EXPOSÉ XXIII

GROUPES RÉDUCTIFS : UNICITÉ DES GROUPES ÉPINGLÉS

par M. Demazure

Le but de cet exposé est la démonstration du théorème d'unicité (Théorème 4.1). **263**
Celui-ci a été démontré par CHEVALLEY dans le cas d'un corps algébriquement clos ; la méthode de réduction au rang deux utilisée ici est également due à CHEVALLEY (voir BIBLE, exp. 23 et 24). Chemin faisant, nous obtenons une description explicite des groupes réductifs par générateurs et relations (3.5).

1. Épinglages

Définition 1.1. — Soient S un préschéma, $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ un S-groupe déployé (XXII, 1.13). On appelle *épinglage* de ce groupe déployé la donnée d'un système de *racines simples* R_0 de R et pour chaque $\alpha \in \mathrm{R}_0$ d'une section $\mathrm{X}_\alpha \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^\alpha)^*$.

Autrement dit, un épinglage du groupe réductif G sur le préschéma non vide S est la donnée :

(i) d'un tore maximal T,

(ii) d'un groupe abélien M et d'un isomorphisme $\mathrm{T} \simeq \mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{M})$,

(iii) d'un système de racines R de G par rapport à T,

(iv) d'un système de racines simples R_0 de R,

(v) d'un $\mathrm{X}_\alpha \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^\alpha)^*$ pour tout $\alpha \in \mathrm{R}_0$, c'est-à-dire d'un

$$u_\alpha = \exp_\alpha(\mathrm{X}_\alpha) \in \mathrm{U}_\alpha^*(\mathrm{S}) \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in \mathrm{R}_0,$$

vérifiant la condition (D 1) de Exp. XXII, 1.13 (en effet la condition (D 2) de loc. cit. **264**
est automatiquement vérifiée).

Tout groupe déployé possède un épinglage ; en particulier, tout groupe réductif est localement épinglable pour la topologie étale.

1.2. — Si G est un S-groupe *épinglé*, c'est-à-dire un S-groupe déployé muni d'un épinglage, il est muni canoniquement du système de racines positives R_+ défini par R_0, du groupe de Borel $\mathrm{B} = \mathrm{B}_{\mathrm{R}_+}$ correspondant, du groupe de Borel opposé $\mathrm{B}^- = \mathrm{B}_{\mathrm{R}^-}$, des groupes unipotents $\mathrm{U} = \mathrm{B}^u$, $\mathrm{U}^- = (\mathrm{B}^-)^u$, de l'ouvert $\mathrm{U}^- \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{U}$, etc... De même, pour chaque $\alpha \in \mathrm{R}_0$, on a un isomorphisme canonique de groupes vectoriels

$$p_\alpha : \mathbb{G}_{a,\mathrm{S}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}_\alpha$$

(défini par $p_\alpha(x) = \exp_\alpha(x\mathrm{X}_\alpha) = u_\alpha^x$), normalisé par T avec le multiplicateur α, et dont la donnée équivaut à celle de X_α (Exp. XXII, 1.1).

Par dualité, on en déduit un $\mathrm{X}_{-\alpha} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{-\alpha})^*$ et un isomorphisme

$$p_{-\alpha} : \mathbb{G}_{a,\mathrm{S}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}_{-\alpha}$$

qui est le contragrédient du précédent (Exp. XXII, 1.3). On posera (Exp. XX, 3.1)

$$w_\alpha = w_\alpha(\mathrm{X}_\alpha) = p_\alpha(1)\, p_{-\alpha}(-1)\, p_\alpha(1) = p_{-\alpha}(-1)\, p_\alpha(1)\, p_{-\alpha}(-1).$$

On a alors (loc. cit. 3.1, 3.7)

$$w_\alpha^2 = \alpha^*(-1), \qquad \mathrm{int}(w_\alpha)t = s_\alpha(t) = t \cdot \alpha^*(\alpha(t)^{-1}),$$

$$\begin{cases} \mathrm{int}(w_\alpha)\, p_\alpha(x) = p_{-\alpha}(-x) = p_{-\alpha}(x)^{-1}, \\ \mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_\alpha = -\mathrm{X}_{-\alpha}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{int}(w_\alpha)\, p_{-\alpha}(x) = p_\alpha(-x) = p_\alpha(x)^{-1}, \\ \mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_{-\alpha} = -\mathrm{X}_\alpha. \end{cases}$$

265 Nous utiliserons systématiquement les notations précédentes dans la suite.

Définition 1.3. — Soient S un préschéma, $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R}, \mathrm{R}_0, (\mathrm{X}_\alpha))$ et $(\mathrm{G}', \mathrm{T}', \mathrm{M}', \ldots)$ deux S-groupes épinglés. On dit que le morphisme de groupes déployés (Exp. XXII, 4.2.1)

$$f : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}'$$

est compatible avec les épinglages, ou définit un *morphisme de groupes épinglés* si (notations de *loc. cit.*) $u(\mathrm{R}_0) = \mathrm{R}'_0$ et si, pour tout $\alpha \in \mathrm{R}_0$, on a

$$f(\exp_\alpha(\mathrm{X}_\alpha)) = \exp_{u(\alpha)}(\mathrm{X}'_{u(\alpha)}), \qquad \text{i.e.} \quad f(u_\alpha) = u'_{u(\alpha)}.$$

1.4. — Si on note $q(\alpha)$ l'entier de loc. cit., on a donc

$$f(p_\alpha(x)) = p'_{u(\alpha)}(x^{q(\alpha)}) \quad \text{pour} \quad \alpha \in \mathrm{R}_0,$$

donc aussi

$$\begin{aligned} f(p_{-\alpha}(x)) &= p'_{-u(\alpha)}(x^{q(\alpha)}), \\ f(w_\alpha) &= w'_{u(\alpha)}. \end{aligned}$$

Rappelons (Exp. XXII, 4.2) que l'on a pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, et tous $z \in \mathbb{G}_m(\mathrm{S}')$, $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$:

$$\begin{aligned} f(\alpha^*(z)) &= \big(u(\alpha)^*(z)\big)^{q(\alpha)} = u(\alpha)^*(z^{q(\alpha)}), \\ u(\alpha)(f(t)) &= \alpha(t)^{q(\alpha)}. \end{aligned}$$

266 **1.5.** — Appelons *donnée radicielle épinglée* une donnée radicielle munie d'un système de racines simples, et *p-morphisme de données radicielles épinglées* un p-morphisme de données radicielles (Exp. XXI, 6.8) transformant racines simples en racines simples.

Si G est un S-groupe épinglé, on note $\mathscr{R}(\mathrm{G})$ la donnée radicielle *épinglée* correspondante (c'est la donnée radicielle de Exp. XXII, 1.14 munie de R_0). Soit p l'entier défini en Exp. XXII, 4.2.2. On a alors

Scholie 1.6. — $\mathrm{G} \mapsto \mathscr{R}(\mathrm{G})$ définit un *foncteur* de la catégorie des S-groupes réductifs épinglés dans celle des données radicielles épinglées (avec p-morphismes).

1.7. Les groupes épinglés $\mathrm{Z}_{\mathrm{R}_1}$

Soit R_1 une partie du système de racines simples R_0 du groupe épinglé G. Soit $\mathrm{T}_{\mathrm{R}_1}$ le tore maximal de $\bigcap_{\alpha\in\mathrm{R}_1}\mathrm{Ker}(\alpha)$; posons

$$\mathrm{Z}_{\mathrm{R}_1} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_{\mathrm{R}_1}).$$

Notons $\mathrm{R}' = \mathbb{Z}\cdot\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}$; on sait (Exp. XXII, 5.10.7) que $\mathrm{Z}_{\mathrm{R}_1}$ est un S-groupe réductif, de radical $\mathrm{T}_{\mathrm{R}_1}$, que $(\mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R}')$ en est un déploiement et R_1 un système de racines simples. Il en résulte que $(\mathrm{Z}_{\mathrm{R}_1}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R}', \mathrm{R}_1, (\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{R}_1})$ est un S-groupe *épinglé.* Nous munirons toujours $\mathrm{Z}_{\mathrm{R}_1}$ de cet épinglage. En particulier, on considérera les groupes

$$\mathrm{Z}_\alpha = \mathrm{Z}_{\{\alpha\}}, \qquad \mathrm{Z}_{\alpha\beta} = \mathrm{Z}_{\{\alpha,\beta\}}.$$

On notera $\mathrm{B}_{\mathrm{R}_1} = \mathrm{B} \cap \mathrm{Z}_{\mathrm{R}_1}$; on sait (*loc. cit.*) que c'est le groupe de Borel canonique de $\mathrm{Z}_{\mathrm{R}_1}$, et que sa partie unipotente est $\mathrm{U}_{\mathrm{R}_1} = \mathrm{U} \cap \mathrm{Z}_{\mathrm{R}_1}$. En particulier, on a

$$\mathrm{B}_\alpha = \mathrm{T}\cdot\mathrm{U}_\alpha, \qquad \mathrm{U}_\alpha = \mathrm{P}_\alpha.$$

On notera 267

$$\mathrm{U}_{\alpha\beta} = \mathrm{U}_{\{\alpha,\beta\}} = \mathrm{U} \cap \mathrm{Z}_{\alpha\beta} = \prod_{\gamma\in\mathrm{A}_{\alpha\beta}} \mathrm{U}_\gamma,$$

où $\mathrm{A}_{\alpha\beta}$ est l'ensemble des racines positives combinaison linéaire de α et de β.

Soit maintenant $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ un morphisme de S-groupes *épinglés.* Si $u : \mathrm{R} \to \mathrm{R}'$ est la bijection correspondante et si R_1 est une partie de R_0, $u(\mathrm{R}_1) = \mathrm{R}'_1$ est une partie de R'_0, et il est clair que f envoie $\mathrm{T}_{\mathrm{R}_1}$ dans $\mathrm{T}'_{\mathrm{R}'_1}$, donc $\mathrm{Z}_{\mathrm{R}_1}$ dans $\mathrm{Z}'_{\mathrm{R}'_1}$. Le S-morphisme correspondant :

$$f_{\mathrm{R}_1} : \mathrm{Z}_{\mathrm{R}_1} \longrightarrow \mathrm{Z}'_{u(\mathrm{R}'_1)}$$

est compatible avec les épinglages canoniques ; il définit un morphisme de données radicielles épinglées

$$\mathscr{R}(f_{\mathrm{R}_1}) : \mathscr{R}(\mathrm{Z}_{\mathrm{R}_1}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \ldots) \longrightarrow \mathscr{R}(\mathrm{Z}_{\mathrm{R}'_1}, \mathrm{T}', \mathrm{M}', \ldots)$$

et les morphismes $\mathrm{M}' \to \mathrm{M}$ sous-jacents à $\mathscr{R}(f)$ et $\mathscr{R}(f_{\mathrm{R}_1})$ coïncident.

1.8. Étude du groupe $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$

Pour chaque couple (α, β) de racines simples, notons $n_{\alpha\beta}$ l'ordre de l'élément $s_\alpha s_\beta$ du groupe de Weyl W. En particulier, on a $n_{\alpha\alpha} = 1$. On a donc $(w_\alpha w_\beta)^{n_{\alpha\beta}} \in \mathrm{T}(\mathrm{S})$.

Définition 1.8.1. — Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathrm{R}_0 \times \mathrm{R}_0$, on pose

$$t_{\alpha\beta} = (w_\alpha w_\beta)^{n_{\alpha\beta}} \in \mathrm{T}(\mathrm{S}).$$

De plus, on pose (Exp. XX, 3.1)

$$t_\alpha = t_{\alpha\alpha} = w_\alpha^2 = \alpha^*(-1) \in \mathrm{T}(\mathrm{S}).$$

268 ***Proposition 1.8.2.*** — *Soit* H *un* S*-foncteur en groupes transformant sommes directes de préschémas en produits* (*par exemple un faisceau pour la topologie de Zariski*). *Soient*

$$f_{\mathrm{T}} : \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{H}$$

un morphisme de groupes et h_α $(\alpha \in \mathrm{R}_0)$ *des éléments de* H(S). *Pour qu'il existe un morphisme de groupes* (*nécessairement unique*)

$$f_{\mathrm{N}} : \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) \longrightarrow \mathrm{H}$$

qui induise f_{T} *sur* T *et tel que* $f(w_\alpha) = h_\alpha$ *pour* $\alpha \in \mathrm{R}_0$, *il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*

(i) *Pour tout* $\alpha \in \mathrm{R}_0$, *on a*

$$f_{\mathrm{T}}(s_\alpha(t)) = h_\alpha f_{\mathrm{T}}(t) h_\alpha^{-1}$$

pour tout $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ (*i.e.* $f_{\mathrm{T}} \circ s_\alpha = \mathrm{int}(h_\alpha) \circ f_{\mathrm{T}}$).

(ii) *Pour tout* $(\alpha, \beta) \in \mathrm{R}_0 \times \mathrm{R}_0$, *on a*

$$f_{\mathrm{T}}(t_{\alpha\beta}) = (h_\alpha h_\beta)^{n_{\alpha\beta}}.$$

Munissons en effet (**Sch**) de la topologie $\mathcal{T}$ engendrée par la prétopologie dont les familles couvrantes sont les sommes directes ; l'hypothèse de l'énoncé dit que H est un $\mathcal{T}$-faisceau. Soit L le groupe libre de générateurs $(m_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{R}}$ et L_1 le sous-groupe invariant engendré par les éléments $(m_\alpha m_\beta)^{n_{\alpha\beta}}$, $(\alpha, \beta) \in \mathrm{R}_0 \times \mathrm{R}_0$. Soit $g : \mathrm{L} \to \mathrm{W}$ le morphisme défini par $g(m_\alpha) = s_\alpha$; on sait (Exp. XXI, 5.1) que g induit un isomorphisme $\overline{g}$ de L/L_1 sur W. Faisons opérer L sur T par l'intermédiaire de g (ou, ce qui revient au même, par $m_\alpha \cdot t = s_\alpha(t)$). Soit L_{S} le groupe constant défini par L, considérons le produit semi-direct $\mathrm{T} \cdot \mathrm{L}_{\mathrm{S}} = \mathrm{N}$ pour l'opération précédente. On a un morphisme de S-groupes

$$h : \quad \mathrm{T} \cdot \mathrm{L}_{\mathrm{S}} = \mathrm{N} \longrightarrow \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$$

269 unique tel que $h(m_\alpha) = w_\alpha$, $h(t) = t$ pour tout $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. Soit N_1 le sous-faisceau en groupes invariant de N engendré par les

$$t_{\alpha\beta}^{-1} \cdot (m_\alpha m_\beta)^{n_{\alpha\beta}}, \qquad (\alpha, \beta) \in \mathrm{R}_0 \times \mathrm{R}_0.$$

On a évidemment $\mathrm{N}_1 \subset \operatorname{Ker} h$; considérons le morphisme induit

$$h_1 : \mathrm{N}/\mathrm{N}_1 \longrightarrow \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}).$$

Prouvons que h_1 est un *isomorphisme.* Comme h induit sur T l'immersion canonique qui est un monomorphisme, le morphisme canonique

$$\mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{N}/\mathrm{N}_1.$$

est également un monomorphisme, donc induit un isomorphisme de T sur $\mathrm{TN}_1/\mathrm{N}_1$. Pour la même raison h_1 induit un isomorphisme de $\mathrm{TN}_1/\mathrm{N}_1$ sur T ; pour prouver que h_1 est un isomorphisme, il suffit donc de vérifier que le morphisme correspondant

$$h_2 : \mathrm{N}/\mathrm{TN}_1 \longrightarrow \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})/\mathrm{T}$$

est un isomorphisme. Or TN_1 est le sous-$\mathcal{T}$-faisceau en groupes invariant de N engendré par T et les $(m_\alpha m_\beta)^{n_{\alpha\beta}}$, c'est-à-dire le sous-$\mathcal{T}$-faisceau engendré par T et L_1, c'est-à-dire $\mathrm{T} \cdot (\mathrm{L}_1)_{\mathrm{S}}$. Le morphisme h_2 s'identifie donc au morphisme

$$\overline{g} : \mathrm{L}_{\mathrm{S}}/(\mathrm{L}_1)_{\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{W}_{\mathrm{S}}$$

qui est un isomorphisme par construction.

La démonstration de 1.8.2 est maintenant facile ; les conditions sont évidemment nécessaires ; prouvons qu'elles sont suffisantes. La condition (i) montre qu'il existe un morphisme

$$u : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{H}$$

tel que $u(m_\alpha) = h_\alpha$ pour $\alpha \in \mathrm{R}_0$, et $u|\mathrm{T} = f_{\mathrm{T}}$. La condition (ii) dit que u s'annule sur N_1, ce qui entraîne aussitôt le résultat.

1.9. Fidélité du foncteur $\mathscr{R}$ 270

Proposition 1.9.1. — *Le foncteur* $\mathscr{R}$ *de* 1.6 *est fidèle : si*

$$f, g : \mathrm{G} \rightrightarrows \mathrm{G}'$$

sont deux morphismes de groupes épinglés tels que $\mathscr{R}(f) = \mathscr{R}(g)$*, alors* $f = g$.

En effet, f et g coïncident sur T, U_α $(\alpha \in \mathrm{R}_0)$ et $\mathrm{U}_{-\alpha}$ $(\alpha \in \mathrm{R}_0)$; il suffit donc d'appliquer :

Lemme 1.9.2. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif épinglé,* H *un* S*-préfaisceau en groupes, séparé pour* (fppf)*. Soient*

$$f, g : \mathrm{G} \rightrightarrows \mathrm{H}$$

deux morphismes de S*-groupes. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $f = g$.

(ii) f *et* g *coïncident sur* T*, sur chaque* U_α $(\alpha \in \mathrm{R}_0)$*, sur chaque* $\mathrm{U}_{-\alpha}$ $(\alpha \in \mathrm{R}_0)$.

(iii) f *et* g *coïncident sur* T*, sur chaque* U_α $(\alpha \in \mathrm{R}_0)$ *et* $f(w_\alpha) = g(w_\alpha)$ *pour chaque* $\alpha \in \mathrm{R}_0$.

En effet, (i) $\Rightarrow$ (ii) est trivial, (ii) $\Rightarrow$ (iii) résulte aussitôt de la définition de w_α (1.2). Reste à prouver (iii) $\Rightarrow$ (i). Si $\alpha \in \mathrm{R}$, il existe une suite $\{\alpha_i\} \subset \mathrm{R}_0$ avec $\alpha = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \cdots s_{\alpha_n}(\alpha_{n+1})$ donc

$$\mathrm{U}_\alpha = \mathrm{int}(w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n}) \mathrm{U}_{\alpha_{n+1}},$$

ce qui prouve que f et g coïncident sur chaque U_α. Il s'ensuit que f et g coïncident sur Ω, donc coïncident (Exp. XXII, 4.1.11).

Remarque 1.9.3. — Si G est semi-simple, on peut, dans (ii) et (iii) supprimer l'hypothèse que f et g coïncident sur T. En effet, G est engendré comme faisceau (fppf) par les U_α, $\alpha \in \mathrm{R}$ (Exp. XXII, 6.2.2 (a)).

2. Générateurs et relations pour un groupe épinglé

271 Dans ce n°, on se fixe un S-groupe épinglé G. Si α, $\beta \in \mathrm{R}_0$, on emploiera les notations Z_α, $\mathrm{Z}_{\alpha\beta}$, $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$, $\mathrm{A}_{\alpha\beta}$ de 1.7.

Théorème 2.1. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe épinglé,* H *un* S*-faisceau en groupes pour* (fppf)*. Soient*

$$f_{\mathrm{N}} : \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) \longrightarrow \mathrm{H},$$
$$f_\alpha : \mathrm{U}_\alpha \longrightarrow \mathrm{H}, \qquad \alpha \in \mathrm{R},$$

des morphismes de groupes. Pour qu'il existe un morphisme de groupes (*nécessairement unique*)

$$\overline{f} : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{H}$$

prolongeant f_{N} et les f_α ($\alpha \in \mathrm{R}$)*, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :*

(i) *Pour tout $\alpha \in \mathrm{R}_0$ et tout $\beta \in \mathrm{R}$, on a*

$$\mathrm{int}(f_{\mathrm{N}}(w_\alpha)) \circ f_\beta = f_{s_\alpha(\beta)} \circ \mathrm{int}(w_\alpha).$$

(ii) *Pour tout $\alpha \in \mathrm{R}_0$, il existe un morphisme de groupes*

$$\mathrm{F}_\alpha : \mathrm{Z}_\alpha \longrightarrow \mathrm{H}$$

prolongeant f_α, $f_{-\alpha}$ et $f_{\mathrm{N}}|_{\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{Z}_\alpha}(\mathrm{T})}$.

(iii) *Pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathrm{R}_0 \times \mathrm{R}_0$, il existe un morphisme de groupes $\mathrm{U}_{\alpha\beta} \to \mathrm{H}$ induisant f_γ sur U_γ pour $\gamma \in \mathrm{A}_{\alpha\beta}$ (i.e. $\mathrm{U}_\gamma \subset \mathrm{U}_{\alpha\beta}$).*

2.1.1. — *Démonstration.* Les conditions de l'énoncé sont évidemment nécessaires. Choisissons d'autre part une structure de groupe totalement ordonné sur $\Gamma_0(\mathrm{R})$ de manière que les racines > 0 soient les éléments de R_+ (Exp. XXI, 3.5.6) ; tout produit
272 indexé par une partie de R sera pris relativement à cet ordre. Notons f_{T} la restriction de f_{N} à T et considérons le morphisme

$$f : \Omega \longrightarrow \mathrm{H}$$

défini ensemblistement par

$$f\left(\prod_{\alpha\in\mathrm{R}_-} y_\alpha \cdot t \cdot \prod_{\alpha\in\mathrm{R}_+} x_\alpha\right) = \prod f_\alpha(y_\alpha) \cdot f_{\mathrm{T}}(t) \cdot \prod f_\alpha(x_\alpha).$$

Tout morphisme vérifiant les conditions de l'énoncé doit prolonger f ; d'autre part tout morphisme de groupes $\overline{f} : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ prolongeant f prolonge aussi f_{N} : en effet, prolongeant f_α et $f_{-\alpha}$, il vérifie $\overline{f}(w_\alpha) = \mathrm{F}_\alpha(w_\alpha) = f_{\mathrm{N}}(w_\alpha)$ et il prolonge f_{T} par hypothèse. Par Exp. XXII, 4.1.11 (ii), on est donc ramené à prouver :

Proposition 2.1.2. — *Le morphisme $f : \Omega \to \mathrm{H}$ défini ci-dessus est « génériquement multiplicatif » ; plus précisément, pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et tous $x, y \in \Omega(\mathrm{S}')$ tels que $xy \in \Omega(\mathrm{S}')$, on a $f(xy) = f(x)f(y)$.*

Lemme 2.1.3. — *Si $n \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, et si $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ avec $\mathrm{int}(n)\mathrm{U}_\alpha = \mathrm{U}_\beta$, i.e. $\overline{n}(\alpha) = \beta$, on a*

$$\mathrm{int}(f_{\mathrm{N}}(n)) \circ f_\alpha = f_\beta \circ \mathrm{int}(n).$$

En effet, il suffit de vérifier la formule pour un système de générateurs du faisceau $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$; elle est vraie pour chaque w_α, $\alpha \in \mathrm{R}_0$ (par (i)), il suffit donc de le faire pour $n \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$. C'est trivial par (ii) si α est simple ; sinon, on prend un $w \in \mathrm{W}$ tel $w^{-1}(\alpha) \in \mathrm{R}_0$; écrivant w comme produit de symétries fondamentales, on est ramené à prouver que si la formule est vraie pour α et pour tout n, elle l'est aussi pour $w_{\alpha_0}(\alpha)$ et $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$, où $\alpha_0 \in \mathrm{R}_0$. Or, par (i), on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{int}(f_{\mathrm{N}}(t)) \circ f_{w_{\alpha_0}(\alpha)} &= \mathrm{int}\big(f_{\mathrm{N}}(tw_{\alpha_0})\big) \circ f_\alpha \circ \mathrm{int}(w_{\alpha_0}^{-1}) \\ &= f_{w_{\alpha_0}(\alpha)} \circ \mathrm{int}(tw_{\alpha_0}) \circ \mathrm{int}(w_{\alpha_0}^{-1}).\end{aligned}$$

Lemme 2.1.4. — *La restriction de f à U (resp. U^-) est un morphisme de groupes. En particulier, cette restriction est indépendante de l'ordre choisi sur les racines.* 273

Il suffit de faire la démonstration pour U. En vertu de Exp. XXII, 5.5.8, il suffit de vérifier que pour tout couple $\alpha < \beta$ de racines positives, on a pour tous $x_\alpha \in \mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S}')$, $x_\beta \in \mathrm{U}_\beta(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$,

$$f_\beta(x_\beta)f_\alpha(x_\alpha)f_\beta(x_\beta^{-1}) = f(x_\beta x_\alpha x_\beta^{-1}).$$

En vertu de Exp. XXII, 5.5.2 il existe des $x_\gamma \in \mathrm{U}_\gamma(\mathrm{S}')$ ($\gamma = i\alpha + j\beta \in \mathrm{R}$, $i, j > 0$ avec

$$x_\beta x_\alpha x_\beta^{-1} = \prod_\gamma x_\gamma,$$

et on doit donc vérifier la relation

$$f_\beta(x_\beta)f_\alpha(x_\alpha)f_\beta(x_\beta^{-1}) = \prod_{\substack{\gamma = i\alpha + j\beta \\ i,j>0}} f_\gamma(x_\gamma).$$

Par Exp. XXI, 3.5.4, il existe un $w \in \mathrm{W}$ tel que $w(\alpha) = \alpha_0 \in \mathrm{R}_0$, $w(\beta) \in \mathrm{A}_{\alpha_0\beta_0}$ (notations de 1.7), où $\beta_0 \in \mathrm{R}_0$. Relevant w en un $n \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ (par Exp. XXII, 3.8) il suffit de vérifier la relation précédente après conjugaison par $f_{\mathrm{N}}(n)$. Par 2.1.3, on est donc ramené au cas où $\alpha, \beta \in \mathrm{A}_{\alpha_0\beta_0}$, cas où on conclut par la condition (iii).

Lemme 2.1.5. — *Soit $n \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ tel que $\mathrm{int}(n)\mathrm{U} = \mathrm{U}^-$ (i.e. que $\overline{n}$ soit la symétrie du groupe de Weyl* (Exp. XXI, 3.6.14)). *Pour tout $u \in \mathrm{U}(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ (resp. $u \in \mathrm{U}^-(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$), on a*

$$f(nun^{-1}) = f_{\mathrm{N}}(n)f(u)f_{\mathrm{N}}(n^{-1}).$$

Immédiat par 2.1.3 et 2.1.4.

274 ***Lemme 2.1.6.*** — *Soient* $u \in \mathrm{B}(\mathrm{S}')$, $v \in \mathrm{B}^-(\mathrm{S}')$, $g \in \Omega(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. *Alors*

$$f(vgu) = f(v)f(g)f(u).$$

En effet, posons $v = v_1t_1$, $g = v_2t_2u_2$, $u = t_3u_3$, avec $v_i \in \mathrm{U}^-(\mathrm{S}')$, $t_i \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$, $u_i \in \mathrm{U}(\mathrm{S}')$. On a

$$f(v)f(g)f(u) = f(v_1)f_{\mathrm{T}}(t_1)f(v_2)f_{\mathrm{T}}(t_2)f(u_2)f_{\mathrm{T}}(t_3)f(u_3),$$

d'une part et

$$\begin{aligned} f(vgu) &= f(v_1t_1v_2t_1^{-1}t_1t_2t_3t_3^{-1}u_2t_3u_3) \\ &= f(v_1 \cdot t_1v_2t_1^{-1})f_{\mathrm{T}}(t_1t_2t_3)f(t_3^{-1}u_2t_3 \cdot u_3). \end{aligned}$$

Utilisant 2.1.4 pour décomposer les deux termes extrêmes de cette dernière expression, on obtient

$$f(vgu) = f(v_1)f(t_1v_2t_1^{-1})f_{\mathrm{T}}(t_1t_2t_3)f(t_3^{-1}u_2t_3)f(u_3).$$

On est alors ramené aux formules évidentes

$$\begin{aligned} f(t_1v_2t_1^{-1}) &= f_{\mathrm{T}}(t_1)f(v_2)f_{\mathrm{T}}(t_1)^{-1} \\ f(t_3^{-1}u_2t_3) &= f_{\mathrm{T}}(t_3)^{-1}f(u_2)f_{\mathrm{T}}(t_3), \end{aligned}$$

qui résultent de la définition de f et de 2.1.3.

Lemme 2.1.7. — *Soient* $\alpha \in \mathrm{R}_0$ *et* $g \in \Omega(\mathrm{S}') \cap \mathrm{int}(w_\alpha)^{-1}\Omega(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. *Alors*

$$f(w_\alpha g w_\alpha^{-1}) = f_{\mathrm{N}}(w_\alpha)f(g)f_{\mathrm{N}}(w_\alpha)^{-1}.$$

En effet, soit $g \in \Omega(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. Écrivons, par Exp. XXII, 5.6.8

$$g = a\, x_{-\alpha}\, t\, x_\alpha\, b,$$

275 avec $a \in \mathrm{U}_{-\widehat{\alpha}}(\mathrm{S}')$, $x_{-\alpha} \in \mathrm{U}_{-\alpha}(\mathrm{S}')$, $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$, $x_\alpha \in \mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S}')$, $b \in \mathrm{U}_{\widehat{\alpha}}(\mathrm{S}')$. Par 2.1.3, 2.1.4 et le fait que s_α permute les racines positives $\neq \alpha$ (cf. Exp. XXI, 3.3.2), on a

$$\mathrm{int}(w_\alpha)a \in \mathrm{U}_{-\widehat{\alpha}}(\mathrm{S}'), \qquad \mathrm{int}(w_\alpha)b \in \mathrm{U}_{\widehat{\alpha}}(\mathrm{S}')$$

et la formule à démontrer est vraie pour $g = a$ ou $g = b$. Par 2.1.6, on est donc ramené à démontrer l'assertion cherchée lorsque $g = x_{-\alpha}\, t\, x_\alpha \in \mathrm{Z}_\alpha(\mathrm{S}')$. Mais alors « tout se passe dans Z_α » et on conclut par la condition (ii) de 2.1.

Lemme 2.1.8. — *Soit* $n \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$. *Pour tout* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *et tout* $g \in \Omega(\mathrm{S}')$ *tel que* $\mathrm{int}(n)g \in \Omega(\mathrm{S}')$, *on a*

$$f(ngn^{-1}) = f_{\mathrm{N}}(n)f(g)f_{\mathrm{N}}(n)^{-1}.$$

C'est trivial si $n \in \mathrm{T}(\mathrm{S})$ (par 2.1.3). Les deux membres de la formule précédente définissent des morphismes de $\Omega \cap \mathrm{int}(n)^{-1}\Omega$ dans H ; pour vérifier qu'ils coïncident, il suffit de vérifier qu'il existe un ouvert V_n de Ω, contenant la section unité tel que $\mathrm{int}(n)\mathrm{V}_n \subset \Omega$, et que $f \circ \mathrm{int}(n)$ et $\mathrm{int}(f_{\mathrm{N}}(n)) \circ f$ coïncident sur V_n. En vertu de la structure de $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$, il suffit de prouver que si l'assertion précédente est vraie pour un $n' \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ et si $\alpha \in \mathrm{R}_0$, elle est vraie pour $n = n'w_\alpha$. Posons

$$\mathrm{V}_n = \Omega \cap \mathrm{int}(w_\alpha)^{-1}\mathrm{V}_{n'}\,.$$

On a $\mathrm{int}(n)\mathrm{V}_n \subset \mathrm{int}(n')\mathrm{V}_{n'} \subset \Omega$. Si $g \in \mathrm{V}_n(\mathrm{S}')$, on a

$$\mathrm{int}(n)g = \mathrm{int}(n')\,\mathrm{int}(w_\alpha)g.$$

Or $\mathrm{int}(w_\alpha)g \in \mathrm{V}_{n'}(\mathrm{S}')$, donc par hypothèse

$$f\big(\mathrm{int}(n')\,\mathrm{int}(w_\alpha)g\big) = \mathrm{int}(f_\mathrm{N}(n'))f(\mathrm{int}(w_\alpha)g)\,;$$

comme $\mathrm{int}(w_\alpha)g \in \Omega(\mathrm{S}')$, on peut appliquer 2.1.7, qui donne

$$f(\mathrm{int}(w_\alpha)g) = \mathrm{int}(f_\mathrm{N}(w_\alpha))f(g),$$

et on conclut aussitôt. 276

Démontrons maintenant 2.1.2. Soient x, $x' \in \Omega(\mathrm{S}')$; écrivons comme d'habitude

$$x = vtu, \qquad x' = v't'u',$$

d'où

$$xx' = vt(uv')t'u'.$$

Par 2.1.6 et la relation $\mathrm{U}^-(\mathrm{S}')\Omega(\mathrm{S}')\mathrm{U}(\mathrm{S}') = \Omega(\mathrm{S}')$, on est ramené à prouver que si $uv' \in \Omega(\mathrm{S}')$, on a $f(uv') = f(u)f(v')$. Soit $n \in \underline{\mathrm{Norm}}_\mathrm{G}(\mathrm{T})(\mathrm{S}')$ comme dans 2.1.5 (ii). On a

$$f(u) = f_\mathrm{N}(n)^{-1}f(nun^{-1})f_\mathrm{N}(n),$$
$$f(v') = f_\mathrm{N}(n)^{-1}f(nv'n^{-1})f_\mathrm{N}(n),$$

par loc. cit., d'où

$$f(u)f(v') = f_\mathrm{N}(n)^{-1}f(nun^{-1})f(nv'n^{-1})f_\mathrm{N}(n).$$

Mais $nun^{-1} \in \mathrm{U}^-(\mathrm{S}')$, $nv'n^{-1} \in \mathrm{U}(\mathrm{S}')$, de sorte que

$$f(nun^{-1})f(nv'n^{-1}) = f((nun^{-1})(nv'n^{-1})) = f(nuv'n^{-1}),$$

ce qui donne

$$f(u)f(v') = f_\mathrm{N}(n)^{-1}f(nuv'n^{-1})f_\mathrm{N}(n).$$

Si $uv' \in \Omega(\mathrm{S}')$, on peut appliquer 2.1.8 et on a terminé.

Remarque 2.2. — Au lieu de se donner f_N, on peut se donner un morphisme de groupes $f_\mathrm{T} : \mathrm{T} \to \mathrm{H}$, des sections $h_\alpha \in \mathrm{H}(\mathrm{S})$ ($\alpha \in \mathrm{R}_0$), vérifiant les conditions de 1.8.2. Il faut alors remplacer la condition (ii) du théorème par

(ii′) Il existe un morphisme de groupes $\mathrm{F}_\alpha : \mathrm{Z}_\alpha \to \mathrm{H}$ qui prolonge 277

$$f_\alpha, f_{-\alpha}, f_\mathrm{T} \quad \text{et vérifie} \quad \mathrm{F}_\alpha(w_\alpha) = h_\alpha.$$

Nous allons maintenant donner au théorème précédent une forme plus explicite. Gardons les notations précédentes.

Théorème 2.3. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe épinglé. Soient* H *un* S*-faisceau en groupes pour* (fppf),

$$\begin{aligned} f_\mathrm{T} :&\quad \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{H}, \\ f_\alpha :&\quad \mathrm{U}_\alpha \longrightarrow \mathrm{H}, \qquad \alpha \in \mathrm{R}_0 \end{aligned}$$

des morphismes de groupes et

$$h_\alpha \in \mathrm{H(S)}, \qquad (\alpha \in \mathrm{R}_0),$$

des sections de H. *Pour qu'il existe un morphisme de groupes*

$$f : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{H}$$

(*nécessairement unique*) *induisant* f_T *et les* f_α $(\alpha \in \mathrm{R}_0)$ *et vérifiant* $f(w_\alpha) = h_\alpha$ *pour tout* $\alpha \in \mathrm{R}_0$, *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

(i) *Pour tout* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, *tout* $t \in \mathrm{T(S')}$, *tout* $\alpha \in \mathrm{R}_0$ *et tout* $x \in \mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S}')$, *on a*

$$f_\mathrm{T}(t) f_\alpha(x) f_\mathrm{T}(t)^{-1} = f_\alpha(\mathrm{int}(t)x). \tag{1}$$

(ii) *Pour tout* $\alpha \in \mathrm{R}_0$, *tout* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, *tout* $t \in \mathrm{T(S')}$, *on a*

$$h_\alpha f_\mathrm{T}(t) h_\alpha^{-1} = f_\mathrm{T}(s_\alpha(t)) = f_\mathrm{T}(t \cdot \alpha^*\alpha(t)^{-1}). \tag{2}$$

(iii) *Pour tout* $(\alpha, \beta) \in \mathrm{R}_0 \times \mathrm{R}_0$, *on a*

$$(h_\alpha h_\beta)^{n_{\alpha\beta}} = f_\mathrm{T}(t_{\alpha\beta}). \tag{3}$$

278 (iv) *Pour tout* $\alpha \in \mathrm{R}_0$, *on a* (*rappelons qu'on note* $u_\alpha = \exp_\alpha(\mathrm{X}_\alpha)$)

$$(h_\alpha f_\alpha(u_\alpha))^3 = e. \tag{4}$$

(v) *Pour tout* $(\alpha, \beta) \in \mathrm{R}_0 \times \mathrm{R}_0$, $\alpha \neq \beta$, *il existe un morphisme de groupes*

$$f_{\alpha\beta} : \mathrm{U}_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathrm{H}$$

vérifiant les deux conditions suivantes :

a) *On a*

$$f_{\alpha\beta}|_{\mathrm{U}_\alpha} = f_\alpha, \qquad f_{\alpha\beta}|_{\mathrm{U}_\beta} = f_\beta, \tag{5}$$

b) *Pour tout* $\gamma \in \mathrm{A}_{\alpha\beta}$, $\gamma \neq \alpha$ (*resp.* $\gamma \neq \beta$), *et tout* $x \in \mathrm{U}_\gamma(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, *on a*

$$\mathrm{int}(h_\alpha) f_{\alpha\beta}(x) = f_{\alpha\beta}(\mathrm{int}(w_\alpha)x), \tag{6}$$
$$(\text{resp.} \quad \mathrm{int}(h_\beta) f_{\alpha\beta}(x) = f_{\alpha\beta}(\mathrm{int}(w_\alpha)x)).$$

Démonstration. L'unicité est claire par 1.9.2. Prouvons l'existence.

Lemme 2.3.1. — *Il existe un morphisme de groupes*

$$f_\mathrm{N} : \underline{\mathrm{Norm}}_\mathrm{G}(\mathrm{T}) \longrightarrow \mathrm{H}$$

prolongeant f_T *et vérifiant* $f_\mathrm{N}(w_\alpha) = h_\alpha$.

279 C'est en effet ce qu'affirme 1.8.2, compte tenu des conditions (2) et (3).

Lemme 2.3.2. — *Il existe un morphisme de groupes*

$$\mathrm{F}_\alpha : \mathrm{Z}_\alpha \longrightarrow \mathrm{H}, \qquad \alpha \in \mathrm{R}_0,$$

prolongeant f_T, f_α *et vérifiant* $\mathrm{F}_\alpha(w_\alpha) = h_\alpha$, *donc prolongeant* $f_\mathrm{N}|_{\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{Z}_\alpha}(\mathrm{T})}$.

C'est clair par Exp. XX, 6.2 et les conditions (1), (3) et (4).

Lemme 2.3.3. — *Pour tout* $(\alpha,\beta)\in \mathrm{R}_0\times\mathrm{R}_0$, $\alpha\neq\beta$, *tout* $n\in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{Z}_{\alpha\beta}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ *tel que* $\overline{n}(\alpha)=\alpha$ (*resp.* $\overline{n}(\alpha)=\beta$), *i.e.* $\mathrm{int}(n)\mathrm{U}_\alpha=\mathrm{U}_\alpha$ (*resp.* $\mathrm{int}(n)\mathrm{U}_\alpha=\mathrm{U}_\beta$), *tout* $\mathrm{S}'\to\mathrm{S}$ *et tout* $x\in\mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S}')$, *on a*

$$\begin{aligned}&\mathrm{int}(f_{\mathrm{N}}(n))f_\alpha(x)=f_\alpha(\mathrm{int}(n)x)\\ \text{resp.}\quad&\mathrm{int}(f_{\mathrm{N}}(n))f_\alpha(x)=f_\beta(\mathrm{int}(n)x).\end{aligned}$$

En effet, il existe un $t\in\mathrm{T}(\mathrm{S})$ et une suite $\{\alpha_i\}\subset\{\alpha,\beta\}$ tels que $n=tw_{\alpha_k}\cdots w_{\alpha_1}$. La condition est vérifiée pour $n=t$ par la condition (1). On peut donc supposer $n=w_{\alpha_k}\cdots w_{\alpha_1}$. Faisons la démonstration par récurrence sur k, i.e. supposons l'assertion prouvée pour tout n qui s'écrit comme un produit de moins de $k-1$ symétries fondamentales (et vérifie les hypothèses du lemme). Considérons les racines

$$\gamma_i=s_{\alpha_i}\cdots s_{\alpha_1}(\alpha).$$

Si tous les γ_i sont positifs, i.e. $\in\mathrm{A}_{\alpha\beta}$, on peut appliquer la condition (v) de 2.3.; prenant les notations de 2.3 (v), on conclut aussitôt par récurrence que

$$\mathrm{int}\left(f_{\mathrm{N}}(w_{\alpha_i}\cdots w_{\alpha_1})\right)f_\alpha(x)=f_{\alpha\beta}(\mathrm{int}(w_{\alpha_i}\ldots w_{\alpha_1})x),$$

soit pour $i=k$ la propriété cherchée. Si tous les γ_i ne sont pas positifs, il existe un **280**
$j<k$ avec

$$\gamma_j\in\mathrm{R}_+,\qquad \gamma_{j+1}\notin\mathrm{R}_+.$$

Comme $\gamma_{j+1}=s_{\alpha_j}(\gamma_j)$, il s'ensuit aussitôt que $\gamma_j=\alpha_j$, par Exp. XXI, 3.3.2, donc que γ_j est α ou β, et on peut décomposer n en

$$\begin{aligned}n&=n'\cdot n'',\\ n'&=w_{\alpha_k}\cdots w_{\alpha_{j+1}},\\ n''&=w_{\alpha_j}\cdots w_{\alpha_1},\end{aligned}$$

n' et n'' vérifiant les hypothèses du lemme et étant produit de moins de $k-1$ symétries, donc vérifiant par l'hypothèse de récurrence la conclusion du lemme.

Lemme 2.3.4. — *Soit* $\alpha\in\mathrm{R}$. *Si* $n,n'\in\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ *et* $\beta,\beta'\in\mathrm{R}_0$ *vérifient* $\overline{n}(\alpha)=\beta$ *et* $\overline{n}'(\alpha)=\beta'$, *on a*

$$\mathrm{int}\left(f_{\mathrm{T}}(n)^{-1}\right)f_\beta(n\,x\,n^{-1})=\mathrm{int}\left(f_{\mathrm{T}}(n')^{-1}\right)f_{\beta'}(n'\,x\,n'^{-1}),$$

pour tout $x\in\mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}'\to\mathrm{S}$.

Il suffit de vérifier que si $\overline{n}(\alpha)=\beta$, α, $\beta\in\mathrm{R}_0$, alors $\mathrm{int}(f_{\mathrm{T}}(n))\circ f_\alpha=f_\beta\circ\mathrm{int}(n)$. Or d'après le lemme de Tits (Exp. XXI, 5.1), il existe une suite de racines simples $\alpha_0=\alpha,\alpha_1,\ldots,\alpha_m=\beta$, et une suite d'éléments $w_i\in\mathrm{W}$, $i=0,1,\ldots,m-1$, avec

$$\begin{aligned}&\overline{n}=w_{m-1}\cdots w_0,\\ &w_i(\alpha_i)=\alpha_{i+1},\quad i=0,1,\ldots m-1,\end{aligned}$$

la condition suivante étant en outre vérifiée : pour tout $i=0,1,\ldots m-1$, il existe **281**
une racine simple β_i telle que

$$w_i\in\mathrm{W}_{\alpha_i\beta_i},\quad \alpha_{i+1}=\alpha_i\quad\text{ou}\quad\beta_i.$$

On est alors ramené par récurrence au cas traité dans le lemme précédent.

Lemme 2.3.5. — *Il existe une famille* f'_γ, $\gamma \in \mathrm{R}$, *de morphismes de groupes* $f'_\gamma : \mathrm{U}_\gamma \to \mathrm{H}$ *vérifiant*

(i) *Pour* $\alpha \in \mathrm{R}_0$, *on a* $f'_\alpha = f_\alpha$ *et* $f'_{-\alpha} = \mathrm{F}_\alpha|_{\mathrm{U}_{-\alpha}}$ *où* F_α *est défini dans* 2.3.2.

(ii) *Pour* α, $\beta \in \mathrm{R}_0$ *et* $\gamma \in \mathrm{A}_{\alpha\beta}$, *on a* $f'_\gamma = f_{\alpha\beta}|\mathrm{U}_\gamma$.

(iii) *Pour tout* $n \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ *et* $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ *tels que* $\overline{n}(\alpha) = \beta$, *on a*

$$\mathrm{int}(f_{\mathrm{N}}(n))f'_\alpha(x) = f'_\beta(\mathrm{int}(n)x)$$

pour tout $x \in \mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$.

Pour toute racine $\alpha \in \mathrm{R}$, il existe un $n \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ tel que $\overline{n}(\alpha) \in \mathrm{R}_0$. Définissons alors $f'_\alpha(x)$ comme l'expression de 2.3.4. Celle-ci est indépendante du choix de n et f'_α est bien un morphisme de groupes. La propriété (iii) est vérifiée par construction. La première assertion de (i) est claire (prendre $n = e$), la seconde aussi (prendre $n = w_\alpha$ et appliquer 2.3.2) ; si $\gamma \in \mathrm{A}_{\alpha\beta}$, $(\alpha, \beta \in \mathrm{R}_0)$, il existe $n \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{Z}_{\alpha\beta}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ tel que $\overline{n}(t) = \alpha$ ou β ; on applique alors (iii) et les conditions (5) et (6) et on a prouvé (ii).

2.3.6. — Démontrons maintenant le théorème en prouvant que les conditions de 2.1 sont vérifiées, pour les morphismes f_{N} et f'_α, $\alpha \in \mathrm{R}$.

282

2.1 (i) résulte de 2.3.5 (iii),
2.1 (ii) résulte de 2.3.5 (i) et 2.3.2,
2.1 (iii) résulte de 2.3.5 (ii) et du fait que $f_{\alpha\beta}$ est un morphisme de groupes.

Un corollaire évident est :

Corollaire 2.4. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe épinglé de rang semi-simple* $\geqslant 1$, H *un* S*-faisceau* (fppf) *en groupes. Pour chaque* $(\alpha, \beta) \in \mathrm{R}_0 \times \mathrm{R}_0$, *soit*

$$\mathrm{F}_{\alpha\beta} : \mathrm{Z}_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathrm{H}$$

un morphisme de groupes. Pour qu'il existe un morphisme de groupes

$$f : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{H}$$

induisant les $\mathrm{F}_{\alpha\beta}$, *il faut et il suffit que pour tout* $(\alpha, \beta) \in \mathrm{R}_0 \times \mathrm{R}_0$, *on ait*

$$\mathrm{F}_{\alpha\beta}|_{\mathrm{Z}_\alpha} = \mathrm{F}_{\alpha\alpha}.$$

La condition est évidemment nécessaire. Supposons-la vérifiée. Posons $f_{\mathrm{T}} = \mathrm{F}_{\alpha\alpha}|_{\mathrm{T}}$ (qui ne dépend pas de α, car $\mathrm{F}_{\alpha\alpha}|_{\mathrm{T}} = \mathrm{F}_{\alpha\beta}|_{\mathrm{T}} = \mathrm{F}_{\beta\beta}|_{\mathrm{T}}$). Posons

$$p_\alpha = \mathrm{F}_{\alpha\alpha}|_{\mathrm{U}_\alpha}, \qquad h_\alpha = \mathrm{F}_{\alpha\alpha}(w_\alpha), \qquad f_{\alpha\beta} = \mathrm{F}_{\alpha\beta}|_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}}.$$

Les conditions de 2.3 sont évidemment vérifiées : (1), (2), (4) « se vérifient » dans Z_α, (3), (5) et (6) dans $\mathrm{Z}_{\alpha\beta}$. Il existe donc un morphisme $f : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ prolongeant f_{T}, les f_α, $\alpha \in \mathrm{R}_0$ et vérifiant $f(w_\alpha) = h_\alpha$; il coïncide avec $\mathrm{F}_{\alpha\beta}$ sur des générateurs de $\mathrm{Z}_{\alpha\beta}$, donc vérifie $f|_{\mathrm{Z}_{\alpha\beta}} = \mathrm{F}_{\alpha\beta}$.

On a également le corollaire technique suivant :

283 ***Corollaire 2.5.*** — *Soient* S *un préschéma,* G *et* G′ *deux* S*-groupes épinglés de rang semi-simple* 2*, q un entier* > 0 *tel que* $x \mapsto x^q$ *soit un endomorphisme de* $\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}$*, $h : \mathscr{R}(\mathrm{G}') \to \mathscr{R}(\mathrm{G})$ un q-morphisme de données radicielles épinglées. Choisissons pour chaque $\alpha \in \mathrm{R}_+$ un $\mathrm{X}_\alpha \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^\alpha)^*$ et un $\mathrm{X}'_{u(\alpha)} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}'^{u(\alpha)})^*$ (prolongeant les choix canoniques pour $\alpha \in \mathrm{R}_0$). Supposons réalisées les conditions suivantes :*

(i) *Si* $\mathrm{R}_0 = \{\alpha, \beta\}$*, on a* $\mathrm{D}_\mathrm{S}(h)(t_{\alpha\beta}) = t'_{u(\alpha)u(\beta)}$.

(ii) *Pour tout* $\alpha \in \mathrm{R}_0$ *et tout* $\beta \in \mathrm{R}_+$*,* $\beta \neq \alpha$ *(d'où* $s_\alpha(\beta) \in \mathrm{R}_+$*), si* $z \in \mathbb{G}_m(\mathrm{S})$ *est défini par*

$$\mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_\beta = z\mathrm{X}_{s_\alpha(\beta)},$$

on a aussi

$$\mathrm{Ad}(w'_{u(\alpha)})\mathrm{X}'_{u(\beta)} = z^{q(\beta)}\mathrm{X}'_{u(s_\alpha(\beta))}.$$

(iii) *Il existe un morphisme de groupes* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{U}'$ *tel que pour tout* $\alpha \in \mathrm{R}_+$*, on ait pour tout* $x \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S}')$*,* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$.

$$f(\exp(x\mathrm{X}_\alpha)) = \exp(x^{q(\alpha)}\mathrm{X}'_{u(\alpha)}).$$

Alors il existe un morphisme de groupes épinglés $\mathrm{G} \xrightarrow{g} \mathrm{G}'$ *tel que* $\mathscr{R}(g) = h$.

En effet, on définit $f_\alpha : \mathrm{U}_\alpha \to \mathrm{G}'$ par

$$f_\alpha(\exp(x\mathrm{X}_\alpha)) = \exp(x^{q(\alpha)}\mathrm{X}'_{u(\alpha)});$$

on pose $f_\mathrm{T} = \mathrm{D}_\mathrm{S}(h)$, $h_\alpha = w'_{u(\alpha)}$. Les conditions de 2.3 sont vérifiées (remarquer que $q(s_\alpha(\beta)) = q(\beta)$ (Exp. XXI, 6.8.4) et que l'on a toujours $\mathrm{D}_\mathrm{S}(h)(t_\alpha) = t'_{u(\alpha)}$) et on conclut aussitôt.

Remarque 2.6. — On peut préciser ainsi la condition (v) de 2.3. On doit d'abord vérifier :

(a) Pour tout mot en w_α et w_β tel que le mot correspondant transforme α *ou* β en 284
α *ou* β, la relation du type 2.3.3 correspondante est vérifiée. En fait la démonstration de 2.3.3 montre qu'il suffit de le vérifier pour les mots en w_α et w_β qui sont minimaux (au sens que tout sous-mot initial non trivial ne vérifie pas les conditions imposées).

Si la condition (a) est vérifiée, on peut maintenant définir pour chaque $\gamma \in \mathrm{A}_{\alpha\beta}$ un $f_\gamma : \mathrm{U}_\gamma \to \mathrm{H}$ comme en 2.3.5 ; on doit alors écrire :

(b) Le morphisme

$$\mathrm{U}_{\alpha\beta} = \prod_{\gamma \in \mathrm{A}_{\alpha\beta}} \mathrm{U}_\gamma \longrightarrow \mathrm{H}$$

défini par les f_γ est un morphisme de groupes. Par Exp. XXII, 5.5.8, (b) est entraîné par :

(b′) Le morphisme précédent respecte les relations de commutations entre U_γ et U_δ pour $\gamma, \delta \in \mathrm{A}_{\alpha\beta}$, $\gamma > \delta$ (i.e. les relations en $\mathrm{C}_{i,j,\gamma,\delta}$ de Exp. XII, 5.5.2).

Il est clair que réciproquement, l'ensemble des conditions (a) et (b′) est équivalent à (v).

On peut même réduire les conditions précédentes à des conditions portant uniquement sur les éléments h_α, h_β, $f_\alpha(u_\alpha)$, $f_\beta(u_\beta)$ de H. Une condition du type (a) s'écrira par exemple, si $s_\alpha s_\beta s_\alpha(\beta) = \alpha$:

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{int}(h_\alpha h_\beta h_\alpha) f_\beta(x) = f_\alpha(\operatorname{int}(w_\alpha w_\beta w_\alpha)x);$$

pour tout $x \in \mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. En particulier, pour $x = u_\beta$, on a $\operatorname{int}(w_\alpha w_\beta w_\alpha)u_\beta = u_\alpha^z$ pour une certaine section z de $\mathbb{G}_m(\mathrm{S})$, et la relation précédente donnera

$$\text{(1}'\text{)} \qquad \operatorname{int}(h_\alpha h_\beta h_\alpha) f_\beta(u_\beta) = f_\alpha(u_\alpha)^z.$$

285 Montrons que réciproquement, en tenant compte des conditions (i) à (iv) de 2.3, (1′) entraîne (1). Si $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, faisons opérer $\operatorname{int}(t)$ sur (1′) ; tenant compte des conditions (i) et (ii), on obtient (1) pour $x = \operatorname{int}(t)u_\beta = u_\beta^{\beta(t)}$. Il suffit de remarquer maintenant que $\beta : \mathrm{T} \to \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$ est fidèlement plat, donc que la condition (1) est certainement vraie pour $x \in \mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S}')^*$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. Comme elle est additive en x et que toute section de U_α s'écrit localement comme somme de deux sections de U_α^*, on en conclut bien que $(1') + (\mathrm{i}) + (\mathrm{ii}) \Longrightarrow (1)$.

On raisonne de même avec les conditions du type (b). Il faut alors se servir du fait que si γ et γ' sont deux racines positives distinctes (et donc linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$), le morphisme $\mathrm{T} \to \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}^2$ de composantes γ et γ' est fidèlement plat. Nous laissons au lecteur les détails de cette transposition.

3. Groupes de rang semi-simple 2

3.1. Généralités

Lemme 3.1.1. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe épinglé,* α *et* β *deux racines de* G*, avec* $\alpha + \beta \neq 0$.

(i) *Si* $\alpha + \beta \notin \mathrm{R}$, *on a*

$$\exp(\mathrm{X}_\alpha)\exp(\mathrm{X}_\beta) = \exp(\mathrm{X}_\beta)\exp(\mathrm{X}_\alpha)$$

pour tous $\mathrm{X}_\alpha \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha)(\mathrm{S}')$, $\mathrm{X}_\beta \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^\beta)(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$.

(ii) *Si* $\alpha + \beta$ *et* $\alpha - \beta$ *ne sont pas racines, on a*

$$w_\alpha(z_\alpha)\exp(\mathrm{X}_\beta)w_\alpha(z_\alpha)^{-1} = \exp(\mathrm{X}_\beta)$$

286 *pour tous* $\mathrm{X}_\beta \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^\beta)(\mathrm{S}')$, $z_\alpha \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha)^*(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, *et*

$$w_\alpha(z_\alpha)w_\beta(z_\beta) = w_\beta(z_\beta)w_\alpha(z_\alpha)$$

pour tous $z_\alpha \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha)^*(\mathrm{S}')$ *et* $z_\beta \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^\beta)^*(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$.

(iii) *Soient* $\mathrm{X}_\alpha \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha)^*(\mathrm{S}')$, $\mathrm{X}_\beta \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^\beta)^*(\mathrm{S}')$, *et* $w \in \underline{\mathrm{Norm}}_\mathrm{G}(\mathrm{T})(\mathrm{S}')$ *tels que* $\overline{w}(\alpha) = \beta$ *; définissons* $z \in \mathbb{G}_m(\mathrm{S}')$ *par*

$$\operatorname{Ad}(w)\mathrm{X}_\alpha = z\mathrm{X}_\beta.$$

Alors

$$\begin{aligned}\operatorname{int}(w)\exp(x\mathrm{X}_\alpha) &= \exp(xz\mathrm{X}_\beta),\\ \operatorname{int}(w)\exp(y\mathrm{X}_\alpha^{-1}) &= \exp(yz^{-1}\mathrm{X}_\beta^{-1}),\\ \operatorname{int}(w)w_\alpha(\mathrm{X}_\alpha) &= \beta^*(z)w_\beta(\mathrm{X}_\beta).\end{aligned}$$

En particulier, si $z = \pm 1$*, on a*

$$\operatorname{int}(w)w_\alpha(\mathrm{X}_\alpha) = w_\beta(\mathrm{X}_\beta)^z.$$

(iv) *Si on pose* $t_\alpha = \alpha^*(-1)$, $t_\beta = \beta^*(-1)$*, on a*

$$s_\alpha(t_\beta) = t_\beta\, t_\alpha^{(\beta^*,\,\alpha)}, \qquad \beta(t_\alpha) = (-1)^{(\alpha^*,\,\beta)}.$$

Démonstration. (i) résulte aussitôt de Exp. XXII, 5.5.2, (ii) de Exp. XX, 3.1 et de (i) appliqué à (β,α), $(\beta,-\alpha)$, $(-\beta,\alpha)$, $(-\beta,-\alpha)$, (iii) est évident sur les définitions ; pour la dernière assertion de (iii), remarquer que $\beta^*(-1) = w_\beta(\mathrm{X}_\beta)^{-2}$. Enfin, (iv) est trivial.

***Proposition 3.1.2* (Groupes de type $\mathrm{A}_1\times\mathrm{A}_1$). —** *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe épinglé de type* $\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_1$*, notons* $\mathrm{R}_0 = \mathrm{R}_+ = \{\alpha,\beta\}$.

(i) *On a* **287**

$$t_{\alpha\beta} = (w_\alpha w_\beta)^2 = t_\alpha t_\beta = (w_\beta w_\alpha)^2 = t_{\beta\alpha}.$$

(ii) *On a*

$$\operatorname{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_\beta = \mathrm{X}_\beta, \qquad \operatorname{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_\alpha = \mathrm{X}_\alpha.$$

(iii) U_α *et* U_β *commutent (i.e.* U *est commutatif).*

En effet, par l'assertion (ii) du lemme, on a

$$w_\alpha w_\beta = w_\beta w_\alpha,$$

d'où $(w_\alpha w_\beta)^2 = w_\alpha^2 w_\beta^2 = t_\alpha t_\beta$, soit (i). Par l'assertion (ii) du lemme, on a également (ii) ; enfin (iii) est l'assertion (i) du lemme.

***3.1.3.* —** Explicitions ici la condition (v) de 2.3. En utilisant la méthode exposée en 2.6, on obtient les deux groupes de conditions suivants, en posant $v_\alpha = f_\alpha(u_\alpha)$, pour $\alpha\in\mathrm{R}_0$:

$$\text{(A)}\ \begin{cases} h_\alpha v_\beta h_\alpha^{-1} = v_\beta\\ h_\beta v_\alpha h_\beta^{-1} = v_\alpha\end{cases} \qquad\qquad \text{(B)}\quad v_\alpha v_\beta = v_\beta v_\alpha.$$

3.2. Groupes de type A_2

***Proposition 3.2.1.* —** *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe épinglé de type* A_2*, notons* $\mathrm{R}_0 = \{\alpha,\beta\}$, $\mathrm{R}_+ = \{\alpha,\beta,\alpha+\beta\}$.

(i) *On a* **288**

$$t_{\alpha\beta} = (w_\alpha w_\beta)^3 = e = (w_\beta w_\alpha)^3 = t_{\beta\alpha}.$$

(ii) *Posons* $\mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_\alpha = \mathrm{X}_{\alpha+\beta}$. *Alors*

$$\mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_\beta = -\mathrm{X}_{\alpha+\beta},$$
$$\mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_{\alpha+\beta} = \mathrm{X}_\beta,$$
$$\mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_{\alpha+\beta} = -\mathrm{X}_\alpha.$$

(iii) *Posons* $p_{\alpha+\beta}(x) = \exp(x\mathrm{X}_{\alpha+\beta}) = \mathrm{int}(w_\beta)\, p_\alpha(x)$. *On a :*

$$p_\beta(y)\, p_\alpha(x) = p_\alpha(x)\, p_\beta(y)\, p_{\alpha+\beta}(xy).$$

***3.2.2.* —** On a $(\beta^*, \alpha) = (\alpha^*, \beta) = -1$, d'où $\alpha(t_\beta) = \beta(t_\alpha) = -1$.

Posons $\mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_\alpha = \mathrm{X}_{\alpha+\beta}$; on a aussitôt

$$\mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_{\alpha+\beta} = \alpha(t_\beta)\mathrm{X}_\alpha = -\mathrm{X}_\alpha.$$

Posons

$$\mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_\beta = z\mathrm{X}_{\alpha+\beta}, \quad z \in \mathbb{G}_m(\mathrm{S}),$$

d'où

$$\mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_{\alpha+\beta} = \beta(t_\alpha)z^{-1}\mathrm{X}_\beta = -z^{-1}\mathrm{X}_\beta.$$

Nous savons (Exp. XXII, 5.5.2), qu'il existe une unique section $\mathrm{A} \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S})$, avec

$$(+) \qquad p_\beta(y)\, p_\alpha(x) = p_\alpha(x)\, p_\beta(y)\, p_{\alpha+\beta}(\mathrm{A}xy).$$

Il s'agit donc pour prouver (ii) et (iii) de montrer que $\mathrm{A} = -z = 1$.

289 ***3.2.3.* —** Faisons opérer $\mathrm{int}(w_\beta)$ sur la formule (+) précédente, on obtient :

$$(++) \qquad p_{-\beta}(-y)\, p_{\alpha+\beta}(x) = p_{\alpha+\beta}(x)\, p_{-\beta}(-y)\, p_\alpha(-\mathrm{A}xy)$$

***3.2.4.* —** Par définition de $p_{\alpha+\beta}$, on a

$$w_\beta\, p_\alpha(x)\, w_\beta^{-1} = p_{\alpha+\beta}(x),$$

ce qui s'écrit

$$p_\beta(1)\, p_{-\beta}(-1)\, p_\beta(1)\, p_\alpha(x)\, p_\beta(-1)\, p_{-\beta}(1)\, p_\beta(-1) = p_{\alpha+\beta}(x).$$

Comme p_β et $p_{\alpha+\beta}$ commutent, $\alpha + 2\beta$ n'étant pas racine, cela s'écrit aussi

$$p_\beta(1)\, p_\alpha(x)\, p_\beta(-1) = p_{-\beta}(1)\, p_{\alpha+\beta}(x)\, p_{-\beta}(-1).$$

Utilisant maintenant (+) dans le premier membre et (++) dans le second, on obtient :

$$p_\alpha(x)\, p_\beta(1)\, p_{\alpha+\beta}(\mathrm{A}x)\, p_\beta(-1) = p_{\alpha+\beta}(x)\, p_{-\beta}(1)\, p_\alpha(\mathrm{A}x)\, p_{-\beta}(-1),$$

ce qui, $\alpha + 2\beta$ et $\alpha - \beta$ n'étant pas racines, s'écrit

$$p_\alpha(x)\, p_{\alpha+\beta}(\mathrm{A}x) = p_{\alpha+\beta}(x)\, p_\alpha(\mathrm{A}x).$$

Comme $2\alpha + \beta$ n'est pas racine, ceci donne $\mathrm{A} = 1$.

***3.2.5.* —** Faisons maintenant opérer $\mathrm{int}(w_\alpha)$ sur la formule (+), on trouve, en utilisant le fait que $\mathrm{A} = 1$,

$$(+++) \qquad p_{\alpha+\beta}(zy)\, p_{-\alpha}(-x) = p_{-\alpha}(-x)\, p_{\alpha+\beta}(zy)\, p_\beta(-z^{-1}xy).$$

3.2.6. — Écrivons maintenant comme tout-à-l'heure

$$w_\alpha\, p_\beta(y)\, w_\alpha^{-1} = p_{\alpha+\beta}(zy),$$

soit 290

$$p_\alpha(1)\, p_\beta(y)\, p_\alpha(-1) = p_{-\alpha}(1)\, p_{\alpha+\beta}(zy)\, p_{-\alpha}(-1).$$

Utilisant maintenant (+) et (+++), cela s'écrit aussi

$$p_\beta(y)\, p_{\alpha+\beta}(-y) = p_{\alpha+\beta}(zy)\, p_\beta(-z^{-1}y),$$

et donne donc $z = -1$.

3.2.7. — On a donc prouvé (ii) et (iii), prouvons (i). On a

$$w_\alpha\, w_\beta\, w_\alpha = w_\alpha\, w_\beta\, w_\alpha^{-1}\, w_\alpha^2 = w_{\alpha+\beta}^{-1}\, t_\alpha,$$

d'où

$$\begin{aligned} w_\beta\, w_\alpha\, w_\beta\, w_\alpha\, w_\beta = w_\beta\, w_{\alpha+\beta}^{-1}\, t_\alpha w_\beta = w_\beta\, w_{\alpha+\beta}^{-1} w_\beta^{-1} \cdot s_\beta(t_\alpha) \cdot t_\beta = \\ = w_\alpha \cdot t_\alpha t_\beta \cdot t_\beta = w_\alpha t_\alpha = w_\alpha^{-1}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$(w_\alpha\, w_\beta)^3 = (w_\beta\, w_\alpha)^3 = e,$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque 3.2.8. — La condition (v) de 2.3 se traduit ici par (notant $v_\alpha = f_\alpha(u_\alpha)$) :

$$\text{(A)}\quad h_\alpha v_\beta^{-1} h_\alpha^{-1} = h_\beta v_\alpha h_\beta^{-1} \qquad\qquad \text{(B)}\ \begin{cases} v_\beta v_\alpha = v_\alpha v_\beta \cdot h_\beta v_\alpha h_\beta^{-1}, \\ v_\beta \cdot h_\beta v_\alpha h_\beta^{-1} = h_\beta v_\alpha h_\beta^{-1} \cdot v_\beta, \\ v_\alpha \cdot h_\beta v_\alpha h_\beta^{-1} = h_\beta v_\alpha h_\beta^{-1} \cdot v_\alpha. \end{cases}$$

Posant $v_{\alpha+\beta} = \mathrm{int}(h_\beta)v_\alpha$, les trois dernières conditions s'écrivent aussi 291

$$\text{(B)}\ \begin{cases} v_\beta v_\alpha = v_\alpha v_\beta v_{\alpha+\beta}, \\ v_\alpha v_{\alpha+\beta} = v_{\alpha+\beta} v_\alpha, \\ v_\beta v_{\alpha+\beta} = v_{\alpha+\beta} v_\beta. \end{cases}$$

3.3. Groupes de type B_2

Proposition 3.3.1. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe épinglé de type* B_2*, notons* $\mathrm{R}_0 = \{\alpha, \beta\}$, $\mathrm{R}_+ = \{\alpha, \beta, \alpha+\beta, 2\alpha+\beta\}$.

(i) *On a*

$$t_{\alpha\beta} = (w_\alpha w_\beta)^4 = t_\alpha = (w_\beta w_\alpha)^4 = t_{\beta\alpha}.$$

(ii) *Si on pose*

$$\mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_\alpha = \mathrm{X}_{\alpha+\beta}, \qquad \mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_\beta = \mathrm{X}_{2\alpha+\beta},$$

on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_{\alpha+\beta} &= -\mathrm{X}_{\alpha+\beta},\\ \mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_{2\alpha+\beta} &= \mathrm{X}_\beta,\\ \mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_{\alpha+\beta} &= -\mathrm{X}_\alpha,\\ \mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_{2\alpha+\beta} &= \mathrm{X}_{2\alpha+\beta}.\end{aligned}$$

(iii) *Posons* $p_{\alpha+\beta}(x) = \exp(x\mathrm{X}_{\alpha+\beta}) = \mathrm{int}(w_\beta)\, p_\alpha(x)$

$$p_{2\alpha+\beta}(x) = \exp(x\mathrm{X}_{2\alpha+\beta}) = \mathrm{int}(w_\alpha)\, p_\beta(x).$$

Alors :

$$\begin{aligned}p_\beta(y)\, p_\alpha(x) &= p_\alpha(x)\, p_\beta(y)\, p_{\alpha+\beta}(xy)\, p_{2\alpha+\beta}(x^2y),\\ p_{\alpha+\beta}(y)\, p_\alpha(x) &= p_\alpha(x)\, p_{\alpha+\beta}(y)\, p_{2\alpha+\beta}(2xy).\end{aligned}$$

292 ***3.3.2. —*** On a $(\beta^*, \alpha) = -1$, $(\alpha^*, \beta) = -2$, d'où $\alpha(t_\beta) = -1$, $\beta(t_\alpha) = 1$. Notons en passant que $\beta(t_\alpha) = \alpha(t_\alpha) = 1$, ce qui montre que t_α est une section de $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})$. Posons

$$\mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_\alpha = \mathrm{X}_{\alpha+\beta}, \qquad \mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_\beta = \mathrm{X}_{2\alpha+\beta}.$$

On a aussitôt

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_{\alpha+\beta} &= \alpha(t_\beta)\mathrm{X}_\alpha = -\mathrm{X}_\alpha,\\ \mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_{2\alpha+\beta} &= \beta(t_\alpha)\mathrm{X}_\beta = \mathrm{X}_\beta.\end{aligned}$$

Comme $(2\alpha+\beta)+\beta$ et $(2\alpha+\beta)-\beta$ ne sont pas racines, on a

$$\mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_{2\alpha+\beta} = \mathrm{X}_{2\alpha+\beta}.$$

Il existe un scalaire $k \in \mathbb{G}_m(\mathrm{S})$, avec

$$\mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_{\alpha+\beta} = k\mathrm{X}_{\alpha+\beta}.$$

D'autre part, par Exp. XXII, 5.5.2, il existe des sections A, B, C $\in \mathbb{G}_a(\mathrm{S})$, avec

$$p_\beta(y)p_\alpha(x) = p_\alpha(x)p_\beta(y)p_{\alpha+\beta}(\mathrm{A}xy)\, p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{B}x^2y), \tag{1}$$

$$p_{\alpha+\beta}(y)\, p_\alpha(x) = p_\alpha(x)\, p_{\alpha+\beta}(y)\, p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{C}xy). \tag{2}$$

Il s'agit donc, dans (ii) et (iii), de prouver A = B = 1, C = 2, $k = -1$.

3.3.3. — Faisons opérer $\mathrm{int}(w_\alpha)$ sur la formule (2). On trouve

$$p_{2\alpha+\beta}(y)\, p_{-\alpha}(-x) = p_{-\alpha}(-x)\, p_{2\alpha+\beta}(y)p_{\alpha+\beta}(\mathrm{A}kxy)p_\beta(\mathrm{B}x^2y). \tag{3}$$

Transformant de même (2), on obtient

$$p_{\alpha+\beta}(ky)\, p_{-\alpha}(-x) = p_{-\alpha}(-x)\, p_{\alpha+\beta}(ky)\, p_\beta(\mathrm{C}xy). \tag{4}$$

293 Transformant (1) par $\mathrm{int}(w_\beta)$, on a

$$p_{-\beta}(-y)\, p_{\alpha+\beta}(x) = p_{\alpha+\beta}(x)\, p_{-\beta}(-y)\, p_\alpha(-\mathrm{A}xy)\, p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{B}x^2y). \tag{5}$$

***3.3.4.* —** Écrivons
$$w_\beta p_\alpha(\mathrm{X}) w_\beta^{-1} = p_{\alpha+\beta}(x).$$
Comme $\alpha + 2\beta$ n'est pas racine, cela donne
$$p_\beta(1)\, p_\alpha(x)\, p_\beta(-1) = p_{-\beta}(1)\, p_{\alpha+\beta}(x)\, p_{-\beta}(-1).$$
Utilisant (1) au premier membre et (5) au second,
$$p_\alpha(x)\, p_\beta(1)\, p_{\alpha+\beta}(\mathrm{A}x)\, p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{B}x^2)\, p_\beta(-1) = \\ p_{\alpha+\beta}(x)\, p_{-\beta}(1)\, p_\alpha(\mathrm{A}x)\, p_{2\alpha+\beta}(-\mathrm{B}x^2)\, p_{-\beta}(-1).$$
Comme p_β commute à $p_{\alpha+\beta}$ et $p_{2\alpha+\beta}$ d'une part, et $p_{-\beta}$ commute à p_α et $p_{2\alpha+\beta}$ d'autre part, cela s'écrit
$$p_\alpha(x)\, p_{\alpha+\beta}(\mathrm{A}x)\, p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{B}x^2) = p_{\alpha+\beta}(x)\, p_\alpha(\mathrm{A}x)\, p_{2\alpha+\beta}(-\mathrm{B}x^2).$$
Transformant le second membre par (2),
$$p_\alpha(x)\, p_{\alpha+\beta}(\mathrm{A}x) p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{B}x^2) = p_\alpha(\mathrm{A}x) p_{\alpha+\beta}(x) p_{2\alpha+\beta}((\mathrm{AC}-\mathrm{B})x^2),$$
d'où enfin
$$\mathrm{A} = 1, \qquad \mathrm{C} = 2\mathrm{B}.$$

***3.3.5.* —** Écrivons maintenant
$$w_\alpha p_\beta(y) w_\alpha^{-1} = p_{2\alpha+\beta}(y).$$
Comme $3\alpha + \beta$ n'est pas racine, cela donne
$$p_\alpha(1)\, p_\beta(y)\, p_\alpha(-1) = p_{-\alpha}(1)\, p_{2\alpha+\beta}(y)\, p_{-\alpha}(-1).$$
Utilisant (1) au premier membre, (3) au second, on obtient 294
$$p_\beta(y) p_{\alpha+\beta}(-\mathrm{A}y) p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{B}y) = p_{2\alpha+\beta}(y)\, p_{\alpha+\beta}(\mathrm{A}ky)\, p_\beta(\mathrm{B}y).$$
Comme $p_{\alpha+\beta}$, $p_{2\alpha+\beta}$, et p_β commutent, cela donne aussitôt
$$\mathrm{B} = 1, \qquad -\mathrm{A} = \mathrm{A}k,$$
d'où enfin
$$\mathrm{A} = 1, \qquad \mathrm{B} = 1, \qquad \mathrm{C} = 2, \qquad k = -1.$$

***3.3.6.* —** On a donc prouvé (ii) et (iii). Prouvons (i) :
$$w_\alpha w_\beta w_\alpha = w_\alpha w_\beta w_\alpha^{-1} t_\alpha = w_{2\alpha+\beta} t_\alpha,$$
$$w_\beta w_\alpha w_\beta w_\alpha w_\beta = w_\beta w_{2\alpha+\beta} w_\beta^{-1} \cdot s_\beta(t_\alpha) \cdot t_\beta = w_{2\alpha+\beta} t_\alpha t_\beta,$$
$$w_\alpha w_\beta w_\alpha w_\beta w_\alpha w_\beta w_\alpha = w_\alpha w_{2\alpha+\beta} w_\alpha^{-1} \cdot s_\alpha(t_\alpha t_\beta) \cdot t_\alpha = w_\beta \cdot t_\alpha \cdot t_\beta t_\alpha \cdot t_\alpha = w_\beta^{-1} t_\alpha,$$
d'où
$$(w_\beta w_\alpha)^4 = t_\alpha,$$
et
$$(w_\alpha w_\beta)^4 = s_\beta(t_\alpha) = t_\alpha,$$
ce qui achève la démonstration.

Remarque 3.3.7. — La condition (v) de 2.3 se traduit ici de la manière suivante, en posant $v_{\alpha+\beta} = \operatorname{int}(h_\beta)v_\alpha$ et $v_{2\alpha+\beta} = \operatorname{int}(h_\alpha)v_\beta$: 295

$$\text{(A)}\ \begin{cases} \operatorname{int}(h_\alpha h_\beta h_\alpha)v_\beta = v_\beta, \\ \operatorname{int}(h_\beta h_\alpha h_\beta)v_\alpha = v_\alpha, \end{cases} \qquad \text{(B)}\ \begin{cases} v_\beta\, v_\alpha = v_\alpha\, v_\beta\, v_{\alpha+\beta}\, v_{2\alpha+\beta}, \\ v_{\alpha+\beta}\, v_\alpha = v_\alpha\, v_{\alpha+\beta}\, v_{2\alpha+\beta}^2, \\ v_{\alpha+\beta}\, v_\beta = v_\beta\, v_{\alpha+\beta}, \\ v_{2\alpha+\beta}\, v_\alpha = v_\alpha\, v_{2\alpha+\beta}, \\ v_{2\alpha+\beta}\, v_\beta = v_\beta\, v_{2\alpha+\beta}, \\ v_{2\alpha+\beta}\, v_{\alpha+\beta} = v_{\alpha+\beta}\, v_{2\alpha+\beta}. \end{cases}$$

3.4. Groupes de type G_2

Proposition 3.4.1. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe épinglé de type* G_2*, notons* $\mathrm{R}_0 = \{\alpha, \beta\}$, $\mathrm{R}_+ = \{\alpha, \beta, \alpha+\beta, 2\alpha+\beta, 3\alpha+\beta, 3\alpha+2\beta\}$.

(i) *On a*

$$t_{\alpha\beta} = (w_\alpha w_\beta)^6 = e = (w_\beta w_\alpha)^6 = t_{\beta\alpha}.$$

(ii) *Si on pose*

$$\begin{aligned} &\operatorname{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_\alpha = \mathrm{X}_{\alpha+\beta}, \quad \operatorname{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_{\alpha+\beta} = \mathrm{X}_{2\alpha+\beta}, \\ &\operatorname{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_\beta = -\mathrm{X}_{3\alpha+\beta}, \quad \operatorname{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_{3\alpha+\beta} = \mathrm{X}_{3\alpha+2\beta}, \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned} &\operatorname{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_{2\alpha+\beta} = -\mathrm{X}_{\alpha+\beta}, \quad \operatorname{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_{3\alpha+\beta} = \mathrm{X}_\beta, \\ &\operatorname{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_{3\alpha+2\beta} = \mathrm{X}_{3\alpha+2\beta}, \quad \operatorname{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_{\alpha+\beta} = -\mathrm{X}_\alpha, \\ &\operatorname{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_{2\alpha+\beta} = \mathrm{X}_{2\alpha+\beta}, \quad \operatorname{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_{3\alpha+2\beta} = -\mathrm{X}_{3\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

(iii) *Si on pose*

$$\begin{aligned} p_{\alpha+\beta}(x) &= \exp(x\mathrm{X}_{\alpha+\beta}) = \operatorname{int}(w_\beta)\, p_\alpha(x), \\ p_{2\alpha+\beta}(x) &= \exp(x\mathrm{X}_{2\alpha+\beta}) = \operatorname{int}(w_\alpha w_\beta)\, p_\alpha(x), \\ p_{3\alpha+\beta}(x) &= \exp(x\mathrm{X}_{3\alpha+\beta}) = \operatorname{int}(w_\alpha)\, p_\beta(-x), \\ p_{3\alpha+2\beta}(x) &= \exp(x\mathrm{X}_{3\alpha+2\beta}) = \operatorname{int}(w_\beta w_\alpha)\, p_\beta(-x), \end{aligned}$$

296 *on a :*

$$\begin{gathered} p_\beta(y)\, p_\alpha(x) = p_\alpha(x)\, p_\beta(y)\, p_{\alpha+\beta}(xy)\, p_{2\alpha+\beta}(x^2y)\, p_{3\alpha+\beta}(x^3y) p_{3\alpha+2\beta}(x^3y^2), \\ p_{\alpha+\beta}(y)\, p_\alpha(x) = p_\alpha(x)\, p_{\alpha+\beta}(y)\, p_{2\alpha+\beta}(2xy)\, p_{3\alpha+\beta}(3x^2y) p_{3\alpha+2\beta}(3xy^2), \\ p_{2\alpha+\beta}(y)\, p_\alpha(x) = p_\alpha(x)\, p_{2\alpha+\beta}(y)\, p_{3\alpha+\beta}(3xy), \\ p_{3\alpha+\beta}(y)\, p_\beta(x) = p_\beta(x)\, p_{3\alpha+\beta}(y)\, p_{3\alpha+2\beta}(-xy), \\ p_{2\alpha+\beta}(y)\, p_{\alpha+\beta}(x) = p_{\alpha+\beta}(x)\, p_{2\alpha+\beta}(y)\, p_{3\alpha+2\beta}(3xy). \end{gathered}$$

***3.4.2.* —** On a $(\beta^*, \alpha) = -1$, $(\alpha^*, \beta) = -3$, d'où $\beta(t_\alpha) = \alpha(t_\beta) = -1$. Définissons $X_{\alpha+\beta}$, $X_{2\alpha+\beta}$, $X_{3\alpha+\beta}$ et $X_{3\alpha+2\beta}$ comme dans (ii). On a aussitôt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}(w_\beta)X_{\alpha+\beta} &= \alpha(t_\beta)X_\alpha = -X_\alpha,\\
\mathrm{Ad}(w_\alpha)X_{2\alpha+\beta} &= \alpha(t_\alpha)\beta(t_\alpha)X_{\alpha+\beta} = -X_{\alpha+\beta},\\
\mathrm{Ad}(w_\alpha)X_{3\alpha+\beta} &= -\beta(t_\alpha)X_\beta = X_\beta,\\
\mathrm{Ad}(w_\beta)X_{3\alpha+2\beta} &= \alpha(t_\beta)^3\beta(t_\beta)X_{3\alpha+\beta} = -X_{3\alpha+\beta}.
\end{aligned}$$

Enfin, comme $(3\alpha+2\beta)\pm\alpha$ et $(2\alpha+\beta)\pm\beta$ ne sont pas racines, on a :

$$\mathrm{Ad}(w_\alpha)X_{3\alpha+2\beta} = X_{3\alpha+2\beta}, \qquad \mathrm{Ad}(w_\beta)X_{2\alpha+\beta} = X_{2\alpha+\beta},$$

ce qui achève de démontrer (ii).

***3.4.3.* —** En vertu de Exp. XXII, 5.5.2, il existe des scalaires **297**

$$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{H}, \mathrm{J} \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S}),$$

tels que

$$p_\beta(y)\, p_\alpha(x) = p_\alpha(x)\, p_\beta(y)\, p_{\alpha+\beta}(\mathrm{A}xy)\, p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{B}x^2y)\, p_{3\alpha+\beta}(\mathrm{C}x^3y)\, p_{3\alpha+2\beta}(\mathrm{D}x^3y^2). \tag{1}$$

$$p_{\alpha+\beta}(y)\, p_\alpha(x) = p_\alpha(x)\, p_{\alpha+\beta}(y)\, p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{E}xy)\, p_{3\alpha+\beta}(\mathrm{F}x^2y)\, p_{3\alpha+2\beta}(\mathrm{G}xy^2). \tag{2}$$

$$p_{2\alpha+\beta}(y)\, p_\alpha(x) = p_\alpha(x)\, p_{2\alpha+\beta}(y)\, p_{3\alpha+\beta}(\mathrm{H}xy). \tag{3}$$

$$p_{3\alpha+\beta}(y)\, p_\beta(x) = p_\beta(x)\, p_{3\alpha+\beta}(y)\, p_{3\alpha+2\beta}(\mathrm{J}xy). \tag{4}$$

***3.4.4.* —** Faisons opérer $\mathrm{int}(w_\beta)$ sur (1), (3) et (4) :

$$\begin{aligned}
&p_{-\beta}(-y)\, p_{\alpha+\beta}(x) = \\
&\qquad p_{\alpha+\beta}(x)\, p_{-\beta}(-y)\, p_\alpha(-\mathrm{A}xy)\, p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{B}x^2y)\, p_{3\alpha+2\beta}(\mathrm{C}x^3y) p_{3\alpha+\beta}(-\mathrm{D}x^3y^2).
\end{aligned} \tag{5}$$

$$p_{2\alpha+\beta}(y)\, p_{\alpha+\beta}(x) = p_{\alpha+\beta}(x)\, p_{2\alpha+\beta}(y)\, p_{3\alpha+2\beta}(\mathrm{H}xy). \tag{6}$$

$$p_{3\alpha+2\beta}(y)\, p_{-\beta}(-x) = p_{-\beta}(-x)\, p_{3\alpha+2\beta}(y)\, p_{3\alpha+\beta}(-\mathrm{J}xy). \tag{7}$$

Faisant de même opérer $\mathrm{int}(w_\alpha)$ sur (1), on trouve

$$\begin{aligned}
&p_{3\alpha+\beta}(-y)\, p_{-\alpha}(-x) = \\
&\qquad p_{-\alpha}(-x)\, p_{3\alpha+\beta}(-y)\, p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{A}xy)\, p_{\alpha+\beta}(-\mathrm{B}x^2y)\, p_\beta(\mathrm{C}x^3y) p_{3\alpha+\beta}(\mathrm{D}x^3y^2).
\end{aligned} \tag{8}$$

***3.4.5.* —** Écrivons

$$w_\beta p_\alpha(x) w_\beta^{-1} = p_{\alpha+\beta}(x),$$

soit, $\alpha+2\beta$ n'étant pas racine : **298**

$$p_\beta(1)p_\alpha(x)p_\alpha(-1) = p_{-\beta}(1)\, p_{\alpha+\beta}(x) p_{-\beta}(-1).$$

Transformant le premier membre par (1), puis (4)

$$\begin{aligned}
&p_\beta(1)\,p_\alpha(x)\,p_\beta(-1)\\
&= p_\alpha(x)\,p_\beta(1)\,p_{\alpha+\beta}(\mathrm{A}x)\,p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{B}x^2)\,p_{3\alpha+\beta}(\mathrm{C}x^3)\,p_{3\alpha+2\beta}(\mathrm{D}x^3)\,p_\beta(-1)\\
&= p_\alpha(x)\,p_\beta(1)\,p_{\alpha+\beta}(\mathrm{A}x)p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{B}x^2)\,p_\beta(-1)\,p_{3\alpha+\beta}(\mathrm{C}x^3)\,p_{3\alpha+2\beta}((\mathrm{D}-\mathrm{CJ})x^3)\\
&= p_\alpha(x)\,p_{\alpha+\beta}(\mathrm{A}x)\,p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{B}x^2)\,p_{3\alpha+\beta}(\mathrm{C}x^3)\,p_{3\alpha+2\beta}((\mathrm{D}-\mathrm{CJ})x^3).
\end{aligned}$$

Transformons le second membre par (5), puis (7) :

$$\begin{aligned}
(11)\quad &p_{-\beta}(1)\,p_{\alpha+\beta}(x)\,p_{-\beta}(-1)\\
&= p_{\alpha+\beta}(x)\,p_{-\beta}(1)\,p_\alpha(\mathrm{A}x)\,p_{2\alpha+\beta}(-\mathrm{B}x^2)\,p_{3\alpha+2\beta}(-\mathrm{C}x^3)\,p_{3\alpha+\beta}(-\mathrm{D}x^3)\,p_{-\beta}(-1)\\
&= p_{\alpha+\beta}(x)\,p_\alpha(\mathrm{A}x)\,p_{2\alpha+\beta}(-\mathrm{B}x^2)\,p_{3\alpha+2\beta}(-\mathrm{C}x^3)\,p_{3\alpha+\beta}((\mathrm{CJ}-\mathrm{D})x^3).
\end{aligned}$$

Utilisant maintenant (2), ce second membre devient

$$\begin{aligned}
(12)\quad &p_\alpha(\mathrm{A}x)\,p_{\alpha+\beta}(x)\,p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{AE}x^2)\,p_{3\alpha+\beta}(\mathrm{A}^2\mathrm{F}x^3)\,p_{3\alpha+2\beta}(\mathrm{AG}x^3)\times\\
&\qquad p_{2\alpha+\beta}(-\mathrm{B}x^2)\,p_{3\alpha+2\beta}(-\mathrm{C}x^3)\,p_{3\alpha+\beta}((\mathrm{CJ}-\mathrm{D})x^3) =\\
&p_\alpha(\mathrm{A}x)\,p_{\alpha+\beta}(x)\,p_{2\alpha+\beta}\big((\mathrm{AE}-\mathrm{B})x^2\big)\,p_{3\alpha+\beta}\big((\mathrm{A}^2\mathrm{F}+\mathrm{CJ}-\mathrm{D})x^3\big)\,p_{3\alpha+2\beta}\big((\mathrm{AG}-\mathrm{C})x^3\big).
\end{aligned}$$

Identifiant les résultats obtenus, on obtient :

$$\mathrm{A}=1,\qquad \mathrm{E}=2\mathrm{B},\qquad \mathrm{C}+\mathrm{D}=\mathrm{F}+\mathrm{CJ},\qquad \mathrm{F}=\mathrm{G}.$$

3.4.6. **—** Écrivons maintenant

$$w_\alpha p_\beta(y) w_\alpha^{-1} = p_{3\alpha+\beta}(-y),$$

299 soit, $4\alpha+\beta$ n'étant pas racine :

$$p_\alpha(1)\,p_\beta(y)\,p_\alpha(-1) = p_{-\alpha}(1)\,p_{3\alpha+\beta}(-y)\,p_{-\alpha}(-1).$$

Transformant le premier membre par (1) :

$$p_\alpha(1)\,p_\beta(y)\,p_\alpha(-1) = p_\beta(y)\,p_{\alpha+\beta}(-\mathrm{A}y)\,p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{B}y)\,p_{3\alpha+\beta}(-\mathrm{C}y)\,p_{3\alpha+2\beta}(-\mathrm{D}y^2).$$

Transformons le second membre successivement par (8), (6) et (4) :

$$\begin{aligned}
&p_{-\alpha}(1)\,p_{3\alpha+\beta}(-y)\,p_{-\alpha}(-1)\\
&= p_{3\alpha+\beta}(-y)\,p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{A}y)\,p_{\alpha+\beta}(-\mathrm{B}y)\,p_\beta(\mathrm{C}y)\,p_{3\alpha+2\beta}(\mathrm{D}y^2)\\
&= p_{3\alpha+\beta}(-y)\,p_{\alpha+\beta}(-\mathrm{B}y)\,p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{A}y)\,p_{3\alpha+2\beta}(-\mathrm{ABH}y^2)\,p_\beta(\mathrm{C}y)\,p_{3\alpha+2\beta}(\mathrm{D}y^2)\\
&= p_\beta(\mathrm{C}y)\,p_{3\alpha+\beta}(-y)p_{\alpha+\beta}(-\mathrm{B}y)\,p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{A}y)\,p_{3\alpha+2\beta}((\mathrm{D}-\mathrm{CJ}-\mathrm{ABH})y^2)\\
&= p_\beta(\mathrm{C}y)\,p_{\alpha+\beta}(-\mathrm{B}y)\,p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{A}y)\,p_{3\alpha+\beta}(-y)\,p_{3\alpha+2\beta}((\mathrm{D}-\mathrm{CJ}-\mathrm{ABH})y^2).
\end{aligned}$$

Identifiant

$$\mathrm{C}=1,\qquad \mathrm{A}=\mathrm{B},\qquad \mathrm{D}-\mathrm{CJ}-\mathrm{ABH}=-\mathrm{D}.$$

Tenons compte des résultats déjà obtenus :

$$\begin{gathered}
\mathrm{A}=\mathrm{B}=\mathrm{C}=1,\qquad \mathrm{E}=2,\qquad \mathrm{F}=\mathrm{G},\\
\mathrm{D}+1=\mathrm{F}+\mathrm{J},\qquad 2\mathrm{D}=\mathrm{H}+\mathrm{J}.
\end{gathered}$$

3.4.7. — Écrivons
$$w_\beta p_{3\alpha+\beta}(x) w_\beta^{-1} = p_{3\alpha+2\beta}(x),$$
soit
$$p_\beta(1)\, p_{3\alpha+\beta}(x)\, p_\beta(-1) = p_{-\beta}(1)\, p_{3\alpha+2\beta}(x)\, p_{-\beta}(-1).$$
Transformant le premier membre par (4), le second par (7), on obtient : 300
$$p_{3\alpha+\beta}(x)\, p_{3\alpha+2\beta}(-\mathrm{J}x) = p_{3\alpha+2\beta}(x)\, p_{3\alpha+\beta}(-\mathrm{J}x),$$
soit $\mathrm{J} = -1$.

3.4.8. — Écrivons enfin
$$w_\alpha p_{\alpha+\beta}(y) w_\alpha^{-1} = p_{2\alpha+\beta}(y),$$
soit
$$p_\alpha(1)\, p_{\alpha+\beta}(y)\, p_\alpha(-1) = p_{-\alpha}(1)\, p_\alpha(-1)\, p_{2\alpha+\beta}(y)\, p_\alpha(1)\, p_{-\alpha}(-1).$$
Transformant le premier membre par (2), le second par (3), on obtient :
$$\begin{aligned} p_{\alpha+\beta}(y)\, p_{2\alpha+\beta}(-\mathrm{E}y)\, p_{3\alpha+\beta}(\mathrm{F}y)\, p_{3\alpha+2\beta}(-\mathrm{G}y^2) &= \\ &p_{-\alpha}(1)\, p_{2\alpha+\beta}(y)\, p_{3\alpha+\beta}(\mathrm{H}y)\, p_{-\alpha}(-1). \end{aligned}$$
Il est immédiat de voir que si l'on fait commuter $p_{-\alpha}(-1)$ avec $p_{3\alpha+\beta}(\mathrm{H}y)$, puis $p_{2\alpha+\beta}(y)$, on n'introduit pas dans le second membre de nouveaux termes en $p_{3\alpha+\beta}$. Celui-ci s'écrit donc, en notant par des parenthèses vides les quantités dont la valeur exacte ne nous importe pas :
$$p_{\alpha+\beta}(\,)\, p_{2\alpha+\beta}(\,)\, p_\beta(\,)\, p_{3\alpha+\beta}(\mathrm{H}y)\, p_{3\alpha+2\beta}(\,).$$
Comparant avec le premier membre, on a aussitôt $\mathrm{F} = \mathrm{H}$, d'où par les résultats antérieurs $2\mathrm{D} = \mathrm{D} + 1$, soit $\mathrm{D} = 1$, et enfin $\mathrm{F} = \mathrm{G} = \mathrm{H} = 2\mathrm{D} - \mathrm{J} = 3$, ce qui achève le détermination des coefficients $\mathrm{A}, \ldots, \mathrm{J}$ et la démonstration de (iii).

3.4.9. — Prouvons enfin (i) à la manière habituelle :
$$\begin{gathered} w_\alpha w_\beta w_\alpha = w_\alpha w_\beta w_\alpha^{-1} t_\alpha = w_{3\alpha+\beta}^{-1} \cdot t_\alpha, \\ w_\beta (w_\alpha w_\beta)^2 = w_\beta w_{3\alpha+\beta}^{-1} w_\beta^{-1} \cdot s_\beta(t_\alpha) \cdot t_\beta = w_{3\alpha+2\beta}^{-1} \cdot t_\alpha t_\beta \cdot t_\beta = w_{3\alpha+2\beta}^{-1} \cdot t_\alpha, \\ w_\alpha (w_\beta w_\alpha)^3 = w_\alpha w_{3\alpha+2\beta}^{-1} w_\alpha^{-1} = w_{3\alpha+2\beta}^{-1}, \\ w_\beta (w_\alpha w_\beta)^4 = w_\beta w_{3\alpha+2\beta}^{-1} w_\beta^{-1} \cdot t_\beta = w_{3\alpha+\beta} \cdot t_\beta, \\ w_\alpha (w_\beta w_\alpha)^5 = w_\alpha w_{3\alpha+\beta} w_\alpha^{-1} \cdot s_\alpha(t_\beta) \cdot t_\beta = w_\beta \cdot t_\beta t_\alpha \cdot t_\alpha = w_\beta^{-1}. \end{gathered}$$
D'où 301
$$(w_\alpha w_\beta)^6 = (w_\beta w_\alpha)^6 = e.$$

Remarque 3.4.10. — La condition (v) de 2.4 est formée de
$$(\mathrm{A}) \begin{cases} \operatorname{int}(h_\alpha h_\beta h_\alpha h_\beta h_\alpha) v_\beta = v_\beta, \\ \operatorname{int}(h_\beta h_\alpha h_\beta h_\alpha h_\beta) v_\alpha = v_\alpha, \end{cases}$$

et, posant

$$v_{\alpha+\beta} = \operatorname{int}(h_\beta)v_\alpha, \qquad v_{2\alpha+\beta} = \operatorname{int}(h_\alpha h_\beta)v_\alpha,$$
$$v_{3\alpha+\beta} = \operatorname{int}(h_\alpha)v_\beta^{-1}; \qquad v_{3\alpha+2\beta} = \operatorname{int}(h_\beta h_\alpha)v_\beta^{-1},$$

302 des relations de commutation :

$$\text{(B)} \begin{cases} v_\beta\, v_\alpha = v_\alpha v_\beta\, v_{\alpha+\beta}\, v_{2\alpha+\beta}\, v_{3\alpha+\beta}\, v_{3\alpha+2\beta}, \\ v_{\alpha+\beta}\, v_\alpha = v_\alpha\, v_{\alpha+\beta}\, v_{2\alpha+\beta}^2\, v_{3\alpha+\beta}^3\, v_{3\alpha+2\beta}^3, \\ v_{2\alpha+\beta}\, v_\alpha = v_\alpha\, v_{2\alpha+\beta}\, v_{3\alpha+\beta}^3, \\ v_{3\alpha+\beta}\, v_\alpha = v_\alpha\, v_{3\alpha+\beta}, \\ v_{3\alpha+2\beta}\, v_\alpha = v_\alpha\, v_{3\alpha+2\beta}, \end{cases}$$

$$\text{(B)} \begin{cases} v_{\alpha+\beta}\, v_\beta = v_\beta\, v_{\alpha+\beta}, \\ v_{2\alpha+\beta}\, v_\beta = v_\beta\, v_{2\alpha+\beta}, \\ v_{3\alpha+\beta}\, v_\beta = v_\beta\, v_{3\alpha+\beta}\, v_{3\alpha+2\beta}^{-1}, \\ v_{3\alpha+2\beta}\, v_\beta = v_\beta\, v_{3\alpha+2\beta}, \\ v_{2\alpha+\beta}\, v_{\alpha+\beta} = v_{\alpha+\beta}\, v_{2\alpha+\beta}\, v_{3\alpha+2\beta}^3, \end{cases} \qquad \text{(B)} \begin{cases} v_{3\alpha+\beta}\, v_{\alpha+\beta} = v_{\alpha+\beta}\, v_{3\alpha+\beta}, \\ v_{3\alpha+2\beta}\, v_{\alpha+\beta} = v_{\alpha+\beta}\, v_{3\alpha+2\beta}, \\ v_{3\alpha+\beta}\, v_{2\alpha+\beta} = v_{2\alpha+\beta}\, v_{3\alpha+\beta}, \\ v_{3\alpha+2\beta}\, v_{2\alpha+\beta} = v_{2\alpha+\beta}\, v_{3\alpha+2\beta}, \\ v_{3\alpha+2\beta}\, v_{3\alpha+\beta} = v_{3\alpha+\beta}\, v_{3\alpha+2\beta}. \end{cases}$$

3.5. Forme explicite du théorème de générateurs et relations

Théorème 3.5.1. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe épinglé,* T *son tore maximal,* R_0 *son système de racines simples,* $u_\alpha \in \mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S})^*$ *et* $w_\alpha \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ *les éléments définis par l'épinglage* $(\alpha \in \mathrm{R}_0)$*. Soient*

$$f_{\mathrm{T}} : \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{H}, \qquad f_\alpha : \mathrm{U}_\alpha \longrightarrow \mathrm{H}, \quad \alpha \in \mathrm{R}_0$$

303 *des morphismes de groupes,* H *étant un* S*-faisceau en groupes pour* (fppf) *; soient* $h_\alpha \in \mathrm{H}(\mathrm{S})$, $(\alpha \in \mathrm{R}_0)$ *des sections de* H, *posons* $v_\alpha = f_\alpha(u_\alpha)$, $\alpha \in \mathrm{R}_0$. *Pour qu'il existe un morphisme de groupes*

$$f : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{H}$$

prolongeant f_{T}, f_α $(\alpha \in \mathrm{R}_0)$ *et vérifiant* $f(w_\alpha) = h_\alpha$ $(\alpha \in \mathrm{R}_0)$ (*et alors nécessairement unique*), *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :*

(i) *Pour tout* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, *tout* $\alpha \in \mathrm{R}_0$, *tout* $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$ *et tout* $x \in \mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S}')$, *on a*

$$\operatorname{int}(f_{\mathrm{T}}(t))f_\alpha(x) = f_\alpha(\operatorname{int}(t)x) = f_\alpha(x^{\alpha(t)}). \tag{1}$$

(ii) *Pour tout* $\alpha \in \mathrm{R}_0$, *tout* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *et tout* $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$, *on a*

$$\operatorname{int}(h_\alpha)f_{\mathrm{T}}(t) = f_{\mathrm{T}}(s_\alpha(t)) = f_{\mathrm{T}}(t \cdot \alpha^*\alpha(t)^{-1}). \tag{2}$$

(iii) *Pour tout* $\alpha \in \mathrm{R}_0$, *on a*

$$h_\alpha^2 = f_{\mathrm{T}}(\alpha^*(-1)), \tag{3_1}$$
$$(h_\alpha v_\alpha)^3 = e. \tag{4}$$

(iv) *Pour tout couple* $(\alpha, \beta) \in \mathrm{R}_0 \times \mathrm{R}_0$, $\alpha \neq \beta$, *tel que* $(\alpha^*, \beta) = 0$ (*resp.* $(\alpha^*, \beta) = (\beta^*, \alpha) = -1$, *resp.* $(\alpha^*, \beta) = -2$, *resp.* $(\alpha^*, \beta) = -3$), *on a :*

304 (a) *la relation*

$$(3_2)\qquad \begin{cases} (h_\alpha h_\beta)^2 = f_{\mathrm{T}}\big(\alpha^*(-1)\beta^*(-1)\big) & si\ (\alpha^*,\beta) = 0;\\ (h_\alpha h_\beta)^3 = e, & si\ (\alpha^*,\beta) = -1;\\ (h_\alpha h_\beta)^4 = f_{\mathrm{T}}\big(\alpha^*(-1)\big), & si\ (\alpha^*,\beta) = -2;\\ (h_\alpha h_\beta)^6 = e, & si\ (\alpha^*,\beta) = -3. \end{cases}$$

(b) *Les relations* (A) *de* 3.1.3 (*resp.* 3.2.8*, resp.* 3.3.7*, resp.* 3.4.10)*;*

(c) *La* (*resp. les trois, resp. les six, resp. les quinze*) *relation*(*s*) (B) *de* 3.1.3 (*resp.* 3.2.8*, resp.* 3.3.7*, resp.* 3.4.10).

Cela résulte aussitôt de 2.3, 2.6 et des calculs faits dans chaque cas particulier.

***Remarque 3.5.2.* —** On peut présenter de manière légèrement différente les résultats précédents : on se donne des morphismes, pour $\alpha \in \mathrm{R}_0$,

$$a_\alpha :\ \mathrm{T}\cdot\mathrm{U}_\alpha \longrightarrow \mathrm{H}, \qquad b_\alpha :\ \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{Z}_\alpha}(\mathrm{T}) \longrightarrow \mathrm{H};$$

les conditions à vérifier sont les suivantes :

(1) tous les a_α ($\alpha \in \mathrm{R}_0$) et tous les b_α ($\alpha \in \mathrm{R}_0$) ont même restriction à T ;

(2) pour tout $\alpha \in \mathrm{R}_0$, posons

$$h_\alpha = b_\alpha(w_\alpha), v_\alpha = a_\alpha(u_\alpha);$$

on a pour tout $\alpha \in \mathrm{R}_0$ la relation

$$(h_\alpha v_\alpha)^3 = e,$$

et les conditions de (iv) ci-dessus sont vérifiées.

***3.5.3.* —** On donnera dans l'exposé suivant diverses applications de ce théorème. 305
Signalons-en ici une : le théorème 3.5.1 donne une description par générateurs et relations de G dans la catégorie des S-faisceaux pour (fppf) ; autrement dit, considérons pour chaque $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ le groupe $\mathrm{H}(\mathrm{S}')$ engendré par $\mathrm{T}(\mathrm{S}')$, $\mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S}')$, $\alpha \in \mathrm{R}$, et w_α, $\alpha \in \mathrm{R}$, soumis aux relations analogues à (1) … (3_2), (A), (B) ; alors G n'est autre que le faisceau associé au préfaisceau $\mathrm{S}' \mapsto \mathrm{H}(\mathrm{S}')$.

En particulier, si S′ est le spectre d'un corps algébriquement clos k, on a $\mathrm{G}(\mathrm{S}') = \mathrm{H}(\mathrm{S}')$ (conséquence immédiate du Nullstellensatz sous la forme : « un crible d'un corps algébriquement clos, couvrant pour (fppf), est trivial »), de sorte que 3.5.1 donne aussitôt une description explicite par générateurs et relations du groupe « abstrait » $\mathrm{G}(k)$.

4. Unicité des groupes épinglés : théorème fondamental

***Théorème 4.1.* —** *Soit* S *un préschéma non vide. Le foncteur* $\mathscr{R}$ *de* 1.6 *est* pleinement fidèle *: soient* G *et* G′ *deux* S*-groupes épinglés, q un entier* > 0 *tel que* $x \mapsto x^q$ *soit un endomorphisme de* $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$*, et* $h : \mathscr{R}(\mathrm{G}') \to \mathscr{R}(\mathrm{G})$ *un q-morphisme de données radicielles épinglées. Il existe un unique morphisme de groupes épinglés*

$$f : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}'$$

tel que $\mathscr{R}(f) = h$.

L'unicité est démontrée en 1.9. Il suffit de démontrer l'existence. Par hypothèse, on a une bijection $u : \mathrm{R} \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}'$ et une application $\mathbf{q} : \mathrm{R} \to q^{\mathbb{N}}$ telle que

$$h(u(\alpha)) = \mathbf{q}(\alpha)\alpha \qquad \text{et} \qquad {}^t h(\alpha^*) = \mathbf{q}(\alpha)u(\alpha)^*$$

306 pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$. En particulier, les rangs semi-simples de G et G′ coïncident.

4.1.1. — *Supposons* $\mathrm{rgss}(\mathrm{G}) = \mathrm{rgss}(\mathrm{G}') = 0$. Alors G et G′ sont des tores : on a $\mathrm{G} = \mathrm{T} = \mathrm{D_S}(\mathrm{M})$, $\mathrm{G}' = \mathrm{T}' = \mathrm{D_S}(\mathrm{M}')$ et h est simplement un morphisme de groupes ordinaires $h : \mathrm{M}' \to \mathrm{M}$. On prend alors $f = \mathrm{D_S}(h)$.

4.1.2. — *Supposons* $\mathrm{rgss}(\mathrm{G}) = \mathrm{rgss}(\mathrm{G}') = 1$. Considérons alors

$$f_{\mathrm{T}} = \mathrm{D_S}(h) : \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{T}'.$$

Par hypothèse on a un diagramme commutatif, où $\alpha' = u(\alpha)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \arrow[r, "\alpha^*"] \arrow[d, "\mathbf{q}(\alpha)"] & \mathrm{T} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f_{\mathrm{T}}"'] & \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \arrow[d, "\mathbf{q}(\alpha)"] \\
\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \arrow[r, "\alpha'^*"] & \mathrm{T}' \arrow[r, "\alpha'"] & \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}.
\end{tikzcd}$$

On applique alors Exp. XX, 4.1.

4.1.3. — *Supposons* $\mathrm{rgss}(\mathrm{G}) = \mathrm{rgss}(\mathrm{G}') = 2$. Alors, par Exp. XXI, 7.5.3 on connaît toutes les possibilités pour $h : \mathscr{R}(\mathrm{G}') \to \mathscr{R}(\mathrm{G})$. Étudions-les successivement, en vérifiant chaque fois les conditions de 2.5.

Notons $\mathrm{R}_0 = \{\alpha, \beta\}$, $\mathrm{R}'_0 = \{\alpha', \beta'\}$ de façon que $u(\alpha) = \alpha'$, $u(\beta) = \beta'$.

4.1.4. — G et G′ de type $\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_1$. On a alors

$$h(\alpha') = q\alpha, \qquad h(\beta') = q_1\beta.$$

Montrons que les conditions de 2.5 sont vérifiées. Par 3.1.2 (ii) (resp (iii)), (ii) (resp. (iii)) est trivial. Prouvons (i).

307 On a

$$\begin{aligned}\mathrm{D_S}(h)t_{\alpha\beta} = \mathrm{D_S}(h)(t_\alpha t_\beta) &= {}^t h(\alpha^*)(-1) \cdot {}^t h(\beta^*)(-1) \\ &= \alpha'^*(-1)^q \beta'^*(-1)^{q'} = \alpha'^*(-1)\beta'^*(-1) = t'_{\alpha'\beta'}.\end{aligned}$$

4.1.5. — G et G′ de type A_2. On a alors

$$h(\alpha') = q\alpha, \qquad h(\beta') = q\beta.$$

Posons $\mathrm{X}_{\alpha+\beta} = \mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_\alpha$ et $\mathrm{X}'_{\alpha'+\beta'} = \mathrm{Ad}(w_{\beta'})\mathrm{X}_{\alpha'}$. Vérifions les conditions de 2.5. Pour (i), on raisonne comme ci-dessus, à l'aide de 3.2.1 (i) ; pour (ii), c'est immédiat par 3.2.1 (ii) ; reste à vérifier (iii). On a à vérifier que

$$p_\alpha(x)\, p_\beta(y)\, p_{\alpha+\beta}(z) \longmapsto p'_{\alpha'}(x^q)\, p'_{\beta'}(y^q)\, p'_{\alpha'+\beta'}(z^q)$$

est un morphisme de groupes. La seule relation de commutation non triviale est celle de 3.2.1 (iii) qui s'écrit

$$p_\beta(y)\,p_\alpha(x) = p_\alpha(x)\,p_\beta(y)\,p_{\alpha+\beta}(xy),$$
$$p'_{\beta'}(y^q)\,p'_{\alpha'}(x^q) = p'_{\alpha'}(x^q)\,p'_{\beta'}(y^q)\,p'_{\alpha'+\beta'}(x^q y^q).$$

***4.1.6.* —** On raisonne de même pour G et G′ de type B_2 (resp. G_2), lorsque les exposants radiciels sont égaux, à l'aide de 3.3.1 (resp. 3.4.1) ; il reste donc à traiter, pour achever le cas des groupes de rang 2, les deux cas exceptionnels de Exp. XXI, 7.5.3.

***4.1.7.* —** G et G′ sont de type B_2, S est de caractéristique 2, on a $\mathbf{q}(\alpha) = 2q$, $\mathbf{q}(\beta) = q$. Les racines positives sont $\{\alpha, \beta, \alpha+\beta, 2\alpha+\beta\}$ et $\{\alpha', \beta', \alpha'+\beta', \alpha'+2\beta'\}$ (remarquer **308**
que les racines « courtes » sont α et β'). On a

$$h(\alpha') = 2q\alpha, \quad h(\beta') = q\beta, \quad h(\alpha'+\beta') = q(2\alpha+\beta), \quad h(\alpha'+2\beta') = 2q(\alpha+\beta),$$

ce qui donne

$$u(\alpha+\beta) = \alpha'+2\beta', \qquad \mathbf{q}(\alpha+\beta) = 2q,$$
$$u(2\alpha+\beta) = \alpha'+\beta', \qquad \mathbf{q}(2\alpha+\beta) = q.$$

Posons

$$X_{\alpha+\beta} = \mathrm{Ad}(w_\beta)X_\alpha, \qquad X_{2\alpha+\beta} = \mathrm{Ad}(w_\alpha)X_\beta,$$
$$X'_{\alpha'+\beta'} = \mathrm{Ad}(w'_{\alpha'})X'_{\beta'}, \qquad X'_{\alpha'+2\beta'} = \mathrm{Ad}(w'_{\beta'})X'_{\alpha'}.$$

Vérifions maintenant les conditions de 2.5.

(i) Comme S est de caractéristique 2, on a $-1 = 1$ sur S, donc $t_{\alpha\beta} = t_\alpha = \alpha^*(-1) = e = \beta'^*(-1) = t'_{\beta'} = t'_{\alpha'\beta'}$ (cf. 3.3.1 (i)).

(ii) On a par construction

$$\mathrm{Ad}(w_\alpha)X_\beta = X_{2\alpha+\beta}, \qquad \mathrm{Ad}(w'_{\alpha'})X'_{\beta'} = X'_{\alpha'+\beta'} = X'_{u(2\alpha+\beta)};$$
$$\mathrm{Ad}(w_\beta)X_\alpha = X_{\alpha+\beta}, \qquad \mathrm{Ad}(w'_{\beta'})X'_{\alpha'} = X'_{\alpha'+2\beta'} = X'_{u(\alpha+\beta)}.$$

Par 3.3.1 (ii) et le fait que $-1 = 1$ sur S, on a de part et d'autre

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ad}(w_\alpha)X_{\alpha+\beta} = X_{\alpha+\beta}, && \mathrm{Ad}(w'_{\alpha'})X'_{u(\alpha+\beta)} = \mathrm{Ad}(w'_{\alpha'})X'_{\alpha'+2\beta'} = X'_{\alpha'+2\beta'} = X'_{u(\alpha+\beta)};\\
&\mathrm{Ad}(w_\alpha)X_{2\alpha+\beta} = X_\beta, && \mathrm{Ad}(w'_{\alpha'})X'_{u(2\alpha+\beta)} = \mathrm{Ad}(w'_{\alpha'})X'_{\alpha'+\beta'} = X'_{\beta'} = X'_{u(\beta)};\\
&\mathrm{Ad}(w_\beta)X_{\alpha+\beta} = X_\alpha, && \mathrm{Ad}(w'_{\beta'})X'_{u(\alpha+\beta)} = \mathrm{Ad}(w'_{\beta'})X'_{\alpha'+2\beta'} = X'_{\alpha'} = X'_{u(\alpha)};\\
&\mathrm{Ad}(w_\beta)X_{2\alpha+\beta} = X_{2\alpha+\beta}, && \mathrm{Ad}(w'_{\beta'})X'_{u(2\alpha+\beta)} = \mathrm{Ad}(w'_{\beta'})X'_{\alpha'+\beta'} = X'_{\alpha'+\beta'} = X'_{u(2\alpha+\beta)}.
\end{aligned}$$

(iii) Par 3.3.1 (iii), on voit que la seule relation de commutation non triviale dans **309**
U (resp. U′) est

$$p_\beta(y)\,p_\alpha(x) = p_\alpha(x)\,p_\beta(y)\,p_{\alpha+\beta}(xy)\,p_{2\alpha+\beta}(x^2y),$$

resp.

$$p'_{\alpha'}(y')\,p'_{\beta'}(x') = p'_{\beta'}(x')\,p'_{\alpha'}(y')\,p'_{\alpha'+\beta'}(x'y')\,p'_{\alpha'+2\beta'}(x'^2y').$$

Il nous faut vérifier que le morphisme

$$p_\alpha(x)\,p_\beta(y)\,p_{\alpha+\beta}(z)\,p_{2\alpha+\beta}(t) \longmapsto p'_{\alpha'}(x^{2q})\,p'_{\beta'}(y^q)\,p'_{\alpha'+2\beta'}(z^{2q})\,p'_{\alpha'+\beta'}(t^q)$$

est un morphisme de groupes ; on voit aussitôt que cela revient à voir que

$$p'_{\beta'}(y^q)\, p'_{\alpha'}(x^{2q}) = p'_{\alpha'}(x^{2q})\, p'_{\beta'}(y^q)\, p'_{\alpha'+2\beta'}((xy)^{2q})\, p'_{\alpha'+\beta'}((x^2y)^q),$$

ce qui n'est autre que la seconde relation ci-dessus (en posant $y' = x^{2q}$, $x' = y^q$).

***4.1.8.* —** G et G′ sont de type G_2, S est de caractéristique 3, on a

$$\mathbf{q}(\alpha) = 3q, \qquad \mathbf{q}(\beta) = q.$$

310 Les racines positives sont $\{\alpha, \beta, \alpha+\beta, 2\alpha+\beta, 3\alpha+\beta, 3\alpha+2\beta\}$ d'une part, $\{\alpha', \beta', \alpha'+\beta', \alpha'+2\beta', \alpha'+3\beta', 2\alpha'+3\beta'\}$ d'autre part (comme dans le cas précédent, les racines courtes sont α et β'). On a

$$h(\alpha') = 3q\alpha, \qquad h(\beta') = q\beta, \qquad h(\alpha'+\beta') = q(3\alpha+\beta),$$
$$h(\alpha'+2\beta') = q(3\alpha+2\beta), \qquad h(\alpha'+3\beta') = 3q(\alpha+\beta),$$
$$h(2\alpha'+3\beta') = 3q(2\alpha+\beta),$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} u(\alpha+\beta) &= \alpha'+3\beta', & \mathbf{q}(\alpha+\beta) &= 3q,\\ u(2\alpha+\beta) &= 2\alpha'+3\beta', & \mathbf{q}(2\alpha+\beta) &= 3q,\\ u(3\alpha+\beta) &= \alpha'+\beta', & \mathbf{q}(3\alpha+\beta) &= q,\\ u(3\alpha+2\beta) &= \alpha'+2\beta', & \mathbf{q}(3\alpha+2\beta) &= q. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_{\alpha+\beta} &= \mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_\alpha, & \mathrm{X}_{2\alpha+\beta} &= \mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_{\alpha+\beta},\\ \mathrm{X}_{3\alpha+\beta} &= -\mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_\beta, & \mathrm{X}_{3\alpha+2\beta} &= \mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_{3\alpha+\beta};\\ \mathrm{X}'_{\alpha'+\beta'} &= -\mathrm{Ad}(w'_{\alpha'})\mathrm{X}'_{\beta'}, & \mathrm{X}'_{\alpha'+2\beta'} &= \mathrm{Ad}(w'_{\beta'})\mathrm{X}'_{\alpha'+\beta'},\\ \mathrm{X}'_{\alpha'+3\beta'} &= \mathrm{Ad}(w'_{\beta'})\mathrm{X}'_{\alpha'}, & \mathrm{X}'_{2\alpha'+3\beta'} &= \mathrm{Ad}(w'_{\alpha'})\mathrm{X}'_{\alpha'+3\beta'}. \end{aligned}$$

Vérifions maintenant les conditions de 2.5.

(i) On a $t_{\alpha\beta} = e$ et $t'_{\alpha'\beta'} = e$ par 3.4.1 (i).

(ii) On a par construction

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_\alpha &= \mathrm{X}_{\alpha+\beta}, & \mathrm{Ad}(w'_{\beta'})\mathrm{X}'_{\alpha'} &= \mathrm{X}'_{\alpha'+3\beta'} = \mathrm{X}'_{u(\alpha+\beta)};\\ \mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_\beta &= -\mathrm{X}_{3\alpha+\beta}, & \mathrm{Ad}(w'_{\alpha'})\mathrm{X}'_{\beta'} &= -\mathrm{X}'_{\alpha'+\beta'} = -\mathrm{X}'_{u(3\alpha+\beta)};\\ \mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_{3\alpha+\beta} &= \mathrm{X}_{3\alpha+2\beta}, & \mathrm{Ad}(w'_{\beta'})\mathrm{X}'_{u(3\alpha+\beta)} &= \mathrm{Ad}(w'_{\beta'})\mathrm{X}'_{\alpha'+\beta'}\\ & & &= \mathrm{X}'_{\alpha'+2\beta'} = \mathrm{X}'_{u(3\alpha+2\beta)};\\ \mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_{\alpha+\beta} &= \mathrm{X}_{2\alpha+\beta}, & \mathrm{Ad}(w'_{\alpha'})\mathrm{X}'_{u(\alpha+\beta)} &= \mathrm{Ad}(w'_{\alpha'})\mathrm{X}'_{\alpha'+3\beta'}\\ & & &= \mathrm{X}'_{2\alpha'+3\beta'} = \mathrm{X}'_{u(2\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

311 Par 3.4.1 (ii), on a de part et d'autre :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_{2\alpha+\beta} = -\mathrm{X}_{\alpha+\beta}, && \mathrm{Ad}(w'_{\alpha'})\mathrm{X}'_{u(2\alpha+\beta)} = \mathrm{Ad}(w'_{\alpha'})\mathrm{X}'_{2\alpha'+3\beta'}\\
& && = -\mathrm{X}'_{\alpha'+3\beta'} = -\mathrm{X}'_{u(\alpha+\beta)};\\
&\quad\dots && \quad\dots\\
&\mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_{3\alpha+2\beta} = -\mathrm{X}_{3\alpha+\beta}, && \mathrm{Ad}(w'_{\beta'})\mathrm{X}'_{u(3\alpha+2\beta)} = \mathrm{Ad}(w'_{\beta'})\mathrm{X}'_{\alpha'+2\beta'}\\
& && = -\mathrm{X}'_{\alpha'+\beta'} = -\mathrm{X}'_{u(3\alpha+\beta)}.
\end{aligned}$$

(Les pointillés remplacent 4 vérifications du même genre).

(iii) Les seules relations de commutation non triviales dans U et U′ sont par 3.4.1 (iii) (et compte tenu de $3 = 0$ sur S) :

$$p_\beta(y)\,p_\alpha(x) = p_\alpha(x)\,p_\beta(y)\,p_{\alpha+\beta}(xy)\,p_{2\alpha+\beta}(x^2y)\,p_{3\alpha+\beta}(x^3y)\,p_{3\alpha+2\beta}(x^3y^2),$$
$$p_{\alpha+\beta}(y)p_\alpha(x) = p_\alpha(x)p_{\alpha+\beta}(y)\,p_{2\alpha+\beta}(-xy),$$
$$p_{3\alpha+\beta}(y)\,p_\beta(x) = p_\beta(x)\,p_{3\alpha+\beta}(y)\,p_{3\alpha+2\beta}(-xy);$$

$$p'_{\alpha'}(y')\,p'_{\beta'}(x') =$$
$$p'_{\beta'}(x')\,p'_{\alpha'}(y')\,p'_{\alpha'+\beta'}(-x'y')\,p'_{\alpha'+2\beta'}(-x'^2y')p'_{\alpha'+3\beta'}(-x'^3y')p'_{2\alpha'+3\beta'}(-x'^3y'^2),$$
$$p'_{\alpha'+\beta'}(y')\,p'_{\beta'}(x') = p'_{\beta'}(x')\,p'_{\alpha'+\beta'}(y')\,p'_{\alpha'+2\beta'}(x'y'),$$
$$p'_{\alpha'+3\beta'}(y')p'_{\alpha'}(x') = p'_{\alpha'}(x')\,p'_{\alpha'+3\beta'}(y')\,p'_{2\alpha'+3\beta'}(x'y').$$

Nous avons à vérifier que le morphisme φ de U dans U′ défini par 312

$$\varphi\Big(p_\alpha(x)\,p_\beta(y)\,p_{\alpha+\beta}(t)\,p_{2\alpha+\beta}(u)\,p_{3\alpha+\beta}(v)\,p_{3\alpha+2\beta}(w)\Big)$$
$$= p'_{\alpha'}(x^{3q})\,p'_{\beta'}(y^q)\,p'_{\alpha'+3\beta'}(t^{3q})\,p'_{2\alpha'+3\beta'}(u^{3q})p'_{\alpha'+\beta'}(v^q)\,p'_{\alpha'+2\beta'}(w^q)$$

est un morphisme de groupes. Or on vérifie immédiatement que les trois dernières relations de commutation s'écrivent aussi

$$p'_{\beta'}(y^q)\,p'_{\alpha'}(x^{3q}) =$$
$$p'_{\alpha'}(x^{3q})\,p'_{\beta'}(y^q)\,p'_{\alpha'+3\beta'}((xy)^{3q})\,p'_{2\alpha'+3\beta'}((x^2y)^{3q})p'_{\alpha'+\beta'}((x^3y)^q)p'_{\alpha'+2\beta'}((x^3y^2)^q),$$
$$p'_{\alpha'+3\beta'}(y^{3q})\,p'_{\alpha'}(x^{3q}) = p'_{\alpha'}(x^{3q})\,p'_{\alpha'+3\beta'}(y^{3q})\,p'_{2\alpha'+3\beta'}(-(xy)^{3q}),$$
$$p'_{\alpha'+\beta'}(y^q)\,p'_{\beta'}(x^q) = p'_{\beta'}(x^q)\,p'_{\alpha'+\beta'}(y^q)\,p'_{\alpha'+2\beta'}(-(xy)^q);$$

ce qui montre que φ est bien un morphisme de groupes et achève la démonstration de 4.1.7.

4.1.9. **—** Cas où G et G′ sont de rang semi-simple $\geqslant 2$. Pour chaque racine $\alpha \in \mathrm{R}_0$, notons $\alpha' = u(\alpha) \in \mathrm{R}'_0 = u(\mathrm{R}_0)$. Pour chaque $(\alpha,\beta) \in \mathrm{R}_0 \times \mathrm{R}_0$, considérons les groupes épinglés de rang semi-simple $\leqslant 2$, $\mathrm{Z}_{\alpha\beta}$ et $\mathrm{Z}'_{\alpha'\beta'}$. Le morphisme de groupes $\mathrm{M}' \to \mathrm{M}$ sous-jacent à h définit un q-morphisme de données radicielles

$$h_{\alpha\beta} : \mathscr{R}(\mathrm{Z}_{\alpha\beta}) \longrightarrow \mathscr{R}(\mathrm{Z}'_{\alpha'\beta'}).$$

En vertu des résultats précédents, il existe donc un morphisme de groupes épinglés

$$f_{\alpha\beta} : \mathrm{Z}_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathrm{Z}'_{\alpha'\beta'}$$

313 tel que $\mathscr{R}(f_{\alpha\beta}) = h_{\alpha\beta}$. Prouvons que les $f_{\alpha\beta}$ vérifient la condition de recollement de 2.5 ; en effet $f_{\alpha\beta}|_{\mathrm{Z}_\alpha}$ et $f_{\alpha\alpha}$ sont deux morphismes de groupes épinglés

$$\mathrm{Z}_\alpha \longrightarrow \mathrm{Z}'_{\alpha'}$$

correspondant au même morphisme de données radicielles épinglées, et coïncident donc par le résultat d'unicité déjà démontré. Par 2.5 il existe donc un morphisme de groupes

$$f : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}'$$

prolongeant les $f_{\alpha\beta}$. Celui-ci est évidemment un morphisme de groupes épinglés tel que $\mathscr{R}(f) = h$, ce qui achève la démonstration du théorème 4.1.

5. Corollaires du théorème fondamental

Le plus important est :

Corollaire 5.1. — *Soient* S *un préschéma non vide,* G *et* G′ *deux* S*-groupes épinglés, h un isomorphisme de données radicielles épinglées*

$$h : \mathscr{R}(\mathrm{G}') \xrightarrow{\sim} \mathscr{R}(\mathrm{G}).$$

Il existe un unique isomorphisme de S*-groupes épinglés*

$$f : \mathrm{G} \xrightarrow{\sim} \mathrm{G}'$$

tel que $\mathscr{R}(f) = h$.

Notons que 5.1 se déduit aussi de 3.5.1 (les relations de 3.5.1 peuvent s'écrire en utilisant uniquement la donnée de $\mathscr{R}(\mathrm{G})$) ; notons aussi que 5.1 se déduit de la partie la plus élémentaire de la démonstration de 4.1 (on n'a pas besoin de considérer les « isogénies exceptionnelles » de 4.1.7 et 4.1.8).

314 ***Corollaire 5.2*** **(**« Théorème d'unicité » **).** — *Soient* S *un préschéma,* G *et* G′ *deux* S*-groupes déployables* (Exp. XXII, 1.13). *Si* G *et* G′ *sont de même type* (Exp. XII, 2.6), *ils sont isomorphes.*

Corollaire 5.3. — *Soient* S *un préschéma,* G *et* G′ *deux* S*-groupes déployables. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *et* G′ *sont isomorphes.*

(ii) G *et* G′ *sont isomorphes localement pour la topologie* (fpqc).

(iii) *Il existe un* $s \in \mathrm{S}$ *tel que les* $\overline{s}$*-groupes* $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ *et* $\mathrm{G}'_{\overline{s}}$ *soient de même type.*

En effet, on a évidemment (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii). D'autre part, (iii) entraîne que $\mathscr{R}(\mathrm{G}) = \mathscr{R}(\mathrm{G}_{\overline{s}}) = \mathscr{R}(\mathrm{G}'_{\overline{s}}) = \mathscr{R}(\mathrm{G}')$, donc que G et G′ vérifient la condition de 5.2.

Corollaire 5.4 **(**« unicité des schémas de Chevalley » **).** — *Soient* G *et* G′ *deux* $\mathbb{Z}$*-groupes réductifs possédant des tores maximaux triviaux.* (*) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*) En fait, on peut prouver que tout $\mathbb{Z}$-tore est trivial.

(i) G *et* G′ *sont isomorphes.*

(ii) *Il existe* $s \in \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ *tel que* G_s *et* G'_s *soient de même type.*

(iii) $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ *et* $\mathrm{G}'_{\mathbb{C}}$ *sont de même type.*

En effet G et G′ sont déployables par Exp. XXII, 2.2.

Corollaire 5.5 **(**« Existence d'automorphismes extérieurs »)

Soient S *un préschéma,* G *un* S*-groupe épinglé, h un automorphisme de la donnée radicielle épinglée* $\mathscr{R}(\mathrm{G})$. *Il existe un* unique *automorphisme u de* G *respectant son épinglage et tel que* $\mathscr{R}(u) = h$.

Explicitons le corollaire précédent :

Corollaire 5.5.bis. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif déployé,* R_+ *un système de racines positives de* G. *Choisissons pour chaque racine simple α, un isomorphisme de groupes vectoriels* $p_\alpha : \mathbb{G}_{a,\mathrm{S}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}_\alpha$. *Soit h un automorphisme de* M *permutant les racines positives et les coracines correspondantes : si* $\alpha \in \mathrm{R}_+$, $h(\alpha) \in \mathrm{R}_+$ *et* $h^\vee(\alpha^*) = h(\alpha)^*$. *Il existe un unique automorphisme u de* G *induisant* $\mathrm{D_S}(h)$ *sur* T *et tel que* $u \circ p_\alpha = p_{h(\alpha)}$ *pour toute racine simple α.* 315

Corollaire 5.6. — *Soient* G *et* G′ *deux* S*-groupes réductifs. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *et* G′ *sont isomorphes localement pour* (fpqc).

(i bis) G *et* G′ *sont isomorphes localement pour la topologie étale.*

(ii) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$, $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ *et* $\mathrm{G}'_{\overline{s}}$ *sont isomorphes.*

(iii) *Les fonctions* $s \mapsto$ *type de* $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ *et* $s \mapsto$ *type de* $\mathrm{G}'_{\overline{s}}$ *sont égales.*

En effet (i bis) ⇒ (i) trivialement, (i) ⇒ (ii) par le principe de l'extension finie, (ii) ⇒ (iii) trivialement, reste à prouver (iii) ⇒ (i bis). Or on peut supposer G et G′ déployables (Exp. XXII, 2.3), auquel cas l'assertion résulte de 5.3.

Corollaire 5.7. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif,* G′ *un* S*-groupe affine, lisse et à fibres connexes. Soit* $s \in \mathrm{S}$ *tel que* $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ *et* $\mathrm{G}'_{\overline{s}}$ *soient isomorphes ; il existe un* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *étale et couvrant s tel que* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ *et* $\mathrm{G}'_{\mathrm{S}'}$ *soient isomorphes.*

En effet, par Exp. XIX 2.3 et Exp. XXII 2.1, on peut supposer G et G′ réductifs déployables et on est ramené à 5.3.

Dans le cas où S est le spectre d'un corps, on déduit de 5.6 et 5.7 :

Corollaire 5.8. — *Soient k un corps et* G *et* G′ *deux k-groupe réductifs. Les conditions suivantes sont équivalentes :* 316

(i) G *et* G′ *sont de même type.*

(ii) $\mathrm{G} \otimes_k \overline{k}$ *et* $\mathrm{G}' \otimes_k \overline{k}$ *sont isomorphes.*

(iii) *Il existe une extension séparable finie* K *de k telle que* $\mathrm{G} \otimes_k \mathrm{K}$ *et* $\mathrm{G}' \otimes_k \mathrm{K}$ *soient isomorphes.*

Corollaire 5.9. — *Soient* S *un préschéma non vide et* $\mathscr{R}$ *une donnée radicielle. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe un* S*-groupe épinglé de type* $\mathscr{R}$*.*

(ii) *Il existe un* S*-groupe de type* $\mathscr{R}$*.*

(iii) *Il existe localement pour* (fpqc) *un* S*-groupe réductif de type* $\mathscr{R}$*.*

Il s'agit évidemment de prouver (iii) $\Rightarrow$ (i). Pour simplifier la démonstration, supposons qu'il existe un morphisme fidèlement plat quasi-compact $S' \to S$ et un S'-groupe réductif G' de type $\mathscr{R}$. On peut supposer G' déployable ; fixons un épinglage E' de G' ; notons $\mathscr{R} = \mathscr{R}(G', E')$. Les deux images réciproques de (G', E') sur $S'' = S' \times_S S'$ sont des groupes épinglés (G''_1, E''_1), (G''_2, E''_2) ; on a des isomorphismes canoniques $p_i : \mathscr{R}(G''_i, E''_i) \xrightarrow{\sim} \mathscr{R}$, d'où un isomorphisme

$$p = p_2^{-1} \circ p_1 : \quad \mathscr{R}(G''_1, E''_1) \longrightarrow \mathscr{R}(G''_2, E''_2).$$

Par le théorème d'unicité, il existe un unique isomorphisme

$$f : (G''_1, E''_1) \xrightarrow{\sim} (G''_2, E''_2)$$

tel que $\mathscr{R}(f) = p$. On a donc sur G' une donnée de recollement ; c'est une donnée de descente.

En effet, il faut vérifier une condition de compatibilité entre les images réciproques
317 de f sur S''', mais il suffit de la faire sur les transformés de ces flèches par $\mathscr{R}$, car ce dernier est pleinement fidèle. Or p est bien une donnée de descente, par construction, ce qui montre que f en est aussi une. Comme G' est affine, cette donnée de descente est effective ; comme l'épinglage de G' est stable par la donnée de descente, on vérifie aisément qu'il existe un S-groupe épinglé (G, E) qui donne (G', E') par extension de la base et qui est donc de type $\mathscr{R}$.

N. B. Naturellement, dans le langage des catégories fibrées, la démonstration précédente se simplifie (et se comprend).

Corollaire 5.10. — *Soit* S *un préschéma non vide. Soit* $\mathscr{R}$ *une donnée radicielle épinglée telle qu'il existe un* S*-groupe réductif de type* $\mathscr{R}$*. Alors il existe un* S*-groupe épinglé de type* $\mathscr{R}$*,* unique *à un isomorphisme unique près.*

Définition 5.11. — Sous les conditions précédentes, on notera $\mathrm{\acute{E}p}_S(\mathscr{R})$ l'unique S-groupe épinglé de type $\mathscr{R}$, $T_S(\mathscr{R})$ son tore maximal canonique, $B_S(\mathscr{R})$ son groupe de Borel canonique, ...

Si on a un morphisme $S' \to S$ (S' non vide), on peut identifier $\mathrm{\acute{E}p}_{S'}(\mathscr{R})$ à $\mathrm{\acute{E}p}_S(\mathscr{R}) \times_S S'$, etc... En particulier, si $\mathrm{\acute{E}p}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}(\mathscr{R})$ existe (on verra que c'est toujours le cas), on le note $\mathrm{\acute{E}p}(\mathscr{R})$ et on a

$$\mathrm{\acute{E}p}_S(\mathscr{R}) = \mathrm{\acute{E}p}(\mathscr{R}) \underset{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}{\times} S.$$

On dit que $\mathrm{\acute{E}p}(\mathscr{R})$ est le *schéma en groupes de Chevalley* de type $\mathscr{R}$.

5.12. — Il revient donc au même de dire que le S-faisceau en groupes G est un S-groupe réductif de type $\mathscr{R}$ ou de dire qu'il est localement isomorphe (pour la topologie étale ou (fpqc)) à $\mathrm{Ép}_{\mathrm{S}}(\mathscr{R})$. De même, en vertu des théorèmes de conjugaison, il revient au même de dire que (G, T) est un S-groupe réductif de type $\mathscr{R}$ muni d'un tore maximal ou qu'il est localement isomorphe à $(\mathrm{Ép}_{\mathrm{S}}(\mathscr{R}), \mathrm{T}_{\mathrm{S}}(\mathscr{R}))$; de même avec groupes de Borel ou couples de Killing.

6. Systèmes de Chevalley

318

Les calculs explicites du numéro 3 ont des conséquences numériques importantes. Posons d'abord la définition suivante :

***Définition 6.1.* —** Soient S un préschéma, $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ un S-groupe déployé. On appelle *système de Chevalley* de G une famille $(\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{R}}$ d'éléments

$$\mathrm{X}_\alpha \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^\alpha)^*$$

vérifiant la condition suivante :

(SC) pour tout couple α, $\beta \in \mathrm{R}$, on a

$$\mathrm{Ad}(w_\alpha(\mathrm{X}_\alpha))\mathrm{X}_\beta = \pm \mathrm{X}_{s_\alpha(\beta)}.$$

On rappelle (Exp. XX, 3.1) que

$$w_\alpha(\mathrm{X}_\alpha) = \exp(\mathrm{X}_\alpha)\exp(-\mathrm{X}_\alpha^{-1})\exp(\mathrm{X}_\alpha).$$

Remarquons que (SC) entraîne en particulier $\mathrm{X}_{-\alpha} = \pm\mathrm{X}_\alpha$ pour $\alpha \in \mathrm{R}$, en vertu de la relation (Exp. XX, 2.10) $\mathrm{Ad}(w_\alpha(\mathrm{X}_\alpha))\mathrm{X}_\alpha = -\mathrm{X}_{-\alpha}$.

***Proposition 6.2.* —** *Tout groupe déployé possède un système de Chevalley. Plus précisément, soit* $(\mathrm{R}_0, (\mathrm{X}'_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{R}_0})$ *un épinglage* (1.1) *du groupe déployé* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ *; il existe un système de Chevalley* $(\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{R}}$ *de* G *tel que* $\mathrm{X}_\alpha = \mathrm{X}'_\alpha$ *pour* $\alpha \in \mathrm{R}_0$.

Montrons d'abord qu'il suffit de vérifier la condition (SC) pour $\alpha \in \mathrm{R}_0$; pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, il existe une suite $\{\alpha_i\} \subset \mathrm{R}_0$ avec $\alpha = s_{\alpha_1}\cdots s_{\alpha_n}(\alpha_{n+1})$, d'où en appliquant la condition (SC) pour chacun des α_i,

$$\mathrm{X}_\alpha = \pm\,\mathrm{Ad}\big(w_{\alpha_1}(\mathrm{X}_{\alpha_1})\cdots w_{\alpha_n}(\mathrm{X}_{\alpha_n})\big)\mathrm{X}_{\alpha_{n+1}}.$$

Par 3.1.1 (iii), on a 319

$$w_{\alpha_1}(\mathrm{X}_{\alpha_1})\cdots w_{\alpha_n}(\mathrm{X}_{\alpha_n})w_{\alpha_{n+1}}(\mathrm{X}_{\alpha_{n+1}})w_{\alpha_n}(\mathrm{X}_{\alpha_n})^{-1}\cdots w_{\alpha_1}(\mathrm{X}_{\alpha_1})^{-1} = \alpha^*(\pm 1)w_\alpha(\mathrm{X}_\alpha).$$

Maintenant, il suffit de remarquer que $w_{\alpha_i}(\mathrm{X}_{\alpha_i})^{-1} = \alpha_i^*(-1)w_{\alpha_i}(\mathrm{X}_{\alpha_i})$ et que pour tout couple de racines (β, γ), on a $\beta(\gamma^*(-1)) = (-1)^{(\gamma^*,\beta)} = \pm 1$, ce qui entraîne que si (SC) est vérifié pour les couples (α_i, γ) $(\gamma \in \mathrm{R})$, il l'est pour tout couple (α, β), $(\beta \in \mathrm{R})$.

Construisons maintenant un système $(\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{R}}$ de la manière suivante. Pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, choisissons une suite $\{\alpha_i\} \subset \mathrm{R}_0$ comme ci-dessus et définissons X_α par

$$\mathrm{X}_\alpha = \mathrm{Ad}\big(w_{\alpha_i}(\mathrm{X}_{\alpha_1})\ldots w_{\alpha_n}(\mathrm{X}_{\alpha_n})\big)\mathrm{X}'_{\alpha_{n+1}}.$$

Pour vérifier (SC), il suffit de prouver :

Lemme 6.3. — *Soit* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R}, \mathrm{R}_0, (\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{R}_0})$ *un* S-*groupe épinglé ; soit* α_i $(0 \leqslant i \leqslant n+1)$ *une suite de racines simples telle que*

$$\mathrm{int}(s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_n})(\alpha_{n+1}) = \alpha_0.$$

Alors

$$\mathrm{Ad}(w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n})\mathrm{X}_{\alpha_{n+1}} = \pm \mathrm{X}_{\alpha_0}.$$

Raisonnant comme dans 2.3.4 à l'aide du lemme de Tits, on est ramené à vérifier le lemme 6.3 dans les deux cas suivants :

a) G est de rang semi-simple au plus 2 *ou* b) $w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n}$ est une section de T. Dans le cas a), remarquons que 6.3 est une conséquence de 6.2 et que 6.2 a été vérifié en 3.1.2 (resp. 3.2.1, resp. 3.3.1, resp. 3.4.1), (ii).

320 Reste donc à prouver 6.3 dans le cas b), ou, ce qui revient au même, que si $\{\alpha_i\}$ est une suite de racines simples telle que $s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_n} = \mathrm{id}$, alors $t = w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n}$ vérifie $\alpha(t) = \pm 1$ pour toute racine $\alpha \in \mathrm{R}$. En vertu de la structure du groupe de Weyl (Exp. XXI, 5.1), le mot $s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_n}$ du groupe libre engendré par les s_α, $\alpha \in \mathrm{R}_0$ est dans le sous-groupe invariant engendré par les $(s_\alpha s_\beta)^{n_{\alpha\beta}}$, $(\alpha, \beta) \in \mathrm{R}_0 \times \mathrm{R}_0$. On est donc ramené au cas où $s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_n}$ est de la forme

$$s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_i} (s_{\alpha_{i+1}} s_{\alpha_{i+2}})^{n_{\alpha_{i+1}\,\alpha_{i+2}}} s_{\alpha_i} \cdots s_{\alpha_1}.$$

Alors on a

$$t = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_i}(t_{\alpha_{i+1}\alpha_{i+2}}),$$

et on est ramené à vérifier que pour tout couple de racines simples (α_1, α_2) et toute racine $\beta \in \mathrm{R}$, on a $\beta(t_{\alpha_1\alpha_2}) = \pm 1$, ce qui est trivial, vu les valeurs de $t_{\alpha_1\alpha_2}$ calculées au n°3 (partie (i) de 3.1.2, 3.2.1, 3.3.1, 3.4.1).

Proposition 6.4. — *Soient* S *un préschéma,* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ *un* S-*groupe déployé,* $(\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{R}}$ *un système de Chevalley de* G. *Soient* α *et* β *deux racines non proportionnelles ; supposons*

$$\mathrm{long}(\alpha) \leqslant \mathrm{long}(\beta), \quad \textit{i.e.} \quad |(\beta^*, \alpha)| \leqslant |(\alpha^*, \beta)|.$$

Soient p *et* q *les entiers* $\geqslant 0$ *tels que l'ensemble des racines de la forme* $\beta + k\alpha$, $k \in \mathbb{Z}$, *soit*

$$\{\beta - (p-1)\alpha, \ldots, \beta, \ldots, \beta + q\alpha\}.$$

(cf. Exp. XXI, 2.3.5 *; d'après loc. cit., on a donc* $-(\alpha^*, \beta) = q - p + 1$). *Alors la relation de commutation entre* U_α *et* U_β *est donnée par le tableau suivant* (*qui épuise les cas*
321 *possibles, car la longueur de la chaîne de racines précédentes est* $p + q - 1 \leqslant 3$), *où on note pour chaque* $\gamma \in \mathrm{R}$, $p_\gamma(x) = \exp(x\mathrm{X}_\gamma)$ *:*

p *quelconque,* $q = 0$

$$p_\beta(y)\, p_\alpha(x) = p_\alpha(x)\, p_\beta(y).$$

$p = 1$, $q = 1$

$$p_\beta(y)\, p_\alpha(x) = p_\alpha(x)\, p_\beta(y)\, p_{\alpha+\beta}(\pm xy).$$

$p = 1$, $q = 2$

$$p_\beta(y)\, p_\alpha(x) = p_\alpha(x)\, p_\beta(y)\, p_{\alpha+\beta}(\pm xy)\, p_{2\alpha+\beta}(\pm x^2 y).$$

$p = 1$, $q = 3$,

$$p_\beta(y)\, p_\alpha(x) = p_\alpha(x)\, p_\beta(y)\, p_{\alpha+\beta}(\pm xy)\, p_{2\alpha+\beta}(\pm x^2 y)\, p_{3\alpha+\beta}(\pm x^3 y)\, p_{3\alpha+2\beta}(\pm x^3 y^2).$$

$p = 2$, $q = 1$,

$$p_\beta(y)\, p_\alpha(x) = p_\alpha(x)\, p_\beta(y)\, p_{\alpha+\beta}(\pm 2xy).$$

$p = 2$, $q = 2$,

$$p_\beta(y)\, p_\alpha(x) = p_\alpha(x)\, p_\beta(y)\, p_{\alpha+\beta}(\pm 2xy)\, p_{2\alpha+\beta}(\pm 3x^2 y)\, p_{r+2s}(\pm 3xy^2).$$

$p = 3$, $q = 1$,

$$p_\beta(y)\, p_\alpha(x) = p_\alpha(x)\, p_\beta(y)\, p_{\alpha+\beta}(\pm 3xy).$$

Démonstration. En vertu de Exp. XXI, 3.5.4, il existe un système de racines simples R_0 de R tel que $\alpha \in \mathrm{R}_0$ et qu'il existe $\alpha' \in \mathrm{R}_0$ et a, $b \geqslant 0$avec $\beta = a\alpha + b\alpha'$. Considérons l'épinglage $(\mathrm{R}_0, (\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{R}_0})$ de G. La relation de commutation à vérifier est une relation entre éléments de $\mathrm{U}_{\alpha\alpha'}$; on est donc ramené aux calculs explicites du n°3, et on conclut aussitôt par la condition (SC).

Corollaire 6.5 (Règle de Chevalley)**. —** *Soient* S *un préschéma,* $(\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{R}}$ *un système de Chevalley du* S*-groupe déployé* G*. Si* α, β, $\alpha+\beta \in \mathrm{R}$, *alors* 322

$$[\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_\beta] = \pm p\, \mathrm{X}_{\alpha+\beta},$$

où p *est le plus petit entier* > 0 *tel que* $\beta - p\alpha$ *ne soit pas racine.*

En effet, comme l'assertion est symétrique en α et β, on peut supposer $\mathrm{long}(\alpha) \leqslant \mathrm{long}(\beta)$, et on est ramené à 6.4.

Corollaire 6.6. — *Soient* S *un préschéma tel que* $6\cdot 1_{\mathrm{S}} \neq 0$ *et* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ *un* S*-groupe déployé. Si* R' *est une partie de* R *telle que*

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{R}'} = \mathfrak{t} \oplus \coprod_{\alpha\in\mathrm{R}'} \mathfrak{g}^\alpha$$

soit une sous-Algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$*, alors* R' *est une partie* close *de* R (Exp. XXI, 3.1.4).

6.7. — Il est possible de préciser la valeur exacte des divers $\pm$ de ce numéro, grâce à l'étude du groupe $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ et plus précisément, du « groupe de Weyl étendu » :

$$\mathrm{W}^* = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{\acute{E}p}(\mathscr{R})}(\mathrm{T}(\mathscr{R}))(\mathbb{Z})$$

qui est une extension de $\mathrm{W}(\mathscr{R})$ par un groupe abélien de type $(2, 2, \ldots, 2)$, qui est « responsable des signes » (*) .

(*)cf. J. Tits : *Sur les constantes de structure et le théorème d'existence des algèbres de Lie semi-simples*, Publ. Math. I.H.É.S. n°31.