EXPOSÉ XIX

GROUPES RÉDUCTIFS - GÉNÉRALITÉS

par M. Demazure

La suite de ce Séminaire est consacrée à l'étude des groupes réductifs. Le but principal en est la généralisation des résultats classiques de CHEVALLEY (BIBLE et TOHOKU) aux schémas de base arbitraires, les deux résultats centraux étant le théorème d'unicité (Exp. XXIII) et le théorème d'existence (Exp. XXV) des schémas en groupes réductifs « épinglés » correspondant à des « données radicielles » prescrites. Les démonstrations employées sont inspirées de celles de Chevalley, la technique des schémas permettant de leur donner une efficacité accrue. 1

Les résultats du premier volume de la *BIBLE* (Exp. 1 à 13) seront systématiquement utilisés. En revanche, nous démontrerons directement sur un préschéma quelconque les résultats du second volume (théorème d'isomorphisme en particulier) ; la connaissance des démonstrations sur un corps algébriquement clos n'est donc pas absolument indispensable.

Dans la démonstration de ces deux résultats fondamentaux, nous n'utiliserons que les résultats les plus élémentaires de la théorie des groupes de type multiplicatif, contenus pour l'essentiel dans Exp. VIII et IX ; nous ferons d'autre part un usage essentiel des résultats de l'Exposé XVIII . Le lecteur s'intéressant spécialement aux théorèmes d'existence et d'unicité pourra dans une première lecture sauter les Exposés X à XVII.

1. Rappels sur les groupes sur un corps algébriquement clos

2

1.1. — *Dans ce numéro, k désignera toujours un corps algébriquement clos.* Comme annoncé ci-dessus, les seuls résultats de *BIBLE* utilisés par la suite, se trouvent dans le volume 1 (Exposés I à XIII). Tous les résultats de *BIBLE* (*loc. cit.*) concernant les groupes *semi-simples* sont valables plus généralement pour des groupes *réductifs* (définition ci-dessous) et leur démonstration est identique, avec les modifications anodines ci-après :

- 9-06, définition 3 (!), voir ci-dessous.
- 12-09, théorème 2, e) supprimer « fini ».
- 13-08, théorème 2, remplacer « rang » par « rang semi-simple ».

- 13-12, corollaire 2 au théorème 3, remplacer « rang » par « rang réductif ».

1.2. — Soit G un k-groupe lisse affine et connexe. Le *radical* de G (BIBLE, 9-06, prop. 2) est le sous-groupe réduit associé à la composante neutre de l'intersection des sous-groupes de Borel de G ; c'est aussi le plus grand sous-groupe résoluble lisse connexe invariant de G ; nous le noterons rad(G).

Le *radical unipotent* de G est la partie unipotente du radical de G ; c'est aussi le plus grand sous-groupe unipotent lisse connexe invariant de G ; nous le noterons $\mathrm{rad}^u(\mathrm{G})$.

1.3. — Si G est un k-groupe lisse affine et connexe et si Q est un tore de G, alors le centralisateur $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ de Q dans G est un sous-groupe fermé de G, lisse (Exp. XI, 2.4) et connexe (BIBLE, 6-14, th. 6 a)).

3 On a la relation fondamentale :

$$\mathrm{rad}^u(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})) = \mathrm{rad}^u(\mathrm{G}) \cap \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}).$$

En effet, on a, par BIBLE, 12-09, cor. au th. 1, la relation $\mathrm{rad}^u(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}))(k) \subset \mathrm{rad}^u(\mathrm{G})(k)$. Pour prouver l'égalité précédente, il suffit donc de voir que $\mathrm{rad}^u(\mathrm{G}) \cap \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ est lisse et connexe. Si on fait opérer Q sur $\mathrm{rad}^u(\mathrm{G})$ par automorphismes intérieurs, le groupe précédent n'est autre que le schéma des invariants de cette opération. Or :

Lemme 1.4. — *Soient* S *un préschéma,* Q *un* S*-tore,* H *un* S*-préschéma en groupes sur lequel* Q *opère. Supposons* H *séparé sur* S *de façon que le foncteur des invariants* H^{Q} *soit représentable* (Exp. VIII, 6.5 d)). *Si* H *est lisse sur* S (*resp. lisse, affine, et à fibres connexes sur* S)*,* H^{Q} *l'est aussi.*

Considérons en effet le produit semi-direct $\mathrm{G} = \mathrm{H} \cdot \mathrm{Q}$. Il est lisse sur S (resp. lisse, affine et à fibres connexes sur S). On a évidemment $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}) = \mathrm{H}^{\mathrm{Q}} \cdot \mathrm{Q}$ et celui-ci est lisse sur S (Exp. XI, 2.4) (resp. lisse et affine sur S, et à fibres connexes (1.3)). Comme Q est lisse, affine et à fibres connexes sur S, on a terminé.

Signalons un cas particulier du résultat précédent : si G est un k-groupe lisse affine et connexe et si T est un tore maximal de G,

$$\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \mathrm{T} \cdot (\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) \cap \mathrm{rad}^u(\mathrm{G})).$$

En effet (BIBLE, 6-14, th. 6 c)), $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ est un groupe résoluble, donc produit semi-direct de son tore maximal T et de son radical unipotent.

4 En vertu du théorème de densité (BIBLE, 6-13, th. 5), il en résulte que si G est un k-groupe lisse affine et connexe, la réunion des $\mathrm{T} \cdot \mathrm{rad}^u(\mathrm{G})$, T parcourant l'ensemble des tores maximaux de G, est *dense* dans G.

1.5. — On rappelle que le *rang réductif* du k-groupe lisse et affine G est la dimension commune des tores maximaux de G. Nous le noterons $\mathrm{rgred}(G/k)$ ou $\mathrm{rgred}(G)$. Pour que $\mathrm{rgred}(G/k) = 0$, il faut et il suffit que G soit *unipotent* (i.e. que $G = \mathrm{rad}^u(G)$), par BIBLE, 6-10, cor. 1 au th. 4.

Si H est un sous-groupe invariant du k-groupe lisse et affine G, le quotient G/H est affine et lisse (Exp. VI). De plus (BIBLE, 7-05, th. 3, a) et c)), on a

$$\mathrm{rgred}(G) = \mathrm{rgred}(G/H) + \mathrm{rgred}(H).$$

1.6. — On dit que le k-groupe lisse, affine et connexe G est *réductif* si $\mathrm{rad}(G)$ est un tore, c'est-à-dire si $\mathrm{rad}^u(G) = e$. Si G est un k-groupe réductif et si Q est un tore de G, alors $\underline{\mathrm{Centr}}_G(Q)$ est réductif (1.3). En particulier, si T est un tore maximal de G, $\underline{\mathrm{Centr}}_G(T) = T$. Il en résulte que le centre de G est contenu dans tout tore maximal, donc est diagonalisable. Le radical de G est alors le tore maximal (unique) de $\underline{\mathrm{Centr}}(G)$: en effet, celui-ci est un sous-groupe lisse invariant résoluble connexe, donc contenu dans $\mathrm{rad}(G)$; réciproquement $\mathrm{rad}(G)$ est un tore invariant dans G, donc central (BIBLE, 4-07, cor. à la prop. 2).

Si G est réductif et si $\dim(G) \neq \mathrm{rgred}(G)$, alors $\dim(G) - \mathrm{rgred}(G) \geqslant 2$. En effet, 5
cette différence est toujours paire (cf. 1.10 ci-dessous).

1.7. — Soient G un k-groupe lisse affine et connexe et H un sous-groupe lisse et connexe invariant. Alors $\mathrm{rad}(H) = (\mathrm{rad}(G) \cap H)^0_{\text{réd}}$ et $\mathrm{rad}^u(H) = (\mathrm{rad}^u(G) \cap H)^0_{\text{réd}}$,comme on le voit aussitôt. En particulier, si G est réductif, H l'est aussi.

Soit $f : G \to G'$ un morphisme surjectif de k-groupes lisses affines et connexes. Alors $f(\mathrm{rad}^u(G)) = \mathrm{rad}^u(G')$.

Il est d'abord clair que f envoie $\mathrm{rad}^u(G)$ dans $\mathrm{rad}^u(G')$. Introduisant $H = (f^{-1}(\mathrm{rad}^u(G')))^0_{\text{réd}} \supset \mathrm{rad}^u(G)$, on a $\mathrm{rad}^u(H) = \mathrm{rad}^u(G)$ et on est ramené au cas où $G = H$, i.e. où G' est unipotent. Comme la réunion des $T \cdot \mathrm{rad}^u(G)$ (T parcourant l'ensemble des tores maximaux de G) est dense dans G, la réunion des $f(T)f(\mathrm{rad}^u(G))$ est dense dans G' ; mais $f(T)$ est composé d'éléments semi-simples, donc $f(T) = e$, G' étant unipotent ; ce qui montre que $f(\mathrm{rad}^u(G))$ est dense dans G', donc $f(\mathrm{rad}^u(G)) = G'$ (cf. BIBLE, 5-13, lemme 4). En particulier, tout *quotient* d'un groupe *réductif* est *réductif.*

(*Nota*, on peut prouver sous les mêmes hypothèses que $f(\mathrm{rad}(G)) = \mathrm{rad}(G')$).

1.8. — On dit que le k-groupe lisse affine et connexe G est *semi-simple* si $\mathrm{rad}(G) = e$, c'est-à-dire si G est réductif et $\underline{\mathrm{Centr}}(G)$ fini. Si G est un k-groupe lisse affine connexe quelconque, alors $G/\mathrm{rad}(G)$ est semi-simple (BIBLE, 9-06, prop. 2), $G/\mathrm{rad}^u(G)$ est réductif. On appelle *rang semi-simple* de G et on note $\mathrm{rgss}(G/k)$ ou $\mathrm{rgss}(G)$ le rang réductif de $G/\mathrm{rad}(G)$.

Si G est réductif, on a donc 6

$$\mathrm{rgred}(G) = \mathrm{rgss}(G) + \dim(\mathrm{rad}(G)).$$

Si G est un groupe lisse affine et connexe et si Q est un sous-tore central de G, alors G/Q est semi-simple si et seulement si G est réductif et $Q = \mathrm{rad}(G)$. En effet, si

G/Q est semi-simple, Q $\supset$ rad(G), donc rad(G) est un tore, donc G est réductif, donc rad(G) est le tore maximal de $\underline{\mathrm{Centr}}$(G), donc rad(G) = Q. Si G est réductif et si Q est un sous-groupe central alors (G/Q est réductif et) rgss(G) = rgss(G/Q).

1.9. — Si K est une extension algébriquement close de k et si G est un k-groupe affine lisse connexe, G est réductif (resp. semi-simple) si et seulement si $\mathrm{G_K}$ l'est et on a

$$\mathrm{rgred}(\mathrm{G}/k) = \mathrm{rgred}(\mathrm{G_K}/\mathrm{K}),$$
$$\mathrm{rgss}(\mathrm{G}/k) = \mathrm{rgss}(\mathrm{G_K}/\mathrm{K}).$$

1.10. — Soit G un k-groupe lisse et connexe et soit T un tore de G. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de Gse décompose sous l'action de T (par T $\to$ G et l'opération adjointe de G) en

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \bigoplus \coprod_{\alpha\in\mathrm{R}} \mathfrak{g}^\alpha,$$

7 où les $\alpha \in \mathrm{R}$ sont des caractères non triviaux de T et où les $\mathfrak{g}^\alpha$ sont $\neq 0$. Les caractères $\alpha \in \mathrm{R}$ sont dits les *racines* de G par rapport à T. Par Exp. II, 5.2.3, (i), on a

$$\mathfrak{g}^0 = \mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})).$$

En particulier, T est son propre centralisateur si et seulement si $\mathfrak{g}^0 = \mathrm{Lie}(\mathrm{T})$, (Exp. XII 6.6 b), ou 1.3 dans le cas où G est affine). Cette condition entraîne que T est maximal et que $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G}) \subset \mathrm{T}$, donc (Exp. XII 8.8 d)) $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G}) = \bigcap_{\alpha\in\mathrm{R}} \mathrm{Ker}(\alpha)$; de plus $\underline{\mathrm{Centr}}$(G) est alors affine, donc G $\to$ G/ $\underline{\mathrm{Centr}}$(G) affine ; comme ce dernier groupe est affine(Exp. XII 6.1), G l'est aussi.

Lorsque G est réductif et T maximal, les racines au sens précédent coïncident avec les racines au sens de BIBLE, 12-04, déf. 1 ; ces dernières sont en effet des racines au sens de ce n°(BIBLE, 13-05, th. 1, c)) et il y en a dim(G) − dim(T) (BIBLE, 13-11, cor. 2 au th. 3). De plus, si α est une racine, $-\alpha$ en est aussi une (BIBLE, 12-05, cor. à la prop. 1). (Comme à l'habitude, on note indifféremment additivement ou multiplicativement la structure de groupe de $\mathrm{Hom}_{k\text{-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,k})$.) Il s'ensuit que

$$\dim(\mathrm{G}) - \mathrm{rgred}(\mathrm{G}) = \mathrm{Card}(\mathrm{R})$$

est toujours pair.

Le rang semi-simple du groupe réductif G est le rang de la partie R du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{k\text{-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,k}) \otimes \mathbb{Q}$ (BIBLE, 13-08, th. 2).

Lemme 1.11. — *Soient k un corps algébriquement clos,* G *un k-groupe lisse affine connexe,* T *un tore de* G*,* $\mathrm{W(T)} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})/\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ *le* groupe de Weyl *de* G *par rapport à* T*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

8 (i) G *est réductif,* T *est maximal,* rgss(G) = 1.

(ii) G *est réductif,* T *est maximal,* G $\neq$ T *; il existe un sous-tore* Q *de* T*, de codimension* 1 *dans* T*, central dans* G.

(iii) G *n'est pas résoluble et* dim(G) − dim(T) $\leqslant 2$.

(iv) W(T) $\neq e$ *et* dim(G) − dim(T) $\leqslant 2$.

(v) $\mathrm{W(T)} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_k$ *et* dim(G) − dim(T) = 2.

De plus, sous ces conditions, il y a exactement deux racines de G *par rapport à* T *; elles sont opposées. Sous les conditions de* (ii), $\mathrm{Q} = \mathrm{rad}(\mathrm{G})$.

On a évidemment (v) ⇒ (iv). On a (iv) ⇒ (iii) par BIBLE, 6-04, cor. 3 au th. 1. Prouvons (iii) ⇒ (ii) : soit U le radical unipotent de G ; on sait que G/U est réductif et n'est pas un tore (sinon G serait résoluble) ; on a donc (1.6)

$$\dim(\mathrm{G}/\mathrm{U}) - \mathrm{rgred}(\mathrm{G}/\mathrm{U}) \geqslant 2;$$

mais

$$\mathrm{rgred}(\mathrm{G}) = \mathrm{rgred}(\mathrm{G}/\mathrm{U}) + \mathrm{rgred}(\mathrm{U}) = \mathrm{rgred}(\mathrm{G}/\mathrm{U}),$$

d'où

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{G}) - \dim(\mathrm{U}) - \mathrm{rgred}(\mathrm{G}) &= \dim(\mathrm{G}/\mathrm{U}) - \mathrm{rgred}(\mathrm{G}/\mathrm{U})\\ &\geqslant 2 \geqslant \dim(\mathrm{G}) - \dim(\mathrm{T}) \geqslant \dim(\mathrm{G}) - \mathrm{rgred}(\mathrm{G}).\end{aligned}$$

Cela donne $\dim(\mathrm{U}) = 0$, donc G est réductif, $\mathrm{rgred}(\mathrm{G}) = \dim(\mathrm{T})$, donc T est maximal, $\dim(\mathrm{G}) - \dim(\mathrm{T}) = 2$. Par BIBLE, 10-09, prop. 8, il existe un tore singulier Q de codimension 1 dans T ; alors $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ est réductif (1.6), non résoluble (définition d'un tore singulier), donc $\dim(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})) - \mathrm{rgred}(\mathrm{G}) \geqslant 2$, ce qui prouve que $\mathrm{G} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ et Q est central dans G.

Prouvons (ii) ⇒ (i). On sait que G/Q est réductif (1.7) et que $\mathrm{rgred}(\mathrm{G}/\mathrm{Q}) = 1$ donc
$\mathrm{rgss}(\mathrm{G}/\mathrm{Q}) = 0$ ou 1. Le premier cas est impossible, car il entraînerait $\mathrm{rgss}(\mathrm{G}) = 0$,
donc G = T ; on a donc $\mathrm{rgred}(\mathrm{G}/\mathrm{Q}) = \mathrm{rgss}(\mathrm{G}/\mathrm{Q}) = 1$, ce qui prouve que G/Q est 9
semi-simple ; donc Q est le radical de G et $\mathrm{rgss}(\mathrm{G}) = 1$.

Prouvons enfin (i) ⇒ (v). Si Q est le radical de G, on a $\dim(\mathrm{T}) - \dim(\mathrm{Q}) = 1$ et Q est central dans G, donc $\mathrm{G} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$, ce qui prouve que Q est un tore singulier ; par BIBLE, 11-07, th. 2, on a $\mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_k$; par BIBLE, 12-01, lemme 1, on a $\dim(\mathrm{G}) - \dim(\mathrm{T}) = 2$. Il y a donc au plus deux racines de G par rapport à T, or il y en a au moins deux, opposées (1.10).

Proposition 1.12. — *Soient k un corps algébriquement clos,* G *un k-groupe lisse et connexe,* T *un tore de* G, R *l'ensemble des racines de* G *par rapport à* T *et*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \bigoplus \coprod_{\alpha\in\mathrm{R}} \mathfrak{g}^\alpha, \qquad \textit{avec } \mathfrak{g}^\alpha \neq 0,$$

la décomposition de $\mathfrak{g}$ *sous* Ad(T). *Pour chaque* $\alpha \in \mathrm{R}$, *soit* T_α *le tore maximal de* $\mathrm{Ker}(\alpha)$ *et* $\mathrm{Z}_\alpha = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_\alpha)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est affine, réductif ;* T *est maximal.*

(ii) $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{t}$, *chaque* Z_α $(\alpha \in \mathrm{R})$ *est réductif.*

(iii) $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{t}$, *chaque* $\mathfrak{g}^\alpha$ $(\alpha = \mathrm{R})$ *est de dimension* 1 *; et si* $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ *et* $k \in \mathbb{Q}$ *sont tels que* $\beta = k\,\alpha$, *alors* $k = \pm 1$ *; pour chaque* $\alpha \in \mathrm{R}$, *il existe un* $w_\alpha \in \mathrm{G}(k)$ *qui normalise* T, *centralise* T_α, *mais ne centralise pas* T.

De plus, sous ces conditions, chaque Z_α *est de rang semi-simple* 1 *et on a* $\mathrm{Lie}(\mathrm{Z}_\alpha) = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}$.

Si G est affine et réductif et si T est maximal, chaque Z_α est affine et réductif (1.6), de tore maximal T ; de plus, T est son propre centralisateur (1.6), donc $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{t}$, ce qui prouve (i) $\Rightarrow$ (ii).

10 D'autre part $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{t}$ entraîne que T est maximal et G affine (cf. 1.10) donc chaque Z_α affine (1.3). De toutes façons, on a par Exp. II, 5.2.2

$$\mathrm{Lie}(Z_\alpha) = \mathfrak{g}^{T_\alpha} = \mathfrak{g}^0 \bigoplus \coprod_{\beta \in R \cap \mathbb{Q}\alpha} \mathfrak{g}^\beta.$$

On a donc

$$\mathrm{Lie}(Z_\alpha) \supset \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha},$$

ce qui entraîne $Z_\alpha \neq T$; par 1.11, cela donne aussitôt (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) et les compléments.

Il reste à prouver (ii) $\Rightarrow$ (i) ; on sait déjà que (ii) entraîne que G est affine. Soit U son radical unipotent ; il est invariant dans G, son algèbre de Lie est invariante sous Ad(T). On a donc

$$\underline{\mathrm{Lie}}(U) = \underline{\mathrm{Lie}}(U) \cap \mathfrak{g}^0 + \coprod_{\alpha \in R} \underline{\mathrm{Lie}}(U) \cap \mathfrak{g}^\alpha.$$

Par 1.3, on a

$$U \cap T = U \cap \underline{\mathrm{Centr}}_G(T) = \mathrm{rad}^u(\underline{\mathrm{Centr}}_G(T)) = \mathrm{rad}^u(T) = e,$$

$$U \cap Z_\alpha = U \cap \underline{\mathrm{Centr}}_G(T_\alpha) = \mathrm{rad}^u(\underline{\mathrm{Centr}}_G(T_\alpha)) = \mathrm{rad}^u(Z_\alpha) = e.$$

On a donc

$$\mathrm{Lie}(U) \cap \mathfrak{g}^0 = \mathrm{Lie}(U) \cap \mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(U \cap T) = 0\,,$$

$$\mathrm{Lie}(U) \cap \mathfrak{g}^\alpha \subset \mathrm{Lie}(U) \cap \mathrm{Lie}(Z_\alpha) = \mathrm{Lie}(U \cap Z_\alpha) = 0\,;$$

donc $\mathrm{Lie}(U) = 0$ et $U = \{e\}$.

Corollaire 1.13. — *Soient k un corps algébriquement clos,* G *un k-groupe lisse et connexe,* T *un tore de* G, R *l'ensemble des racines de* G *par rapport à* T *et*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \bigoplus \coprod_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^\alpha$$

11 *comme ci-dessus. Pour chaque $\alpha \in R$, soit T_α le tore maximal de $\mathrm{Ker}(\alpha)$ et $Z_\alpha = \underline{\mathrm{Centr}}_G(T_\alpha)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est affine, semi-simple ;* T *est maximal.*

(ii) $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{t}$, *chaque Z_α est réductif et $\bigcap_{\alpha \in R} \mathrm{Ker}(\alpha)$ est fini.*

2. Schémas en groupes réductifs. Définitions et premières propriétés

2.1. — Si G est un préschéma en groupes sur S, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) G est affine et lisse sur S, et à fibres connexes.

(ii) G est affine et plat sur S, de présentation finie sur S, et à fibres géométriques intègres.

Ces propriétés sont stables par changement de base et locales pour (fpqc).

2.2. — Si le S-préschéma en groupes G vérifie les conditions précédentes, et si Q est un tore (Exp. IX, 1.3) de G, alors $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ est représentable par un sous-préschéma en groupes fermé de G qui vérifie également ces conditions (1.3 et Exp. XI, 6.11).

Nous utiliserons systématiquement la notation suivante : si S est un préschéma et s un point de S, on notera $\overline{s}$ le spectre d'une clôture algébrique $\overline{k(s)}$ de $k(s)$.

Lemme 2.3. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse et affine sur* S*, à fibres connexes,* T *un tore de* G*. L'ensemble des* $s \in \mathrm{S}$ *tels que* $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ *soit un* $\overline{s}$*-groupe réductif, de rang semi-simple* 1 *et de tore maximal* $\mathrm{T}_{\overline{s}}$*, est un ouvert* U *de* S. 12

Comme G et T sont plats sur S, la fonction

$$s \longmapsto \dim(\mathrm{G}_{\overline{s}}/\overline{s}) - \dim(\mathrm{T}_{\overline{s}}/\overline{s})$$

est localement constante ; soit U_1 l'ouvert des points de S où elle vaut 2. Considérons maintenant le groupe de Weyl (6.3)

$$\mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) / \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}),$$

La fonction

$$s \longmapsto \text{ nombre de points de } \mathrm{W}(\mathrm{T})_{\overline{s}}$$

est semi-continue inférieurement (6.3 (ii)). Soit U_2 l'ensemble des points de S où cette fonction est > 1 ; c'est un ouvert. Il résulte de 1.11 que l'ensemble des s tels que $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ soit réductif, de rang semi-simple 1, de tore maximal $\mathrm{T}_{\overline{s}}$, est $\mathrm{U} = \mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2$.

Remarque 2.4. — *Le groupe* $\mathrm{W}(\mathrm{T})_{\mathrm{U}}$ *est isomorphe à* $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\mathrm{U}}$. Il est en effet *étale* et *fini* sur U (6.3 (iii)) ; comme le foncteur des automorphismes de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\mathrm{U}}$ est le groupe unité, il suffit de vérifier l'assertion localement, or elle est immédiate si l'Algèbre qui définit $\mathrm{W}(\mathrm{T})_{\mathrm{U}}$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{U}}$-Module libre.

Théorème 2.5. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes* affine et de présentation finie *sur* S*,* à fibres connexes*, et* s_0 *un point de* S*. Supposons* G plat *sur* S *en* $e_{\mathrm{G}}(s_0)$ *et la fibre géométrique* $\mathrm{G}_{\overline{s_0}}$ (*réduite et*) réductive (*resp. semi-simple*)*. Il existe un ouvert* U *de* S*, contenant* s_0 *et un morphisme étale surjectif* $\mathrm{S}' \to \mathrm{U}$ *tels que :* 13

(i) G_{U} *soit lisse sur* S*, à fibres géométriques réductives* (*resp. semi-simples*)*, de rang réductif et de rang semi-simple constants.*

(ii) $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ *possède un tore maximal* T*, le groupe de Weyl* (cf. 6.3)

$$\mathrm{W}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{T}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{T}) / \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{T}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{T})/\mathrm{T}$$

étant fini *sur* S'.

Comme G est plat sur S en $e_{\mathrm{G}}(s_0)$ et $\mathrm{G}_{\overline{s}_0}$ réduit, G est lisse sur S en $e_{\mathrm{G}}(s_0)$. Comme G est à fibres connexes, on peut quitte à restreindre S, supposer G lisse sur S ($\mathrm{VI_B}$ 3.10). Par Exp. XI, 5.8 a) et Exp. X, 4.5 (voir aussi 6.1), il existe un $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}$ étale, un point s''_0 au-dessus de s_0 et un tore trivial T de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}''}$, maximal en s''_0. Comme un morphisme étale est ouvert et que les assertions de (i) sont locales pour (ét.), on peut donc supposer que G possède un tore trivial T, maximal en s_0. Ecrivons donc $\mathrm{T} = \mathrm{D_S(M)}$ et soit

$$\mathfrak{g} = \coprod_{m\in \mathrm{M}} \mathfrak{g}^m,$$

la décomposition de $\mathfrak{g} = \mathscr{L}ie(\mathrm{G/S})$ sous Ad(T) (Exp. I, 4.7.3).

Soit R l'ensemble des $m \in \mathrm{M}$, $m \neq 0$, tels que $\mathfrak{g}^m(s_0) \neq 0$. Comme $\mathrm{G}_{\overline{s}_0}$ est réductif, on a $\mathfrak{g}^0(s_0) = \mathfrak{t}(s_0)$ (on note $\mathfrak{t} = \mathscr{L}ie(\mathrm{T/S})$), donc

$$\mathfrak{g}(s_0) = \mathfrak{t}(s_0) \bigoplus \coprod_{\alpha\in\mathrm{R}} \mathfrak{g}^\alpha(s_0).$$

14 Comme les Modules en cause sont localement libres, on peut, quitte à restreindre S, supposer les $\mathfrak{g}^\alpha$ libres et

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \bigoplus \coprod_{\alpha\in\mathrm{R}} \mathfrak{g}^\alpha.$$

Soit alors T_α le tore maximal du noyau de α (on rappelle, cf. Exp. XII 1.12, qu'un groupe de type multiplicatif possède un unique tore maximal ; c'est d'ailleurs à peu près trivial par descente, le cas diagonalisable étant évident). Soit $\mathrm{Z}_\alpha = \underline{\mathrm{Centr}}_\mathrm{G}(\mathrm{T}_\alpha)$; le groupe Z_α vérifie les hypothèses de 2.3, sa fibre $(\mathrm{Z}_\alpha)_{\overline{s}_0}$ est réductive, de rang semi-simple 1, de tore maximal $\mathrm{T}_{\overline{s}_0}$ (1.12). Par 2.3, il existe donc un ouvert U_α de S, contenant s_0, tel que $\mathrm{Z}_\alpha|\mathrm{U}_\alpha$ ait ses fibres réductives. Posons $\mathrm{U} = \bigcap_{\alpha\in\mathrm{R}} \mathrm{U}_\alpha$; par 1.12, $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ est réductif, de tore maximal $\mathrm{T}_{\overline{s}}$, pour $s \in \mathrm{U}$. Pour tout $s \in \mathrm{U}$, l'ensemble des racines de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ par rapport à $\mathrm{T}_{\overline{s}}$ s'identifie à R, on a donc $\mathrm{rgred}(\mathrm{G}_{\overline{s}}) = \mathrm{rg(M)}$, $\mathrm{rgss}(\mathrm{G}_{\overline{s}}) = \mathrm{rg(R)}$ (cf. 1.10). On a donc prouvé (i) et la première assertion de (ii) ; reste à prouver que le groupe de Weyl $\mathrm{W}_{\mathrm{G_U}}(\mathrm{T_U})$ est *fini* sur U, i.e. (6.3) « qu'il a le même nombre de points dans chaque fibre géométrique » ; pour cela, il suffit de remarquer que la fibre géométrique de ce groupe en $s \in \mathrm{U}$ est déterminée par la situation $\mathrm{R} \subset \mathrm{M}$, comme groupe constant associé au « groupe de Weyl abstrait de ce système de racines », et en particulier est indépendante du point s, cf. BIBLE, 11-07, th. 2 (voir aussi Exp. XXII, n°3).

Corollaire 2.6. — *Soit* G *un* S-*groupe* affine et lisse *sur* S*, à* fibres connexes*. L'en-*
15 *semble des points $s \in \mathrm{G}$ tels que $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ soit réductif (resp. semi-simple) est un ouvert* U *de* S *et les fonctions*

$$s \longmapsto \mathrm{rgred}(\mathrm{G}_{\overline{s}}/\overline{s})$$
$$s \longmapsto \mathrm{rgss}(\mathrm{G}_{\overline{s}}/\overline{s})$$

sont localement constantes sur U*.*

Définition 2.7. — Un S-groupe (= S-préschéma en groupes) G est dit *réductif* (resp. *semi-simple*) s'il est *affine et lisse* sur S, à fibres géométriques *connexes*, et *réductives* (resp. *semi-simples*).

Le fait d'être réductif (resp. semi-simple) pour un S-groupe G est stable par changement de base et *local* pour la topologie (fpqc).

2.8. — Soit G un S-groupe réductif. Pour tout tore (resp. tore maximal) Q de G, $\mathrm{Z(Q)} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ est réductif (resp. est Q). Cela résulte aussitôt de 2.2 et 1.6. Appliquant 2.5 à $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ on en déduit que Q est contenu (localement pour la topologie étale) dans un tore maximal.

Remarque 2.9. — Utilisant comme d'habitude la technique de EGA IV_3, § 8, les hypothèses de présentation finie et le théorème 2.5, on voit que si G est un groupe réductif sur S, il existe un recouvrement ouvert de S, soit $\{\mathrm{U}_i\}$, tel que chaque $\mathrm{G}_{\mathrm{U}_i}$ provienne par changement de base d'un groupe réductif sur un anneau noethérien (en fait une algèbre de type fini sur $\mathbb{Z}$). De même, si G possède un tore maximal trivial T, on peut de plus supposer que $\mathrm{T}_{\mathrm{U}_i}$ provient d'un tore maximal trivial du groupe précédent, ...

3. Racines et systèmes de racines des schémas en groupes réductifs

16

3.1. — Soient S un préschéma, T un S-tore opérant linéairement (Exp. I) sur un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Module localement libre de type fini $\mathscr{F}$. Pour tout caractère α de T (c.-à-d., $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}})$), on définit un sous-foncteur de $\mathrm{W}(\mathscr{F})$ par

$$\mathrm{W}(\mathscr{F})^{\alpha}(\mathrm{S}') = \{x \in \mathrm{W}(\mathscr{F})(\mathrm{S}') \mid t\,x = \alpha(t)x \text{ pour tout } t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}''),\ \mathrm{S}'' \longrightarrow \mathrm{S}'\}.$$

Alors $\mathrm{W}(\mathscr{F})^{\alpha} = \mathrm{W}(\mathscr{F}^{\alpha})$, où $\mathscr{F}^{\alpha}$ est un sous-Module de $\mathscr{F}$, *localement facteur direct* dans $\mathscr{F}$, donc aussi localement libre.

En effet, l'assertion est locale pour la topologie (fpqc) et on peut supposer $\mathrm{T} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$, où M est un groupe abélien (libre) de type fini. Alors α s'identifie à une fonction localement constante de S dans M (Exp. VIII 1.3), et quitte à restreindre S, on peut supposer que cette fonction est constante. On est alors ramené à Exp. I, 4.7.3.

Définition 3.2. — Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes lisse et de présentation finie sur S, à fibres connexes, T un tore de G. On dit que le caractère α de T est une *racine* de G par rapport à T si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :

(i) Pour chaque $s \in \mathrm{S}$, $\alpha_{\overline{s}}$ est une racine de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ par rapport à $\mathrm{T}_{\overline{s}}$ (1.10).

(ii) α est non trivial sur chaque fibre et $\mathfrak{g}^{\alpha}(s) \neq 0$ pour chaque $s \in \mathrm{S}$.

(On note $\mathfrak{g} = \mathscr{L}ie(\mathrm{G/S})$ et on fait opérer T sur $\mathfrak{g}$ par l'intermédiaire de la représentation adjointe de G).

Lemme 3.3. — *Soient* S *un préschéma,* T *un* S*-tore,* α *un caractère de* T*. Les conditions suivantes sont équivalentes :* 17

(i) *α est non trivial sur chaque fibre, c'est-à-dire : pour tout $s \in \mathrm{S}$, $\alpha_{\overline{s}}$ est distinct du caractère unité de $\mathrm{T}_{\overline{s}}$.*

(ii) *Pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, $\mathrm{S}' \neq \varnothing$, $\alpha_{\mathrm{S}'}$ est distinct du caractère unité de $\mathrm{T}_{\mathrm{S}'}$.*

(iii) *Le morphisme α est fidèlement plat.*

On a (ii) $\Leftrightarrow$ (i) par Exp. IX 5.2, (iii) $\Rightarrow$ (i). Pour prouver (i) $\Rightarrow$ (iii), on se ramène au cas où T est diagonalisable et on conclut par Exp. VIII 3.2 a).

3.4. — Supposons, sous les conditions de 3.2, que G soit *réductif.* Alors $\mathfrak{g}^{\alpha}$ est localement libre de rang un (1.12). De plus, si α est une racine de G par rapport à T, $-\alpha$ en est aussi une (1.10). En particulier, si G est de rang semi-simple 1, on a par 1.11 :

Lemme 3.5. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif de rang semi-simple* 1*,* T *un tore maximal de* G*. Si α est une racine de* G *par rapport à* T*, alors $-\alpha$ en est aussi une et on a*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^{\alpha} \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha},$$

où $\mathfrak{g}^{\alpha}$ et $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ sont localement libres de rang 1*.*

Définition 3.6. — Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G, R un ensemble de racines de G par rapport à T. On dit que R est *un système de*
18 *racines* de G par rapport à T si les conditions *équivalentes* suivantes sont satisfaites :

(i) Pour chaque $s \in \mathrm{S}$, $\alpha \mapsto \alpha_{\overline{s}}$ est une bijection de R sur l'ensemble des racines de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ par rapport à $\mathrm{T}_{\overline{s}}$.

(ii) Les éléments de R sont distincts sur chaque fibre (i.e. si α, $\alpha' \in \mathrm{R}$, $\alpha \neq \alpha'$, alors $\alpha - \alpha'$ $(= \alpha\,\alpha'^{-1})$ est non trivial sur chaque fibre) et pour chaque $s \in \mathrm{S}$, on a

$$\dim(\mathrm{G}_s/k(s)) - \dim(\mathrm{T}_s/k(s)) = \mathrm{Card}(\mathrm{R}).$$

(iii) On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \coprod_{\alpha\in\mathrm{R}} \mathfrak{g}^{\alpha}$.

L'équivalence de ces diverses conditions est triviale.

Lemme 3.7. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif,* T *un tore maximal de* G*,* R *un système de racines de* G *par rapport à* T*. Toute racine de* G *par rapport à* T *est localement sur* S *égale à un élément de* R*.*

C'est visible sur la condition (iii).

Posons $\mathscr{M} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}})$; c'est un S-préschéma en groupes constant tordu (Exp. X 5.6). L'inclusion $\mathrm{R} \hookrightarrow \mathscr{M}(\mathrm{S})$ définit un morphisme $\mathrm{R_S} \to \mathscr{M}$, où $\mathrm{R_S}$ est le S-préschéma constant défini par R ; grâce à la condition (ii), on voit facilement que ce morphisme est une immersion ouverte et fermée dont l'image n'est autre que $\bigcup_{\alpha\in\mathrm{R}} \alpha(\mathrm{S})$ (chaque $\alpha \in \mathrm{R}$ étant considéré comme une section $\mathrm{S} \to \mathscr{M}$).

Soit $\mathcal{R}$ le *foncteur des racines* de G par rapport à T : par définition, $\mathcal{R}(\mathrm{S}')$ est l'ensemble des racines de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ par rapport à $\mathrm{T}_{\mathrm{S}'}$ pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$; si $\mathrm{S}' = \varnothing$, alors $\mathrm{M}(\mathrm{S}') = \mathcal{R}(\mathrm{S}') = \mathrm{Hom}_{\text{loc.const.}}(\mathrm{S}', \mathrm{R}) = e$; sinon $\mathrm{R} \to \mathrm{M}(\mathrm{S}')$ identifie R à un système
19 de racines de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ par rapport à $\mathrm{T}_{\mathrm{S}'}$, on a $\mathcal{R}(\mathrm{S}') = \mathrm{Hom}_{\text{loc.const.}}(\mathrm{S}', \mathrm{R})$, d'après 3.7 ; ce qui montre que $\mathcal{R}$ est représentable par $\mathrm{R_S}$. Si maintenant on ne suppose plus nécessairement que G possède un système de racines relativement à T, $\mathcal{R}$ est de toute façon un sous-faisceau de $\mathscr{M}$ pour (fpqc). Localement pour cette topologie, G possède un système de racines par rapport à T (prendre par exemple T trivial). Par Exp. IV 4.6.8 et la théorie de la descente des sous-préschémas ouverts (resp. fermés), on obtient

Proposition 3.8. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe,* T *un tore maximal de* G*. Le foncteur $\mathcal{R}$ des racines de* G *par rapport à* T *est représentable par un* S*-préschéma* fini constant tordu (Exp. X 5.1) *qui est un sous-préschéma ouvert et fermé de* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}})$*. Pour que* $\mathrm{R} \subset \mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}})$ *soit un système de racines* *de* G *par rapport à* T*, il faut et il suffit que le morphisme* $\mathrm{R_S} \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}})$ *défini par l'inclusion précédente induise un isomorphisme* $\mathrm{R_S} \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}$*.*

3.9. — Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G, α une racine de G par rapport à T (i.e. une section de $\mathcal{R}$). Considérons le noyau $\mathrm{Ker}(\alpha)$ de R, son unique tore maximal T_α et le centralisateur de ce dernier, $\mathrm{Z}_\alpha = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_\alpha)$. C'est un S-groupe fermé dans G, *réductif* (2.8) de *rang semi-simple* 1 (1.12). De plus $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Z}_\alpha/\mathrm{S}) = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}$ (1.12),donc $\{\alpha, -\alpha\}$ est un système de racines de Z_α par rapport à T.

3.10. — Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G, α une racine de G par rapport à T. Si $k\alpha$, $k \in \mathbb{Q}$ est une racine de G par rapport à T, alors $k = 1$ ou $k = -1$. Cela résulte aussitôt de 1.12.

4. Racines et schémas en groupes vectoriels

4.1. — Soient S un préschéma, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Module *localement libre de type fini.* Le S-préschéma $\mathrm{W}(\mathscr{F})$ est *lisse* sur S. Son Algèbre de Lie est canoniquement isomorphe à $\mathscr{F}$. En effet, on a un isomorphisme canonique 20

$$\mathrm{W}(\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}(\mathrm{W}(\mathscr{F})/\mathrm{S}) = \mathrm{W}(\mathscr{L}ie(\mathrm{W}(\mathscr{F})/\mathrm{S})).$$

(Exp. II cor. à la déf. 4.4 et Exemples précédent 4.5). Nous identifierons toujours $\mathscr{F}$ et $\mathscr{L}ie(\mathrm{W}(\mathscr{F})/\mathrm{S})$.

Lemme 4.2. — *Soient* S *un préschéma,* V *un fibré vectoriel sur* S*,* lisse *sur* S*. Il existe alors un isomorphisme unique de* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-Modules*

$$\exp : \mathrm{W}(\mathscr{L}ie(\mathrm{V}/\mathrm{S})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{V}$$

qui induise l'identité sur les Algèbres de Lie.

En effet, on a $\mathrm{V} = \mathbf{V}(\mathrm{F})$ pour un certain $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Module quasi-cohérent H. Alors on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{W}(\mathscr{L}ie(\mathrm{V}/\mathrm{S})) = \mathrm{Lie}(\mathrm{V}/\mathrm{S}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{V}$$

(Exp. II loc. cit.). Alors $\mathrm{H} \simeq \mathscr{L}ie(\mathrm{V}/\mathrm{S})^\vee$ est localement libre de type fini donc $\mathrm{V} \simeq \mathrm{W}(\mathrm{H}^\vee)$ et on a aussitôt l'unicité de exp, car W est pleinement fidèle.

4.3. — Si V est un fibré vectoriel sur S, on désignera par V^* l'ouvert de V obtenu en en retirant la section 0. Notons la loi de groupe de V en notation multiplicative. L'opération de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$ sur V définissant la structure de module sera alors notée exponentiellement

$$\mathbf{O}_{\mathrm{S}} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}, \qquad (x, v) \longmapsto v^x.$$

On a $(vv')^x = v^x v'^x$, $v^{x+x'} = v^x v^{x'}$, $v^{xx'} = (v^x)^{x'}$. En particulier, si on restreint la loi 21
d'opérateurs à $\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}$, V^* est stable et est donc muni d'une structure d'objet à groupe d'opérateurs $\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}$. On notera encore cette loi par $(z, v) \mapsto v^z$.

4.4. — En particulier, soit $\mathscr{L}$ un Module inversible sur S et $\mathrm{W}(\mathscr{L})$ le $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-Module associé. Alors $\mathrm{W}(\mathscr{L})^*$ est un fibré principal homogène sous $\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}$ (localement trivial) qui n'est autre que le fibré principal associé au fibré vectoriel $\mathrm{W}(\mathscr{L})$. On note $\Gamma(\mathrm{S},\mathscr{L})^* = \mathrm{W}(\mathscr{L})^*(\mathrm{S})$. Il y a correspondance bijective entre les isomorphismes de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Modules $\mathscr{O}_{\mathrm{S}} \simeq \mathscr{L}$, les isomorphismes de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules $\mathbf{O}_{\mathrm{S}} \simeq \mathrm{W}(\mathscr{L})$ et les sections $\mathrm{S} \to \mathrm{W}(\mathrm{L})^*$. Cette correspondance s'effectue par $f \mapsto \mathrm{W}(f) \mapsto \mathrm{W}(f)(1)$. Elle est compatible avec l'extension de la base. On peut donc considérer $\mathrm{W}(\mathscr{L})^*$ comme le « schéma des trivialisations de $\mathrm{W}(\mathscr{L})$ ».

4.5. — Soient S un préschéma, T un tore sur S, P un S-groupe à groupe d'opérateurs $\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}$ (par exemple un fibré vectoriel), α un caractère de T. On note $\mathrm{T}\cdot_\alpha \mathrm{P}$ le produit semi-direct de P par T, T y opérant par le morphisme composé

$$\mathrm{T} \xrightarrow{\ \alpha\ } \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{P}).$$

Définition 4.6. — Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes, T un sous-groupe de G, α un caractère de T, $\mathscr{L}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Module. Soit

$$p : \mathrm{W}(\mathscr{L}) \longrightarrow \mathrm{G}$$

un morphisme de groupes. On dit que p est *normalisé par* T *avec le multiplicateur* α s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

(i) p est un morphisme d'objets à groupe d'opérateurs T, si on fait opérer T sur $\mathrm{W}(\mathscr{L})$ par α et sur G par automorphismes intérieurs. En d'autres termes, pour tout
22 $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et tous $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$, $x \in \mathrm{W}(\mathscr{L})(\mathrm{S}') = \Gamma(\mathrm{S}', \mathscr{L} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{S}})$, on a

$$\mathrm{int}(t)p(x) = p(\alpha(t)x).$$

(ii) Le morphisme $\mathrm{T}\cdot_\alpha \mathrm{W}(\mathscr{L}) \to \mathrm{G}$ défini par le produit dans G (i.e. par $(t,x) \mapsto t\cdot p(x)$) est un morphisme de groupes.

Lemme 4.7. — *Sous les conditions de* 4.6*, supposons de plus* G lisse*,* de présentation finie*, et* à fibres connexes*,* T *tore maximal de* G*,* $\mathscr{L}$ *inversible. Si p est un monomorphisme et α non nul sur chaque fibre, alors α est une racine de* G *par rapport à* T.

En effet $\mathscr{L}ie(p) : \mathscr{L} \to \mathfrak{g}$ est un monomorphisme qui se factorise par $\mathfrak{g}^\alpha$.

Proposition 4.8. — *Sous les conditions de* 4.7*, supposons que* G *soit réductif, et que p soit un* monomorphisme*. Alors α est une racine de* G *par rapport à* T *et* $\mathscr{L}ie(p)$ *induit un isomorphisme :*

$$\mathscr{L}ie(p) : \mathscr{L} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathfrak{g}^\alpha.$$

En effet, en vertu de 4.7 et du fait que $\mathfrak{g}^\alpha$ est inversible, il suffit de prouver que α est non nul sur chaque fibre. Soit donc $s \in \mathrm{S}$ tel que $\alpha_{\overline{s}} = 0$ ($= 1$ en notation multiplicative). Si X est une section non nulle de $\mathscr{L} \otimes_{\mathrm{S}} k(\overline{s})$, $p(\mathrm{X})$ est un élément unipotent $\neq e$ de $\mathrm{G}(\overline{s})$ qui centralise $\mathrm{T}_{\overline{s}}$, ce qui est impossible, car celui-ci est son propre centralisateur.

Corollaire 4.9. — *Sous les conditions de* 4.8, *il existe un monomorphisme de groupes à opérateurs* T (*i.e. normalisé par* T *avec le multiplicateur* α)

$$\mathrm{W}(\mathfrak{g}^{\alpha}) \longrightarrow \mathrm{G}$$

qui induit sur les Algèbres de Lie le morphisme canonique $\mathfrak{g}^{\alpha} \to \mathfrak{g}$.

Nous verrons bientôt que 4.9 est vérifié en fait chaque fois que G est un groupe **23**
réductif et α une racine de G par rapport à T, et qu'un tel morphisme est unique.

Rappel 4.10. — Soient k un corps algébriquement clos, G un k-groupe réductif, T un tore maximal de G, α une racine de G par rapport à T. Il existe un monomorphisme

$$p : \mathbb{G}_{a,\,k} \longrightarrow \mathrm{G}$$

normalisé par T avec le multiplicateur α.

Voir BIBLE, 13-05, th. 1.

4.11. — Terminons ce n° par un résultat technique qui nous sera utile. Soient S un préschéma, et $\mathscr{L}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Module inversible. Soit q un entier > 0 tel que $x \mapsto x^q$ soit un endomorphisme du S-groupe $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$. (Si $\mathrm{S} \neq \varnothing$, on a $q = 1$, *ou* $q = p^n$, p étant un nombre premier nul sur S ; cela résulte aussitôt du fait élémentaire suivant : le p.g.c.d des coefficients binomiaux $\binom{q}{i}$, pour $i \neq 0, q$, est p si $q = p^n$, p premier, et 1 dans le cas contraire). Le morphisme défini par la puissance q-ième

$$\mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{L}^{\otimes q}$$

est un morphisme de faisceaux de groupes abéliens. Il définit par changement de base un morphisme de S-préschémas en groupes :

$$\mathrm{W}(\mathscr{L}) \longrightarrow \mathrm{W}(\mathscr{L}^{\otimes q}).$$

En particulier, si $\mathscr{L}'$ est un autre Module inversible et si on a un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Modules

$$h : \mathscr{L}^{\otimes q} \longrightarrow \mathscr{L}',$$

on en déduit un morphisme de S-préschémas en groupes : **24**

$$\mathrm{W}(\mathscr{L}) \longrightarrow \mathrm{W}(\mathscr{L}')$$

par $x \mapsto h(x^q)$.
Ces notations posées, on a

Proposition 4.12. — *Soient* S *un préschéma,* T (*resp.* T′) *un* S*-tore,* $\mathscr{L}$ (*resp.* $\mathscr{L}'$) *un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-Module inversible,* α (*resp.* α') *un caractère de* T (*resp.* T′) *; considérons le produit semi-direct* $\mathrm{T} \cdot_{\alpha} \mathrm{W}(\mathscr{L})$, *resp.* $\mathrm{T}' \cdot_{\alpha'} \mathrm{W}(\mathscr{L}')$. *Soient*

$$f : \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{T}'$$

un morphisme de groupes et

$$g : \mathrm{W}(\mathscr{L}) \longrightarrow \mathrm{W}(\mathscr{L}')$$

un morphisme (*non nécessairement multiplicatif*) *vérifiant la condition suivante :*

$$g(\alpha(t)x) = \alpha'(f(t))\, g(x)$$

pour tous $x \in \mathrm{W}(\mathscr{L})(\mathrm{S}')$, $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$.

Soit $s_0 \in \mathrm{S}$ *tel que* $\alpha_{\overline{s}_0} \neq e$.

a) *Supposons que* g *envoie la section* 0 *sur la section* 0 *et que pour tout entier* $n > 0$, *on ait* $(\alpha' \circ f)_{\overline{s}_0} \neq n\,\alpha_{\overline{s}_0}$. *Alors* $g = 0$ *au voisinage de* s_0.

b) *Supposons que* g *soit un morphisme de groupes tel que* $g_{\overline{s}_0} \neq 0$. *Il existe alors un ouvert* U *de* S *contenant* s_0 *et un entier* $q > 0$ *tel que* $x \mapsto x^q$ *soit un endomorphisme de* $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{U}}$ *et que* $(\alpha' \circ f)_{\mathrm{U}} = q\,\alpha_{\mathrm{U}}$.

c) *Supposons que* $(\alpha' \circ f)_{\overline{s}_0} = q\,\alpha_{\overline{s}_0}$, *où* q *est un entier* > 0 *tel que* $x \mapsto x^q$ *soit un endomorphisme de* $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$. *Il existe alors un ouvert* U *de* S *contenant* s_0 *et un unique morphisme de* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-Modules*

$$h : \mathscr{L}^{\otimes q}|\mathrm{U} \longrightarrow \mathscr{L}'|\mathrm{U}$$

tels que g_{U} *soit le morphisme composé*

$$\mathrm{W}(\mathscr{L})_{\mathrm{U}} \xrightarrow{x \mapsto x^q} \mathrm{W}(\mathscr{L}^{\otimes q})_{\mathrm{U}} \xrightarrow{\mathrm{W}(h)} (\mathscr{L}')_{\mathrm{U}}.$$

25 Comme la conclusion est locale sur S, on peut supposer que $\mathrm{W}(\mathscr{L}) = \mathrm{W}(\mathscr{L}') = \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$ et donc que g s'exprime comme un polynôme

$$g(\mathrm{X}) = \sum_{n \geqslant 0} a_n \mathrm{X}^n, \qquad a_n \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}}).$$

La condition qui lie f et g s'écrit comme une identité dans $\Gamma(\mathrm{S}', \mathscr{O}_{\mathrm{S}'})[\mathrm{X}]$:

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n \alpha'(f(t)) \mathrm{X}^n = \sum_{n \geqslant 0} a_n \alpha(t)^n \mathrm{X}^n,$$

soit, pour tout $n \geqslant 0$, tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et tout $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$,

$$a_n(\alpha'(f(t)) - \alpha(t)^n) = 0.$$

Pour chaque $n \geqslant 0$, soit S_n l'ensemble des $s \in \mathrm{S}$ tels que $(\alpha' \circ f)_{\overline{s}} = n\,\alpha_{\overline{s}}$. On sait (Exp. IX 5.3) que les S_n sont ouverts et fermés, et que $(\alpha' \circ f)_{\mathrm{S}_n} = n\,\alpha_{\mathrm{S}_n}$. De plus, comme $\alpha_{\overline{s}_0} \neq e$, on peut, quitte à restreindre S, supposer que α est non nul sur chaque fibre (même référence), ce qui entraîne que les S_n sont disjoints. Quitte à restreindre S, on peut donc supposer que l'on est dans l'un des deux cas suivants : il existe un n avec $\mathrm{S} = \mathrm{S}_n$ *ou bien* tous les S_n sont vides.

Soit $m \geqslant 0$ tel que $\mathrm{S}_m = \varnothing$, je dis qu'alors $a_m = 0$; en effet $\alpha' \circ f$ et $m\,\alpha$ sont distincts sur chaque fibre de S, et on a :

Lemme 4.13. — *Soient* S *un préschéma,* T *un* S*-tore,* α *et* α' *deux caractères de* S *distincts sur chaque fibre ; il existe une famille couvrante pour* (fpqc) : $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\}$, *et pour chaque* i *un* $t_i \in \mathrm{T}(\mathrm{S}_i)$, *tels que* $\alpha(t_i) - \alpha'(t_i) = 1$.

Le lemme est trivial, par réduction au cas diagonalisable, puis au cas $\mathrm{T} = \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}$.

26 Reprenons la démonstration, on vient de prouver (a). Dans les cas (b) et (c), il existe un n avec $\mathrm{S} = \mathrm{S}_n$ ($n = q$ dans (c)). Par le résultat précédent on a donc $a_m = 0$ pour $m \neq n$, ce qui prouve que g s'écrit

$$g(\mathrm{X}) = a_n \mathrm{X}^n, \qquad a_n \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}}).$$

Cela prouve aussitôt (c). Dans le cas (b), on sait que $a_n(s_0) \neq 0$, on peut donc supposer a_n inversible sur S, ce qui entraîne que $x \mapsto x^n$ est un endomorphisme de $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$ (en vertu de l'hypothèse de (b)) et achève la démonstration.

5. Un exemple instructif

5.1. — Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Posons $\mathrm{A} = k[t]$, anneau des polynômes à une variable sur k et $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$. Considérons l'Algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur $\mathscr{O}_\mathrm{S}$ suivante : Comme Module, elle est libre de dimension 3, de base $\{\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{H}\}$; la table de multiplication est

$$[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = 2t\mathrm{H}, \quad [\mathrm{H}, \mathrm{X}] = \mathrm{X} \quad , \quad [\mathrm{H}, \mathrm{Y}] = -\mathrm{Y}.$$

Pour $s \in \mathrm{S}$, $s \neq s_0$ (point défini par $t = 0$) la fibre réduite $\mathfrak{g}(s)$ est isomorphe à l'algèbre de Lie du groupe $\mathrm{PGL}_{2,\,k(s)}$. Pour $s = s_0$, c'est une algèbre de Lie résoluble.

5.2. — Soit G_1 le schéma en groupes des automorphismes de $\mathfrak{g}$: pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, $\mathrm{G}_1(\mathrm{S}')$ est le groupe des automorphismes de la $\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$-Algèbre de Lie $\mathfrak{g} \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$. C'est un sous-préschéma fermé du groupe $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ des automorphismes du $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-Module $\mathfrak{g}$. Soient $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $u \in \mathrm{M}_3(\Gamma(\mathrm{S}', \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}))$ considéré comme un endomorphisme du $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-Module $\mathfrak{g} \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$: 27

$$\begin{aligned} u(\mathrm{X}) &= a\mathrm{X} + b\mathrm{Y} + e\mathrm{H}, \\ u(\mathrm{Y}) &= b'\mathrm{X} + a'\mathrm{Y} + e'\mathrm{H}, \\ u(\mathrm{H}) &= c\mathrm{X} + c'\mathrm{Y} + d\mathrm{H}. \end{aligned}$$

On voit aussitôt que u est une section de G_1 si et seulement si $\mathrm{dét}(u)$ est inversible et si on a les relations :

$$\begin{array}{llll} (1)\ a(d-1) = ec & , & (1')\ a'(d-1) = e'c' & , \\ (2)\ b(d+1) = ec' & , & (2')\ b'(d+1) = e'c & , \\ (3)\ e = 2t(bc - ac') & , & (3')\ e' = 2t(b'c' - a'c) & , \\ (4)\ 2tc = eb' - ae' & , & (4')\ 2tc' = be' - ea' & , \end{array}$$

$$(5)\ 2t(aa' - bb') = 2td.$$

Lemme 5.3. — *Les relations* (1) … (5) *impliquent*

$$\begin{aligned} \mathrm{dét}(u) &= aa'(2-d) + bb'(d+2), \\ aa' - bb' &= d \cdot \mathrm{dét}(u). \end{aligned}$$

En effet, la première assertion s'obtient aussitôt en reportant les relations (1), (1′), (2), (2′) dans le développement de $\mathrm{dét}(u)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{dét}(u) &= aa'd + be'c + b'c'e - a'ec - ae'c' - bb'd \\ &= aa'd + bb'(d+1) + bb'(d+1) - aa'(d-1) - bb'd - aa'(d-1) \\ &= aa'(d - d + 1 - d + 1) + bb'(d + 1 + d + 1 - d) \\ &= aa'(2-d) + bb'(d+2). \end{aligned}$$

Multipliant alors cette relation par d, on obtient

$$d \cdot \text{dét}(u) = aa'(2d - d^2) + bb'(d^2 + 2d).$$

Mais la relation $(1) \times (1') = (2) \times (2')$ donne aussitôt

$$aa'(d-1)^2 = bb'(d+1)^2.$$

28 Combinant les deux relations précédentes, on trouve aussitôt la seconde formule cherchée.

5.4. — Considérons alors $\mathrm{G} = \mathrm{G}_1 \cap \mathrm{SL}(\mathfrak{g})$. C'est le sous-groupe fermé de G_1 défini par l'équation $\text{dét}(u) = 1$. C'est donc un groupe affine sur S.

Proposition 5.5. — *Le groupe* G *est* lisse *sur* S.

Lemme 5.6. — *Soit* U *l'ouvert de* $\underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{A}}(\mathfrak{g}) \simeq \mathrm{W}(\mathrm{M}_3(\mathscr{O}_{\mathrm{S}}))$ *défini par la condition « ad inversible », i.e. l'ouvert* $\underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{A}}(\mathfrak{g})_f$*, où* f *est la fonction définie par* $f(u) = ad$*. Alors* $\mathrm{U} \cap \mathrm{G}$ *est le sous-préschéma fermé de* U *défini par les six équations :*

$$(1), \quad (2), \quad (2'), \quad (3), \quad (3') \quad \textit{et} \quad (\mathrm{D}) : aa' - bb' = d.$$

Il est d'abord clair que ces six relations sont vérifiées par tout « point » de G (lemme 5.3), en particulier par tout « point » de $\mathrm{U} \cap \mathrm{G}$. Réciproquement, il faut montrer que si $u \in \mathrm{U}(\mathrm{S}')$ (pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$), et si u vérifie les six conditions de l'énoncé, alors $\text{dét}(u) = 1$ et u vérifie aussi $(1')$, (4), $(4')$ et (5).

On a d'abord $(\mathrm{D}) \Rightarrow (5)$. Combinant (2) et $(2')$, on a aussitôt

$$bb'(d+1) = bce' = b'c'e.$$

Mais par (3) et $(3')$, on a, en écrivant de deux manières $2t(bc - ac')(b'c' - a'c)$:

$$(bc - ac')e' = (b'c' - a'c)e.$$

Combinant avec la relation précédente, cela donne $ac'e' = a'ce$. Mais par (1), $a'ce = a'a(d-1)$, ce qui prouve $a(a'(d-1) - e'c') = 0$ et entraîne $(1')$, a étant supposé inversible.

29 Prouvons (4) et $(4')$. Faisons-le par exemple pour $(4')$, l'autre calcul s'en déduisant par symétrie. Par (3) et $(3')$, on a aussitôt

$$a'e + be' = -2t(aa' - bb')c' = -2tdc'.$$

Combinant $(1')$ et (2), on a aussitôt

$$a'e + be' = d(be' - ea'),$$

ce qui termine la démonstration de $(4')$, d étant supposé inversible. Par 5.3, (D) entraîne $\text{dét}(u) = 1$.

Lemme 5.7. — G *est lisse sur* S *le long de la section unité.*

Par 5.6 et SGA 1, II 4.10, il suffit de prouver que les différentielles des fonctions

$$a(d-1)-ec, \qquad b(d+1)-ec', \qquad b'(d+1)-e'c,$$
$$e-2t(bc-ac'), \qquad e'-2t(b'c'-a'c), \qquad aa'-bb'-d,$$

aux points de la section unité de G sont linéairement indépendantes. Or notant par une majuscule la différentielle de la minuscule correspondant, ce sont

$$\mathrm{D}, \qquad 2\mathrm{B}, \qquad 2\mathrm{B}', \qquad \mathrm{E}+2t\mathrm{C}', \qquad \mathrm{E}'+2t\mathrm{C}, \qquad \mathrm{A}+\mathrm{A}'+\mathrm{B},$$

qui sont bien linéairement indépendantes modulo tout $(t-a)$, $a \in \mathrm{A}$.

***Lemme 5.8.* —** *Pour $s \in \mathrm{S}$, $s \neq s_0$, la fibre G_s est connexe et semi-simple.*

En effet $\mathfrak{g}(s)$ est isomorphe à l'Algèbre de Lie de $\mathrm{PL}_{2k(s)}$, on a $\mathrm{G}_s = \mathrm{G}_{1\,s}$ lisse sur $k(s)$ et il est connu que le groupe des automorphismes de l'algèbre de Lie de PL_2 sur un corps de caractéristique 0 est PL_2 lui-même.

***Lemme 5.9.* —** *La fibre G_{s_0} est résoluble et a deux composantes connexes qui sont de la forme suivante :*

$$\mathrm{G}^0_{s_0} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a^{-1} & 0 \\ c & c' & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \textit{et} \quad \mathrm{G}^-_{s_0} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b^{-1} & 0 & 0 \\ c & c' & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

En effet, on a $e = e' = 0$, car $t = 0$ en s_0. On résout alors immédiatement les 30
équations (1) à (5) et (D).

***Lemme 5.10.* —** $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *est une section de* G *sur* S, *qui est telle que* $w(s_0) \in \mathrm{G}^-_{s_0}$.

Démontrons maintenant 5.5. On sait que si on note G^0 la réunion des composantes neutres des fibres de G (c'est-à-dire le complémentaire de $\mathrm{G}^-_{s_0}$), G^0 est un sous-groupe ouvert de G lisse sur S, par 5.7.Comme, par translation, G est évidemment lisse aux points de $w(\mathrm{S})$, G est lisse sur S.

5.11. — Considérons le morphisme $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \to \mathrm{G}^0$ défini par $z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & 1/z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. C'est un monomorphisme qui définit un tore T de G^0. Je dis qu'on a

$$\mathrm{T} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_0}(\mathrm{T}).$$

Il suffit en effet de vérifier la première égalité. Comme il s'agit de sous-groupes lisses sur S de G, il suffit de vérifier qu'ils ont les mêmes points géométriques. Pour les fibres aux points $s \neq s_0$, cela résulte de ce que $\mathrm{PGL}_{2,\,\kappa(s)}$ est réductif et de ce que T_s en est un tore maximal pour des raisons de dimensions (cf. 1.11). Sur la fibre de s_0, le calcul se fait immédiatement. Il en résulte en particulier que T est un tore maximal de G et de G^0.

31 **5.12.** — La section w de G définie en 5.9 normalise T. Il en résulte aussitôt (cf. 2.4) que le groupe de Weyl de G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_S$, et en particulier fini.

$$\mathrm{W_G(T)} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})/\mathrm{T} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\mathrm{S}}.$$

En revanche $\mathrm{W}_{\mathrm{G}^0}(\mathrm{T})$ *n'est pas fini* : il lui « manque un point » au-dessus de s_0.

5.13. — L'immersion ouverte $\mathrm{G}^0 \to \mathrm{G}$ n'est pas une immersion fermée (car G^0 est dense dans G) ; elle est cependant un morphisme *affine* (et donc G^0 est *affine* sur S). En effet, comme $\mathrm{G}^0_{s_0}$ est fermé dans G_{s_0}, qui est fermé dans G, le complémentaire U de $\mathrm{G}^0_{s_0}$ dans G est ouvert ; G^0 et U forment un recouvrement ouvert de G et il suffit de vérifier que les immersions $\mathrm{G}^0 \to \mathrm{G}^0$ et $\mathrm{G}^0 \cap \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ sont affines ; pour la première c'est trivial, pour la seconde, on remarque que $\mathrm{U} \cap \mathrm{G}^0$ est défini dans U par l'équation : $t \neq 0$.

On a donc construit un S-groupe affine lisse, à fibres connexes, G^0, possédant un tore maximal T qui est son propre centralisateur et dont le groupe de Weyl $\mathrm{W}_{\mathrm{G}^0}(\mathrm{T})$ n'est pas fini.

6. Existence locale de tores maximaux. Le groupe de Weyl

Au cours de la démonstration de 2.5, nous avons utilisé un résultat de Exp. XI sur l'existence locale pour la topologie étale de tores maximaux ; la démonstration de Exp. XI utilise un résultat fin de représentabilité (XI 4.1). Dans le cas particulier qui nous occupe, on peut en donner une autre démonstration, basée sur les idées de Exp. XII n°7, et de nature beaucoup plus élémentaire.

32 ***Proposition 6.1.*** — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse, affine et à fibres connexes sur* S*,* s_0 *un point de* S *tel que les tores maximaux de la fibre géométrique* $\mathrm{G}_{\overline{s}_0}$ *soient leur propre centralisateur. Il existe un morphisme étale* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *couvrant* S_0*, et un tore maximal trivial* T *de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$*.*

D'abord, on peut supposer S affine. Comme G est de présentation finie sur S, on peut supposer S noethérien, puis local, puis hensélien à corps résiduel séparablement clos (cf. EGA IV, 8.12, § 8.8, et § 18.8). Posons donc S = Spec(A), A hensélien à corps résiduel $k = k(s_0)$ séparablement clos. Choisissons un tore maximal T_0 de G_0 $(= \mathrm{G}_k)$ (il en existe, par exemple parce que le schéma des tores maximaux de G_0 est lisse sur k, Exp. XII, 7.1 c)) ; comme k est séparablement clos, T_0 est trivial et est donc donné par un monomorphisme de groupes

$$f_0 : \mathbb{G}^r_{m,\,k} \longrightarrow \mathrm{G}_0\,.$$

Soit m un entier > 1 premier à la caractéristique de k. Pour tout $h > 0$, $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_0}\,({}_{m^h}\mathrm{T}_0)$ est représentable par un sous-préschéma fermé de G_0 (Exp. VIII 6.7). Comme les ${}_{m^h}\mathrm{T}_0$ sont schématiquement denses dans T_0 (cf. Exp. IX 4.10) et que G_0 est noethérien, il existe un h tel que

$$\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_0}({}_{m^h}\mathrm{T}_0) = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_0}(\mathrm{T}_0) = \mathrm{T}_0.$$

Posons $n = m^h$; comme n est inversible sur S, ${}_n\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_\mathrm{S}$; f_0 définit donc un monomorphisme de groupes

$$g_0 : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r_k \longrightarrow \mathrm{G}_0$$

tel que $\underline{\mathrm{Centr}}_\mathrm{G}(g_0) = \mathrm{T}_0$. Or le S-foncteur

$$\mathrm{P} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r_\mathrm{S}, \mathrm{G})$$

est représentable par un S-préschéma de type fini (comme sous-préschéma fermé de ${}_n\mathrm{G} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_\mathrm{S}, \mathrm{G}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{G} \xrightarrow{n} \mathrm{G})$). Mais P est lisse sur S (Exp. IX 3.6), 33
donc $g_0 \in \mathrm{P}(k)$ se relève en une section $g \in \mathrm{P}(\mathrm{S})$ (Lemme de Hensel, Exp. XI 1.11) :

$$g : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r_\mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{G}\,.$$

Considérons $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Centr}}_\mathrm{G}(g)$; c'est un sous-préschéma en groupe fermé de G, lisse sur S (Exp. IX, 3.3) et $\mathrm{H}_0 = \mathrm{T}_0$ par hypothèse. Soit alors H^0 la composante neutre de H ; c'est un sous-préschéma en groupes de G, lisse et à fibres connexes, dont la fibre spéciale est un tore. Par Exp. X 8.1, c'est un tore, nécessairement trivial (Exp. X 4.6). Posons $\mathrm{H}^0 = \mathrm{T}$ et soit $\mathrm{C} = \underline{\mathrm{Centr}}_\mathrm{G}(\mathrm{T})$ qui est un sous-groupe fermé de G (Exp. VIII 6.5 e), lisse (Exp. XI 2.4). Considérons C^0 (On a en fait $\mathrm{C}^0 = \mathrm{C}$, mais nous n'avons pas besoin de le savoir) ; $\mathrm{C}^0 \supset \mathrm{T}$ sont deux groupes lisses et à fibres connexes. Ils coïncident en s_0, donc au voisinage. Quitte à restreindre S, on peut donc supposer $\mathrm{C}^0 = \mathrm{T}$, donc *a fortiori* T maximal.

Remarque 6.2. **—** La démonstration montre en particulier que le rang réductif de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ est constant au voisinage de $s = s_0$.

Proposition 6.3. **—** *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse et de présentation finie sur* S*,* Q *un sous-tore de* G*.*

(i) $\underline{\mathrm{Centr}}_\mathrm{G}(\mathrm{Q})$ *et* $\underline{\mathrm{Norm}}_\mathrm{G}(\mathrm{Q})$ *sont représentables par des sous-préschémas en groupes fermés, lisses* (*et donc de présentation finie*) *sur* S*.*

(ii) $\underline{\mathrm{Centr}}_\mathrm{G}(\mathrm{Q})$ *est un sous-préschéma ouvert et fermé de* $\underline{\mathrm{Norm}}_\mathrm{G}(\mathrm{Q})$*. Le quotient* $\mathrm{W}_\mathrm{G}(\mathrm{Q}) = \underline{\mathrm{Norm}}_\mathrm{G}(\mathrm{Q})/\,\underline{\mathrm{Centr}}_\mathrm{G}(\mathrm{Q})$ *est représentable par un sous-préschéma en groupes* 34
ouvert de $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{Q})$*, c'est donc un* S*-préschéma en groupes* quasi-fini, étale et séparé sur S.

(iii) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$*, posons*

$$w(s) = (\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}(\overline{s})}(\mathrm{Q}(\overline{s})) : \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}(\overline{s})}(\mathrm{Q}(\overline{s}))).$$

Alors $s \mapsto w(s)$ *est semi-continue inférieurement, et est constante au voisinage de* s *si et seulement si* $\mathrm{W}_\mathrm{G}(\mathrm{Q})$ *est* fini *sur* S *au voisinage de* s*.*

Par Exp. XI 6.11, $\underline{\mathrm{Centr}}_\mathrm{G}(\mathrm{Q})$ et $\underline{\mathrm{Norm}}_\mathrm{G}(\mathrm{Q})$ sont représentables par des sous-préschémas fermés et de présentation finie de G. Ceux-ci sont lisses par Exp. XI 2.4 et 2.4 bis, ce qui prouve (i). Les assertions (ii) et (iii) se démontrent alors comme dans Exp. XI 5.9 et 5.10, dont la démonstration n'utilise en fait que (i) et non les théorèmes fins Exp. XI 4.1 et 4.2.