $B \widehat{\otimes}_A C$, de sorte que l'inclusion de Vf/k dans la catégorie de tous les k -schémas formels commute aux limites projectives finies (cf. EGA I, 10.7). De même, les limites inductives de k -variétés formelles correspondent aux limites projectives de leurs algèbres affines : soient, par exemple, $d, e : X \rightrightarrows Y$ une double-flèche de Vf/k ; l'algèbre affine de $\mathrm{Coker}(d, e)$ est isomorphe au noyau des homomorphismes induits sur les algèbres affines de X et Y ; mais on peut aussi donner de $\mathrm{Coker}(d, e)$ la construction suivante : l'ensemble sous-jacent à $\mathrm{Coker}(d, e)$ est le conoyau des ensembles sous-jacents ; si p est la projection canonique de l'ensemble sous-jacent à Y sur le conoyau

et si z appartient au conoyau, l'algèbre locale de $\text{Coker}(d, e)$ en z est le noyau de la double-flèche

$$d', e' : \prod_{p(y)=z} \mathcal{O}_{Y,y} \rightrightarrows \prod_{q(x)=z} \mathcal{O}_{X,x}$$

493 où l'on a posé $q = pd = pe$ et où d' et e' sont induits par les homomorphismes d_x et e_x (notations de 1.1).

Enfin, si $\varphi : k \rightarrow \ell$ est un homomorphisme d'anneaux pseudocompacts et X une k -variété formelle d'algèbre affine A , le schéma formel $X \times_{\text{Spf } k} \text{Spf } \ell$, obtenu par changement de base, est une ℓ -variété formelle, que nous noterons aussi $X \widehat{\otimes}_k \ell$ et qui a pour algèbre affine le produit tensoriel complété $A \widehat{\otimes}_k \ell$ (confer 0.5 et EGA I, 10).

Comme toute variété formelle sur k se décompose en variétés formelles sur les composantes locales de k , nous supposons dans certaines démonstrations que k est un anneau pseudocompact local.

Donnons maintenant quelques exemples, en même temps que nous fixons notre terminologie :

1.2.1. — Un k -foncteur sera, par définition, un foncteur covariant de Alf/k dans **(Ens)**. D'après 0.4.2, on peut identifier Vf/k à une sous-catégorie pleine de $\underline{\text{Hom}}(\text{Alf}/k, \mathbf{(Ens)})$, en associant à toute k -variété formelle le foncteur $C \mapsto X(C)$ (C parcourt les objets de Alf/k et $X(C)$ désigne l'ensemble $\text{Hom}_{\text{Vf}/k}(\text{Spf } C, X)$).

Nous rencontrerons plus loin des foncteurs $\mathbf{F}$ qui associent à tout objet C de Alf/k un module $\mathbf{F}(C)$ sur C et à tout morphisme $\varphi : C \rightarrow D$ de Alf/k une application linéaire $\mathbf{F}(\varphi) : \mathbf{F}(C) \rightarrow \mathbf{F}(D)$ telle que $(\mathbf{F}(\varphi))(\lambda x) = \varphi(\lambda) \cdot (\mathbf{F}(\varphi)(x))$, si $x \in \mathbf{F}(C)$ et $\lambda \in C$.

494 D'après I 3.1, $\mathbf{F}$ est muni d'une structure de $\mathbf{O}_k$ -module, si l'on désigne par $\mathbf{O}_k$ le k -foncteur en anneaux qui associe à tout objet C de Alf/k l'anneau sous-jacent à C . Un $\mathbf{k}$ -module $\mathbf{F}$ sera dit *plat*, si $\mathbf{F}(C)$ est plat sur C pour tout objet C de Alf/k , et si tout morphisme $\varphi : C \rightarrow D$ de Alf/k induit une bijection de $D \otimes_C \mathbf{F}(C)$ sur $\mathbf{F}(D)$.

Par exemple, si M est un module sur k , nous noterons $\mathbf{M}$ le $\mathbf{O}_k$ -module $C \mapsto C \otimes_k M$; alors $\mathbf{M}$ est plat lorsque M est plat sur k . De plus, le foncteur $M \mapsto \mathbf{M}$ a pour adjoint à droite le foncteur qui associe à tout $\mathbf{O}_k$ -module $\mathbf{F}$ la limite projective $\varprojlim_{\mathfrak{l}} \mathbf{F}(k/\mathfrak{l})$, $\mathfrak{l}$ parcourant les idéaux ouverts de k .

1.2.2. — Dans la suite, un $\mathbf{O}_k$ -module sera toujours désigné par une lettre en caractères gras telle que $\mathbf{F}$; lorsque k est artinien, nous écrirons alors simplement F au lieu de $\mathbf{F}(k)$. Dans ce cas, il va de soi que le foncteur $\mathbf{F} \mapsto F$ induit une équivalence de la catégorie des $\mathbf{O}_k$ -modules plats sur celle des k -modules plats! La terminologie, que nous avons adoptée, a donc seulement pour but de nous permettre de raisonner « comme si k était toujours artinien ».

Conformément à l'exposé I §3.1, nous utiliserons des conventions analogues pour d'autres structures algébriques : ainsi, une $\mathbf{O}_k$ -algèbre (resp. une $\mathbf{O}_k$ -coalgèbre, resp. une $\mathbf{O}_k$ -algèbre de Lie, resp. une p -algèbre de Lie sur $\mathbf{O}_k$) consistera en la donnée d'un $\mathbf{O}_k$ -module $\mathbf{M}$ et, pour tout objet C de Alf/k , d'une structure de C -algèbre (resp. de C -coalgèbre, resp. de C -algèbre de Lie, resp. de p -algèbre de Lie sur C) sur

$\mathbf{M}(C)$; on suppose de plus que, pour tout morphisme $\varphi : C \rightarrow D$ de Alf/k , l'application de $D \otimes_C \mathbf{M}(C)$ dans $\mathbf{M}(D)$, qui est induite par $\mathbf{M}(\varphi)$, est un homomorphisme de D -algèbres (resp. de C -coalgèbres, resp. ...).

Notons enfin que, si $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ sont deux $\mathbf{O}_k$ -modules, $\mathbf{F} \otimes_k \mathbf{G}$ désignera le $\mathbf{O}_k$ -module $C \mapsto \mathbf{F}(C) \otimes_C \mathbf{G}(C)$.

1.2.3. — Soit N un k -module pseudocompact. Nous notons $\mathbf{V}_k^f(N)$ ou $\mathbf{N}^*$ le $\mathbf{O}_k$ -module 495 qui associe à tout $C \in \text{Alf}/k$ le C -module $(C \widehat{\otimes}_k N)^*$ dual de $C \widehat{\otimes}_k N$ (0.2.2); ce $\mathbf{O}_k$ -module $\mathbf{N}^*$ sera appelé *le dual* de N . Il est clair que $\mathbf{N}^*$ est plat (1.2.1), lorsque N est un k -module pseudocompact projectif.

Réciproquement, si $\mathbf{M}$ est un $\mathbf{O}_k$ -module, nous appelons *dual de $\mathbf{M}$* et nous notons $\mathbf{M}^*$ la limite projective des modules pseudocompacts $(\mathbf{M}(k/\ell))^*$ sur k/ℓ (ℓ parcourt les idéaux ouverts de k). Si $\mathbf{M}$ est un $\mathbf{O}_k$ -module plat, il est clair que $\mathbf{M}$ n'est autre que le dual de $\mathbf{M}^*$, donc que *les foncteurs $N \mapsto \mathbf{N}^*$ et $\mathbf{M} \mapsto \mathbf{M}^*$ définissent une antiéquivalence de la catégorie des k -modules pseudocompacts projectifs sur celle des $\mathbf{O}_k$ -modules plats* (confer 0.2.2).

De plus, si M est un k -module pseudocompact topologiquement libre, soient (m_i) une pseudobase de M (0.2.1) et m_i^C l'image canonique de m_i dans $C \widehat{\otimes}_k M$ ($C \in \text{Alf}/k$). Si l'on définit l'élément n_i^C de $(C \widehat{\otimes}_k M)^*$ par les égalités $n_i^C(m_i^C) = 1$ et $n_i^C(m_j^C) = 0$ pour $i \neq j$, la famille (n_i^C) est une base de $\mathbf{M}^*(C)$; en outre, pour tout morphisme $\varphi : C \rightarrow D$ de Alf/k , $\mathbf{M}^*(\varphi)$ envoie n_i^C sur n_i^D : on peut donc choisir pour les C -modules $\mathbf{M}^*(C)$ des bases « de manière cohérente ».

1.2.4. — Pour tout k -module pseudocompact E , le $\mathbf{O}_k$ -module $\mathbf{E}^*$ est naturellement isomorphe au foncteur $C \mapsto \text{Hom}_{\text{Alf}/k}(\widehat{S}_k(E), C)$, où $\widehat{S}_k(E)$ désigne *l'algèbre symétrique complétée de E* qu'on peut construire de la manière suivante: soit $T_k(E)$ la somme directe des groupes abéliens

$$\widehat{\bigotimes}_k^n E = E \widehat{\otimes}_k \cdots \widehat{\otimes}_k E \quad (n \geq 0; \quad \text{si } n = 0, \quad \widehat{\bigotimes}_k^0 E = k);$$

on fait de $T_k(E)$ une k -algèbre graduée en définissant la multiplication de la façon 496 habituelle; soit alors $S_k(E)$ le quotient de $T_k(E)$ par l'idéal homogène qui a pour n -ième composante le k -sous-module fermé de $\widehat{\bigotimes}_k^n E$ engendré par les éléments

$$x_1 \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} x_i \widehat{\otimes} x_{i+1} \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} x_n - x_1 \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} x_{i+1} \widehat{\otimes} x_i \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} x_n.$$

Si $S_k^n(E)$ est le quotient de $\widehat{\bigotimes}_k^n E$ par ce sous-module, $S_k(E)$ est évidemment une k -algèbre graduée de n -ième composante $S_k^n(E)$; l'algèbre profinie $\widehat{S}_k(E)$ est le séparé complété de $S_k(E)$ pour la topologie linéaire définie par les idéaux $\mathfrak{l}$ tels que $S_k(E)/\mathfrak{l}$ soit un k -module de longueur finie et que $S_k^n(E) \cap \mathfrak{l}$ soit un sous-module ouvert de $S_k^n(E)$ pour tout n .

Dans toute la suite, nous identifions le spectre formel de $\widehat{S}_k(E)$ au k -foncteur $\mathbf{V}_k(E)$ (1.2.3).

1.2.5. — D'après 1.2.4, le morphisme nul de E dans k est associé à un morphisme d'algèbres profinies $\pi : \widehat{S}_k(E) \rightarrow k$; ce morphisme π induit l'application nulle sur $S_k^n(E)$ pour $n \geq 1$ et définit une section de la projection canonique de $\mathbb{V}_k^f(E)$ sur $\mathrm{Spf} k$. Nous noterons $\mathbb{V}_k^{f,0}(E)$ la variété formelle qui a pour points les images x des points s de $\mathrm{Spf} k$ par la section $\mathrm{Spf} \pi$ et qui a les mêmes algèbres locales que $\mathbb{V}_k^f(E)$ en ces points x . Il est clair que l'algèbre affine de $\mathbb{V}_k^{f,0}(E)$ est le produit infini

$$k[[E]] = k \times E \times S_k^2(E) \times S_k^3(E) \times \cdots.$$

La multiplication de $k[[E]]$ est induite par celle de $S_k(E)$ et l'on a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Al}/k}(k[[E]], C) \simeq \mathrm{Hom}_c(E, \mathfrak{r}(C))$$

497 lorsque C parcourt les k -algèbres de longueur finie et que $\mathfrak{r}(C)$ désigne le radical de C .

1.2.6. — Une k -variété formelle V est dite de *longueur finie* si son algèbre affine l'est. De même, si S est un schéma, un S -schéma X est dit de *longueur finie* si X est fini sur S et si l'image directe de $\mathcal{O}_X$ sur S est un $\mathcal{O}_S$ -Module de longueur finie. Les S -schémas de longueur finie s'identifient aux variétés formelles de longueur finie sur le schéma formel $\widehat{S}$ qui suit : l'espace topologique sous-jacent à $\widehat{S}$ est l'ensemble des points fermés de S muni de la topologie discrète; si s est un tel point fermé, le faisceau structural $\mathcal{O}_{\widehat{S}}$ a pour fibre $\mathcal{O}_{\widehat{S},s}$ en s le séparé complété de $\mathcal{O}_{S,s}$ pour la topologie linéaire définie par les idéaux de colongueur finie.

Soit $V/\widehat{S}$ la catégorie des variétés formelles de longueur finie sur $\widehat{S}$ (identifiée à celle des S -schémas de longueur finie). D'après 1.1 et 1.2.1, la catégorie $\mathrm{Vf}/\widehat{S}$ des variétés formelles sur $\widehat{S}$ est équivalente à celle des foncteurs contravariants exacts à gauche de $V/\widehat{S}$ dans **(Ens)**. Par exemple, si X est un S -schéma, le foncteur $T \mapsto \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Sch}/S)}(T, X)$ est un tel foncteur exact à gauche; il est donc naturellement isomorphe à un foncteur $T \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Vf}/\widehat{S}}(T, \widehat{X/S})$, où $\widehat{X/S}$ est une variété formelle sur $\widehat{S}$ qu'on peut décrire de la manière suivante : l'ensemble sous-jacent est formé des points x de X tels que le corps résiduel $k(x)$ de X en x soit une extension finie du corps résiduel $k(s)$ de l'image s de x sur S ; la fibre de $\mathcal{O}_{\widehat{X/S}}$ en x est le séparé complété de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ pour la topologie linéaire définie par les idéaux de colongueur finie.

498 **1.3. Proposition.** — Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés formelles sur k , A et B les algèbres affines de X et Y , $g : B \rightarrow A$ le morphisme induit par f . Alors f est un monomorphisme de Vf/k si et seulement si g est une surjection.

En effet, A est un k -module pseudocompact et g fait de A un B -module pseudocompact (0.4); il est donc loisible de supposer B égal à k . De plus, comme B et A sont les produits des composantes locales $B_{\mathfrak{n}}$ et $A_{\mathfrak{n}}$ ($\mathfrak{n} \in \Upsilon(B)$), on peut supposer B local. Si $\mathfrak{n}$ est alors l'idéal maximal de B , il suffit de montrer que $g \otimes_B (B/\mathfrak{n})$ est surjectif (lemme de Nakayama, 0.3.3); or $g \otimes_B (B/\mathfrak{n})$ est déduit de g par changement de base, donc

est un épimorphisme de A/k . On peut donc supposer que $B = k$ est un corps. Or f est un monomorphisme si et seulement si le morphisme diagonal $X \rightarrow X \times_Y X$ est un isomorphisme, c'est-à-dire si l'homomorphisme $x \hat{\otimes}_B x' \rightarrow xx'$ est un isomorphisme de $A \hat{\otimes}_k A$ sur A . Comme k est un corps, cela implique $A = k$.

1.3.1. — La proposition précédente entraîne en particulier que *tout monomorphisme de Vf/k est effectif* (confer IV 1.3). Il n'en va pas de même pour les épimorphismes, comme on le voit facilement en modifiant un peu le contreexemple de V 2c); c'est pourquoi nous allons considérer une classe sympathique d'épimorphismes effectifs :

Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ de k -variétés formelles est dit *surjectif* s'il induit une surjection des ensembles sous-jacents; il est dit *topologiquement plat* si, pour tout point x de X , l'homomorphisme $f_x : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$, qui est induit par f , fait de $\mathcal{O}_{X,x}$ un module topologiquement libre sur $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$.

Proposition. — *Un morphisme surjectif et topologiquement plat de k -variétés formelles est un épimorphisme effectif* (IV 1.3). 499

Soient en effet A et B les algèbres affines de X , Y et soit $g : B \rightarrow A$ le morphisme induit par f . D'après ce que nous avons vu en 1.2, on peut supposer B local. Notre hypothèse signifie alors que g fait de A un B -module topologiquement libre et non nul. Si $\mathfrak{n}$ est l'idéal maximal de B , $A/\overline{\mathfrak{n}A}$ n'est donc pas nul, de sorte que l'application $g' : B/\mathfrak{n} \rightarrow A/\overline{\mathfrak{n}A}$ déduite de g est une injection. D'après le lemme 1.3.2 ci-dessous, le B -module A s'identifie donc à la somme directe de B et d'un supplémentaire A' de l'image de B dans A . Il en résulte évidemment que g est un isomorphisme de B sur la partie de A formée des a tels que $a \hat{\otimes}_B 1 = 1 \hat{\otimes}_B a$, cqfd

1.3.2. Lemme. — *Soient B un anneau pseudocompact local d'idéal maximal $\mathfrak{n}$, M et N deux B -modules pseudocompacts projectifs et g un morphisme de M dans N . Alors g est un isomorphisme de M sur un facteur direct de N si $(B/\mathfrak{n}) \hat{\otimes}_B g$ est une injection.*

Posons en effet $g' = (B/\mathfrak{n}) \hat{\otimes}_B g$. Alors g' possède une rétraction r' . Si p et q sont les projections canoniques de M et N sur $M/\overline{\mathfrak{n}M}$ et $N/\overline{\mathfrak{n}N}$, il y a donc un morphisme r tel que $pr = r'q$; par conséquent, r' est déduit de r par passage au quotient et rg est un isomorphisme parce que $r'g'$ l'est (0.3.4). Si s l'isomorphisme réciproque de rg , g a sr pour rétraction.

1.3.3. Proposition. — *Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ des morphismes de k -variétés formelles :*

- (i) *Si f et g sont topologiquement plats, $g \circ f$ l'est.* 500
- (ii) *Si g et $g \circ f$ sont topologiquement plats et si f est surjectif, g est topologiquement plat.*
- (iii) *Si f est topologiquement plat, $f \times_Y Y'$ l'est pour tout changement de base $Y' \rightarrow Y$.*

Les assertions (i) et (iii) sont claires. Pour prouver (ii), appelons A, B, C les algèbres affines de X, Y, Z , et $f' : B \rightarrow A$ et $g' : C \rightarrow B$ les morphismes induits par f et g .

Comme $g \circ f$ est topologiquement plat, $f' \circ g'$ fait de A un C -module pseudocompact projectif; de même, f' fait de A un B -module pseudocompact fidèle. Lorsque P parcourt les C -modules pseudocompacts et N les B -modules pseudocompacts, les foncteurs $P \mapsto P \widehat{\otimes}_C A$ et $N \mapsto N \widehat{\otimes}_B A$ sont donc exacts; comme le deuxième est en outre fidèle, le foncteur $P \mapsto P \widehat{\otimes}_C B$ est exact; d'après 0.3.7, B est donc un C -module pseudocompact projectif.

1.3.4. Proposition. — Soient S un schéma, Y un S -schéma localement noethérien et $f : X \rightarrow Y$ un S -morphisme localement de type fini et fidèlement plat. Alors $\widehat{f/S} : \widehat{X/S} \rightarrow \widehat{Y/S}$ est un morphisme surjectif et topologiquement plat de $\widehat{S}$ -variétés formelles (1.2.6). De plus, la suite

$$(X \times_Y X)/S \xrightleftharpoons[\widehat{\text{pr}_2/S}]{\widehat{\text{pr}_1/S}} \widehat{X/S} \xrightarrow{\widehat{f/S}} \widehat{Y/S}$$

déduite de la suite exacte

$$X \times_Y X \xrightleftharpoons[\text{pr}_2]{\text{pr}_1} X \xrightarrow{f} Y$$

est exacte.

501 Soit en effet y un point de Y de projection s sur S et tel que $k(y)$ soit une extension finie du corps résiduel $k(s)$ de s . Comme f est localement de type fini, $f^{-1}(y)$ est localement de type fini sur $k(y)$ et les points de $\widehat{X/S}$ se projetant en y sont les points fermés de $f^{-1}(y)$; ceci montre que f est surjectif.

Si x est un point fermé de $f^{-1}(y)$, les anneaux locaux de x et y sur $\widehat{X/S}$ et $\widehat{Y/S}$ sont les complétés de $\mathcal{O}_{X,x}$ et $\mathcal{O}_{Y,y}$ pour les topologies linéaires définies par les puissances des idéaux maximaux. D'après SGA IV 5.8, $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ est donc plat sur $\widehat{\mathcal{O}}_{Y,y}$. D'après 0.3.8, $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ est un $\widehat{\mathcal{O}}_{Y,y}$ -module topologiquement libre.

Nous avons vu enfin en 1.2.4 que le foncteur $T \rightarrow \text{Hom}_{Vf/\widehat{S}}(T, \widehat{X/S})$ était naturellement isomorphe au foncteur $T \mapsto \text{Hom}_{(\text{Sch}/S)}(T, X)$ (T étant de longueur finie). Comme une limite projective de foncteurs exacts à gauche se calcule « argument par argument » et que $Vf/\widehat{S}$ est une catégorie équivalente à celle des foncteurs contravariants exacts à gauche de $V/\widehat{S}$ dans **(Ens)**, on voit que le foncteur $X \mapsto \widehat{X/S}$ commute aux limites projectives. En particulier $(X \times_Y X)/S$ s'identifie à $\widehat{X/S} \times_{\widehat{Y/S}} \widehat{X/S}$, de sorte que notre dernière assertion dit simplement que $\widehat{f/S}$ est un épimorphisme effectif (1.3.1).

1.3.5. — Une variété formelle X sur k est dite *topologiquement plate* si son algèbre affine A est un k -module pseudocompact projectif, c'est-à-dire si le morphisme structural $X \rightarrow \text{Spf}(k)$ est topologiquement plat. On peut décrire une telle variété formelle à l'aide de coalgèbres : désignons, en effet, par $\mathbf{H}(X)$ le $\mathbf{O}_k$ -module $\mathbf{V}_k^f(A)$ dual de A (1.2.3). Comme $\mathbf{V}^f(A \widehat{\otimes} A)$ s'identifie à $\mathbf{V}^f(A) \otimes_k \mathbf{V}^f(A)$ (1.2.2) d'après 0.3.6, la multiplication de l'algèbre A induit par transposition un morphisme diagonal, qui fait

de $\mathbf{H}(X)$ une $\mathbf{O}_k$ -coalgèbre (1.2.2). Nous dirons que $\mathbf{H}(X)$ est la coalgèbre de X sur $\mathbf{O}_k$.

Réciproquement, toute $\mathbf{O}_k$ -coalgèbre $\mathbf{H}$ définit un k -foncteur (1.2.1) $\mathrm{Spf}^* \mathbf{H}$: pour tout objet C de Alf/k , $(\mathrm{Spf}^* \mathbf{H})(C)$ est l'ensemble des éléments x de $\mathbf{H}(C)$ tels que $\varepsilon_{\mathbf{H}(C)}(x) = 1$ et $\Delta_{\mathbf{H}(C)}(x) = x \otimes x$ (notations de VII_A 3.1). Lorsque le $\mathbf{O}_k$ -module sous-jacent à $\mathbf{H}$ est plat, $\mathrm{Spf}^* \mathbf{H}$ s'identifie au spectre formel d'une algèbre $\mathbf{H}^* \in \mathrm{Al}/k$, qui a pour k -module topologique sous-jacent le dual de $\mathbf{H}$ (1.2.3), la multiplication de $\mathbf{H}^*$ étant induite par les morphismes diagonaux des coalgèbres $\mathbf{H}(C)$ (confer VII_A 3.1.2). On voit ainsi que les foncteurs $X \mapsto \mathbf{H}(X)$ et $\mathbf{H} \mapsto \mathrm{Spf}^* \mathbf{H}$ définissent une équivalence entre la catégorie des k -variétés formelles topologiquement plates et celle des $\mathbf{O}_k$ -coalgèbres plates.

1.3.6. — Dans la suite de cet exposé, nous définirons plusieurs fois une variété formelle topologiquement plate X en exhibant la coalgèbre $\mathbf{H}(X)$. Il nous faudra alors interpréter au moyen de $\mathbf{H}(X)$ certaines propriétés géométriques de X . Nous donnons ici un exemple de cette situation : supposons pour simplifier k artinien et posons $H = \mathbf{H}(X)(k)$; supposons donnée en outre une section σ de la projection canonique de X sur $\mathrm{Spf} k$ et demandons sous quelle condition σ induit un isomorphisme des espaces topologiques sous-jacents : désignons pour cela par H^+ le noyau de l'augmentation ε_H (VII_A 3.1), par η_H la section de ε_H qui est induite par σ . L'application $(x, y) \mapsto \eta_H(x) + y$ nous permet alors d'identifier $k \oplus H^+$ à H et de définir par récurrence des sous-modules H_n de H ;

$$\begin{aligned} H_0 &= \eta_H(k) \\ &\dots\dots\dots \\ H_{n+1} &= \{u \in H \mid \Delta_H u - u \otimes 1 \in H_n \otimes H^+\}. \end{aligned}$$

Nous dirons que la suite $H_0 \subset H_1 \subset \dots$ est la filtration naturelle de H ; sous les hypothèses ci-dessus, on voit alors facilement que la section σ de la projection canonique de X sur k induit un isomorphisme sur les espaces topologiques sous-jacents si et seulement si H est la réunion des H_n : soient en effet A l'algèbre affine de X , $\varepsilon_A : A \rightarrow k$ l'homomorphisme induit par σ et I le noyau de ε_A , c'est-à-dire l'orthogonal de H_0 dans A . Notons en outre A' (resp. A'') l'anneau des sections du faisceau structural de X sur l'image de σ (resp. sur le complémentaire de cette image dans X). L'algèbre A est alors canoniquement isomorphe à $A' \oplus A''$ et I s'identifie à une partie de $A' \oplus A''$ de la forme $I' \oplus A''$. Comme A'' est un k -module pseudocompact projectif et que les idéaux I^r tendent vers 0, il est clair que A'' est nul si et seulement si toute application linéaire continue de A dans k s'annule sur un idéal I^{n+1} , donc si et seulement si H est la réunion des k -modules $(A/\overline{I^{n+1}})^*$. Montrons qu'on a $H_n = (A/\overline{I^{n+1}})^*$:

Cela est clair pour $n = 0$. Supposons le donc vérifié pour $n < r$: aux suites exactes

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \overline{I^r} \longrightarrow A \longrightarrow A/\overline{I^r} \longrightarrow 0 \\ \text{et} \quad \overline{I^r} \widehat{\otimes} I \longrightarrow A \longrightarrow A/\overline{I^{r+1}} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

correspondent par dualité les suites exactes

$$\begin{aligned}
& (\overline{I^r})^* \longleftarrow H \longleftarrow H_{r-1} \longleftarrow 0 \\
\text{et} \quad & (\overline{I^r})^* \otimes H^+ \xleftarrow{\delta} H \longleftarrow (A/\overline{I^{r+1}})^* \longleftarrow 0,
\end{aligned}$$

où δ est obtenu en composant Δ_H avec la projection canonique de $H \otimes H$ dans $(\overline{I^r})^* \otimes H^+$. La première suite montre que H/H_{r-1} s'injecte dans $(\overline{I^r})^*$, donc que $(H/H_{r-1}) \otimes H^+$ s'injecte dans $(\overline{I^r})^* \otimes H^+$ (H^+ est plat). D'autre part, $\Delta_H u - u \otimes 1$ appartient à $H \otimes H^+$ pour tout $u \in H$, donc est la projection de u sur $H \otimes H^+$. La seconde suite exacte montre alors que u appartient à $(A/\overline{I^{r+1}})^*$ si et seulement si $\Delta_H u - u \otimes 1$ appartient au noyau de l'application canonique de $H \otimes H^+$ sur $(H/H_{r-1}) \otimes H^+$, c'est-à-dire à $H_{r-1} \otimes H^+$.

1.4. Théorème. — Soient k un anneau pseudocompact et $d_0, d_1 : X_1 \rightrightarrows X$ un couple d'équivalence de Vf/k (V 2b) tel que d_1 soit topologiquement plat. Alors la projection canonique de X sur X/X_1 ($= \text{Coker}(d_0, d_1)$) est surjective et topologiquement plate, et le morphisme $X_1 \rightarrow X \times_{X/X_1} X$ de composantes d_0 et d_1 est un isomorphisme.

La démonstration de ce théorème occupe les paragraphes 1.4.1, 1.4.2 et 1.4.3 :

1.4.1. — Montrons d'abord qu'on peut se ramener au cas où X a un seul point :
 505 comme nous avons affaire à un couple d'équivalence, on voit comme en V 3e qu'on définit une relation d'équivalence dans l'ensemble sous-jacent à X en déclarant que deux points x, y sont équivalents s'il existe un point z de X_1 tel que $d_0 z = y$ et $d_1 z = x$. On peut évidemment supposer sans inconvénient que X contient une seule classe d'équivalence pour cette relation, autrement dit que X/X_1 a un seul point (voir la construction de X/X_1 donnée en 1.2) : dans ce cas, soient x un point quelconque de X et U la variété formelle qui a x pour seul point et qui a même anneau local que X en x . On voit alors comme en V § 6 que la relation d'équivalence induite par (d_0, d_1) sur U vérifie encore les hypothèses du théorème et qu'il suffit de faire la preuve pour cette dernière relation d'équivalence (U est une « quasi-section ») :

Rappelons brièvement le principe de la démonstration faite en V, § 6 : posons $V = d_0^{-1}(U) = U \times_{i, d_0} X_1$, où i est l'inclusion de U dans X ; soient u et v les morphismes de source V induits respectivement par d_0 et d_1 :

$$X \xleftarrow{v} V \xrightarrow{u} U.$$

Il est clair que u et v sont topologiquement plats et que u est surjectif; comme X contient une seule classe d'équivalence, v est surjectif. Si (v_0, v_1) est l'image réciproque du couple d'équivalence (d_0, d_1) par v (V 3a), il résulte de V § 3c d que X/X_1 et le quotient de U par la relation d'équivalence induite par (d_0, d_1) s'identifient tous deux à $\text{Coker}(v_0, v_1)$. Le reste est facile (V § 6).

1.4.2. — On se trouve ainsi ramené au cas où X a un seul point : considérons alors le diagramme commutatif suivant (confer V § 1 (0,1,2))

$$\begin{array}{ccccc}
 X_2 & \xrightleftharpoons[d'_0]{d'_1} & X_1 & \xrightarrow{d_0} & X \\
 d'_2 \downarrow & & d_1 \downarrow & & \downarrow \\
 X_1 & \xrightleftharpoons[d_0]{d_1} & X & \longrightarrow & X/X_1
 \end{array}$$

où X_2 est le produit fibré $X_1 \times_{d_1, d_0} X_1$, d'_0 , d'_1 et d'_2 étant respectivement les morphismes 506

« $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ », « $(x, y, z) \mapsto (x, z)$ » et « $(x, y, z) \mapsto (y, z)$ ». Si B , A , A_1 et A_2 désignent respectivement les algèbres affines de X/X_1 , X , X_1 et X_2 , le diagramme précédent induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 A_2 & \xleftarrow{j_1} & A_1 & \xleftarrow{i_0} & A \\
 j_2 \uparrow & & i_1 \uparrow & & \uparrow i \\
 A_1 & \xleftarrow[i_0]{i_1} & A & \xleftarrow{i} & B
 \end{array}$$

dans lequel les deux lignes sont exactes et les carrés déterminés par (i_0, j_0) et (i_1, j_1) cocartésiens. Comme le morphisme $X_1 \rightarrow X \times X$ de composantes d_0 et d_1 est un monomorphisme par hypothèse, le morphisme $A \hat{\otimes}_k A \rightarrow A_1$ de composantes i_0 et i_1 est surjectif (1.3). Cela signifie que i_1 fait de A_1 un A -module pseudocompact (supposé topologiquement libre) engendré par $i_0(A)$. Comme A est local, le lemme 1.4.3 ci-dessous entraîne l'existence d'un k -module topologiquement libre V et d'un morphisme de k -modules pseudocompacts $j : V \rightarrow A$ tels que le morphisme $\alpha_1 : a \hat{\otimes} v \mapsto i_1(a) \cdot i_0(ja)$ de $A \hat{\otimes}_k V$ dans A_1 soit inversible. Soient $\alpha : B \hat{\otimes}_k V \rightarrow A$ et $\alpha_2 : A_1 \hat{\otimes}_k V \rightarrow A_2$ les morphismes « $b \hat{\otimes} v \mapsto b \cdot j(v)$ » et « $a \hat{\otimes} v \mapsto (j_2a) \cdot j_0(i_0(jv))$ ». 507

Dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 A_2 & \xleftarrow{j_1} & A_1 & \xleftarrow{i_0} & A \\
 \alpha_2 \uparrow & & \alpha_1 \uparrow & & \uparrow \alpha \\
 A_1 \hat{\otimes}_k V & \xleftarrow[i_0 \otimes V]{i_1 \otimes V} & A \hat{\otimes}_k V & \xleftarrow{i \hat{\otimes} V} & B \hat{\otimes}_k V
 \end{array}$$

les deux lignes sont donc exactes et les deux carrés de gauche sont cocartésiens. Comme α_1 est inversible, il en va de même pour α_2 , donc pour α . Ceci montre d'une part que A est topologiquement libre sur B de « base j » et qu'on obtient une pseudobase de A_1 sur A (considéré comme A -module au moyen de i_1 ; 0.2.1) en prenant l'image par i_0 d'une pseudobase de A sur B ; cela entraîne que le morphisme $A \hat{\otimes}_B A \rightarrow A_1$ de

composantes i_1 et i_0 est inversible :

$$A \hat{\otimes}_B A \simeq A \hat{\otimes}_B B \hat{\otimes}_k V \simeq A \hat{\otimes}_k V \simeq A_1.$$

1.4.3. Lemme. — Soient k un anneau pseudocompact local, A une k -algèbre profinie locale, A_1 un A -module topologiquement libre et $i_0 : M \rightarrow A_1$ un morphisme de k -modules pseudocompacts tels que l'application $a \hat{\otimes} m \mapsto a \cdot i_0(m)$ de $A \hat{\otimes}_k M$ dans A_1 soit surjective. Il existe alors un k -module topologiquement libre V et un morphisme de k -modules pseudocompacts $j : V \rightarrow M$ tels que l'application $a \hat{\otimes} v \mapsto a \cdot i_0(jv)$ de $A \hat{\otimes}_k V$ dans A_1 soit bijective.

508 Comme tout k -module pseudocompact est le quotient d'un k -module topologiquement libre, on peut supposer sans inconvénient que M est topologiquement libre sur k ; prenons donc pour M le produit direct d'une famille $(M_i)_{i \in I}$ d'exemplaires de k . Dans ce cas, $A \hat{\otimes}_k M$ n'est autre que le produit $\prod_{i \in I} A \hat{\otimes}_k M_i$, dont chaque facteur est isomorphe à A , donc est projectif et indécomposable. Comme l'application $a \hat{\otimes} m \mapsto a \cdot i_0(m)$ est surjective et que A_1 est projectif, le noyau de cette application est un facteur direct de $A \hat{\otimes}_k M$; il résulte donc du théorème d'échange (0.3.4) que ce noyau a pour supplémentaire un produit partiel $\prod_{i \in J} A \hat{\otimes}_k M_i$, où J désigne une certaine partie de I .

1.5. — Soient k un anneau pseudocompact et (f_i) une famille de morphismes $f_i : X_i \rightarrow X$ de $\mathbf{Vf}/k$. Nous dirons que (f_i) est une *famille surjective topologiquement plate* si le morphisme de $\coprod_i X_i$ dans X , qui est induit par les f_i , est surjectif et topologiquement plat ; cela signifie que chaque f_i est topologiquement plat et que tout point de X appartient à l'image d'au moins l'un des X_i .

Il résulte de 1.3.3 que les familles surjectives, topologiquement plates définissent une *prétopologie* sur $\mathbf{Vf}/k$ (IV 4.2.5) ; la topologie correspondante sera appelée la *topologie plate* sur $\mathbf{Vf}/k$. Il est clair qu'un foncteur contravariant F de $\mathbf{Vf}/k$ dans **(Ens)** est un faisceau pour la topologie plate si et seulement si F transforme une somme directe en produit direct et si la suite

$$FY \xrightarrow{Ff} FX \xrightleftharpoons[F(\text{pr}_2)]{F(\text{pr}_1)} F(X \times_Y X)$$

est exacte pour tout morphisme surjectif topologiquement plat $f : X \rightarrow Y$.

509 La proposition 1.3.1 entraîne que la topologie plate est moins fine que la topologie canonique. On obtient donc un foncteur i de $\mathbf{Vf}/k$ dans la catégorie des faisceaux pour la topologie plate en associant à toute variété formelle X le foncteur $iX : T \mapsto \text{Hom}_{\mathbf{Vf}/k}(T, X)$. Le théorème 1.4 implique que, si $d_0, d_1 : X_1 \rightrightarrows X$ est une relation d'équivalence telle que d_1 soit topologiquement plat, la formation du quotient commute avec i :

$$i(X)/i(X_1) \simeq i(X/X_1).$$

1.6. — Pour terminer ces généralités sur les variétés formelles, il nous reste à définir brièvement les variétés formelles étales :

Une variété formelle X sur k est dite *étale*, si le morphisme diagonal $\Delta_X : X \rightarrow X \times X$ est un isomorphisme local, c'est-à-dire si Δ_X induit un isomorphisme de $\mathcal{O}_{X \times X, \Delta(x)}$ sur $\mathcal{O}_{X, x}$ pour tout point x de X . On voit facilement à l'aide de SGA I, que cette formulation est équivalente aux deux suivantes : la variété formelle X est topologiquement plate, et, pour tout point $x \in X$, de projection $s \in \mathrm{Spf} k$, $\mathcal{O}_{X, x} \hat{\otimes}_k k(s)$ est une extension finie séparable du corps résiduel $k(s)$ de s ; ou encore, si A désigne l'algèbre affine de X , les composantes locales (0.1) de $A \hat{\otimes}_k (k/\mathfrak{n})$ sont des algèbres finies et étales sur $k/\mathfrak{n}$, quel que soit l'idéal ouvert $\mathfrak{n}$ de k .

Notons Ve/k la sous-catégorie pleine de Vf/k formée des variétés étales. *L'inclusion de Ve/k dans Vf/k possède alors un foncteur adjoint à gauche* $X \mapsto X_e$ qu'on peut décrire de la façon suivante : la variété X_e a les mêmes points que X ; de plus, si x est un point de X , de corps résiduel $k(x)$ et de projection s sur $\mathrm{Spf} k$, l'algèbre locale $\mathcal{O}_{X_e, x}$ est un k -module pseudocompact projectif et $k(s) \hat{\otimes}_k \mathcal{O}_{X_e, x}$ est isomorphe à la plus grande extension séparable de $k(s)$ contenue dans $k(x)$. Pour tout isomorphisme q_x de $k(s) \hat{\otimes}_k \mathcal{O}_{X_e, x}$ dans $k(x)$, il y a un morphisme d'algèbres profinies $p_x : \mathcal{O}_{X_e, x} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$ et un seul qui soit compatible avec q_x et avec les projections canoniques de $\mathcal{O}_{X_e, x}$ et $\mathcal{O}_{X, x}$ sur $k(s) \hat{\otimes}_k \mathcal{O}_{X_e, x}$ et $k(x)$. Ces morphismes p_x définissent un morphisme canonique p de X dans X_e , qui est fonctoriel en X . Il résulte de SGA, I que tout morphisme de X dans une variété formelle étale se factorise d'une manière et d'une seule à travers p . 510

1.6.1. — Soient Y une k -variété formelle étale et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de Vf/k . Le morphisme graphe $\Gamma_f : X \rightarrow X \times Y$, de composantes id_X et f , est alors l'image réciproque du morphisme diagonal $\Delta_Y : Y \rightarrow Y \times Y$ par le changement de base $f \times \mathrm{id}_Y : X \times Y \rightarrow Y \times Y$. Il s'ensuit que Γ_f est un isomorphisme local, donc que $f = \mathrm{pr}_2 \circ \Gamma_f$ est topologiquement plat si pr_2 l'est, par exemple si X est topologiquement plat sur k . Réciproquement, comme Y est topologiquement plat, X est topologiquement plat sur k si X l'est sur Y (1.3.3). Prenant en particulier pour f le morphisme canonique $p : X \rightarrow X_e$ de 1.6, on voit que X est topologiquement plat sur X_e si et seulement si X l'est sur k .

2. Généralités sur les groupes formels

511

2.1. — Soient k un anneau pseudocompact et G un k -groupe formel, c'est-à-dire un groupe de la catégorie Vf/k des variétés formelles sur k . Si A est l'algèbre affine de G , la loi de composition de G définit évidemment un *morphisme diagonal*, c'est-à-dire un homomorphisme de k -algèbres profinies $\Delta_A : A \rightarrow A \hat{\otimes}_k A$; cet homomorphisme vérifie les conditions suivantes :

(i) le diagramme

$$A \xrightarrow{\Delta_A} A \hat{\otimes}_k A \begin{array}{c} \xrightarrow{\Delta_A \hat{\otimes} A} \\ \xrightarrow{A \hat{\otimes} \Delta_A} \end{array} A \hat{\otimes}_k A \hat{\otimes}_k A$$

est commutatif.

(ii) il existe une *augmentation* (nécessairement unique), c'est-à-dire un homomorphisme de k -algèbres profinies $\varepsilon_A : A \rightarrow k$ tel que les applications composées

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{\Delta_A} A \widehat{\otimes}_k A \xrightarrow{\varepsilon_A \widehat{\otimes} A} k \widehat{\otimes}_k A \simeq A \\ \text{et} \quad A &\xrightarrow{\Delta_A} A \widehat{\otimes}_k A \xrightarrow{A \widehat{\otimes} \varepsilon_A} A \widehat{\otimes}_k k \simeq A \end{aligned}$$

soient les applications identiques de A .

(iii) il existe un *antipodisme* (nécessairement unique), c'est-à-dire un homomorphisme de k -algèbres profinies $c_A : A \rightarrow A$ tel que l'application composée

$$A \xrightarrow{\Delta_A} A \widehat{\otimes}_k A \xrightarrow{c_A \widehat{\otimes} A} A \widehat{\otimes}_k A \xrightarrow{m_A} A$$

512 soit égale à $\eta_A \circ \varepsilon_A$, si l'on note m_A l'application linéaire qui envoie $a \widehat{\otimes} b$ sur $a \cdot b$ et η_A l'application $\lambda \mapsto \lambda 1_A$ de k dans A .

Il est clair que, réciproquement, tout morphisme diagonal Δ_A vérifiant (i), (ii) et (iii) induit un morphisme de $G \times G$ dans G , qui fait de G un groupe formel sur k .

Dans la suite, nous appellerons *idéal d'augmentation* de A l'idéal $I_A = \varepsilon_A^{-1}(0)$. Nous noterons $\omega_{G/k}$ le k -module pseudocompact $I_A/\overline{I_A^2}$, c'est-à-dire le quotient de I_A par l'idéal fermé engendré par les produits $x \cdot y$, $x, y \in I_A$.

2.2. — Soit $\mathbf{H}$ un groupe de la catégorie des Coalgèbres sur $\mathbf{O}_k$ (1.2.2). Pour toute k -algèbre $C \in \text{Alf}/k$, $\mathbf{H}(C)$ est donc muni d'une structure de C -coalgèbre en groupes (VII_A 3.2 ; à la suite de Manin, nous dirons *bialgèbre* au lieu de coalgèbre en groupes) ; de plus, si $\varphi : C \rightarrow D$ est un morphisme de Alf/k , l'application $d \otimes x \mapsto d \cdot (\mathbf{H}(\varphi)(x))$ de $D \otimes_C \mathbf{H}(C)$ dans $\mathbf{H}(D)$ est un homomorphisme de bialgèbres sur D . Nous résumerons ces propriétés en disant que $\mathbf{H}$ est une *bialgèbre* sur $\mathbf{O}_k$.

Il est clair que le foncteur $\mathbf{H} \mapsto \text{Spf}^* \mathbf{H}$ de 1.3.5 commute aux produits finis. Il transforme donc une bialgèbre sur $\mathbf{O}_k$ en un *k -foncteur en groupes*, c'est-à-dire en un foncteur de Alf/k dans la catégorie des groupes ; et en effet, pour toute k -algèbre de longueur finie C , les éléments x de $\mathbf{H}(C)$ appartenant à $(\text{Spf}^* \mathbf{H})(C)$ forment un groupe pour la multiplication de l'algèbre $\mathbf{H}(C)$ (confer VII_A 3.2.2) : rappelons que ces éléments x sont tels que $\varepsilon_{\mathbf{H}(C)}(x) = 1$ et $\Delta_{\mathbf{H}(C)}(x) = x \otimes x$. La deuxième condition entraîne d'ailleurs l'égalité $\varepsilon_{\mathbf{H}(C)}(x) = \varepsilon_{\mathbf{H}(C)}(x) \varepsilon_{\mathbf{H}(C)}(x)$, donc aussi $\varepsilon_{\mathbf{H}(C)}(x) = 1$ si k est local.

513 **2.2.1.** — Une bialgèbre $\mathbf{H}$ sur $\mathbf{O}_k$ est dite *plate* si le module sous-jacent est plat (1.2.1). Si $\mathbf{H}$ est plate, il est clair que le k -foncteur $\text{Spf}^* \mathbf{H}$ est exact à gauche. Il est donc isomorphe à $C \mapsto \text{Hom}_{\text{Vf}/k}(\text{Spf } C, \mathcal{G}(\mathbf{H}))$ pour un certain groupe formel $\mathcal{G}(\mathbf{H})$; il résulte de VII_A 3.2.2 et 1.3.5 qu'on peut décrire $\mathcal{G}(\mathbf{H})$ de la manière suivante : soit $\mathbf{H}^*$ le k -module pseudocompact dual de $\mathbf{H}$ (1.2.3). Les morphismes diagonaux des hyperalgèbres $\mathbf{H}(C)$ induisent une multiplication sur $\mathbf{H}^*$ qui fait de $\mathbf{H}^*$ une k -algèbre profinie. La multiplication dans les hyperalgèbres $\mathbf{H}(C)$ induit dans $\mathbf{H}^*$ un morphisme diagonal vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii) de 2.1 Il reste à poser

$$\mathcal{G}(\mathbf{H}) = \text{Spf } \mathbf{H}^*.$$

Réciproquement, soit G un k -groupe formel topologiquement plat, d'algèbre affine A et posons $\mathbf{H}(G) = \mathbf{V}_k^f(A)$ (1.2.3). Le morphisme diagonal $\Delta_A : A \rightarrow A \widehat{\otimes}_k A$ induit alors, pour toute k -algèbre de longueur finie C , une application linéaire de $\mathbf{V}_k^f(A)(C) \otimes_C \mathbf{V}_k^f(A)(C)$ dans $\mathbf{V}_k^f(A)(C)$ qui fait de la coalgèbre $\mathbf{V}_k^f(A)(C)$ une bialgèbre sur C . On dit que $\mathbf{H}(G)$ est la bialgèbre du groupe formel G . D'après 1.3.5, le foncteur $\mathbf{H} : G \mapsto \mathbf{H}(G)$ est une équivalence de la catégorie des k -groupes formels topologiquement plats sur celle des bialgèbres plates sur $\mathbf{O}_k$. Le foncteur $\mathcal{G}$ est un « inverse à isomorphisme fonctoriel près » de $\mathbf{H}$.

Lorsque k est un anneau artinien et G un k -groupe formel topologiquement plat, le foncteur $\mathbf{H}(G)$ est évidemment déterminé par sa valeur $\mathbf{H}(G) = \mathbf{H}(G)(k)$ en k . On dit aussi que $\mathbf{H}(G)$ est la bialgèbre de G . Le foncteur $\mathbf{H} : G \mapsto \mathbf{H}(G)$ est alors une équivalence de la catégorie des k -groupes formels topologiquement plats sur la catégorie des bialgèbres plates sur k .

2.2.2. — Supposons pour simplifier k artinien et soit G un k -groupe formel, commutatif, topologiquement plat. Dans ce cas, la bialgèbre $\mathbf{H}(G)$ a une multiplication commutative, de sorte que $\mathbf{H}(G)$ est un co-groupe dans la catégorie des k -algèbres commutatives (VII_A 3.3). 514

Si k est artinien, on voit donc que le foncteur $G \mapsto \text{Spec } \mathbf{H}(G)$ est une antiéquivalence de la catégorie des k -groupes formels commutatifs topologiquement plats sur celle des schémas en groupes commutatifs qui sont affines et plats sur k .

Lorsque k est un corps, on obtient ainsi une antiéquivalence de la catégorie des k -groupes formels commutatifs sur celle des k -schémas affines en groupes commutatifs.

2.3. — Considérons maintenant un k -groupe formel arbitraire G , d'algèbre affine A . Notons toujours $\mathbf{H}(G)$ le $\mathbf{O}_k$ -module $\mathbf{V}_k^f(A)$ dual de A et désignons par φ_G l'homomorphisme fonctoriel

$$\varphi_G : \mathbf{H}(G) \otimes_k \mathbf{H}(G) \longrightarrow \mathbf{H}(G \times G)$$

qui est induit par l'application naturelle (0.3.6), pour tout objet C de $\mathbf{Alf}/k$:

$$(A \widehat{\otimes}_k C)^* \otimes_C (A \widehat{\otimes}_k C)^* \longrightarrow ((A \widehat{\otimes}_k C) \widehat{\otimes}_C (A \widehat{\otimes}_k C))^*.$$

Si $m : G \times G \rightarrow G$ est le morphisme structural de G , l'application composée :

$$\mathbf{H}(G) \otimes_k \mathbf{H}(G) \xrightarrow{\varphi_G} \mathbf{H}(G \times G) \xrightarrow{\mathbf{H}(m)} \mathbf{H}(G)$$

fait de $\mathbf{H}(G)$ une algèbre sur $\mathbf{O}_k$; pour tout $C \in \mathbf{Alf}/k$, l'élément unité de $\mathbf{H}(G)(C) = (A \widehat{\otimes}_k C)^*$ est l'augmentation de $A \widehat{\otimes}_k C$ (cf. 2.1). Nous dirons que $\mathbf{H}(G)$ est l'algèbre du groupe G . 515

Lorsque G est topologiquement plat sur k , φ_G est un isomorphisme et la structure d'algèbre que nous venons de définir coïncide évidemment avec celle de 2.2.1. Dans le cas général cependant, φ_G n'est pas inversible, de sorte que le morphisme $\delta_G : \mathbf{H}(G) \rightarrow \mathbf{H}(G \times G)$, qui est induit par le morphisme diagonal « $x \mapsto (x, x)$ » de G dans $G \times G$, ne se factorise pas canoniquement à travers $\mathbf{H}(G) \otimes_k \mathbf{H}(G)$.

2.3.1 Proposition. — Soient K et G deux k -groupes formels, K étant topologiquement plat sur k . Il existe alors une bijection canonique de l'ensemble $\text{Hom}_{k\text{-Gr.}}(K, G)$ des homomorphismes de k -groupes formels de K dans G sur l'ensemble des homomorphismes de $\mathbf{O}_k$ -algèbres unitaires $h : \mathbf{H}(K) \rightarrow \mathbf{H}(G)$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H}(K) \otimes_k \mathbf{H}(K) & \xrightarrow{h \otimes h} & \mathbf{H}(G) \otimes_k \mathbf{H}(G) \\ \Delta_{\mathbf{H}(K)} \uparrow & & \searrow \varphi_G \\ \mathbf{H}(K) & \xrightarrow{h} & \mathbf{H}(G) \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \delta_G \\ \mathbf{H}(G \times G) \end{array}$$

soit commutatif.

Comme K est topologiquement plat, $\mathbf{H}(K)$ est muni d'une structure de bialgèbre (cf. 2.2) et $\Delta_{\mathbf{H}(K)}$ en est le morphisme diagonal ; autrement dit, on a $\Delta_{\mathbf{H}(K)} = \varphi_K^{-1} \circ \delta_K$. Lorsque G est aussi topologiquement plat sur k , notre proposition résulte de l'équivalence de catégories définie en 2.2.1.

516

Dans le cas général, on peut supposer k artinien et raisonner sur les algèbres $\mathbf{H}(K)$ et $\mathbf{H}(G) = \mathbf{H}(G)(k)$. Soient alors B et A les algèbres affines de K et G , $\text{Hom}_c(A, B)$ l'ensemble des applications k -linéaires continues de A dans B et $\text{Hom}_k(B^*, A^*)$ l'ensemble des applications k -linéaires de B^* dans A^* . On sait que l'application canonique $f \mapsto f^*$ de $\text{Hom}_c(A, B)$ dans $\text{Hom}_k(B^*, A^*)$ est bijective lorsque B est un k -module pseudocompact projectif. Comme cette application est en outre fonctorielle en A et B , on voit facilement que f est compatible avec les morphismes diagonaux de A et B si et seulement si f^* est compatible avec la multiplication de A^* et celle de B^* . De même, f est compatible avec la multiplication de B et celle de A si et seulement si le diagramme

$$\begin{array}{ccc} B^* \otimes_k B^* & \xrightarrow{f^* \otimes f^*} & A^* \otimes_k A^* \\ \Delta_B \uparrow & & \searrow \text{can.} \\ B^* & \xrightarrow{f^*} & A^* \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow m_A^* \\ (A \hat{\otimes}_k A)^* \end{array}$$

est commutatif (m_A désigne l'application linéaire $a \hat{\otimes} a' \mapsto a \cdot a'$ de $A \hat{\otimes}_k A$ dans A).

Enfin, si f est un homomorphisme d'algèbres unitaires et est compatible avec les morphismes diagonaux, on a $\varepsilon_B \circ f = \varepsilon_A$, de sorte que f^* envoie l'élément unité de B^* sur celui de A^* . Réciproquement, si f^* est un homomorphisme d'algèbres unitaires qui rend commutatif le diagramme ci-dessus, f est compatible avec les multiplications et les morphismes diagonaux et l'on a $\varepsilon_B \circ f = \varepsilon_A$. On en déduit les égalités $\varepsilon_B f(1) = 1$, $f(1) \cdot f(1) = f(1)$ et $\Delta_B f(1) = f(1) \hat{\otimes} f(1)$. Si c_B est l'antipodisme de B , il résulte de 2.1 (iii) que $f(1)$ a un inverse $c_B f(1)$ dans B , donc que $f(1)$ est l'élément unité de B .

517

2.3.2. — *Supposons maintenant pour simplifier l'anneau k artinien.* Lorsque G est topologiquement plat sur k , l'algèbre $H(G) = \mathbf{H}(G)(k)$ peut être caractérisée par une propriété universelle (CARTIER) : soient U une k -algèbre (associative, avec élément unité) et U_m le k -foncteur en groupes qui associe à toute k -algèbre de longueur finie C le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $U \otimes_k C$; identifions G au k -foncteur en groupes $C \mapsto \text{Hom}_{V_f/k}(\text{Spf } C, G)$ et notons $\text{Hom}_{k\text{-Gr.}}(G, U_m)$ l'ensemble des homomorphismes de k -foncteurs en groupes de G dans U_m . On a la

Proposition. — *Pour tout groupe formel G topologiquement plat sur un anneau artinien k et pour toute k -algèbre U , il y a un isomorphisme canonique*

$$\text{Hom}_{k\text{-Gr.}}(G, U_m) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{k\text{-Alg.}}(H(G), U)$$

Soient en effet X une variété formelle sur k , M un k -module et $\mathbf{W}(M)$ le k -foncteur $C \mapsto M \otimes_k C$; de plus, notons $\text{Hom}_k(X, \mathbf{W}(M))$ l'ensemble des morphismes de k -foncteurs de X dans $\mathbf{W}(M)$; si A est l'algèbre affine de X et si $\mathfrak{l}$ parcourt les idéaux ouverts de A , on a des isomorphismes canoniques

$$\text{Hom}_k(X, \mathbf{W}(M)) \xrightarrow{\sim} \varprojlim \text{Hom}_k(\text{Spf } A/\mathfrak{l}, \mathbf{W}(M)) \xrightarrow{\sim} \varprojlim M \otimes_k (A/\mathfrak{l})$$

et des applications linéaires

$$M \otimes_k (A/\mathfrak{l}) \longrightarrow \text{Hom}_k((A/\mathfrak{l})^*, M)$$

qui envoient $u \otimes x$ sur l'application k -linéaire $f \mapsto f(x) \cdot u$. Par passage à la limite projective, on obtient donc des applications 518

$$\text{Hom}_k(X, \mathbf{W}(M)) \xrightarrow{\sim} M \widehat{\otimes}_k A \xrightarrow{\psi_A} \text{Hom}_k(A^*, M)$$

où $M \widehat{\otimes}_k A$ désigne la limite projective des k -modules $M \otimes_k (A/\mathfrak{l})$. L'application ψ_A ne fait évidemment intervenir que la structure de k -module pseudocompact de A ; de plus, cette application est bijective lorsque A est égal à k , donc plus généralement lorsque A est un k -module pseudocompact projectif (le foncteur $N \mapsto M \widehat{\otimes}_k N$ commute aux produits infinis).

Supposons maintenant X égal à G et M à U . Pour toute k -algèbre de longueur finie C , la multiplication fait alors de $U \otimes_k C$ un monoïde à élément unité; de plus, il est clair que $\text{Hom}_{k\text{-Gr.}}(G, U_m)$ est la partie de $\text{Hom}_k(G, \mathbf{W}(U))$ qui est formée des homomorphismes de k -foncteurs en monoïdes à élément unité. Lorsque A est un k -module pseudocompact projectif, il résulte du caractère fonctoriel de ψ_A que ces homomorphismes correspondent aux applications k -linéaires de A dans U qui sont compatibles avec la multiplication et avec les éléments unité de A et U .

2.4. — Revenons maintenant à un anneau pseudocompact quelconque k pour appliquer aux groupes formels les résultats du §1 sur le passage au quotient par une relation d'équivalence topologiquement plate.

Si $u : F \rightarrow G$ est un *monomorphisme* de k -groupes formels, $\mu : G \times G \rightarrow G$ le morphisme « multiplication » de G et λ le morphisme composé

$$\lambda : F \times G \xrightarrow{u \times \text{id}_G} G \times G \xrightarrow{\mu} G,$$

on sait en effet que le couple

$$F \times G \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{pr}_2} \\ \xrightarrow{\lambda} \end{array} G$$

est un couple d'équivalence (cf. V, 2.a et VI_A, 3.1). Si F est topologiquement plat sur k , pr_2 est topologiquement plat et nous pouvons appliquer le théorème 1.4 : la projection canonique p de G sur la variété $F \backslash G$ des classes à gauche de G modulo F est donc topologiquement plate ; d'autre part, le morphisme $F \times G \rightarrow G \times_{F \backslash G} G$ de composantes λ et pr_2 est inversible ; lorsque T est une variété formelle de longueur finie sur k et x, y deux éléments de $G(T)$, x et y ont donc même image dans $(F \backslash G)(T)$ si et seulement si il y a un z dans $F(T)$ tel $y = u(z) \cdot x$. Prenant pour x le morphisme nul, qui se factorise à travers la section unité de G , on voit que y a même image dans $(F \backslash G)(T)$ que l'élément unité de $G(T)$ si et seulement si y appartient à l'image de $F(T)$ par $u(T)$.

En particulier, si u est un isomorphisme de F sur un sous-groupe distingué de G , le morphisme structural de $G \times G$ dans G induit manifestement par passage au quotient une structure de groupe formel sur $F \backslash G$; ce qui précède montre alors que u est un isomorphisme de F sur $\text{Ker } p$.

2.4.1. — Soient $f : G \rightarrow H$ un homomorphisme de k -groupes formels, F le noyau de f et u l'inclusion de F dans G . Si F est topologiquement plat sur k , l'homomorphisme $f' : F \backslash G \rightarrow H$, qui est induit par f , est un monomorphisme : c'est une conséquence des résultats de l'exposé IV ; nous en donnons cependant une démonstration directe : soient T une variété formelle de longueur finie sur k et t un élément de $(F \backslash G)(T)$ tel que $f' \circ t$ soit l'élément unité de $H(T)$. Nous devons montrer que t est l'élément unité de $(F \backslash G)(T)$; comme la projection canonique pr_1 de $T \times_{F \backslash G} G$ sur T est surjective et topologiquement plate (2.4), il suffit de montrer (1.3.1) que $t \circ \text{pr}_1$ est l'élément unité de $(F \backslash G)(T \times_{F \backslash G} G)$. Comme on a $t \circ \text{pr}_1 = p \circ \text{pr}_2$, si pr_2 est la projection canonique de $T \times_{F \backslash G} G$ sur G , l'égalité $1 = f' \circ (p \circ \text{pr}_2) = f \circ \text{pr}_2$ et la suite exacte

$$1 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H$$

montrent que pr_2 se factorise à travers F , donc que $p \circ \text{pr}_2$ est nul.

Si B, C et D sont les algèbres affines de G, H et $F \backslash G$, $p : G \rightarrow F \backslash G$ induit donc une injection de D dans B et f' induit une surjection de C dans D (1.3). Par conséquent, D est l'image de C dans B .

2.4.2. — Supposons maintenant F et G topologiquement plats sur k : comme G est topologiquement plat sur k et sur $F \backslash G$, $F \backslash G$ est topologiquement plat sur k (1.3.3) ; il est clair d'autre part qu'on a $\text{Coker } f = \text{Coker } f'$; comme f' est un monomorphisme, la projection canonique de H sur $\text{Coker } f'$ est topologiquement plate et f' est un isomorphisme de $F \backslash G$ sur $\text{Ker } q$; si $\text{Ker } f$ et G sont topologiquement plats sur k , on voit donc qu'on a les égalités $\text{Coim } f = \text{Im } f$; d'où

521 Théorème. — Les groupes formels commutatifs sur un corps forment une catégorie abélienne.

Corollaire. — *Les schémas affines en groupes commutatifs sur un corps forment une catégorie abélienne.*

Ceci résulte de 2.2.2.

2.5. — Un k -groupe formel est dit *étale* si la variété formelle sous-jacente est étale (1.6); ces groupes formels ont une structure très simple : *supposons* en effet k local; soient $\bar{k}$ le corps résiduel de k , $\bar{k}_s$ une clôture séparable de k et Γ le groupe de Galois topologique de $\bar{k}_s$ sur $\bar{k}$; appelons Γ -ensemble la donnée d'un ensemble E et d'une opération continue de Γ sur E (le groupe d'isotropie d'un élément $x \in E$ est donc un sous-groupe ouvert de Γ). Associons enfin à toute variété formelle X sur k la limite inductive $X(\bar{k}_s)$ des ensembles $X(\ell)$, ℓ parcourant les extensions finies de $\bar{k}$ contenues dans $\bar{k}_s$. Il est clair que Γ opère continûment dans $X(\bar{k}_s)$ et il résulte de SGA 1, I 8.3, que le foncteur $X \mapsto X(\bar{k}_s)$ est une équivalence de la catégorie des variétés formelles étales sur k sur celle des Γ -ensembles.

Ce foncteur $X \mapsto X(\bar{k}_s)$ induit donc une équivalence de la catégorie des groupes formels étales sur k (local) sur celle des Γ -groupes, c'est-à-dire des groupes de la catégorie des Γ -ensembles (un tel Γ -groupe consiste donc en la donnée d'un groupe abstrait G et d'une opération continue de Γ sur G par automorphismes de groupes).

2.5.1. — Supposons de nouveau l'anneau pseudocompact k quelconque. Il est clair que le foncteur $G \mapsto G_e$ de 1.6.1 commute aux produits finis. Il transforme donc un groupe formel en un groupe formel étale. De plus, comme le morphisme $p : G \rightarrow G_e$ de 1.6 est fonctoriel en G , c'est un homomorphisme de groupes formels lorsque G est muni d'une structure de groupe; considérons le noyau de cet homomorphisme : comme p induit une bijection sur les ensembles sous-jacents, $\text{Ker } p$ a pour ensemble sous-jacent l'image de $\text{Spf } k$ par la section unité; si nous identifions les ensembles sous-jacents à $\text{Spf } k$ et $\text{Ker } p$ au moyen de cette section unité, G_e a même algèbre locale que $\text{Spf } k$ en un point g de $\text{Ker } p$; par conséquent, $\text{Ker } p$ a pour algèbre locale en g le produit tensoriel $k \hat{\otimes}_k \mathcal{O}_{G,g}$, c'est-à-dire $\mathcal{O}_{G,g}$. Pour ces raisons nous dirons que $\text{Ker } p$ est le *voisinage infinitésimal de l'origine* de G et nous écrirons $\text{Ker } p = G_0$, obtenant ainsi une suite exacte

$$1 \longrightarrow G_0 \xrightarrow{\text{incl.}} G \xrightarrow{p} G_e.$$

Dans la suite, nous dirons que G est infinitésimal si $G = G_0$.

Lorsque G est un groupe formel topologiquement plat sur k , $p : G \rightarrow G_e$ est surjectif et topologiquement plat d'après 1.6.1, de sorte que G_e s'identifie au quotient G/G_0 et que l'on a une suite exacte

$$1 \longrightarrow G_0 \xrightarrow{\text{incl.}} G \xrightarrow{p} G_e \longrightarrow 1.$$

2.5.2. — Dans le cas où k est un corps parfait, le foncteur $X \mapsto X_e$ de 1.6 est aussi adjoint à droite à l'inclusion de Ve/k dans Vf/k : de façon précise, si k est un corps parfait, X_e a les mêmes points que X et a pour algèbre locale en un point x le corps résiduel de $\mathcal{O}_{X,x}$. Les projections canoniques des algèbres $\mathcal{O}_{X,x}$ sur leurs corps résiduels définissent donc une section $s : X_e \rightarrow X$ de p . Cette section dépend fonctoriellement

de X ; c'est donc un homomorphisme de groupes formels lorsque X est un groupe formel.

Lorsque k est un corps parfait, on voit donc qu'un groupe formel G sur k est canoniquement isomorphe au produit semi-direct d'un groupe infinitésimal G_0 et d'un groupe étale G_e opérant sur G_0 .

Si, de plus, nous supposons G commutatif, G est le produit de G_0 et de G_e . Cette décomposition des groupes formels commutatifs sur k correspond à une décomposition analogue des k -schémas affines en groupes commutatifs (2.2.2) : disons qu'un schéma en groupes commutatifs sur un corps k est *de type multiplicatif* (resp. *unipotent*) s'il est isomorphe à $\text{Spec } H(G)$, où G est un k -groupe formel commutatif étale (resp. infinitésimal). D'après 2.5.1, tout schéma affine en groupes commutatifs G sur un corps k contient un sous-groupe de type multiplicatif G_m tel que G/G_m soit unipotent. Lorsque k est parfait, 2.5.1 entraîne en outre l'existence d'une rétraction canonique de G sur G_m , de sorte que G est le produit d'un groupe unipotent et d'un groupe de type multiplicatif.

2.6. — Nous allons maintenant étudier les groupes formels infinitésimaux, auxquels sont consacrés les paragraphes suivants. Dans cette étude, les *algèbres de Lie* jouent un rôle primordial.

Supposons d'abord l'anneau de base k artinien et soit G un groupe formel sur k . On peut donner de l'algèbre de Lie de G trois interprétations différentes que nous utiliserons toutes :

- 524 a) Soient D l'algèbre $k[d]/(d^2)$ des nombres duaux sur k et δ l'homomorphisme de D dans k qui annule d . Pour tout groupe formel G sur k , $\text{Lie}(G)$ est le noyau de $G(\delta)$, de sorte qu'on a par définition une suite exacte de groupes

$$0 \longrightarrow \text{Lie}(G) \longrightarrow G(D) \xrightarrow{G(\delta)} G(k) \longrightarrow 1.$$

- b) Si G a A pour algèbre affine, le groupe $G(D)$ a pour éléments les homomorphismes d'algèbres profinies $f : A \rightarrow D$. La condition $G(\delta)(f) = 1$ équivaut à $\delta \circ f = \varepsilon_A$. Pour tout $x \in A$, on a donc la relation

$$f(x) = \varepsilon_A(x) \cdot 1_D + f'(y) \cdot d,$$

où f' est une application linéaire continue de $I_A/\overline{I_A^2}$ dans k et où y est la classe de $x - \varepsilon_A(x) \cdot 1_A$ modulo $\overline{I_A^2}$. Il est clair que l'application $f \mapsto f'$ est une bijection de $\text{Lie } G$ sur le dual topologique de $\omega_{G/k}$ (0.2.2 et 2.1). Cette bijection respecte évidemment les structures de groupe : soient en effet f et g deux éléments de $\text{Lie } G$. Leur produit est l'application composée $h \circ \Delta_A$, où $h : A \hat{\otimes} A \rightarrow D$ est tel que $h(a \hat{\otimes} b) = f(a) \cdot g(b)$. Mais il résulte de 2.1 (ii) qu'on a $\Delta_A a - a \hat{\otimes} 1 - 1 \hat{\otimes} a \in I_A \hat{\otimes} I_A$ lorsque $a \in I_A$; si $a \in I_A$, on a par conséquent $(f \cdot g)(a) = f(a) + g(a)$ (confer aussi II 3/10).

Dans la suite, nous identifions $\text{Lie}(G)$ à $\omega_{G/k}^*$ au moyen de la bijection $f \mapsto f'$ décrite ci-dessus. Le groupe $\text{Lie}(G)$ est donc muni d'une structure de k -module.

525 c) Soient A^* et D^* les k -modules duaux de A et D , $\{1_D^*, d^*\}$ la base duale de la base $\{1_D, d\}$ de D sur k ($1_D^* = \delta$). Comme D est libre de rang fini sur k , l'application canonique $f \mapsto f^*$ de l'ensemble $\text{Hom}_c(A, D)$ des morphismes de k -modules pseudocompacts de A dans D dans $\text{Hom}_k(D^*, A^*)$ est bijective. D'un autre côté, f^* est déterminé par les valeurs $f^*(1_D^*)$ et $f^*(d^*) = x$. La condition $G(\delta)(f) = 1$ équivaut à l'égalité $f^*(1_D^*) = \varepsilon_A$. On voit aisément d'autre part que f est compatible avec la multiplication si et seulement si l'on a

$$(*) \quad \delta_G x = \varphi_G(x \otimes 1 + 1 \otimes x) \quad (\text{cf. 2.3}).$$

Enfin, il est clair qu'une application linéaire continue $f : A \rightarrow D$, qui est compatible avec la multiplication et telle que $\delta \circ f = \varepsilon_A$, envoie élément unité sur élément unité. L'application $f \mapsto x$ nous permet donc d'identifier $\text{Lie } G$ à la partie de $H(G)$ formée des éléments vérifiant la relation (*). Si x et y sont deux éléments de $H(G)$ vérifiant (*), on a

$$\begin{aligned} \delta_G(xy) &= (\delta_G x)(\delta_G y) = \varphi_G((x \otimes 1 + 1 \otimes x)(y \otimes 1 + 1 \otimes y)) \\ &= \varphi_G(xy \otimes 1 + x \otimes y + y \otimes x + 1 \otimes xy), \end{aligned}$$

d'où $\delta_G(xy - yx) = \varphi_G((xy - yx) \otimes 1 + 1 \otimes (xy - yx))$.

Ceci montre que le k -module $\text{Lie } G$ est identifié à une sous-algèbre de Lie de $H(G)$: nous dirons que $\text{Lie } G$ est l'algèbre de Lie de G .

2.6.1. — Lorsque k est un anneau pseudocompact arbitraire et G un groupe formel 526 sur k , nous appelons $\mathbf{O}_k$ -algèbre de Lie de G le foncteur $\mathbf{Lie}(G)$ qui associe à toute k -algèbre profinie de longueur finie C l'algèbre de Lie $\text{Lie}(G \widehat{\otimes}_k C)$ de $G \widehat{\otimes}_k C$ sur C (1.2.3) ; cette algèbre de Lie est plate sur $\mathbf{O}_k$ lorsque $\omega_{G/k}$ est un k -module pseudo-compact projectif.

2.6.2. — Réciproquement, toute algèbre de Lie $\mathbf{L}$ sur $\mathbf{O}_k$ définit un k -foncteur en groupes : désignons en effet par $\mathbf{U}(\mathbf{L})$ le foncteur qui associe à toute k -algèbre de longueur finie C l'algèbre enveloppante $\mathbf{U}(\mathbf{L}(C))$ de l'algèbre de Lie $\mathbf{L}(C)$ sur C . D'après VII_A 3.2.2, $\mathbf{U}(\mathbf{L})$ est une bialgèbre sur $\mathbf{O}_k$ et détermine un k -foncteur en groupes $\text{Spf}^* \mathbf{U}(\mathbf{L})$ (2.2) que nous noterons désormais $\mathcal{G}(\mathbf{L})$: $\mathcal{G}(\mathbf{L})(C)$ est donc le groupe des éléments $z \in \mathbf{U}(\mathbf{L}(C))$ d'augmentation 1 et tels que $\Delta_{\mathbf{U}(\mathbf{L}(C))}(z) = z \otimes z$.

Lorsque $\mathbf{L}$ est une algèbre de Lie plate sur $\mathbf{O}_k$, la bialgèbre $\mathbf{U}(\mathbf{L})$ est plate sur $\mathbf{O}_k$ d'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt (Bourbaki, Alg. de Lie, I 2.7) ; par conséquent, $\mathcal{G}(\mathbf{L})$ est un groupe formel topologiquement plat sur k qui a $\mathbf{U}(\mathbf{L})$ pour $\mathbf{O}_k$ -bialgèbre. Ce groupe est radiciel : en effet, on se ramène directement au cas où k est artinien (2.6). Posons alors $U = \mathbf{U}(\mathbf{L})$ et soit U^+ l'idéal bilatère de U engendré par l'image de $\mathbf{L}$. Posons en outre

$$\begin{aligned} U_0 &= k \cdot 1_U \\ &\dots\dots\dots \\ U_n &= \{u \in U \mid \Delta_U u - u \otimes 1 \in U_{n-1} \otimes U^+\} \\ \text{et} \quad U_n^+ &= U_n \cap U^+. \end{aligned}$$

527 D'après 1.3.6, il suffit de montrer que U est la réunion des U_n . Or, si l'on identifie L à son image canonique dans U , L est évidemment contenu dans U_1 . Si $x_1, \dots, x_n$ sont des éléments de L , on a donc $\Delta_U(x_1 \cdots x_n) = (x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_1) \cdots (x_n \otimes 1 + 1 \otimes x_n)$, ce qui montre, par récurrence sur n , que le produit $x_1 \cdots x_n$ appartient à U_n , donc que $U = \bigcup_n U_n$.

2.6.3. — Si L est une algèbre de Lie plate sur $\mathbf{O}_k$, le groupe formel $\mathcal{G}(L)$ peut être caractérisé par une propriété universelle : considérons en effet un homomorphisme h de $\mathcal{G}(L)$ dans un groupe formel G ; un tel homomorphisme induit un homomorphisme $\mathbf{Lie} h$ de l'algèbre de Lie de $\mathcal{G}(L)$ dans celle de G . Composant $\mathbf{Lie} h$ avec le monomorphisme canonique de L dans $U(L)$, on obtient un homomorphisme $h' : L \rightarrow \mathbf{Lie} G$.

Proposition. — Si G est un k -groupe formel et L une algèbre de Lie plate sur $\mathbf{O}_k$, l'application $h \mapsto h'$ définie ci-dessus est une bijection

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-Gr.}}(\mathcal{G}(L), G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(L, \mathbf{Lie} G)$$

de l'ensemble des homomorphismes de k -groupes formels de $\mathcal{G}(L)$ dans G sur celui des morphismes de $\mathbf{O}_k$ -algèbres de Lie de L dans $\mathbf{Lie} G$.

On se ramène en effet tout de suite au cas où k est artinien. Dans ce cas, $\mathrm{Hom}_{k\text{-Gr.}}(\mathcal{G}(L), G)$ est en correspondance biunivoque canonique (2.3.1) avec l'ensemble des homomorphismes d'algèbres unitaires $g : U(L) \rightarrow H(G)$ tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} U(L) & \xrightarrow{g} & H(G) \\ \Delta_{U(L)} \downarrow & & \searrow \delta_G \\ U(L) \otimes U(L) & \xrightarrow{g \otimes g} & H(G) \otimes H(G) \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \nearrow \varphi_G \\ H(G \times G) \end{array}$$

528 Or g est défini par sa restriction à L qui est un homomorphisme d'algèbres de Lie de L dans l'algèbre de Lie sous-jacente à $H(G)$. La commutativité du diagramme signifie donc simplement que g applique L sur la partie $\mathbf{Lie} G$ de $H(G)$ formée des x tels que $\delta_G x = \varphi_G(x \otimes 1 + 1 \otimes x)$.

2.7. — Nous terminons ces généralités sur un énoncé qui remonte à S. Lie et qui nous servira au paragraphe 5. Un *monoïde formel à élément unité sur k* est par définition un couple (M, m) formé d'une variété formelle M et d'un morphisme $m : M \times M \rightarrow M$ tel que $m(C)$ fasse de $M(C)$ un monoïde à élément unité pour tout objet C de Alf/k (0.4.2). En particulier, l'élément unité de $M(k)$ définit une section ε_M de la projection canonique de M sur $\mathrm{Spf} k$. Nous dirons que le monoïde formel M est *infinitésimal* si ε_M induit une bijection des ensembles sous-jacents.

Proposition. — *Tout k -monoïde formel M topologiquement plat et infinitésimal est un groupe formel.*

Nous devons montrer que $M(C)$ est un groupe pour tout objet C de Alf/k . On se ramène donc de suite au cas où k est artinien. Soit alors $U = H(M)$ la coalgèbre de M (1.3.5); le morphisme structural m induit un homomorphisme de coalgèbres m_U de $U \otimes U$ dans U , qui fait de U une algèbre associative sur k ; cette algèbre a pour élément unité l'image de l'élément unité de k par l'application de k dans U qui est induite par la section unité ε_M de M . De même, la projection canonique de M sur $\text{Spf } k$ induit un homomorphisme ε_U de U dans k ; nous noterons U^+ le noyau de ε_U . 529

Nous devons montrer qu'il existe un antipodisme, c'est-à-dire un homomorphisme de coalgèbres $c_U : U \rightarrow U$ tel que l'application composée

$$U \xrightarrow{\Delta_U} U \otimes_k U \xrightarrow{c_U \otimes U} U \otimes_k U \xrightarrow{m_U} U$$

applique $u \in U$ sur $\varepsilon_U(u) \cdot 1_U$. Comme M est infinitésimal, U^+ est la réunion de sous-modules U_n^+ définis comme en 2.6.2; on montre alors facilement, par récurrence sur n , qu'il existe une et une seule application linéaire $c_n : U_n^+ \rightarrow U_n^+$ telle que l'application composée

$$U_n^+ \xrightarrow{\text{incl.}} U \xrightarrow{\Delta_U} U \otimes U \xrightarrow{c_U \otimes U} U \otimes U \xrightarrow{m_U} U$$

soit nulle. En particulier, c_{n+1} prolonge c_n et l'on pourra poser

$$c_U(x) = \varepsilon_U(x) \cdot 1_U + c_n(x - \varepsilon_U(x) \cdot 1_U),$$

où n est assez grand pour que U_n^+ contienne $x - \varepsilon_U(x) \cdot 1_U$.

3. Phénomènes particuliers à la caractéristique 0

530

Dans tout ce paragraphe 3, nous supposons que l'anneau pseudocompact k contient le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$.

3.1. Lemme. — *Soient C une $\mathbb{Q}$ -algèbre commutative avec élément 1, L une algèbre de Lie sur C dont le C -module sous-jacent est libre. L'application canonique de L dans l'algèbre enveloppante $U(L)$ est un isomorphisme de L sur l'ensemble des éléments primitifs de $U(L)$.*

En effet, identifions L à son image canonique dans $U(L)$; soient I un ensemble totalement ordonné et $(x_i)_{i \in I}$ une base de L indexée par I ; désignons par $\mathbb{N}^{(I)}$ l'ensemble des familles $n = (n_i)_{i \in I}$ d'entiers naturels telles que n_i soit nul sauf peut-être pour un nombre fini d'indices $i_1 < i_2 < \dots < i_s$ (ces indices dépendent de n); posons enfin $x^n = x_{i_1}^{n_{i_1}} x_{i_2}^{n_{i_2}} \dots x_{i_s}^{n_{i_s}}$ et $n! = (n_{i_1}!)(n_{i_2}!) \dots (n_{i_s}!)$.

On sait alors que les x^n forment une base de $U(L)$ (théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt) et on voit facilement qu'on a

$$(*) \quad \Delta_{U(L)} \left(\frac{x^n}{n!} \right) = \sum \frac{x^m}{m!} \otimes \frac{x^{n-m}}{(n-m)!}$$

la somme étant étendue à tous les éléments m de $\mathbb{N}^{(I)}$ tels que $0 \leq m \leq n$ (i.e. tels que $0 \leq m_i \leq n_i \forall i$). Il s'ensuit évidemment qu'on a $\Delta_{U(L)}(u) = u \otimes 1 + 1 \otimes u$ si et seulement si u est une combinaison linéaire des x_i .

531 **3.2.** — Supposons maintenant C *artinien*, de radical $\mathfrak{r}$. Pour toute C -algèbre U (associative, unitaire), le produit $\mathfrak{r}U$ est donc formé d'éléments nilpotents ; si x appartient à $\mathfrak{r}U$, nous poserons

$$\exp_U x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots.$$

On obtient ainsi une bijection de $\mathfrak{r}U$ sur $1 + \mathfrak{r}U$; la bijection réciproque applique un élément $1 + y$ de $1 + \mathfrak{r}U$ sur

$$\log_U(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \cdots.$$

De plus, il est clair que l'application $\exp_U$ est fonctorielle en U .

L'anneau C étant toujours artinien, supposons U muni d'une structure de bialgèbre sur C (cf. 2.2). Pour tout élément primitif x de $\mathfrak{r}U$ (cf. VII_A 3.2.3), on a alors

$$\begin{aligned} \Delta_U(\exp_U x) &= \exp_{U \otimes U}(\Delta_U(x)) \\ &= \exp_{U \otimes U}(x \otimes 1 + 1 \otimes x) \\ &= \exp_{U \otimes U}(x \otimes 1) \cdot \exp_{U \otimes U}(1 \otimes x) \\ &= ((\exp_U x) \otimes 1) \cdot (1 \otimes (\exp_U x)) \\ &= (\exp_U x) \otimes (\exp_U x). \end{aligned}$$

On voit donc que la bijection $\exp_U$ transforme un élément primitif de $\mathfrak{r}U$ en un élément z de $1 + \mathfrak{r}U$ tel que $\Delta_U(z) = z \otimes z$ et la réciproque est claire.

532 Considérons en particulier une algèbre de Lie L *plate* sur C , prenons pour U l'algèbre enveloppante $U(L)$ de L sur C et identifions L à son image canonique dans U . D'après le lemme 3.1, L est donc l'ensemble des éléments primitifs de U (en effet L est un produit de modules libres sur les composantes locales de C). Considérons d'autre part le quotient $\overline{C} = C/\mathfrak{m}$ de C par un idéal maximal $\mathfrak{m}$. Comme le $\overline{C}$ -groupe formel $\mathcal{G}(L \otimes_C \overline{C})$, qui a $U(L \otimes_C \overline{C})$ pour bialgèbre, est infinitésimal (2.6.2), l'élément unité de $U(L \otimes_C \overline{C})$ est le seul élément $\bar{z}$ tel que $\Delta_{U(L \otimes_C \overline{C})}(\bar{z}) = \bar{z} \otimes \bar{z}$. Il s'ensuit que les éléments z de $U(L)$ tels que $\Delta_U(z) = z \otimes z$ appartiennent nécessairement à $1 + \mathfrak{r}U$.

Enfin, comme $L \cap \mathfrak{r}U$ s'identifie à $L \otimes_C \mathfrak{r}$, on voit finalement que : $\exp_U$ définit une bijection de $L \otimes_C \mathfrak{r}$ sur le groupe $\mathcal{G}(L)(C)$. Nous résumons :

Proposition. — Soient k un anneau pseudocompact contenant $\mathbb{Q}$, $\mathbf{L}$ une algèbre de Lie plate sur $\mathbf{O}_k$, C une k -algèbre profinie de longueur finie et $\mathfrak{r}(C)$ le radical de C . L'application

$$\exp_{U(\mathbf{L}(C))} : \mathbf{L}(C) \otimes_C \mathfrak{r}(C) \longrightarrow \mathcal{G}(\mathbf{L})(C)$$

est bijective et fonctorielle en C et $\mathbf{L}$.

3.2.1. — La bijection $\exp_{\mathbf{U}(\mathbf{L}(\mathbf{C}))}$ permet de définir par transport de structure une loi de groupe sur l'ensemble $\mathbf{L}(\mathbf{C}) \otimes_{\mathbf{C}} \mathfrak{r}(\mathbf{C})$ (qu'on identifie à une partie de $\mathbf{U}(\mathbf{L}(\mathbf{C}))$) comme en 3.2). Si x et y sont deux éléments de $\mathbf{L}(\mathbf{C}) \otimes_{\mathbf{C}} \mathfrak{r}(\mathbf{C})$, cette loi est telle que

$$\begin{aligned} x \cdot y &= \log((\exp x)(\exp y)) = \log\left(1 + \sum_{p+q>0} \frac{x^p}{p!} \frac{y^q}{q!}\right) = \\ &= \sum_{m \geq 1} \sum_{p_i+q_i>0} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \frac{x^{p_1}}{p_1!} \frac{y^{q_1}}{q_1!} \cdots \frac{x^{p_m}}{p_m!} \frac{y^{q_m}}{q_m!} = \sum_{\ell \geq 1} P_{\ell}(x, y) \end{aligned}$$

où $P_{\ell}(x, y)$ désigne la somme des monômes de degré total ℓ en x et y . On a par exemple : 533

$$\begin{aligned} P_1(x, y) &= x + y \\ P_2(x, y) &= \underbrace{\frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2}}_{m=1} - \underbrace{\frac{1}{2}(x^2 + xy + yx + y^2)}_{m=2} = \frac{1}{2}(xy - yx) = \frac{1}{2}[x, y] \\ P_3(x, y) &= \underbrace{\frac{x^3}{6} + \frac{x^2y}{2} + \frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{6}}_{m=1} \\ &\quad - \underbrace{\frac{1}{2}\left(x^3 + \frac{3}{2}x^2y + \frac{1}{2}yx^2 + xyx + yxy + \frac{1}{2}y^2x + \frac{3}{2}xy^2 + y^3\right)}_{m=2} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{3}(x^3 + x^2y + yx^2 + xyx + yxy + y^2x + xy^2 + y^3)}_{m=3} \\ &= \frac{1}{12}(x^2y + yx^2 - 2xyx - 2yxy + y^2x + xy^2) \\ &= \frac{1}{12}[[y, x], x] + \frac{1}{12}[y, [y, x]]. \end{aligned}$$

On peut montrer plus généralement qu'on a

$$P_{\ell}(x, y) = \sum \frac{(-1)^{m+\ell}}{m \cdot \ell} (\operatorname{ad} y)^{q_m} (\operatorname{ad} x)^{p_m} \cdots (\operatorname{ad} y)^{q_2} (\operatorname{ad} x)^{p_2} (\operatorname{ad} y)^{q_1} (\operatorname{ad} x)^{p_1-1} x$$

où $p_1, q_1, \dots, p_m, q_m$ parcourent les suites d'entiers naturels telles que $p_i + q_i > 0$ et $\sum(p_i + q_i) = \ell$ (pour une démonstration de cette *formule de Campbell-Hausdorff*, voir Jacobson, *Lie Algebras*, V § 5, Inter-science Publishers).

3.3. — Si G est un k -groupe formel d'algèbre affine A , rappelons qu'on note I_A l'idéal d'augmentation de A et $\omega_{G/k}$ le k -module pseudocompact $I_A/\overline{I_A^2} \simeq I_A \hat{\otimes}_A (A/I_A)$.

Théorème (CARTIER). — Soit k un anneau pseudocompact local contenant le corps $\mathbb{Q}$ et G un groupe formel sur k . Les assertions suivantes sont équivalentes : 534

- (i) Il existe une $\mathbf{O}_k$ -algèbre de Lie plate $\mathbf{L}$ telle que G soit isomorphe à $\mathcal{G}(\mathbf{L})$.

(ii) *Il existe un k -module pseudocompact projectif ω tel que la variété formelle sous-jacente à G soit isomorphe à la variété $V_k^0(\omega)$ d'algèbre affine $k[[\omega]]$ (1.2.5).*

(iii) *G est infinitésimal et $\omega_{G/k}$ est un k -module pseudocompact projectif.*

(iv) *G est infinitésimal et topologiquement plat sur k .*

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Soit ω le k -module pseudocompact dual de $\mathbf{L}$ (1.2.3). Pour toute k -algèbre profinie de longueur finie C , nous devons exhiber un isomorphisme de $V_k^0(\omega)(C)$ sur $\mathcal{G}(\mathbf{L})(C)$ qui soit fonctoriel en C . D'après 1.2.5, $V_k^0(\omega)(C)$ s'identifie à l'ensemble $\text{Hom}_c(\omega, \mathfrak{r}(C))$ des applications k -linéaires continues de ω dans le radical de C . Cet ensemble est naturellement isomorphe à l'ensemble $\text{Hom}_c(\omega \widehat{\otimes}_k C, \mathfrak{r}(C))$ des applications C -linéaires continues de $\omega \widehat{\otimes}_k C$ dans $\mathfrak{r}(C)$; enfin, comme $\omega \widehat{\otimes}_k C$ est un C -module pseudocompact projectif, l'application canonique

$$(\omega \widehat{\otimes}_k C)^* \otimes_C \mathfrak{r}(C) \longrightarrow \text{Hom}_c(\omega \widehat{\otimes}_k C, \mathfrak{r}(C))$$

est bijective. Comme $(\omega \widehat{\otimes}_k C)^*$ s'identifie à $\mathbf{L}(C)$, on voit finalement que $V_k^0(\omega)(C)$ est canoniquement isomorphe à $\mathbf{L}(C) \otimes_C \mathfrak{r}(C)$. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) résulte donc de la proposition 3.2.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Soit h un isomorphisme de $k[[\omega]]$ sur l'algèbre affine A de G . Composant h avec l'augmentation ε_A (2.1), on obtient un homomorphisme $\varepsilon_A h : k[[\omega]] \rightarrow k$, qui est déterminé par la restriction λ de $\varepsilon_A h$ à ω ; cette restriction envoie ω dans le radical $\mathfrak{r}$ de k et l'application $x \mapsto x - \lambda(x)$ de ω dans le radical de $k[[\omega]]$ se prolonge en un endomorphisme ℓ_λ de $k[[\omega]]$. Les égalités $\ell_\lambda \circ \ell_{-\lambda} = \ell_{-\lambda} \circ \ell_\lambda = \text{id}_{k[[\omega]]}$ montrent que ℓ_λ est un automorphisme de $k[[\omega]]$. Par conséquent, $h \circ \ell_\lambda$ est un isomorphisme de $k[[\omega]]$ sur A et $\varepsilon_A h \ell_\lambda$ applique ω sur 0. Quitte à remplacer h par $h \ell_\lambda$, on peut donc supposer que $\varepsilon_A h$ s'annule sur l'idéal fermé I de $k[[\omega]]$ qui est engendré par ω : dans ce cas, h induit une bijection de I/I^2 sur I_A/I_A^2 ; comme $I/\overline{I^2}$ s'identifie à ω , on voit que $\omega_{G/k}$ est projectif. Il est clair d'autre part que $\text{Spf } V_k^0(\omega)$ est infinitésimal de même que G .

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Soit en effet $\mathbf{L}$ la $\mathbf{O}_k$ -algèbre de Lie de G ; cette algèbre a pour $\mathbf{O}_k$ -module sous-jacent le dual de $\omega_{G/k}$ (2.1); par conséquent, $\mathbf{L}$ est plat sur $\mathbf{O}_k$. Si nous identifions $k[[\omega_{G/k}]]$ à l'algèbre affine du groupe formel $\mathcal{G}(\mathbf{L})$ (cela est possible d'après (i) $\Rightarrow$ (ii)), le morphisme identique de $\mathbf{L}$ est associé canoniquement à un homomorphisme de $\mathcal{G}(\mathbf{L})$ dans G (2.6.3), donc à un homomorphisme continu d'algèbres

$$a : A \longrightarrow k[[\omega_{G/k}]].$$

Il s'agit de montrer que a , qui induit par définition un isomorphisme de $\omega_{G/k}$ sur $\omega_{\mathcal{G}(\mathbf{L})/k}$, est un isomorphisme : Pour cela, on considère une section τ de la projection canonique de I_A sur $\omega_{G/k}$. Une telle section définit d'après 1.2.5 un homomorphisme continu d'algèbres

$$b : k[[\omega_{G/k}]] \longrightarrow A.$$

Soit I l'idéal fermé de $k[[\omega_{G/k}]]$ engendré par $\omega_{G/k}$ et filtrons $k[[\omega_{G/k}]]$ (resp. A) par les adhérences des idéaux I^n (resp. I_A^n). Le composé $a\tau$ est évidemment une section de la projection canonique de I sur $\omega = I/\overline{I^2}$. Par conséquent, ab induit l'application identique sur $I/\overline{I^2}$, donc aussi sur le gradué associé à $k[[\omega_{G/k}]]$. Il s'ensuit que ab est un isomorphisme (C.A. V, § 7 lemme 1). De plus, b induit un isomorphisme de $I/\overline{I^2}$

sur $I_A/\overline{I_A^2}$, donc une surjection des gradués associés à $k[[\omega_{G/k}]]$ et A (comme G est radiciel, I_A est contenu dans le radical de A , de sorte que l'intersection des $\overline{I_A^n}$ est nulle). Comme ab est un isomorphisme et b une surjection, b et a sont des isomorphismes.

Notons enfin qu'il est clair que (i) ou (ii) entraînent (iv), de sorte qu'il reste à prouver l'implication (iv) $\Rightarrow$ (ii) : pour cela, on peut supposer k local, de corps résiduel k_0 . Posons alors $G_0 = G \widehat{\otimes}_k k_0$, $\omega = \omega_{G/k}$, $\omega_0 = \omega \widehat{\otimes}_k k_0 \dots$. Comme ω_0 est topologiquement libre sur k , il existe un k -module topologiquement libre ω' et une application k -linéaire continue $f : \omega' \rightarrow \omega$ telle que $f_0 = f \widehat{\otimes}_k k_0$ soit inversible (f est l'enveloppe projective de ω). Comme ω' est un k -module pseudocompact projectif, f est composée d'une application k -linéaire continue $g : \omega' \rightarrow I_A$ et de la projection canonique de I_A sur ω . À son tour, g induit un homomorphisme d'algèbres topologiques $g : k[[\omega]] \rightarrow A$ (1.2.5). Comme ω_0 s'identifie à ω_{G_0/k_0} et $k_0[[\omega_0]]$ à $k[[\omega]] \widehat{\otimes}_k k_0$, $g_0 = g \widehat{\otimes}_k k_0$ est inversible parce que (iii) entraîne (ii) et que les hypothèses (iii) sont vérifiées pour k_0 et G_0 . Comme, d'autre part, $k[[\omega]]$ et A sont des k -modules pseudocompacts projectifs, g est inversible d'après 0.3.4. 537

3.3.1. Corollaire. — Soient S un schéma localement noethérien sur $\mathbb{Q}$ et G un S -schéma en groupes localement de type fini. Si $\omega_{G/S}$ est un $\mathcal{O}_S$ -Module localement libre, G est lisse sur S le long de la section unité.

En effet, soient x un point de la section unité, s son image dans S , $\mathcal{O}_x$ et $\mathcal{O}_s$ les algèbres locales de x et s . Il suffit de montrer que $\widehat{\mathcal{O}}_x$ est formellement lisse sur $\widehat{\mathcal{O}}_s$ (EGA IV 6.8.6 et 0_{IV} 19.3.6). Or $\widehat{\mathcal{O}}_x$ et $\widehat{\mathcal{O}}_s$ sont les anneaux locaux de x et s dans $\widehat{G/S}$ et $\widehat{S}$. Posant $k = \widehat{\mathcal{O}}_s$ et $H = \mathrm{Spf} \widehat{\mathcal{O}}_x$, il est clair que H est un groupe formel infinitésimal sur k et que l'on a $\omega_{H/k} = (\omega_{G/S})_s \otimes_{\mathcal{O}_s} \widehat{\mathcal{O}}_s$. Donc $\omega_{H/k}$ est le produit d'un nombre fini d'exemplaires de k . Le corollaire résulte donc de 3.3 et de EGA 0_{IV} 19.3.4.

Nous retrouvons donc ainsi un résultat obtenu par ailleurs pour les schémas en groupes localement de présentation finie sur un schéma S .

3.3.2. Corollaire. — Si k est un corps de caractéristique 0, le foncteur $L \mapsto \mathcal{G}(L)$ est une équivalence de la catégorie des k -algèbres de Lie sur celle des k -groupes formels infinitésimaux.

En effet, quand G parcourt les k -groupes formels infinitésimaux, le foncteur $G \mapsto \mathcal{G}(\mathrm{Lie} G)$ est isomorphe au foncteur identique de la catégorie des groupes infinitésimaux (théorème 3.3). De même, le foncteur $L \mapsto \mathrm{Lie}(\mathcal{G}(L))$ est isomorphe au foncteur identique de la catégorie des algèbres de Lie (3.1). 538

3.3.3. — Supposons toujours que k est un corps de caractéristique 0. Soient $\overline{k}$ la clôture algébrique de k et Γ le groupe de Galois topologique de $\overline{k}$ sur k .

Pour tout k -groupe formel H , nous notons $\underline{\mathrm{Aut}}_k H$ le k -foncteur en groupes qui associe à toute k -algèbre commutative de dimension finie C le groupe des automorphismes du C -groupe formel $H \widehat{\otimes}_k C$. Ce k -foncteur est manifestement exact à gauche (H est topologiquement plat sur k !), de sorte que nous pouvons le traiter comme un groupe formel sur k . Si L est une algèbre de Lie sur k et H le groupe formel $\mathcal{G}(L)$,

le théorème 3.3 montre que $\underline{\text{Aut}}_k H$ est isomorphe au k -foncteur en groupes $\underline{\text{Aut}}_k L$ qui associe à une k -algèbre de dimension finie C le groupe des automorphismes de la C -algèbre de Lie $C \otimes_k L$.

Si G est un k -groupe formel arbitraire, nous avons vu en 2.5.2 que G se décompose canoniquement en un produit semidirect d'un groupe formel étale G_e et d'un groupe formel infinitésimal G_0 . Ce produit semidirect est déterminé par la donnée de Lie G , du Γ -groupe $G_e(\bar{k})$ et d'un homomorphisme $h : G_e \rightarrow \underline{\text{Aut}}_k G_0 \simeq \underline{\text{Aut}}_k(\text{Lie } G)$. Un tel homomorphisme envoie G_e dans la « partie étale » $(\underline{\text{Aut}}_k \text{Lie } G)_e$ de $\underline{\text{Aut}}_k \text{Lie } G$ (2.5.1). Il est donc déterminé par la donnée d'un homomorphisme de Γ -groupes

$$h(\bar{k}) : G(\bar{k}) \rightarrow (\underline{\text{Aut}}_k L)(\bar{k}).$$

- 539 Si l'on fait opérer Γ dans $(\text{Lie } G) \otimes_k \bar{k}$ au moyen de la formule $\gamma(\ell \otimes x) = \ell \otimes \gamma(x)$ l'homomorphisme $h(\bar{k})$ fait opérer $G(\bar{k})$ par automorphismes dans la k -algèbre de Lie $(\text{Lie } G) \otimes_k \bar{k}$ de telle façon qu'on ait $g^\gamma(\ell) = \gamma(g\gamma^{-1}\ell)$ si $g \in G(\bar{k})$, $\gamma \in \Gamma$ et $\ell \in (\text{Lie } G) \otimes_k \bar{k}$. Nous exprimons cette dernière condition en disant que $G(\bar{k})$ opère dans $(\text{Lie } G) \otimes_k \bar{k}$ de manière compatible avec Γ .

On peut résumer la situation à l'aide d'un énoncé « savant » : appelons Γ -algèbre de Lie sur k la donnée d'un triplet (L, K, h) formé d'une algèbre de Lie L sur k , d'un Γ -groupe K et d'une opération h de K dans $L \otimes_k \bar{k}$ qui soit « compatible avec l'action de Γ dans K et $L \otimes_k \bar{k}$ ». Si (L, K, h) et (L', K', h') sont deux telles Γ -algèbres de Lie, un homomorphisme de la première dans la seconde est un couple (f, g) formé d'un morphisme $f : L \rightarrow L'$ d'algèbres de Lie et d'un morphisme $g : K \rightarrow K'$ de Γ -groupes tels que $(f \otimes_k \bar{k})(\gamma \cdot x) = g(\gamma) \cdot (f \otimes_k \bar{k})(x)$ si $x \in L \otimes_k \bar{k}$ et $\gamma \in K$: alors le foncteur $G \mapsto (\text{Lie } G, G(\bar{k}), h(\bar{k}))$ est une équivalence de la catégorie des groupes formels sur k (= corps de caractéristique 0) sur la catégorie des Γ -algèbres de Lie.

4. Phénomènes particuliers à la caractéristique $p > 0$

540

Dans tout ce paragraphe 4, nous désignons par p un nombre premier, par k un anneau pseudocompact de caractéristique p , par π l'endomorphisme continu $x \mapsto x^p$ de k .

4.1. — Soient X une variété formelle sur k d'algèbre affine A et $X^{(p/k)}$ ou $X^{(p)}$ la variété formelle $X \widehat{\otimes}_\pi k$ (cf. 1.2). Cette variété a pour algèbre affine le produit tensoriel complété $A \widehat{\otimes}_\pi k$; de plus, l'homomorphisme continu de $A \widehat{\otimes}_\pi k$ dans A qui applique $a \widehat{\otimes}_\pi \lambda$ sur $a^p \lambda$ induit un morphisme de k -variétés formelles

$$\text{Fr}(X/k) : X \longrightarrow X^{(p/k)}.$$

Dans la suite, nous dirons que $\text{Fr}(X/k)$ est le morphisme de Frobenius de X relativement à k et nous écrirons souvent Fr au lieu de $\text{Fr}(X/k)$.

4.1.1. — Considérons maintenant un schéma S sur le corps premier $\mathbb{F}_p$, un S -schéma X et un S -schéma $q : T \rightarrow S$ de longueur finie (1.2.6). Soit $\text{fr}(S)$ le morphisme de Frobenius de S relativement à $\mathbb{F}_p$ (ce morphisme induit l'identité sur l'espace topologique sous-jacent et applique une section s du faisceau structural sur s^p ; cf. VII_A 4.1). Si

nous posons $X^{(p)} = X \times_{\text{fr}(S)} S$ (VII_A, *loc. cit.*), les morphismes de S -variétés formelles $f : T \rightarrow \widehat{X^{(p)}}/\widehat{S}$ correspondent biunivoquement aux S -morphisms de T dans $X^{(p)}$ (1.2.6), c'est-à-dire aux carrés commutatifs

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f'} & X \\ q \downarrow & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{\text{fr}(S)} & S \end{array} .$$

À un tel carré est associé un S -morphisme de T dans $(\widehat{X}/\widehat{S})^{(p)}$ si et seulement si f' se factorise à travers un sous-schéma X_0 de X qui est de longueur finie sur S . On voit ainsi que $\text{Hom}_{\text{Vf}/\widehat{S}}(T, (\widehat{X}/\widehat{S})^{(p)})$ peut être identifié à une partie de $\text{Hom}_{\text{Vf}/\widehat{S}}(T, \widehat{X^{(p)}}/\widehat{S})$, ce qui définit $(\widehat{X}/\widehat{S})^{(p)}$ comme une sous-variété formelle de $\widehat{X^{(p)}}/\widehat{S}$. On a l'égalité $(\widehat{X}/\widehat{S})^{(p)} = \widehat{X^{(p)}}/\widehat{S}$ si $\text{fr}(S) \circ q$ est un S -schéma de longueur finie lorsque q en est un. Ceci a lieu par exemple lorsque S est localement de type fini sur un corps k tel que $[k : k^p] < +\infty$. 541

4.1.2. — Soit G un groupe formel sur k d'algèbre affine A . Comme le foncteur $X \mapsto X \otimes_{\pi} k$ commute aux produits finis, il transforme un k -groupe formel en un k -groupe formel. En outre, comme $\text{Fr}(X/k)$ est fonctoriel en X , le morphisme

$$\text{Fr} : G \longrightarrow G^{(p)}$$

est un homomorphisme de k -groupes formels. Si l'on pose $G^{(p^{n+1})} = (G^{(p^n)})^{(p)}$ il en va de même pour le morphisme composé

$$\text{Fr}^n = \text{Fr}^n(G/k) : G \xrightarrow{\text{F}} G^{(p)} \xrightarrow{\text{F}} G^{(p^2)} \xrightarrow{\text{F}} \dots \xrightarrow{\text{F}} G^{(p^n)}.$$

Le noyau de cet homomorphisme Fr^n sera noté $_{\text{Fr}^n}G$. Il résulte directement des définitions que $_{\text{Fr}^n}G$ est radiciel et a pour algèbre affine le quotient $A/I_A^{\{p^n\}}$, où $I_A^{\{p^n\}}$ désigne l'idéal fermé de A qui est engendré par les puissances p^n -ièmes des éléments de I_A . Lorsque $I_A^{\{p^n\}}$ est nul, c'est-à-dire lorsqu'on a $_{\text{Fr}^n}G = G$, on dit que G est de hauteur $\leq n$.

4.2. — Il est clair que l'algèbre de Lie $\mathbf{Lie}(G)$ d'un k -groupe formel G est une p -sous-algèbre de Lie de l'algèbre $\mathbf{H}(G)$ (cf. 2.3) : en effet, on se ramène tout de suite au cas où k est artinien ; dans ce cas, $\mathbf{Lie}(G)$ est la partie de $\mathbf{H}(G)$ formée des éléments x tels que $\varphi_G(x \otimes 1 + 1 \otimes x) = \Delta_G(x)$ avec les notations de 2.3 et 2.6 (c). On a alors 542

$$\begin{aligned} \varphi_G(x^p \otimes 1 + 1 \otimes x^p) &= \varphi_G((x \otimes 1 + 1 \otimes x)^p) \\ &= \varphi_G(x \otimes 1 + 1 \otimes x)^p = \Delta_G(x)^p = \Delta_G(x^p). \end{aligned}$$

4.2.1. — Réciproquement, toute p -algèbre de Lie $\mathbf{L}$ sur $\mathbf{O}_k$ définit un k -foncteur en groupes : désignons en effet par $\mathbf{U}_p(\mathbf{L})$ le foncteur qui associe à toute k -algèbre de longueur finie C l'algèbre enveloppante restreinte $\mathbf{U}_p(\mathbf{L}(C))$ de la p -algèbre de Lie $\mathbf{L}(C)$ sur C (VII_A 5.3). D'après VII_A 5.4, $\mathbf{U}_p(\mathbf{L})$ est une $\mathbf{O}_k$ -bialgèbre et détermine un k -foncteur en groupes $\mathrm{Spf}^* \mathbf{U}_p(\mathbf{L})$ (2.2) que nous noterons désormais $\mathcal{G}_p(\mathbf{L})$: $\mathcal{G}_p(\mathbf{L})(C)$ est donc le groupe des éléments $z \in \mathbf{U}_p(\mathbf{L}(C))$ d'augmentation 1 et tels que $\Delta_{\mathbf{U}_p(\mathbf{L}(C))}(z) = z \otimes z$.

4.2.2. — Lorsque $\mathbf{L}$ est une p -algèbre de Lie plate sur $\mathbf{O}_k$, $\mathbf{U}_p(\mathbf{L})$ est plate sur $\mathbf{O}_k$ d'après VII_A 5.3.3 ; par conséquent, $\mathcal{G}_p(\mathbf{L})$ est un groupe formel topologiquement plat sur k qui a $\mathbf{U}_p(\mathbf{L})$ pour $\mathbf{O}_k$ -bialgèbre. Ce groupe formel peut être caractérisé par une propriété universelle : considérons en effet un homomorphisme h de $\mathcal{G}_p(\mathbf{L})$ dans un groupe formel G ; un tel h induit un homomorphisme $\mathbf{Lie} h$ de l'Algèbre de Lie de $\mathcal{G}_p(\mathbf{L})$ dans celle de G . On voit d'autre part comme en VII_A 7.3 que le morphisme canonique de $\mathbf{L}$ dans l'Algèbre enveloppante restreinte $\mathbf{U}_p(\mathbf{L})$ définit un isomorphisme de $\mathbf{L}$ sur la p -algèbre de Lie de $\mathcal{G}_p(\mathbf{L})$; composant cet isomorphisme avec $\mathbf{Lie} h$, on obtient un homomorphisme $h' : \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{Lie} G$:

543 Proposition. — Si k est un anneau pseudocompact de caractéristique $p > 0$, G un k -groupe formel et $\mathbf{L}$ une p -algèbre de Lie plate sur $\mathbf{O}_k$, l'application $h \mapsto h'$ définie ci-dessus est une bijection

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-Gr.}}(\mathcal{G}_p(\mathbf{L}), G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_p(\mathbf{L}, \mathbf{Lie} G)$$

de l'ensemble des homomorphismes de k -groupes formels de $\mathcal{G}_p(\mathbf{L})$ dans G sur celui des morphismes de p -algèbres de Lie de $\mathbf{L}$ dans $\mathbf{Lie} G$.

On se ramène en effet tout de suite au cas où k est artinien. Dans ce cas, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{k\text{-Gr.}}(\mathcal{G}_p(\mathbf{L}), G)$ est en correspondance biunivoque canonique (2.3.1) avec les homomorphismes d'algèbres unitaires $g : \mathbf{U}_p(\mathbf{L}) \rightarrow H(G)$ tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{U}_p(\mathbf{L}) & \xrightarrow{g} & H(G) \\ \Delta \downarrow & & \searrow \delta_G \\ \mathbf{U}_p(\mathbf{L}) \otimes \mathbf{U}_p(\mathbf{L}) & \xrightarrow{g \otimes g} & H(G) \otimes H(G) \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \nearrow \varphi_G \\ H(G \times G) \end{array} .$$

Or g est défini par sa restriction à $\mathbf{L}$ qui est un homomorphisme de p -algèbres de Lie de $\mathbf{L}$ dans la p -algèbre de Lie sous-jacente à $H(G)$. La commutativité du diagramme signifie donc simplement que g applique $\mathbf{L}$ sur la partie $\mathbf{Lie} G$ de $H(G)$ formée des x tels que $\varphi_G(x \otimes 1 + 1 \otimes x) = \delta_G x$.

4.3. — Nous nous proposons maintenant d'étudier de façon plus détaillée le k -groupe formel $\mathcal{G}_p(\mathbf{L})$ lorsque $\mathbf{L}$ est une p -algèbre de Lie plate sur $\mathbf{O}_k$.

Pour cela, nous considérons d'abord un anneau C de caractéristique p et une p -algèbre de Lie L sur C dont le module sous-jacent est libre de base $(x_i)_{i \in I}$. Désignons en outre par P l'ensemble des familles $n = (n_i)_{i \in I}$ formées d'entiers naturels tels que $0 \leq n_i < p$ et que les n_i soient nuls hormis peut-être un nombre fini d'entre eux. Si nous munissons I d'un ordre total et si nous appelons $i_1, i_2, \dots, i_r$ ($i_1 < i_2 < \dots < i_r$) les indices i tels que $n_i \neq 0$, nous pouvons donc poser $|n| = n_{i_1} + \dots + n_{i_r}$ et

$$x^n = x_{i_1}^{n_{i_1}} \cdot x_{i_2}^{n_{i_2}} \cdots x_{i_r}^{n_{i_r}}, \quad n! = (n_{i_1}!) \cdots (n_{i_r}!).$$

On sait que les monômes $x^n/n!$ forment une base de $U_p(L)$ (VIIA 5.3.3) et il est clair qu'on a

$$(*) \quad \Delta \left(\frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{m \leq n} \frac{x^m}{m!} \otimes \frac{x^{n-m}}{(n-m)!}$$

la somme étant étendue à tous les $m \in P$ tels qu'on ait $m \leq n$ (i.e. $m_i \leq n_i$ pour tout $i \in I$).

La formule $(*)$ permet une détermination aisée de la filtration naturelle de $U_p(L)$ (cf. 1.3.6). Soit U^+ l'idéal bilatère de $U_p(L)$ qui est engendré par L et posons $U = U_p(L)$. Rappelons qu'on a par définition

$$\begin{aligned} U_0 &= C \cdot 1_U \\ &\dots\dots\dots \\ U_n &= \{u \in U \mid \Delta_U u - u \otimes 1 \in U_{n-1} \otimes U^+\}. \end{aligned}$$

La formule $(*)$ entraîne alors que U_n est le C -module libre qui a pour base les monômes x^m tels que $|m| \leq n$.

4.3.1. — Avec les notations de 4.3, déterminons les éléments ξ de U d'augmentation 1 et tels que $\Delta_U \xi = \xi \otimes \xi$: tout élément ξ de U se met sous la forme $\xi = \sum_{n \in P} \xi_n \frac{x^n}{n!}$, où $\xi_n \in C$. La condition $\varepsilon_U(\xi) = 1$ entraîne l'égalité $\xi_0 = 1$, si 0 désigne l'élément de P dont toutes les composantes sont nulles. La condition $\Delta_{U_p(L)}(\xi) = \xi \otimes \xi$ entraîne

$$\sum_{m \leq n} \xi_n \frac{x^m}{m!} \otimes \frac{x^{n-m}}{(n-m)!} = \sum_{q,r} \xi_q \xi_r \frac{x^q}{q!} \otimes \frac{x^r}{r!}$$

c'est-à-dire

$$\xi_{q+r} = \xi_q \xi_r \quad \text{si} \quad q_i + r_i < p \quad \text{et} \quad \xi_q \xi_r = 0 \quad \text{sinon.}$$

Si l'on note ξ_i la valeur de ξ_n lorsque $n_i = 1$ et $n_j = 0$ pour $j \neq i$, ces conditions signifient que l'on a

$$\xi_n = \prod_i \xi_i^{n_i} \quad \text{si} \quad n \in P \quad \text{et} \quad \xi_i^p = 0 \quad \forall i \in I.$$

On tire de là :

Proposition. — Soient p un nombre premier, k un anneau pseudocompact de caractéristique p , $\mathbf{L}$ une p -algèbre de Lie plate sur $\mathbf{O}_k$, C une k -algèbre profinie de longueur finie et $\sqrt[p]{0}_C$ l'idéal de C formé des éléments x tels que $x^p = 0$. Il existe une bijection

$$\mathbf{L}(C) \otimes_C \sqrt[p]{0}_C \longrightarrow \mathcal{G}_p(\mathbf{L})(C)$$

« qui est fonctorielle en C ».

546 D'après 1.2.3, on peut en effet choisir une base $({}^C x_i)_{i \in I}$ de $\mathbf{L}(C)$ sur C de telle façon que, pour tout morphisme $\varphi : C \rightarrow D$ de Alf/k (0.4.2), $\mathbf{L}(\varphi)$ applique ${}^C x_i$ sur ${}^D x_i$. D'après ce qui précède, l'application $\sum_i {}^C x_i \otimes \xi_i \mapsto \sum_{n \in \mathbb{P}} (\prod_i \xi_i^{n_i}) \frac{{}^C x^n}{n!}$ est une bijection fonctorielle de $\mathbf{L}(C) \otimes_C \sqrt[p]{0}_C$ sur $\mathcal{G}_p(\mathbf{L})(C)$.

4.3.2. — « Il n'y a pas de formule de Campbell-Hausdorff en caractéristique $p > 0$ » ; expliquons-nous : l'isomorphisme fonctoriel de 4.3.1 dépend du choix des bases $({}^C x_i)_{i \in I}$. A la différence de ce qui se passe en 3.2 (cas de la caractéristique 0), il n'y a pas, en général, de bijection de $\mathbf{L}(C) \otimes_C \sqrt[p]{0}_C$ sur $\mathcal{G}_p(\mathbf{L})(C)$ qui soit « fonctorielle à la fois en C et en $\mathbf{L}$ ». L'argument qui suit montre par exemple qu'un tel isomorphisme n'existe pas lorsque k est un corps contenant les racines $(p^2 - 1)$ -ièmes de l'unité :

Choisissons en effet $\mathbf{L}$ de telle façon que, pour tout $C \in \text{Alf}/k$, $\mathbf{L}(C)$ soit la p -algèbre de Lie abélienne sur C qui est engendrée par un élément x soumis à la relation $x^{(p^2)} = 0$. On a donc

$$\mathbf{L}(C) = Cx \oplus Cx^{(p)}.$$

Nous allons montrer que le seul morphisme fonctoriel

$$\chi_C : \mathbf{L}(C) \otimes_C \sqrt[p]{0}_C \longrightarrow U_p(\mathbf{L}(C)),$$

547 qui soit compatible avec les endomorphismes de $\mathbf{L}$ et qui applique $\mathbf{L}(C) \otimes_C \sqrt[p]{0}_C$ dans $\mathcal{G}_p(\mathbf{L})(C)$, est le morphisme constant de valeur 1. Soit en effet ψ_C l'application de $\mathbf{L}(C) \otimes_C \sqrt[p]{0}_C$ dans $U_p(\mathbf{L}(C))$ qui envoie $x \otimes a + x^{(p)} \otimes b$ sur $\sum_{0 \leq i, j < p} a^i b^j x^{i+pj}$. En composant χ_C avec ψ_C^{-1} , on obtient un morphisme fonctoriel (en C) :

$$\mathbf{L}(C) \otimes_C \sqrt[p]{0}_C \longrightarrow \mathbf{L}(C) \otimes_C \sqrt[p]{0}_C$$

qui applique $x \otimes a + x^{(p)} \otimes b$ sur $x \otimes P(a, b) + x^{(p)} \otimes Q(a, b)$. La fonctorialité en C implique que $P(a, b)$ et $Q(a, b)$ sont les valeurs en (a, b) de deux polynômes $P, Q \in k[x, y]$ qu'on peut supposer de degré $< p$ en X ainsi qu'en Y . Si α est un élément de k et si $\underline{\ell}$ est l'endomorphisme de $\mathbf{L}$ qui applique x sur αx , on voit de suite que le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{L}(C) \otimes_C \sqrt[p]{0}_C & \xrightarrow{\psi_C} & U_p(\mathbf{L}(C)) \\ \downarrow \underline{\ell}(C) \otimes_C \sqrt[p]{0}_C & & \downarrow U_p(\underline{\ell}(C)) \\ \mathbf{L}(C) \otimes_C \sqrt[p]{0}_C & \xrightarrow{\psi_C} & U_p(\mathbf{L}(C)) \end{array}$$

est commutatif. Tenant compte de la compatibilité de χ_C avec $\underline{\ell}$, on en déduit les égalités $P(\alpha a, \alpha^p b) = \alpha P(a, b)$ et $Q(\alpha a, \alpha^p b) = \alpha^p Q(a, b)$. Prenant pour α une racine $(p^2 - 1)$ -ième primitive de l'unité et prenant pour C l'algèbre $k[X, Y]/(X^p, Y^p)$, on en

déduit que P et Q sont de la forme $P = \lambda X$ et $Q = \mu Y$, $\lambda, \mu \in k$. Par conséquent χ_C envoie $x \otimes a + x^{(p)} \otimes b$ sur $\sum_{0 \leq i, j < p} (\lambda a)^i (\mu b)^j x^{i+pj}$.

Cette dernière application ne « commute » avec l'endomorphisme de $\mathbf{L}$ qui envoie x sur $x^{(p)}$ que si $\lambda = \mu = 0$.

4.4. Théorème. — Soient p un nombre premier, k un anneau pseudocompact de caractéristique p et G un groupe formel sur k . Les assertions suivantes sont équivalentes : 548

- (i) Il existe une p -algèbre de Lie $\mathbf{L}$ plate sur $\mathbf{O}_k$ telle que G soit isomorphe à $\mathcal{G}_p(\mathbf{L})$.
- (ii) Il existe un k -module pseudocompact projectif ω tel que l'algèbre affine de G soit isomorphe au quotient de $k[[\omega]]$ par l'idéal fermé engendré par les x^p , $x \in \omega$.
- (iii) G est de hauteur ≤ 1 et $\omega_{G/k}$ est un k -module pseudocompact projectif.
- (iv) G est de hauteur ≤ 1 et est topologiquement plat sur k .

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Soient ω le k -module pseudocompact dual de $\mathbf{L}$ (1.2.3) et A le quotient de $k[[\omega]]$ par l'idéal fermé engendré par les x^p , $x \in \omega$. Pour toute k -algèbre profinie de longueur finie C , un homomorphisme continu $h : A \rightarrow C$ est déterminé par sa restriction h' à ω ; cette restriction h' envoie ω dans $\sqrt[p]{0_C}$; on obtient ainsi une bijection canonique de $\text{Hom}_{A/k}(A, C)$ sur l'ensemble $\text{Hom}_c(\omega, \sqrt[p]{0_C})$ des applications k -linéaires continues de ω dans $\sqrt[p]{0_C}$. Ce dernier ensemble est canoniquement isomorphe à $\mathbf{L}(C) \otimes_C \sqrt[p]{0_C}$ (voir la démonstration de 3.3). L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) résulte donc de 4.3.1.

Pour les autres implications, consulter les démonstrations des théorèmes 3.3 et VII_A 7.4.1, qui sont analogues.

4.4.1 Corollaire. — Si k est un corps de caractéristique $p > 0$, le foncteur $L \mapsto \mathcal{G}_p(L)$ est une équivalence de la catégorie des p -algèbres de Lie sur k sur celle des k -groupes formels de hauteur ≤ 1 . 549

En effet, quand G parcourt les groupes formels de hauteur ≤ 1 , le foncteur $G \mapsto \mathcal{G}_p(\text{Lie } G)$ est isomorphe au foncteur identique d'après le théorème 4.4; de même, nous avons vu que le foncteur $L \mapsto \text{Lie } \mathcal{G}_p(L)$ est isomorphe au foncteur identique (confer VII_A 7.5).

4.4.2. — Prenons toujours pour k un corps de caractéristique p . Pour tout k -groupe formel infinitésimal G , l'algèbre affine A de G est la limite projective des algèbres affines $A/I_A^{\{p^n\}}$ des groupes ${}_{\mathbb{F}_p}G$ (cf. 4.1.2). Un k -groupe formel infinitésimal est donc une limite inductive de k -groupes formels de hauteur finie.

Supposons maintenant G de hauteur $\leq n$. Comme ${}_{\mathbb{F}_p}G$ est le noyau de $\text{Fr} : G \rightarrow G^{(p)}$, Fr induit un monomorphisme i de $H = G/{}_{\mathbb{F}_p}G$ dans $G^{(p)}$. Comme $\text{Fr}^n(G/k) = \text{Fr}^{n-1}(G^{(p)}/k) \circ \text{Fr}(G/k)$ est nul, $\text{Fr}^{n-1}(G^{(p)}/k) \circ i$ est nul ainsi que $i^{(p^{n-1})} \circ \text{Fr}^{n-1}(H/k)$. Comme i est un monomorphisme (2.4.1), on voit que H est de hauteur $\leq n-1$. On voit donc qu'un groupe de hauteur finie possède une suite de composition dont les quotients sont de hauteur ≤ 1 , donc peuvent être décrits par des p -algèbres de Lie sur k .

Enfin, lorsque G est un k -groupe formel infinitésimal tel que $\omega_{G/k}$ soit de dimension finie sur k , l'algèbre affine A de G est un quotient de $k[[\omega]]$, de sorte que toutes les algèbres $A/I_A^{\{p^n\}}$ sont de dimension finie sur k en tant qu'espaces vectoriels. On voit par conséquent qu'un groupe formel infinitésimal G sur un corps de caractéristique $p > 0$ est une limite inductive de groupes formels finis (i.e. de longueur finie, 1.2.6) dès que $\omega_{G/k}$ est de dimension finie sur k .

5. Espaces homogènes de groupes formels infinitésimaux sur un corps

550

Dans tout ce qui suit, la lettre k désigne un corps.

5.1. — Soient G un k -groupe formel infinitésimal d'algèbre affine A , B une sous-algèbre fermée de A , I_B l'intersection $B \cap I_A$ de B avec l'idéal d'augmentation de A , $\overline{AI_B}$ l'idéal fermé de A engendré par I_B , X le spectre formel de B et $r : G \rightarrow X$ l'épimorphisme induit par l'inclusion de B dans A . On se propose de voir sous quelle condition r fait de X le quotient à gauche de G par un sous-groupe F (2.4) :

Proposition. — Avec les notations ci-dessus, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall x \in B, \Delta_A x - 1 \otimes x \in \overline{AI_B} \hat{\otimes}_k A$.

(ii) Le morphisme diagonal de A induit par passage au quotient un morphisme diagonal sur l'algèbre A/AI_B qui fait du spectre formel de cette algèbre un sous-groupe formel de G . De plus, si q désigne la projection canonique de A sur $A/\overline{AI_B}$, la suite

$$(*) \quad B \xrightarrow{\text{incl.}} A \xrightarrow[\substack{\text{in}_2 \\ (q \hat{\otimes} A) \Delta_A}]{\text{in}_2} (A/\overline{AI_B}) \hat{\otimes}_k A$$

est exacte ; autrement dit, r induit un isomorphisme de $F \backslash G$ sur X .

L'assertion (i) signifie simplement que B est contenu dans le noyau du couple $(\text{in}_2, (q \hat{\otimes} A) \Delta_A)$. Par conséquent (ii) entraîne (i). La démonstration de la réciproque occupe les paragraphes 5.1.1 à 5.1.5.

551

5.1.1. — Considérons d'abord la catégorie (Cou) qui suit : un objet de (Cou) est un couple (C, J) formé d'une k -algèbre profinie C et d'un idéal fermé J de C ; un morphisme $\psi : (C, I) \rightarrow (D, J)$ de (Cou) est un homomorphisme continu de l'algèbre C dans l'algèbre D qui applique I dans J . Si l'on associe à (C, I) le couple $(\text{Spf}(C/I), \text{Spf } C)$, on obtient évidemment une antiéquivalence de (Cou) sur la catégorie des couples (Z, Y) formés d'une k -variété formelle Y et d'une sous-variété formelle Z .

Une structure de co-groupe sur un objet (C, J) de (Cou) consiste en la donnée d'une structure de groupe formel sur $\text{Spf } C$ telle que les conditions suivantes soient réalisées (notations de 2.1) :

- (1) $\Delta_C J \subset J \hat{\otimes}_k C + C \hat{\otimes}_k J$;
- (2) $\varepsilon_C(J) = 0$;

(3) $c_C(J) \subset J$.

Ces conditions signifient aussi que $\mathrm{Spf}(C/J)$ est un sous-groupe formel de $\mathrm{Spf} C$.

Il résulte de 2.7 que les conditions 2) et 3) sont une conséquence de 1) lorsque C est local, c'est-à-dire lorsque $\mathrm{Spf} C$ est un groupe infinitésimal. En particulier, si l'on pose $I = \overline{AI_B}$, la condition (i) de la proposition 5.1 entraîne la relation

$$\begin{aligned} \Delta_A I_B &\subset I \hat{\otimes}_k A + A \hat{\otimes}_k I \\ \text{d'où} \quad \Delta_A I &\subset I \hat{\otimes}_k A + A \hat{\otimes}_k I, \end{aligned}$$

de sorte que Δ_A induit un morphisme diagonal dans A/I qui fait de A/I l'algèbre affine d'un sous-groupe formel F de G .

5.1.2. — Désignons par GrAl/k la catégorie des k -algèbres « *profinies graduées* » : un objet de cette catégorie consiste en la donnée d'une suite $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ d'espaces vectoriels linéairement compacts sur k et d'une structure d'algèbre profinie sur le produit $\prod_{n \geq 0} A_n$ telle qu'on ait $A_n \cdot A_m \subset A_{m+n}$ (A_n est identifié à une partie de $\prod_{i \geq 0} A_i$ au moyen de l'injection canonique) ; un morphisme $\psi : (A_n) \rightarrow (B_n)$ est une suite d'applications linéaires continues $\psi_n : A_n \rightarrow B_n$ telles qu'on ait $\psi_{m+n}(a \cdot a') = \psi_m(a) \cdot \psi_n(a')$ si $a \in A_m$ et $a' \in A_n$. 552

Il est clair que deux k -algèbres profinies (A_n) et (B_n) ont une *somme directe dans* GrAl/k et que cette somme directe a pour n -ième composante le produit $\prod_{i=0}^n A_i \otimes_k B_{n-i}$ des k -espaces vectoriels linéairement compacts $A_i \hat{\otimes}_k B_{n-i}$. Cette somme directe sera notée $(A_n) \hat{\otimes}_k (B_n)$.

On peut associer à tout objet (C, J) de (Cou) l'algèbre profinie graduée $\mathrm{Gr}_J(C)$ de C pour la filtration définie par les adhérences $\overline{J^n}$ des puissances de J ; on a donc $\mathrm{Gr}_J(C)_n = \overline{J^n}/\overline{J^{n+1}}$ et la multiplication de $\mathrm{Gr}_J(C)$ est induite par celle de C . De plus, il résulte du lemme ci-dessous que le foncteur $(C, J) \mapsto \mathrm{Gr}_J(C)$ commute aux sommes directes finies ; il transforme donc un co-groupe de (Cou) en un co-groupe de GrAl/k . On voit en particulier qu'avec les notations de 5.1.1, l'algèbre profinie graduée $\mathrm{Gr}_1(A)$ est munie d'une structure de co-groupe dans GrAl/k :

Lemme. — Soient $U_0 \supset U_1 \supset \dots$ et $V_0 \supset V_1 \supset \dots$ deux k -espaces vectoriels linéairement compacts filtrés séparés. Filtrons le produit tensoriel complété $W = U \hat{\otimes}_k V$ à l'aide des sous-espaces fermés

$$W_n = U_n \hat{\otimes}_k V_0 + U_{n-1} \hat{\otimes}_k V_1 + \dots + U_0 \hat{\otimes}_k V_n.$$

Pour tout n , les applications canoniques de $(U_i/U_{i+1}) \hat{\otimes}_k (V_j/V_{j+1})$ dans W_n/W_{n+1} ($i+j=n$) définissent un isomorphisme 553

$$\bigoplus_{i+j=n} (U_i/U_{i+1}) \hat{\otimes}_k (V_j/V_{j+1}) \xrightarrow{\sim} W_n/W_{n+1}.$$

5.1.3. — Identifions toute k -algèbre profinie Γ à la k -algèbre profinie graduée $(\Gamma_n)_{n \geq 0}$ telle que $\Gamma_0 = \Gamma$ et $\Gamma_n = 0$ si $n > 0$. En particulier, si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une k -algèbre profinie graduée, nous considérerons indifféremment A_0 comme une k -algèbre profinie ou bien comme une k -algèbre profinie graduée. Nous désignerons alors par $\rho : (A_n) \rightarrow$

A_0 le morphisme de GrAl/k tel que $\rho_0 = \text{id}_{A_0}$ et $\rho_n = 0$ si $n > 0$. De même, $\iota : A_0 \rightarrow (A_n)$ désignera la section de ρ telle que $\iota_0 = \text{id}_{A_0}$ et $\iota_n = 0$ si $n > 0$.

Toute structure de cogroupe sur $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ induit une structure de cogroupe sur A_0 telle que ρ et ι soient des homomorphismes de cogroupes. Comme ι est une section de ρ , le cogroupe $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une « somme semidirecte » de A_0 et d'un cogroupe $(A'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de GrAl/k tel que $A'_0 = k$. Autrement dit, si (A'_n) est la sousalgèbre graduée de (A_n) telle que la suite

$$(A'_n) \xrightarrow{j=\text{incl.}} (A_n) \xrightleftharpoons[(\rho \otimes \text{Id})\Delta]{\text{in}_2} A_0 \widehat{\otimes}_k (A_n)$$

soit exacte, le morphisme $(A_0 \widehat{\otimes}_k A'_n) \rightarrow (A_n)$ de composantes ι et j est inversible. (On désigne par $\Delta : (A_n) \rightarrow (A_n) \widehat{\otimes}_k (A_n)$ le morphisme qui définit la structure de cogroupe de (A_n)).

554 5.1.4. — Dans le cas qui nous intéresse, on a $(A_n) = \text{Gr}_I(A)$ et $A_0 = A/I$. De plus, il est clair que l'algèbre (A_n) est engendrée par A_0 et A_1 , c'est-à-dire que, pour $n \geq 1$, l'application

$$A_1 \widehat{\otimes}_{A_0} A_1 \widehat{\otimes}_{A_0} \cdots \widehat{\otimes}_{A_0} A_1 \longrightarrow A_n$$

définie par la multiplication est surjective. Comme on a $A_1 \simeq A_0 \widehat{\otimes}_k A'_1$ et $A_n \simeq A_0 \widehat{\otimes} A'_n$, donc aussi $A_1 \widehat{\otimes}_{A_0} A \widehat{\otimes}_{A_0} \cdots \widehat{\otimes}_{A_0} A \simeq A_0 \widehat{\otimes}_k (A'_1 \widehat{\otimes}_k \cdots \widehat{\otimes}_k A'_1)$, on voit que l'application $A'_1 \widehat{\otimes}_k \cdots \widehat{\otimes}_k A'_1 \rightarrow A'_n$, qui est induite par la multiplication de (A'_n) , est surjective ; autrement dit, (A'_n) est engendrée par ses termes de degré 1.

Désignons maintenant par $\text{Gr}(B)$ et $\text{Gr}'(B)$ les gradués associés à B pour la filtration induite par celle de A et pour la filtration définie par les adhérences $\overline{I_B^n}$ des puissances de I_B . Comme le diagramme

$$B \xrightarrow{\text{incl.}} A \xrightleftharpoons[(q \widehat{\otimes}_k A)\Delta_A]{\text{in}_2} (A/\overline{I_B}) \widehat{\otimes}_k A$$

est commutatif d'après la condition (i), on voit qu'on a $\text{Gr}(B)_n \subset A'_n$ pour tout n . Or $I/\overline{I^2} \simeq (A/I) \widehat{\otimes}_k A'_1$ est engendré en tant que (A/I) -module pseudocompact par l'image de $\text{Gr}'(B)_1$ de sorte qu'on a $\text{Gr}(B)_1 \simeq A'_1$, d'où $\text{Gr}(B) = (A'_n)$; de plus, l'application canonique de $\text{Gr}'(B)$ dans $\text{Gr}(B)$ est surjective puisque l'algèbre graduée $\text{Gr}(B) = (A'_n)$ est engendrée par ses termes de degré 1. Le lemme 5.1.5 montre donc qu'on a $\text{Gr}'(B) = \text{Gr}(B)$.

555 Considérons enfin le noyau N du couple $(\text{in}_2, (q \widehat{\otimes}_k A)\Delta_A)$ ci-dessus et munissons N de la filtration induite par celle de A . On a alors $(A'_n) \subset \text{Gr}(B) \subset \text{Gr}(N) \subset (A'_n)$. Comme toutes les filtrations considérées sont séparées, on en déduit $N = B$ (C.A., V, § 7, lemme 1).

5.1.5. Lemme. — Soient B un groupe abélien, $B = B'_0 \supset B'_1 \supset B'_2 \supset \cdots$ et $B = B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \cdots$ deux filtrations séparées de B par des sous-groupes tels que $B'_m \subset B_m$ pour tout m . Si l'application canonique de B'_m/B'_{m+2} dans B_m/B_{m+1} est surjective

pour tout m et si B est complet pour la topologie définie par la filtration (B'_m) , alors on a $B'_m = B_m$ pour tout m .

Appliquer le lemme 1 de C.A. V, § 7 à l'inclusion de B_m dans B_m .

5.2. — Dans toute la suite de ce paragraphe 5, k désigne un corps parfait de caractéristique $p > 0$.

Nous posons $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si B est une k -algèbre profinie et si $r \in \mathbb{N}$, nous notons $((x^{p^r}))_{x \in \mathfrak{r}(B)}$ l'idéal fermé de B qui est engendré par les éléments x^{p^r} , où x parcourt le radical $\mathfrak{r}(B)$ de B . Si $r = \infty$, nous utilisons la même notation en convenant que $((x^{p^\infty}))_{x \in \mathfrak{r}(B)}$ est l'idéal nul. Dans les deux cas, B_r désigne le quotient $B/((x^{p^r}))_{x \in \mathfrak{r}(B)}$.

Nous disons que B est de hauteur $\leq r$ si $((x^{p^r}))_{x \in \mathfrak{r}(B)}$ est l'idéal nul ; si cela a lieu et si r est fini, nous disons que B est de hauteur finie.

Considérons en particulier le cas où B est de la forme $k[[\omega]]$, ω étant un k -espace vectoriel linéairement compact (0.2.2). Nous disons alors que B est une algèbre de séries formelles et que B_r est une algèbre de séries formelles tronquée ($r \in \overline{\mathbb{N}}$; nous convenons donc de dire que $B = B_\infty$ est également « tronquée »). Si $B = k[[\omega]]$, nous écrivons aussi $((x^{p^r}))_{x \in \omega}$ au lieu de $((x^{p^r}))_{x \in \mathfrak{r}(B)}$. 556

Lorsque ω est un k -espace vectoriel linéairement compact filtré par une suite croissante de sous-espaces vectoriels fermés

$$0 = \omega_0 \subset \omega_1 \subset \omega_2 \subset \omega_3 \subset \dots$$

nous noterons $((x^{p^r}))_{r \in \omega_r}$ l'idéal fermé de $k[[\omega]]$ qui est engendré par les éléments x^{p^r} , où r parcourt $\mathbb{N}$ et x parcourt ω_r . Nous désignons par ${}_r\omega$ l'espace vectoriel linéairement compact filtré tel que

$${}_r\omega_i = \omega_i \quad \text{si } i < r \quad \text{et} \quad {}_r\omega_i = \omega \quad \text{si } i \geq r$$

Théorème (DIEUDONNE-CARTIER). — Soient $H \rightarrow G$ un monomorphisme de groupes formels infinitésimaux sur un corps parfait k de caractéristique $p > 0$. Soit B l'algèbre affine de l'espace homogène $H \backslash G$ et supposons vérifiée l'une des deux conditions suivantes :

- (i) B est de hauteur finie (ceci a lieu en particulier si G est de hauteur finie).
- (ii) B est un anneau local noethérien complet.

Alors B est isomorphe au produit tensoriel complété d'une famille finie d'algèbres de séries formelles tronquées.

La démonstration de ce théorème occupe les paragraphes 5.2.1 à 5.2.5. 557

5.2.1. — Soient I l'idéal maximal de B et posons $\omega = I/\overline{I^2}$. On désigne par I_r le sous-espace vectoriel fermé de I formé des x tels $x^{p^r} = 0$, par ω_r l'image canonique de I_r dans ω . Nous allons voir que B est isomorphe à $k[[\omega]]/((x^{p^r}))_{x \in \omega_r}$ chaque fois qu'il existe une section $\sigma : \omega \rightarrow I$ de la projection canonique de I sur $I/\overline{I^2}$, telle que $\sigma(\omega_r) \subset I_r$ pour tout r : une telle section se prolonge en effet en un homomorphisme continu $t : k[[\omega]] \rightarrow B$, qui se factorise à travers $B' = k[[\omega]]/((x^{p^r}))_{x \in \omega_r}$. Nous prouvons de 5.2.2 à 5.2.5 que l'homomorphisme $s : B' \rightarrow B$, qui est induit par t , est bijectif.

Ce qui précède s'applique en particulier quand la *filtration* de ω est *stationnaire*, c'est-à-dire quand il existe un entier n_0 tel que $\omega_n = \omega_{n_0}$ pour $n_0 \leq n < +\infty$. Dans ce cas là en effet, on peut construire σ d'abord sur ω_1 , puis sur un supplémentaire ω'_2 de ω_1 dans ω_2 , puis sur un supplémentaire ω'_3 de ω_2 dans $\omega_3 \dots$, enfin sur un supplémentaire ω'_∞ de ω_{n_0} dans ω . Il est clair qu'on obtient ainsi un isomorphisme de $k[[\omega]]/((x^p))_{x \in \omega_r}$ sur le produit tensoriel complété des algèbres $k[[\omega_1]]/((x^p))_{x \in \omega_1}$, $k[[\omega'_2]]/((x^{p^2}))_{x \in \omega'_2}, \dots, k[[\omega'_{n_0}]]/((x^{p^{n_0}}))_{x \in \omega'_{n_0}}, k \omega'_\infty$.

La filtration de ω est évidemment stationnaire si $\omega_r = \omega$ pour r assez grand (cas (i)), ou bien si ω est de dimension finie (cas (ii)). L'énoncé ci-dessus implique donc notre théorème.

558 **5.2.2.** — *Supposons d'abord B de hauteur ≤ 1 , c'est-à-dire que $x^p = 0$ si $x \in I$. Il résulte alors de 5.1.4 que le gradué $\text{Gr}_I(B)$ associé à B par la filtration $I \supset \overline{I^2} \supset \overline{I^3} \dots$ est muni d'une structure de co-groupe de la catégorie GrAl/k . Si l'on pose $C = \prod_{n \geq 0} \text{Gr}_I(B)_n$, le morphisme structural de $\text{Gr}_I(B)$ dans $\text{Gr}_I(B) \hat{\otimes}_k \text{Gr}_I(B)$ induit un morphisme diagonal $\Delta_C : C \rightarrow C \hat{\otimes}_k C$ qui fait de C l'algèbre affine d'un groupe formel K sur k. Il est clair qu'on a $\omega_{K/k} = I/\overline{I^2}$ et que K est radiciel de hauteur ≤ 1 . D'après 4.4, l'application identique de $\omega_{K/k}$ induit donc un isomorphisme de $k[[\omega_{K/k}]]/((x^p))_{x \in \omega_{K/k}}$ sur C. Ceci implique en particulier que l'application s de 5.2.1 induit un isomorphisme sur les gradués associés à B' et B lorsqu'on filtre B' et B par les puissances des idéaux maximaux. Donc s est un isomorphisme (C.A. V, § 7, lemme 1).*

5.2.3. — *Supposons maintenant B de hauteur finie $\leq r$: soit π l'isomorphisme $x \mapsto x^p$ de k sur k. L'application linéaire de $B \hat{\otimes}_\pi k$ dans B qui envoie $b \hat{\otimes}_\pi x$ sur $b^p x = (bx^{\frac{1}{p}})^p$ a une image fermée qui n'est autre que la sous-algèbre fermée $B^p = \{b^p \mid b \in B\}$ de B. D'après la proposition 5.1, si l'on pose $J = B^p \cap I = A \cap I_A$, B^p est l'algèbre affine du quotient à gauche de G par un sous-groupe H d'algèbre affine $A/\overline{A}J$. Comme A est topologiquement libre sur B (1.4), B est un facteur direct du B-module pseudocompact A (1.3.2), de sorte qu'on peut identifier $B = B/\overline{B}J$ à une sous-algèbre fermée de $A/\overline{A}J$.*

559 D'après la proposition 5.1, B_1 est l'algèbre affine d'un espace homogène de H et est de hauteur ≤ 1 . D'après 5.2.2, l'homomorphisme s de 5.2.1 induit donc un isomorphisme de B'_1 sur B_1 . Si nous notons I' l'idéal maximal de B', B'^p la sous-algèbre $\{x^p \mid x \in B'\}$ de B' et J' l'idéal maximal de B'^p , cela signifie que l'homomorphisme $s : B' \rightarrow B$ de 5.2.1 induit un isomorphisme de $B'/\overline{B'}J'$ sur $B/\overline{B}J$. Or, comme A est topologiquement libre sur B et sur B^p (5.1 et 1.4), B est topologiquement libre sur B^p (1.3.3) ; d'après 0.3.4, s est donc un isomorphisme si l'homomorphisme $s^p : B'^p \rightarrow B^p$, qui est induit par s, est un isomorphisme. Ceci est prouvé en 5.2.4 ci-dessous.

5.2.4. — Pour tout espace vectoriel linéairement compact V sur k, nous notons ${}_\pi V$ l'espace $V \hat{\otimes}_\pi k$ déduit de V par l'extension $x \mapsto x^p$ du corps des scalaires. On a alors

un diagramme commutatif exact

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \pi \overline{I^2} & \xrightarrow{\alpha} & \pi I & \xrightarrow{\beta} & \pi \omega \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w \\ 0 & \longrightarrow & \overline{J^2} & \xrightarrow{\gamma} & J & \xrightarrow{\delta} & \overline{\omega} \longrightarrow 0 \end{array},$$

où l'on a posé $\overline{\omega} = J/\overline{J^2}$ et où les applications u, v, w sont induites par l'application linéaire $x \otimes a \mapsto x^p a$ de πB dans B^p . Si l'on pose $J_n = \{x \in J \mid x^{p^n} = 0\}$ et $\overline{\omega}_n = \delta(I_n)$, il est clair qu'on a $J_n = v(\pi I_{n+1})$ et $\overline{\omega}_n = w(\omega_{n+1})$. De plus, comme u et v sont des surjections, w est une surjection et a pour noyau l'image ω_0 du noyau de v . La section $\pi \sigma : \pi \omega \rightarrow \pi I$, qui est induite par la section σ de 5.2.1, définit donc par passage au quotient une section $\tau : \overline{\omega} \rightarrow J$ qui est compatible avec les filtrations de J et $\overline{\omega}$. Par hypothèse de récurrence, cette section induit un isomorphisme s' de $B'' = k[[\overline{\omega}]]/((X^{p^r}))_{x \in \tau(\overline{\omega})}$ sur B^p . Comme B'' s'identifie manifestement à B^p et s' à s^p , 560
notre théorème est donc démontré quand B est de hauteur finie.

5.2.5. — Il reste à considérer le cas où B est de hauteur infinie, et où la projection canonique de I sur ω possède une section compatible avec les filtrations de ω et I . Il suffit de montrer que pour tout r , l'application $s_r : B'_r \rightarrow B_r$ induite par s est inversible. Or B est un facteur direct du B -module pseudocompact A (1.3.2). Si l'on pose $L = ((x^{p^r}))_{x \in \tau(B)}$, on peut donc identifier $B/\overline{BL}$ à une sous-algèbre fermée de $A/\overline{AL}$; la proposition 5.1 montre que $A/\overline{AL}$ est l'algèbre affine d'un sous-groupe formel G_r de G et que $B/\overline{BL}$ est l'algèbre affine d'un espace homogène de G_r .

Posons $M = I/\overline{BL}$; la projection canonique de B sur B_r induit évidemment un isomorphisme de $\omega = I/\overline{I^2}$ sur $M/\overline{M^2}$, qui nous permet d'identifier ces deux espaces. Soit alors ω_n^r l'image dans ω de l'ensemble $M_n = \{x \in M \mid x^{p^n} = 0\}$; soit I_n^r l'image réciproque de M_n dans I . La suite exacte

$$0 \longrightarrow I_n^r \cap \overline{I^2} \longrightarrow I_n^r \longrightarrow \omega_n^r \longrightarrow 0$$

et l'égalité $I_n = \bigcap_r I_n^r$ montrent, par passage à la limite projective, que ω_n est l'intersection des ω_n^r (AB5*, 0.2). Or, comme le théorème 5.2 est déjà prouvé pour les algèbres de hauteur finie, donc pour les B_r , on a $\omega_n^r = \omega_n^{r+1}$ si $n < r$ et $\omega_n^r = \omega$ si $n \geq r$. Il s'ensuit qu'on a $\omega_n^r = \omega_n$ si $n < r$ et $\omega^r = \omega$ si $n \geq r$.

Autrement dit, l'espace vectoriel ω filtré par les sous-espaces ω_n^r n'est autre que ${}_r\omega$ (5.2). A fortiori, l'application σ^r composée de $\sigma : \omega \rightarrow I$ et de la projection canonique de I sur M est compatible avec les filtrations (ω_n^r) et (M_n) de ω et M . Comme $k[[{}_r\omega]]/((x^{p^n}))_{x \in {}_r\omega_n}$ n'est autre que B'_r et que $s_r : B'_r \rightarrow B_r$ est l'homomorphisme induit par σ^r , 5.2.4 montre que s_r est un isomorphisme, cqfd 561

5.3. Remarques. — Appelons *stationnaire* toute algèbre profinie sur k qui est le produit tensoriel complété d'une famille d'algèbres de séries formelles tronquées. Si G est un groupe formel infinitésimal sur k et B l'algèbre affine d'un espace homogène de G , il résulte du théorème 5.2 que l'algèbre $B/((x^{p^r}))_{x \in \tau(B)}$ est stationnaire pour tout

entier $r \in \mathbb{N}$. Cela implique en particulier que B est une limite projective d'algèbres stationnaires.

Je ne sais pas si, avec les notations de 5.2.1, on peut choisir G et B de telle façon qu'il n'existe pas de section $\sigma : \omega \rightarrow I$ compatible avec les filtrations. On remarquera cependant qu'on peut avoir pour ω n'importe quel espace vectoriel linéairement compact filtré par une suite croissante de sous-espaces fermés. Si $\omega_1 \subset \omega_2 \subset \dots \subset \omega$ est un tel espace filtré, on peut en effet définir dans l'algèbre $A = k[[\omega]]/((x^{p^r})_{x \in \omega_r})$ un morphisme diagonal $\Delta_A : A \rightarrow A \hat{\otimes}_k A$ vérifiant les conditions (i), (ii), (iii) de 2.1 ; il suffit de poser $\Delta_A y = y \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} y$ lorsque y est l'image dans A d'un élément de ω .

562 5.4. Corollaire. — Soient G un groupe algébrique sur un corps parfait k de caractéristique $p > 0$, H un sous-groupe algébrique de G , e l'image de l'élément neutre de G dans $H \backslash G$ et A l'algèbre locale de $H \backslash G$ en e . Alors $\hat{A}$ est isomorphe à une algèbre de la forme

$$k[[X_1, \dots, X_r, \dots, X_s]]/(X_1^{p^{n_1}}, \dots, X_r^{p^{n_r}}).$$

Ceci résulte de 5.2 (ii) et 1.3.4.