

EXPOSÉ XXIV

AUTOMORPHISMES DES GROUPES RÉDUCTIFS

par M. DEMAZURE

La première partie de cet exposé (n^{os} 1 à 5) est une conséquence directe de l'existence pour un groupe réductif de « suffisamment d'automorphismes extérieurs », résultat qui est une conséquence de la forme la plus faible du théorème d'isomorphisme des groupes épinglés. La seconde partie (n^{os} 6 et 7) expose deux applications des résultats plus précis de l'exposé précédent ; en particulier, le n^o 7 utilise le théorème de générateurs et relations sous sa forme explicite. Enfin, nous avons donné en appendice (n^o 8) des résultats de cohomologie « galoisienne » utilisés dans le texte. 323

Précisons nos notations cohomologiques : si S est un préschéma et G un S -préschéma en groupes, on notera $H^1(S, G)$ le premier ensemble de cohomologie de S à coefficients dans G , calculé pour la topologie (fpqc) ; c'est aussi l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux (fpqc) principaux homogènes sous G . On notera $H^1_{\text{ét}}(S, G)$ l'ensemble correspondant pour la topologie étale ; c'est donc la partie de $H^1(S, G)$ formée des classes de faisceaux homogènes sous G qui sont quasi-isotriviaux (= localement triviaux pour la topologie étale). On notera $\text{Fib}(S, G)$ la partie de $H^1(S, G)$ formée des classes de faisceaux représentables (fibrés principaux homogènes). On a donc les inclusions 324

$$\begin{aligned} H^1_{\text{ét}}(S, G) &\subset H^1(S, G), \\ \text{Fib}(S, G) &\subset H^1(S, G). \end{aligned}$$

Si tout faisceau principal homogène sous G est représentable (par exemple si G est quasi-affine sur S cf. SGA VIII 7.9), on a donc $\text{Fib}(S, G) = H^1(S, G)$.

Si $S' \rightarrow S$ est un morphisme couvrant pour la topologie (fpqc), on note $H^1(S'/S, G)$ le noyau de l'application canonique $H^1(S, G) \rightarrow H^1(S', G_{S'})$. On sait que $H^1(S'/S, G)$ peut se calculer de manière simpliciale (TDTE II, § A.4), ce qui implique que lorsque $S' \rightarrow S$ est couvrant pour la topologie étale, c'est aussi le noyau de $H^1_{\text{ét}}(S, G) \rightarrow H^1_{\text{ét}}(S', G_{S'})$.

Enfin, on appelle « théorème 90 » l'assertion suivante : « tout faisceau principal homogène sous $\mathbb{G}_{m, S}$ est représentable et localement trivial. » (Exp. VIII, 4.5), assertion équivalente à « $H^1(S, \mathbb{G}_{m, S}) = \text{Pic}(S)$ », ou encore à « $H^1(S, \mathbb{G}_{m, S}) = 0$ pour S local (resp. semi-local) ».

1. Schéma des automorphismes d'un groupe réductif

1.0. — Il convient d'abord de préciser certaines définitions de l'exposé précédent. Soient S un préschéma non vide, G un S -groupe réductif, $\mathcal{R} = (M, M^*, R, R^*, R_0)$ une donnée radicielle réduite épinglée. On appelle *épinglage de G de type $\mathcal{R}$* , ou *$\mathcal{R}$ -épinglage de G* , la donnée :

- 325 (i) d'un isomorphisme de $D_S(M)$ sur un tore maximal T de G (ou, ce qui revient au même, d'un monomorphisme $D_S(M) \rightarrow G$ dont l'image soit un tore maximal T de G), identifiant R à un système de racines de G relativement à T (Exp. XIX, 3.6) et R^* à l'ensemble des coracines correspondantes,
- (ii) pour chaque $\alpha \in R_0$, d'un $X_\alpha \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^\alpha)^*$.

Pour que G possède un $\mathcal{R}$ -épinglage, il faut et il suffit qu'il soit déployable et de type $\mathcal{R}$ (Exp. XXII, 2.7).

Si $u : G \rightarrow G'$ est un isomorphisme de S -groupes réductifs, à tout $\mathcal{R}$ -épinglage $\mathcal{E}$ de G correspond par « transport de structure » un $\mathcal{R}$ -épinglage $u(\mathcal{E})$ de G' . Si $v : \mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}$ est un isomorphisme de données radicielles épinglées, à tout $\mathcal{R}'$ -épinglage $\mathcal{E}$ de G' correspond par transport de structure un $\mathcal{R}$ -épinglage $v(\mathcal{E})$ de G .

Appelons *groupe épinglé* un triplet $(G, \mathcal{R}, \mathcal{E})$ où G est un S -groupe réductif, $\mathcal{R}$ une donnée radicielle réduite épinglée, et $\mathcal{E}$ un épinglage de G de type $\mathcal{R}$. On appelle *isomorphisme* du groupe épinglé $(G, \mathcal{R}, \mathcal{E})$ sur le groupe épinglé $(G', \mathcal{R}', \mathcal{E}')$ un couple (u, v) où u est un isomorphisme $u : G \rightarrow G'$ et v un isomorphisme de données radicielles épinglées $v : \mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}$, tels que $u(\mathcal{E}) = v(\mathcal{E}')$.

N. B. Si S est non vide, v est uniquement déterminé par u , et on dira aussi par abus de langage que u est un isomorphisme des groupes épinglés. En particulier, si $(G, \mathcal{R}, \mathcal{E})$ est un groupe épinglé, un automorphisme de $(G, \mathcal{R}, \mathcal{E})$ est donc un automorphisme u de G tel qu'il existe un automorphisme v de $\mathcal{R}$ tel que $u(\mathcal{E}) = v(\mathcal{E})$; c'est donc 326 un automorphisme de G , normalisant T , induisant sur T un automorphisme de la forme $D_S(h)$, où h est un automorphisme de M , et permutant entre eux les éléments X_α , $\alpha \in R_0$. (Comme on le voit facilement, les conditions précédentes caractérisent d'ailleurs les automorphismes de $(G, \mathcal{R}, \mathcal{E})$).

On a un foncteur contravariant évident

$$\Phi : (G, \mathcal{R}, \mathcal{E}) \mapsto \mathcal{R}, \quad (u, v) \mapsto v$$

et le résultat principal de l'exposé précédent (Exp. XXIII, 4.1) nous montre que c'est un foncteur pleinement fidèle (nous verrons d'ailleurs dans l'exposé suivant que c'est une équivalence de catégories). Il s'ensuit en particulier que le groupe des automorphismes de $(G, \mathcal{R}, \mathcal{E})$ est canoniquement isomorphe au groupe des automorphismes de la donnée radicielle épinglée $\mathcal{R}$ (cf. Exp. XXIII, 5.5).

1.1. — Soit S un préschéma ; munissons $(\mathbf{Sch})_S$ de la topologie (fpqc) et considérons le S -faisceau en groupes $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)$, où G est un S -préschéma en groupes. On a une suite exacte de S -faisceaux en groupes

$$1 \longrightarrow \underline{\text{Centr}}(G) \longrightarrow G \xrightarrow{\text{int}} \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)$$

qui définit un monomorphisme

$$j : G/\underline{\text{Centr}}(G) \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{\text{S-gr.}}(G).$$

Le faisceau image de j est le faisceau des automorphismes intérieurs de G ; pour qu'un automorphisme u de G soit intérieur, il faut et il suffit qu'il existe une famille couvrante $\{S_i \rightarrow S\}$ et pour chaque i un $g_i \in G(S_i)$ tel que $\text{int}(g_i) = u_{S_i}$. Si v est un autre automorphisme de G , on voit aussitôt que $\text{int}(v)u = vuv^{-1}$ est l'automorphisme intérieur défini par la famille $g'_i = v(g_i)$. Il s'ensuit que l'image de j est distinguée dans $\underline{\text{Aut}}_{\text{S-gr.}}(G)$. Le faisceau en groupes quotient, noté $\underline{\text{Autext}}(G)$, est le faisceau des automorphismes extérieurs de G . On a donc une suite exacte

$$1 \longrightarrow G/\underline{\text{Centr}}(G) \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{\text{S-gr.}}(G) \longrightarrow \underline{\text{Autext}}(G) \longrightarrow 1.$$

Les définitions précédentes sont toutes compatibles avec les changements de base. Elles sont naturellement valables dans tout site.

1.2. — Soient S un préschéma et $(G, \mathcal{R}, \mathcal{E})$ un S -groupe réductif épinglé. Soit E le groupe (abstrait) des automorphismes de la donnée radicielle épinglée $\mathcal{R}$, i.e. le groupe des automorphismes de $\mathcal{R}$ normalisant R_0 . Par Exp. XXIII, 5.5, on a un monomorphisme canonique

$$E \longrightarrow \text{Aut}_{\text{S-gr.}}(G)$$

qui associe à $h \in E$ l'unique automorphisme du groupe épinglé G tel que $\Phi(u) = h$. Ce monomorphisme définit canoniquement un monomorphisme de faisceaux

$$a : E_S \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{\text{S-gr.}}(G).$$

Pour qu'un automorphisme u de G soit une section du faisceau image de a , il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

(i) u normalise T . On sait alors que u permute les racines de G relativement à T . Si $\alpha \in R$, alors $u(\alpha) : t \mapsto \alpha(u^{-1}(t))$ est donc localement sur S de la forme $t \mapsto \beta(t)$, $\beta \in R$. La seconde condition s'écrit alors comme suit :

(ii) Si $\alpha \in R_0$ et si U est un ouvert de S tel que $u(\alpha)_U \in R$, alors $u(\alpha)_U \in R_0$ et on a

$$\mathcal{L}ie(u_U)(X_\alpha)_U = (X_{u(\alpha)})_U.$$

Il résulte aussitôt des définitions que les sections de $a(E_S)$ normalisent les sous-groupes de G définis par l'épinglage : T, B, B^-, U, U^- .

Ces définitions posées, on a :

Théorème 1.3. — Soient S un préschéma, G un S -groupe réductif. Considérons la suite exacte canonique de S -faisceaux en groupes

$$1 \longrightarrow \text{ad}(G) \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{\text{S-gr.}}(G) \xrightarrow{p} \underline{\text{Autext}}(G) \longrightarrow 1.$$

(i) $\underline{\text{Aut}}_{\text{S-gr.}}(G)$ est représentable par un S -préschéma lisse et séparé.

(ii) $\underline{\text{Autext}}(G)$ est représentable par un S -préschéma constant tordu à engendrement fini (Exp. X, 5.1).

(iii) Si G est déployable, la suite exacte précédente est scindée. Plus précisément, pour tout épinglage de G , le morphisme (cf. 1.2)

$$p \circ a : E_S \longrightarrow \underline{\text{Autext}}(G)$$

est un isomorphisme.

Montrons d'abord comment le théorème se déduit de :

Lemme 1.4. — Dans les notations de 1.2, $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)$ est le produit semi-direct $a(E_S) \cdot \text{int}(G)$.

329 Le lemme entraîne aussitôt le théorème lorsque G est déployable. Comme G est localement déployable pour la topologie étale (Exp. XXII, 2.3), donc aussi pour la topologie (fppf), et que celle-ci est « de descente effective » pour la catégorie fibrée des morphismes constants tordus (Exp. X, 5.5), on en déduit (ii) dans le cas général (cf. Exp. IV, 4.6.8). Pour en déduire (i), on remarque que $\text{int}(G) \simeq \text{ad}(G)$ est affine sur S , donc le morphisme p affine lorsque $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)$ est représentable, et on conclut par descente des schémas affines.

Il ne nous reste donc qu'à prouver 1.4. Pour ce faire, il suffit de prouver :

Lemme 1.5. — Si $(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ et $(\mathcal{R}', \mathcal{E}')$ sont deux épinglages du S -groupe réductif G , il existe un unique automorphisme intérieur u de G sur S transformant un épinglage en l'autre (i.e. tel qu'il existe $v : \mathcal{R}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}$ avec $u(\mathcal{E}) = v(\mathcal{E}')$, cf. 1.0).

1.5.1. Unicité. — Il suffit de prouver que si G est un S -groupe épinglé et si $\text{int}(g)$ est un automorphisme de groupe épinglé ($g \in G(S)$), alors $\text{int}(g) = \text{id}$. Or on a d'abord $\text{int}(g)T = T$, $\text{int}(g)B = B$, donc $g \in \underline{\text{Norm}}_G(T)(S) \cap \underline{\text{Norm}}_G(B)(S) = T(S)$ (cf. par exemple Exp. XXII, 5.6.1). Il s'ensuit que $\text{int}(g)$ normalise chaque U_α et que

$$\mathcal{L}ie(\text{int}(g))X_\alpha = \text{Ad}(g)X_\alpha = \alpha(g)X_\alpha$$

pour $\alpha \in R_0$. On a donc $\alpha(g) = 1$ pour $\alpha \in R_0$, donc $g \in \bigcap_{\alpha \in R_0} (\text{Ker } \alpha)(S) = \underline{\text{Centr}}(G)(S)$ (Exp. XXII, 4.1.8). C.Q.F.D.

1.5.2. Existence. — Il suffit de la prouver localement pour la topologie (fpqc). Soient

$$(T, M, R, R_0, (X_\alpha)_{\alpha \in R_0}) \quad \text{et} \quad (T', M', R', R'_0, (X'_{\alpha'})_{\alpha' \in R'_0})$$

330 les deux épinglages. Par conjugaison des tores maximaux, on peut supposer $T = T'$. Quitte à restreindre S , on peut supposer que l'isomorphisme $D_S(M) \simeq D_S(M')$ provient d'un isomorphisme $M \simeq M'$ transportant R sur R' , et on est ramené à la situation $T = T'$, $M = M'$, $R = R'$. Comme les systèmes de racines simples sont conjugués par le groupe de Weyl (Exp. XXI, 3.3.7), on peut également supposer $R_0 = R'_0$. Il existe alors pour chaque $\alpha \in R_0$ un scalaire $z_\alpha \in \mathbb{G}_m(S)$ tel que $X'_\alpha = z_\alpha X_\alpha$, et il suffit de construire localement pour (fpqc) une section t de T telle que $\alpha(t) = z_\alpha$ pour chaque $\alpha \in R_0$. Mais le morphisme $T \rightarrow (\mathbb{G}_{m,S})^{R_0}$ de composantes $\{\alpha, \alpha \in R_0\}$ est le dual d'une injection $\mathbb{Z}^{R_0} \rightarrow M$, donc est fidèlement plat, ce qui achève la démonstration de 1.5.2 et donc de 1.3.

Corollaire 1.6. — Soient S un préschéma, G un S -groupe réductif. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)$ est affine (resp. de type fini, resp. de présentation finie, resp. quasi-compact) sur S .
- (ii) $\underline{\text{Autext}}(G)$ est fini sur S .
- (iii) Pour tout $s \in S$, on a $\text{rgred}(G_s) - \text{rgss}(G_s) \leq 1$.

En effet, comme $\text{ad}(G)$ est affine, plat et de présentation finie sur S , le morphisme p est affine, fidèlement plat et de présentation finie.

Si $\underline{\text{Autext}}(G)$ est fini sur S , il est affine sur S , donc aussi $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)$, ce qui prouve (ii) $\Rightarrow$ (i). Si $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)$ est quasi-compact sur S , il est de présentation finie sur S (étant de toute façon localement de présentation finie et séparé sur S) ; par Exp. V, 9.1, $\underline{\text{Autext}}(G)$ est alors de présentation finie sur S , donc fini, ce qui prouve (i) $\Rightarrow$ (ii). Enfin, pour prouver l'équivalence de (ii) et (iii), on peut supposer G déployé, et on est ramené à Exp. XXI, 6.7.8. 331

Corollaire 1.7. — Soient S un préschéma, G un S -groupe réductif. Alors $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)^0 = \text{int}(G) \simeq \text{ad}(G)$.

Corollaire 1.8. — Soient S un préschéma, G un S -groupe réductif, H un S -préschéma en groupes lisse, affine et à fibres connexes sur S . Alors le S -foncteur

$$\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, H)$$

est représentable par un S -préschéma lisse et séparé (qui est affine sur S si G est semi-simple).

En effet, soit U l'ensemble des points t de S tels que $H_{\bar{t}}$ soit réductif ; c'est un ouvert (Exp. XIX, 2.6) ; si S' est un S -préschéma, $H_{S'}$ est réductif si et seulement si $S' \rightarrow S$ se factorise par U . Il s'ensuit que le morphisme canonique $\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, H) \rightarrow S$ se factorise par U . On peut donc supposer $S = U$ et on est ramené à :

Corollaire 1.9. — Soient S un préschéma, G et G' deux S -groupes réductifs. Alors

$$F = \underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, G')$$

est représentable par un S -préschéma lisse et séparé (affine si G ou G' est semi-simple). De plus, S se décompose en somme de deux sous-préschémas ouverts S_1 et S_2 tels que $F_{S_1} = \emptyset$ et que F_{S_2} soit un fibré principal homogène à gauche (resp. droite) sous $\underline{\text{Aut}}_{S_2\text{-gr.}}(G'_{S_2})$ (resp. $\underline{\text{Aut}}_{S_2\text{-gr.}}(G_{S_2})$). 332

En effet, soit S_2 l'ensemble des points de S où G et G' sont de même type, et soit S_1 son complémentaire.

Comme le type d'un groupe réductif est une fonction localement constante, S_1 et S_2 sont ouverts. Il est clair que $F_{S_1} = \emptyset$, et on peut supposer $S = S_2$. Par Exp. XXIII, 5.6, F est un faisceau principal homogène sous $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)$, localement trivial pour la topologie étale. Il s'ensuit que $F_0 = F / \text{ad}(G)$ est un faisceau principal homogène sous $\underline{\text{Autext}}(G)$, localement trivial pour la topologie étale, donc représentable (Exp. X, 5.5). Comme $\text{ad}(G)$ est affine, F est donc aussi représentable.

Remarquons qu'en cours de démonstration, on a obtenu :

Corollaire 1.10. — Soient S un préschéma, G et G' deux S -groupes réductifs de même type en chaque $s \in S$. Alors $\mathrm{ad}(G)$ opère librement (à droite) dans $\underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, G')$, le faisceau quotient

$$\underline{\mathrm{Isomext}}(G, G') = \underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, G') / \mathrm{ad}(G)$$

est représentable par un S -préschéma constant tordu, qui est un fibré principal homogène sous $\underline{\mathrm{Autext}}(G)$ (et qui est donc fini sur S si G est semi-simple). De plus, l'isomorphisme

$$\underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, G') \simeq \underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G', G)$$

défini par $u \mapsto u^{-1}$ induit un isomorphisme

$$\underline{\mathrm{Isomext}}(G, G') \simeq \underline{\mathrm{Isomext}}(G', G).$$

333 Remarque 1.11. — Si $\underline{\mathrm{Isomext}}(G, G')(S) \neq \emptyset$, on dit que G est une forme tordue intérieure de G' ; alors G' est une forme tordue intérieure de G ; on peut alors réduire le groupe structural de $\underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, G')$ à $\mathrm{ad}(G)$. Plus précisément, soit $u \in \underline{\mathrm{Isomext}}(G, G')(S)$, considéré comme une section $u : S \rightarrow \underline{\mathrm{Isomext}}(G, G')$. Notons

$$\underline{\mathrm{Isomint}}_u(G, G')$$

l'image réciproque par le morphisme canonique $\underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, G') \rightarrow \underline{\mathrm{Isomext}}(G, G')$ du sous-préschéma fermé de $\underline{\mathrm{Isomext}}(G, G')$ image de u . L'opération naturelle de $\mathrm{ad}(G)$ sur $\underline{\mathrm{Isomint}}_u(G, G')$ munit ce préschéma d'une structure de fibré principal homogène; par extension du groupe structural $\mathrm{ad}(G) \rightarrow \underline{\mathrm{Autext}}(G)$, $\underline{\mathrm{Isomint}}_u(G, G')$ redonne $\underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, G')$.

Par le lemme de Hensel (Exp. XI, 1.11), 1.8 donne aussitôt :

Corollaire 1.12. — Soient S un schéma local hensélien, G un S -groupe réductif, G' un S -groupe lisse affine à fibres connexes, s le point fermé de S . Si G_s et G'_s sont des $k(s)$ -groupes algébriques isomorphes, G et G' sont isomorphes. Plus précisément, tout $k(s)$ -isomorphisme $G_s \simeq G'_s$ provient d'un S -isomorphisme $G \simeq G'$.

Appliquant maintenant 1.7 (resp. 1.12) au schéma des nombres duals sur un corps, on a par Exp. III, 2.10 (resp. 3.1) :

Corollaire 1.13. — Soient k un corps et G un k -groupe réductif. Alors

$$H^1(G, \mathcal{L}ie(G/k)) = H^2(G, \mathcal{L}ie(G/k)) = 0.$$

334 Remarque 1.14. — (i) L'assertion concernant le H^1 était connue (CHEVALLEY); celle concernant le H^2 a été démontrée dans la plupart des cas de la classification par CHEVALLEY.

(ii) En fait, la conjonction de 1.13 et du théorème d'unicité sur un corps algébriquement clos est essentiellement équivalente au théorème d'unicité. Une démonstration directe de 1.13 donnerait donc une manière de déduire le théorème d'unicité général du théorème d'unicité de CHEVALLEY sur un corps.

L'existence de groupes réductifs de tous les types sur tous les préschémas (Exp. XXV) montre que les obstructions au relèvement d'un k -groupe réductif G au-dessus des anneaux artiniens à corps résiduel k (qui par Exp. III, 3.8 sont des éléments de $H^3(G, \mathcal{L}ie(G/k)) \otimes V$ où V est un certain k -espace vectoriel) sont nulles. Ceci semble suggérer que $H^3(G, \mathcal{L}ie(G/k)) = 0$. Là encore, une démonstration directe de ce fait (s'il est vrai) donnerait sans doute une manière de déduire le théorème d'existence général du théorème d'existence sur un corps (Tôhoku de Chevalley).

Corollaire 1.15. — Soient k un préschéma, G un k -groupe réductif. Considérons k comme G -module trivial. Alors

$$H^1(G, k) = H^2(G, k) = 0.$$

Considérons en effet le k -groupe réductif $H = G \times_k \mathbb{G}_{m,k}$. On a $\mathcal{L}ie(H/k) = \mathcal{L}ie(G/k) \oplus k$, décomposition stable sous H . Pour un H -Module quelconque M , on a $H^i(H, M) = H^i(G, H^0(\mathbb{G}_{m,k}, M))$ (cela résulte de la caractérisation des $H^i(H, -)$ comme foncteurs dérivés de $H^0(H, -) = H^0(G, H^0(\mathbb{G}_{m,k}, -))$, et du fait que le foncteur $H^0(\mathbb{G}_{m,k}, -)$ est exact, cf. Exp. I, n°5). En particulier, on a

335

$$H^i(H, \mathcal{L}ie(H/k)) = H^i(G, \mathcal{L}ie(G/k)) \oplus H^i(G, k) \quad \text{pour } i > 0.$$

On conclut alors en appliquant 1.13 au groupe réductif H .

Définition 1.16. — Soient S un préschéma, G un S -groupe réductif. On appelle *forme* de G sur S un S -préschéma en groupes G' localement isomorphe à G pour (fpqc) (il revient au même de dire (cf. Exp. XXIII, 5.6), que G' est localement isomorphe à G pour (ét), ou encore que G' est un S -groupe réductif de même type que G en chaque point de S).

Corollaire 1.17. — Soient S un préschéma, G un S -groupe réductif. Le foncteur

$$G' \longmapsto \underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, G')$$

est une équivalence entre la catégorie des formes de G sur S et la catégorie des fibrés principaux homogènes sous $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)$.

Si $S' \rightarrow S$ est un morphisme couvrant, formes de G trivialisées par S' et fibrés trivialisés par S' se correspondent. Tout faisceau principal homogène sous $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)$ est représentable et quasi-isotrivial (localement trivial pour la topologie étale).

La première assertion est formelle dans la catégorie des faisceaux (pour (fpqc) par exemple). D'autre part, tout faisceau localement isomorphe à G (pour (fpqc)) est représentable (car G est affine sur S) et localement isomorphe à G pour (ét). Enfin, pour toute forme G' de G , le S -faisceau $\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, G')$ est représentable (1.8). Le corollaire en résulte aussitôt.

Corollaire 1.18. — L'ensemble des classes d'isomorphisme de formes du groupe réductif G sur S est isomorphe à

$$H^1(S, \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)) = H^1_{\text{ét}}(S, \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)) = \text{Fib}(S, \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)).$$

Si $S' \rightarrow S$ est un morphisme couvrant, le sous-ensemble formé des formes trivialisées par S' est isomorphe à $H^1(S'/S, \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G))$. 336

Corollaire 1.19. — Soient S un préschéma et $\mathcal{R}$ une donnée radicielle réduite épinglée telle que $\acute{\text{E}}\text{p}_S(\mathcal{R})$ existe (condition automatiquement vérifiée, Exp. XXV). Notons

$$\underline{\text{A}}_S(\mathcal{R}) = \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(\acute{\text{E}}\text{p}_S(\mathcal{R})) = \text{ad}(\acute{\text{E}}\text{p}_S(\mathcal{R})) \cdot \text{E}(\mathcal{R})_S.$$

(i) L'ensemble des classes d'isomorphisme de S -groupes réductifs de type $\mathcal{R}$ (Exp. XXII, 2.7, cf. Exp. XXIII, 5.12) est isomorphe à

$$H^1(S, \underline{\text{A}}_S(\mathcal{R})) = H^1_{\text{ét}}(S, \underline{\text{A}}_S(\mathcal{R})) = \text{Fib}(S, \underline{\text{A}}_S(\mathcal{R})).$$

(ii) Si $S' \rightarrow S$ est un morphisme couvrant, le sous-ensemble formé des classes de groupes déployables sur S' est isomorphe à $H^1(S'/S, \underline{\text{A}}_S(\mathcal{R}))$.

Remarque 1.20. — Avec les notations précédentes, à tout S -groupe réductif de type $\mathcal{R}$ est associé canoniquement un fibré principal homogène à droite sous $\underline{\text{A}}_S(\mathcal{R})$:

$$\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(\acute{\text{E}}\text{p}_S(\mathcal{R}), G) = P.$$

Remarquons que P s'interprète comme le « schéma des épinglages de G de type $\mathcal{R}$ » (cf. 1.0). D'ailleurs P est également un fibré principal homogène (à gauche) sous $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)$, structure qui apparaît aussitôt dans la description ci-dessus.

Proposition 1.21. — Soient S un schéma local hensélien, s son point fermé. Le foncteur

$$G \longmapsto G_s$$

337 induit une bijection de la classification des S -groupes réductifs sur celle des $k(s)$ -groupes réductifs.

En particulier, pour tout S -groupe réductif G , il existe un morphisme étale fini surjectif $S' \rightarrow S$ tel que $G_{S'}$ soit déployable.

Utilisant l'existence des $\acute{\text{E}}\text{p}_S(\mathcal{R})$ (Exp. XXV), on est ramené à prouver que si on note $H = \underline{\text{A}}_S(\mathcal{R})$, l'application canonique

$$\text{Fib}(S, H) \longrightarrow \text{Fib}(k(s), H_s)$$

est bijective (et que tout élément de $\text{Fib}(S, H)$ a la propriété indiquée ci-dessus). Or, toute partie finie de H est contenue dans un ouvert affine (c'est en effet trivial pour un groupe constant, et H est affine au-dessus d'un groupe constant); on peut donc utiliser le résultat démontré en appendice (8.1).

2. Automorphismes et sous-groupes

Introduisons une notation : si $H = \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)$, et si X est un sous-foncteur de G , on note

$$\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, X) = \underline{\text{Norm}}_H(X),$$

$$\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, \text{id}_X) = \underline{\text{Centr}}_H(X).$$

On définit de même $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, X, Y)$, $\dots$, $\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, X; G', X')$, $\dots$

338 **Proposition 2.1.** — Soient S un préschéma, G un S -groupe réductif, T un tore maximal de G (resp. B un groupe de Borel de G , resp. $B \supset T$ un couple de Killing de G). Notons T^{ad} (resp. B^{ad}) le tore maximal (resp. le groupe de Borel) de $\text{ad}(G)$ correspondant à T (resp. B) :

$$\begin{aligned} B^{\text{ad}} &\simeq B / \underline{\text{Centr}}(G) = B / \underline{\text{Centr}}(B), \\ T^{\text{ad}} &\simeq T / \underline{\text{Centr}}(G). \end{aligned}$$

Alors $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, T)$ (resp. $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, B)$, resp. $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, B, T)$) est représentable par un sous-préschéma fermé de $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)$, lisse sur S , et la suite exacte de 1.3 induit une suite exacte

$$e \longrightarrow \underline{\text{Norm}}_{\text{ad}(G)}(T^{\text{ad}}) \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, T) \longrightarrow \underline{\text{Autext}}(G) \longrightarrow e$$

(resp.

$$e \longrightarrow B^{\text{ad}} \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, B) \longrightarrow \underline{\text{Autext}}(G) \longrightarrow e,$$

resp.

$$e \longrightarrow T^{\text{ad}} \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, B, T) \longrightarrow \underline{\text{Autext}}(G) \longrightarrow e).$$

Par descente des sous-préschémas fermés, on se ramène aussitôt au cas où G est épinglé et où $B \supset T$ est son couple de Killing canonique (cf. Exp. XXII, 5.5.5 (iv)). Comme le groupe E de 1.2 normalise B et T , le résultat se déduit aussitôt des théorèmes de normalisation dans $\text{ad}(G)$ (Exp. XXII, 5.3.12 et 5.6.1).

Utilisant maintenant les théorèmes de conjugaison (cf. Exp. XXIII, 5.12), et raisonnant comme au n°1, on en déduit :

Corollaire 2.2. — Soient S un préschéma, G et G' deux S -groupes réductifs de même type en chaque point. Soit $B \supset T$ (resp. $B' \supset T'$) un couple de Killing de G (resp. G').

(i) Le S -foncteur $\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, T; G', T')$ est représentable par un sous-préschéma fermé lisse de $\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, G')$ qui est principal homogène sous $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, T)$.

339

De plus, $\underline{\text{Norm}}_{\text{ad}(G)}(T^{\text{ad}})$ opère librement sur ce préschéma, et on a un isomorphisme canonique

$$\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, T; G', T') / \underline{\text{Norm}}_{\text{ad}(G)}(T^{\text{ad}}) \simeq \underline{\text{Isomext}}(G, G').$$

(ii) Le S -foncteur $\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, B; G', B')$ est représentable par un sous-préschéma fermé lisse de $\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, G')$ qui est principal homogène sous $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, B)$.

De plus, B^{ad} opère librement sur ce préschéma et on a un isomorphisme canonique

$$\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, B; G', B') / B^{\text{ad}} \simeq \underline{\text{Isomext}}(G, G').$$

(iii) Le S -foncteur $\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, B, T; G', B', T')$ est représentable par un sous-préschéma fermé lisse de $\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, G')$ qui est principal homogène sous $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, B, T)$.

De plus, T^{ad} opère librement sur ce préschéma et on a un isomorphisme canonique

$$\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, B, T; G', B', T') / T^{\text{ad}} \simeq \underline{\text{Isomext}}(G, G').$$

Raisonnant encore comme au n°1, on en déduit :

Corollaire 2.3. — Soient S un préschéma, G un S -groupe réductif, $B \supset T$ un couple de Killing de G . Le foncteur

$$(G', T') \mapsto \underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, T; G', T'),$$

resp.

$$(G', B') \mapsto \underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, B; B', B'),$$

resp.

$$(G', B', T') \mapsto \underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, B, T; G', B', T'),$$

340 est une équivalence entre la catégorie des couples (G', T') (resp. des couples (G', B') , resp. des triplets (G', B', T')), où G' est une forme de G et T' un tore maximal de G' (resp. B' un groupe de Borel de G' , resp. $B' \supset T'$ un couple de Killing de G'), et la catégorie des fibrés principaux homogènes sous le S -groupe H , où $H = \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, T)$ (resp. $H = \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, B)$, resp. $H = \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, B, T)$).

De plus, tout faisceau principal homogène sous H est représentable et quasi-isotrivial, de sorte qu'on a

$$H^1(S, H) = H_{\text{ét}}^1(S, H) = \text{Fib}(S, H).$$

Remarque 2.4. — Sous les conditions de 2.2, le morphisme noté ensemblistement $u \mapsto u(T)$ (resp. $u \mapsto u(B)$, resp. $u \mapsto (u(B), u(T))$) induit un isomorphisme

$$\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, G') / \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, T) \simeq \underline{\text{Tor}}(G')$$

$$\text{resp. } \underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, G') / \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, B) \simeq \underline{\text{Bor}}(G'),$$

$$\text{resp. } \underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, G') / \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, B, T) \simeq \underline{\text{Kil}}(G').$$

La démonstration est immédiate : il suffit de la faire localement pour (fpqc), on peut donc supposer $G \simeq G'$, et on est ramené à Exp. XXII, 5.8.3 (iii).

Remarque 2.5. — Les résultats précédents s'interprètent aussitôt en termes de restriction du groupe structural : si G' est une forme de G , correspondant au fibré principal $\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, G')$, se donner une restriction du groupe structural de ce fibré à $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, T)$ revient à se donner un tore maximal T' de G' , les bijections suggérées ci-dessus étant celle de 2.4 d'une part, l'application $T' \mapsto \underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, T; G', T')$ d'autre part. De même pour groupes de Borel et couples de Killing.

Proposition 2.6. — Sous les conditions du corollaire 2.2 (i), T^{ad} opère librement sur $\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, T; G', T')$, le quotient

$$P = \underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, T; G', T') / T^{\text{ad}}$$

est représentable ; c'est un fibré principal homogène sous

$$A = \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, T) / T^{\text{ad}},$$

où A est représentable par un S -préschéma constant tordu, extension de $\underline{\text{Autext}}(G)$ par $W_{\text{ad}(G)}(T^{\text{ad}}) = \underline{\text{Norm}}_{\text{ad}(G)}(T^{\text{ad}}) / T^{\text{ad}}$. De plus, si on fait opérer A sur T de la manière évidente, le fibré associé à P n'est autre que T' .

La première partie de la proposition résulte aussitôt des résultats précédents. Pour prouver la seconde, on remarque qu'il y a un morphisme évident $P \times_S T \rightarrow T'$ (défini par $(u, t) \mapsto u(t)$) ; pour démontrer qu'après passage au quotient par A il induit un isomorphisme, on peut encore une fois supposer $(G, T) \simeq (G', T')$, auquel cas c'est immédiat.

De manière absolument semblable, on a :

Proposition 2.7. — *Sous les conditions du corollaire 2.2 (ii), si on fait opérer $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, B, T)/T^{\text{ad}} \simeq \underline{\text{Autext}}(G)$ de la manière évidente sur T , le fibré associé à $\underline{\text{Isomext}}(G, G')$ n'est autre que T' .*

Corollaire 2.8. — *Soient G et G' deux S -groupes réductifs qui sont des formes tordues intérieures l'un de l'autre ; soit $B \supset T$ (resp. $B' \supset T'$) un couple de Killing de G (resp. G'). Alors T et T' sont isomorphes.* 342

Remarque 2.9. — Il n'est pas vrai en général que B et B' soient isomorphes ; ce sont cependant des formes tordues intérieures l'un de l'autre (cf. n°5).

On peut développer des variantes « Isomint » des résultats précédents. Signalons-en une :

Proposition 2.10. — *Sous les conditions de 2.2 (iii), soit $u \in \underline{\text{Isomext}}(G, G')(S)$; considérons*

$$\underline{\text{Isomint}}_u(G, B, T; G', B', T') = \underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, B, T; G', B', T') \cap \underline{\text{Isomint}}_u(G, G').$$

C'est un S -préschéma lisse et affine qui est un fibré principal homogène sous T^{ad} . En particulier, $\underline{\text{Isomint}}_u(G, B, T; G', B', T')(S) \neq \emptyset$ si et seulement l'élément correspondant de $H^1(S, T^{\text{ad}})$ est nul.

Pour terminer ce n°, démontrons deux résultats qui nous seront utiles par la suite :

Proposition 2.11. — *Soient S un préschéma, G un S -groupe réductif, T un tore maximal de G . Le morphisme évident*

$$T^{\text{ad}} \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, \text{id}_T)$$

est un isomorphisme.

Cela résulte des énoncés précédents ; d'ailleurs, on a donné une démonstration directe au cours de la preuve de 1.5.2.

Corollaire 2.12. — *Sous les conditions précédentes, il existe une équivalence entre la catégorie des couples (G', f) , où G' est une forme de G et f un isomorphisme de T sur un tore maximal de G' , et la catégorie des fibrés principaux homogènes sous T^{ad} .* 343

Corollaire 2.13. — *Si $H^1(S, T^{\text{ad}}) = 0$, et si G' est une forme de G possédant un tore maximal isomorphe à T , G' est isomorphe à G .*

Corollaire 2.14. — *Soient S un préschéma tel que $\text{Pic}(S) = 0$, et G un S -groupe réductif de type constant. Pour que G soit déployable, il faut et il suffit que G possède un tore maximal trivial.*

Soient G un groupe réductif, $\text{rad}(G)$ son radical (Exp. XXII, 4.3.9) ; comme $\text{rad}(G)$ est central et caractéristique dans G , on a un morphisme canonique

$$q : \underline{\text{Autext}}(G) \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(\text{rad}(G)).$$

Proposition 2.15. — *Soit G un S -groupe réductif. La suite suivante est exacte :*

$$e \longrightarrow \text{ad}(G) \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G; \text{id. sur rad}(G)) \xrightarrow{p} \underline{\text{Autext}}(G) \xrightarrow{q} \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(\text{rad}(G)).$$

De plus, $\text{Ker}(q) = \text{Im}(p)$ est un sous-préschéma ouvert et fermé de $\underline{\text{Autext}}(G)$, fini sur S .

On peut supposer G déployé. La première assertion est immédiate ; la seconde résulte de Exp. XXI, 6.7.5 et 6.7.7.

Notant $H = \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, \text{id. sur rad}(G))$, on en déduit :

Corollaire 2.16. — *Il existe une équivalence entre la catégorie des couples (G', f) , où G' est une forme de G et f un isomorphisme de $\text{rad}(G)$ sur le radical de G' , et la catégorie des fibrés principaux sous un certain S -préschéma en groupes H , où H est tel qu'il existe une suite exacte*

$$1 \longrightarrow \text{ad}(G) \longrightarrow H \longrightarrow F \longrightarrow 1,$$

où le S -groupe F est étale et fini sur S .

3. Schéma de Dynkin d'un groupe réductif. Groupes quasi-déployés

3.1. — On rappelle (Exp. XXI, 7.4.1) qu'un *diagramme de Dynkin* est un ensemble fini muni de la structure définie par un ensemble de couples d'éléments distincts (liaisons) et d'une application dans $\{1, 2, 3\}$ (longueurs). À chaque donnée radicielle réduite épinglée $\mathcal{R}$ est associé un diagramme de Dynkin $D(\mathcal{R})$, dont l'ensemble sous-jacent est l'ensemble des racines simples.

3.2. — Soit S un préschéma. Un *S -schéma de Dynkin* est un S -schéma constant tordu fini D , muni de la structure définie par un sous-schéma L de $D \times_S D$ d'intersection vide avec la diagonale, et d'un morphisme $D \rightarrow \{1, 2, 3\}_S$. Pour chaque $S' \rightarrow S$, $D(S')$ est muni naturellement d'une structure de diagramme de Dynkin.

On définit aussitôt les notions suivantes : isomorphisme de deux schémas de Dynkin, extension de la base d'un schéma de Dynkin, schéma de Dynkin constant associé à un diagramme de Dynkin. Toute donnée de descente sur un schéma de Dynkin pour la topologie étale est effective.

3.3. — On se propose d'associer à chaque S -groupe réductif G un S -schéma de Dynkin. Supposons d'abord G *déployable* sur S ; pour tout épinglage $\mathcal{E}$ de G , notons $D(\mathcal{E})$ le schéma de Dynkin constant associé à la donnée radicielle épinglée définie par $\mathcal{E}$; si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont deux épinglages de G , il existe par 1.5 un *unique automorphisme intérieur* de G sur S transformant $\mathcal{E}$ en $\mathcal{E}'$; cet automorphisme de G définit un isomorphisme $a_{\mathcal{E}\mathcal{E}'} : D(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} D(\mathcal{E}')$; les $a_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}$ forment évidemment un système transitif, de sorte qu'on peut identifier les $D(\mathcal{E})$ (i.e. prendre la limite inductive) ; le résultat est un

schéma de Dynkin constant noté $\underline{\text{Dyn}}(G)$. Si maintenant G est un S -groupe réductif *quelconque*, il existe une famille couvrante pour la topologie étale $\{S_i \rightarrow S\}$ telle que G_{S_i} soit déployable. Raisonnant comme précédemment, on a donc une donnée de descente canonique sur les $\underline{\text{Dyn}}(G_{S_i})$, permettant de construire par descente un S -schéma de Dynkin $\underline{\text{Dyn}}(G)$.

3.4. — Cette construction vérifie les propriétés suivantes (qui d'ailleurs la caractérisent essentiellement) :

(i) À chaque S -groupe réductif est associé un schéma de Dynkin $\underline{\text{Dyn}}(G)$; à tout isomorphisme $u : G \xrightarrow{\sim} G'$ est associé fonctoriellement un isomorphisme $\underline{\text{Dyn}}(u) : \underline{\text{Dyn}}(G) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Dyn}}(G')$.

(ii) Si S' est un S -préschéma et G un S -groupe réductif, on a

346

$$\underline{\text{Dyn}}(G \times_S S') \simeq \underline{\text{Dyn}}(G) \times_S S'.$$

(iii) Si $\mathcal{E}$ est un épinglage de G , définissant la donnée radicielle épinglée de diagramme de Dynkin D , on a

$$\underline{\text{Dyn}}(G) \simeq D_S.$$

(iv) Si u est un automorphisme intérieur de G , $\underline{\text{Dyn}}(u)$ est l'automorphisme identique de $\underline{\text{Dyn}}(G)$.

3.5. — Soient S un préschéma, G un S -groupe réductif. Il est clair que le foncteur $\underline{\text{Aut}}_{\text{Dyn}}(\underline{\text{Dyn}}(G))$ des automorphismes de $\underline{\text{Dyn}}(G)$ pour la structure de schéma de Dynkin est représentable par un S -schéma constant tordu fini. Par 3.4 (i) et (ii), on a un morphisme canonique

$$\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G) \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{\text{Dyn}}(\underline{\text{Dyn}}(G)),$$

qui, en vertu de (iv), se factorise par un morphisme

$$\underline{\text{Autext}}(G) \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{\text{Dyn}}(\underline{\text{Dyn}}(G)).$$

Plus généralement, si G et G' sont deux S -groupes réductifs, on a un morphisme canonique

$$\underline{\text{Isomext}}(G, G') \longrightarrow \underline{\text{Isom}}_{\text{Dyn}}(\underline{\text{Dyn}}(G), \underline{\text{Dyn}}(G'));$$

en particulier, si G' est une forme tordue intérieure de G (1.11), les schémas de Dynkin $\underline{\text{Dyn}}(G)$ et $\underline{\text{Dyn}}(G')$ sont isomorphes.

3.6. — Si G est semi-simple (resp. adjoint ou simplement connexe), le morphisme

$$\underline{\text{Autext}}(G) \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{\text{Dyn}}(\underline{\text{Dyn}}(G))$$

est un monomorphisme (resp. un isomorphisme). En effet, on peut supposer G épinglé et on est ramené au résultat correspondant pour les données radicielles réduites épinglées (cf. Exp. XXI, 7.4.5).

347

On a un résultat analogue pour les $\underline{\text{Isom}}$; d'où il résulte en particulier que deux S -groupes semi-simples adjoints (resp. simplement connexes) sont des formes tordues intérieures l'un de l'autre si et seulement si leurs schémas de Dynkin sont isomorphes.

3.7. — On peut donner une construction différente du schéma de Dynkin associé à un groupe réductif. Soient $\mathcal{R}$ une donnée radicielle réduite épinglée, G un S -groupe réductif de type $\mathcal{R}$; notons $D(\mathcal{R})$ le diagramme de Dynkin défini par la donnée radicielle $\mathcal{R}$. On a (3.5) un morphisme canonique

$$\underline{A}_S(\mathcal{R}) = \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(\dot{\text{Ép}}_S(\mathcal{R})) \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{\text{Dyn}}(D(\mathcal{R})_S).$$

Le S -groupe réductif G correspond d'après le corollaire 1.17 à un fibré principal homogène $\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(\dot{\text{Ép}}_S(\mathcal{R}), G)$ sous $\underline{A}_S(\mathcal{R})$. Le fibré sous $\underline{\text{Aut}}_{\text{Dyn}}(D(\mathcal{R})_S)$ associé correspond à une forme sur S de $D(\mathcal{R})_S$: c'est $\underline{\text{Dyn}}(G)$; en d'autres termes, ce fibré associé n'est autre que $\underline{\text{Isom}}_{\text{Dyn}}(D(\mathcal{R})_S, \underline{\text{Dyn}}(G))$. Sous cette dernière forme, la démonstration est immédiate.

3.8. Schéma de Dynkin et couples de Killing. — Soient S un préschéma, G un S -groupe réductif, $B \supset T$ un couple de Killing de G . Il existe un morphisme canonique

$$i : \underline{\text{Dyn}}(G) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_{S\text{-gr.}}(T, \mathbb{G}_{m,S})$$

348 qui identifie $\underline{\text{Dyn}}(G)$ au « schéma des racines simples de B relativement à T »; ce morphisme se définit aussitôt par descente à partir du cas épinglé. Remarquons d'ailleurs que la donnée de T et de i permet de reconstruire B (« correspondance biunivoque entre systèmes de racines simples et systèmes de racines positives »).

Il résulte de la description précédente de $\mathfrak{D} = \underline{\text{Dyn}}(G)$, qu'il existe une *racine canonique* de $B_{\mathfrak{D}}$ par rapport à $T_{\mathfrak{D}}$: cette racine $\alpha_{\mathfrak{D}}$ est l'image par $i(\mathfrak{D})$ du morphisme identique de $\mathfrak{D}$. On en déduit un $\mathcal{O}_{\mathfrak{D}}$ -Module inversible canonique $\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}}$:

$$\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}} = (\mathfrak{g} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{\mathfrak{D}})^{\alpha_{\mathfrak{D}}}.$$

Dans le cas épinglé, on a

$$\mathfrak{D} = \coprod_{\alpha \in R_0} S_{\alpha},$$

où chaque S_{α} est une copie de S , et $\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}}$ est le $\mathcal{O}_{\mathfrak{D}}$ -Module qui induit $\mathfrak{g}^{\alpha}$ sur S_{α} , pour tout $\alpha \in R_0$.

3.9. Quasi-épinglages. Groupes quasi-épinglés. — Si G est un S -groupe réductif, on appelle *quasi-épinglage* de G la donnée :

- (i) d'un couple de Killing $B \supset T$ de G ,
- (ii) d'une section $X \in \Gamma(\underline{\text{Dyn}}(G), \mathfrak{g}^{\mathfrak{D}})^*$.

On dit qu'un S -groupe réductif est *quasi-déployable* s'il possède un quasi-épinglage. On appelle *groupe quasi-épinglé* un groupe réductif muni d'un quasi-épinglage.

349 Si $B \supset T$ est un couple de Killing du S -groupe réductif G , G est quasi-épinglable relativement à ce couple de Killing si et seulement si $\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}}$ possède une section non nulle en chaque point, i.e. si l'élément de $\text{Pic}(\underline{\text{Dyn}}(G))$ défini par $\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}}$ est nul. Supposons en particulier S semi-local; alors $\underline{\text{Dyn}}(G)$ est également semi-local, donc $\text{Pic}(\underline{\text{Dyn}}(G)) = 0$. Utilisant en outre Exp. XXII, 5.9.7, on en déduit :

Proposition 3.9.1. — Soient S un schéma semi-local, G un S -groupe réductif. Pour que G soit quasi-déployable, il faut et il suffit qu'il possède un groupe de Borel.

Remarquons maintenant que pour un S-groupe réductif quelconque le S-préschéma $\text{Bor}(G)$ est lisse et projectif (Exp. XXII, 5.8.3), donc possède des sections après extension étale finie surjective de la base (EGA IV, §24), on en déduit le

Corollaire 3.9.2. — *Soient S un schéma semi-local, G un S-groupe réductif. Il existe un morphisme $S' \rightarrow S$ étale fini et surjectif tel que $G_{S'}$ soit quasi-déployable.*

Remarque 3.9.3. — Sous les conditions précédentes, soit T un tore maximal de G (cf. Exp. XIV, 3.20); alors on peut supposer en outre que $G_{S'}$ est quasi-déployable relativement à $T_{S'}$: il suffit d'appliquer le raisonnement précédent au « schéma des groupes de Borel contenant T », qui est fini et étale sur S (Exp. XXII, 5.5.5 (ii)).

3.10. — Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux *quasi-épinglages* du S-groupe réductif G. Il existe un *unique automorphisme intérieur* de G transformant $\mathcal{E}$ en $\mathcal{E}'$. En effet, on se ramène aussitôt au cas déployé, où l'assertion a déjà été démontrée (1.5, il suffit de remarquer en effet qu'il revient au même pour un automorphisme intérieur de G de respecter un épinglage ou le quasi-épinglage sous-jacent). On en conclut comme au n°1 qu'un quasi-épinglage du S-groupe réductif G définit un scindage h de la suite exacte :

$$1 \longrightarrow \text{ad}(G) \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{\text{S-gr.}}(G) \xrightleftharpoons[p]{h} \underline{\text{Autext}}(G) \longrightarrow 1,$$

l'image de h étant le sous-groupe de $\underline{\text{Aut}}_{\text{S-gr.}}(G)$ qui laisse invariant le quasi-épinglage.

De même si G et G' sont deux S-groupes quasi-épinglés, on définit de manière naturelle le sous-foncteur

$$\underline{\text{Isom}}_{\text{S-gr. q-ép.}}(G, G')$$

de $\underline{\text{Isom}}_{\text{S-gr.}}(G, G')$; la projection de $\underline{\text{Isom}}_{\text{S-gr.}}(G, G')$ sur $\underline{\text{Isomext}}(G, G')$ induit un isomorphisme

$$\underline{\text{Isom}}_{\text{S-gr. q-ép.}}(G, G') \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Isomext}}(G, G').$$

Théorème 3.11. — *Soient S un préschéma, $\mathcal{R}$ une donnée radicielle réduite épinglée telle que $\text{Ép}_S(\mathcal{R})$ existe (cf. Exp. XXV), E le groupe de ses automorphismes. Considérons les trois catégories suivantes :*

(i) La catégorie Rev des revêtements principaux galoisiens de S de groupe E (les morphismes sont les isomorphismes).

(ii) La catégorie Redext dont les objets sont les S-groupes réductifs de type $\mathcal{R}$ (Exp. XXII, 2.7), les morphismes de G dans G' étant les éléments de $\underline{\text{Isomext}}(G, G')(S)$.

(iii) La catégorie Qép des S-groupes réductifs quasi-épinglés de type $\mathcal{R}$ (les morphismes sont les isomorphismes respectant les quasi-épinglages).

Ces trois catégories sont équivalentes : plus précisément, on a un diagramme de foncteurs, commutatif à isomorphismes près

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Rev}} & \xrightarrow{\text{qép}} & \underline{\text{Qép}} \\ & \swarrow \text{rev} \quad \searrow i & \\ & \underline{\text{Redext}} & \end{array} .$$

Nous allons décrire ci-dessous ces trois foncteurs, en laissant au lecteur le soin de vérifier la commutativité du diagramme.

3.11.1. Le foncteur i . — C'est le foncteur évident : $i(G) = G$, $i(f) = \text{image de } f \text{ par le morphisme décrit en 3.10.}$

3.11.2. Le foncteur qép . — Soit S' un revêtement principal galoisien de S de groupe E . L'homomorphisme canonique

$$h : E \longrightarrow \text{Aut}_{S'-\text{gr.}}(\text{Ép}_{S'}(\mathcal{R})) = \underline{\underline{\mathbb{A}}}(\mathcal{R})(S')$$

définit une opération de E sur $\text{Ép}_{S'}(\mathcal{R})$, opération qui respecte le quasi-épinglage canonique de $\text{Ép}_S(\mathcal{R})$. Comme $S' \rightarrow S$ est couvrant pour la topologie (fpqc), c'est un morphisme de descente effective pour la catégorie fibrée des morphismes affines, et on note

$$\text{qép}(S') = \underline{\underline{\text{Q-Ép}}}_{S'/S}(\mathcal{R})$$

le S -groupe *quasi-épinglé* obtenu par descente galoisienne.

352 3.11.3. Le foncteur rev . — Soit G un S -groupe réductif de type $\mathcal{R}$. On note

$$\text{rev}(G) = \underline{\text{Isomext}}(\text{Ép}_S(\mathcal{R}), G),$$

c'est un fibré principal homogène sous E_S (cf. 1.10 et 1.19), c'est-à-dire un objet de Rev.

Développons un des corollaires de 3.11 :

Corollaire 3.12. — *Pour tout S -groupe réductif G , il existe un S -groupe quasi-épinglé $G_{\text{q-ép.}}$ et un « isomorphisme extérieur » $u \in \underline{\text{Isomext}}(G_{\text{q-ép.}}, G)(S)$. Le couple $(G_{\text{q-ép.}}, u)$ est unique à un isomorphisme unique près.*

En effet, on peut supposer G de type constant $\mathcal{R}$, et on prend $G_{\text{q-ép.}} = \underline{\text{Q-Ép}}_{\text{rev}(G)/S}(\mathcal{R})$.

3.12.1. — Remarquons que la donnée du couple $(G_{\text{q-ép.}}, u)$ permet de définir de manière canonique le S -préschéma (cf. 1.11)

$$Q = \underline{\text{Isomint}}(G_{\text{q-ép.}}, G),$$

qui est un fibré principal homogène sous $\text{ad}(G_{\text{q-ép.}})$, et dont la donnée « équivaut » à celle de la forme tordue intérieure G de $G_{\text{q-ép.}}$. D'ailleurs Q n'est autre que le

« schéma des quasi-épinglages de G », définition qui rend compte de sa structure de fibré principal homogène (à gauche) sous $\mathrm{ad}(G)$ (3.10) – comparer avec 1.20.

Proposition 3.13. — Soient S un préschéma, G un S -groupe semi-simple adjoint (resp. simplement connexe), $B \supset T$ un couple de Killing de G , $\underline{\mathrm{Dyn}}(G)$ le S -schéma de Dynkin de G . Il existe un isomorphisme canonique de S -préschémas en groupes 353

$$T \xrightarrow{\sim} \prod_{\underline{\mathrm{Dyn}}(G)/S} \mathbb{G}_{m, \underline{\mathrm{Dyn}}(G)}.$$

(On rappelle (cf. Exp. II, § 1) que le second membre est par définition le S -foncteur qui à $S' \rightarrow S$ associe $\mathbb{G}_m(\underline{\mathrm{Dyn}}(G) \times_S S')$, ou, ce qui revient au même, $\mathbb{G}_m(\underline{\mathrm{Dyn}}(G_{S'}))$.)

Première démonstration. Faisons-la pour simplifier dans le cas adjoint. Considérons le morphisme composé

$$T \longrightarrow \prod_{\mathfrak{D}/S} T_{\mathfrak{D}} \longrightarrow \prod_{\mathfrak{D}/S} \mathbb{G}_{m, \mathfrak{D}},$$

où le premier morphisme est le morphisme canonique, le second est $\prod_{\mathfrak{D}/S} \alpha_{\mathfrak{D}}$ (on a noté $\mathfrak{D} = \underline{\mathrm{Dyn}}(G)$). Pour vérifier que ce morphisme est un isomorphisme, on peut supposer G déployé; or, dans ce cas, ce n'est autre que le morphisme $T \rightarrow (\mathbb{G}_{m, S})^{R_0}$ de composantes α , $\alpha \in R_0$, et celui-ci est un isomorphisme (Exp. XXII, 4.3.8).

Deuxième démonstration. D'après 2.8, 3.5 et 3.11, on peut supposer que $G = Q\text{-}\acute{\mathrm{E}}p_{S'/S}(\mathcal{R})$, T étant le tore maximal canonique. Sur S' , on a par Exp. XXII 4.3.8, un isomorphisme $T_{S'} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{G}_{m, S'})^{R_0}$, défini par les racines simples (resp. les coracines simples). Le groupe E opère au second membre par permutation de R_0 . Or le fibré associé à S'/S par $E \rightarrow \mathrm{Aut}(R_0)$ est $\underline{\mathrm{Dyn}}(G)$ (3.7), et on conclut aussitôt.

Utilisant 8.1, on en tire :

Corollaire 3.14. — Sous les conditions précédentes, on a

$$H^1(S, T) \xrightarrow{\sim} H^1(\underline{\mathrm{Dyn}}(G), \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(\underline{\mathrm{Dyn}}(G)).$$

En particulier, $H^1(S, T) = 0$ lorsque S est semi-local. 354

Remarque 3.15. — Soient S un préschéma, G (resp. G') un S -groupe réductif, $B \supset T$ (resp. $B' \supset T'$) un couple de Killing de G (resp. G'), $u \in \underline{\mathrm{Isomext}}(G, G')(S)$. Posons (cf. 2.10)

$$P = \underline{\mathrm{Isomint}}_u(G, B, T; G', B', T');$$

c'est un fibré principal homogène sous T^{ad} (par $(f, t) \mapsto f \circ \mathrm{int}(t)$).

Soit d'autre part $\mathfrak{D} = \underline{\mathrm{Dyn}}(G) = \underline{\mathrm{Dyn}}(G')$ (identifiés grâce à u (3.5)), et soit $L = \underline{\mathrm{Isom}}_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}}, \mathfrak{g}'^{\mathfrak{D}})$ le fibré principal homogène sous $\mathbb{G}_{m, \mathfrak{D}}$ défini par le $\mathcal{O}_{\mathfrak{D}}$ -Module inversible

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{D}}}(\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}}, \mathfrak{g}'^{\mathfrak{D}}) = \mathfrak{g}'^{\mathfrak{D}} \otimes (\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}})^{\vee}.$$

Chaque $f \in P(S')$ définit un isomorphisme de $\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$ sur $\mathfrak{g}'^{\mathfrak{D}} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$, d'où un morphisme canonique

$$P \longrightarrow \prod_{\mathfrak{D}/S} L \quad .$$

Ce morphisme est un *isomorphisme*, compatible avec l'isomorphisme d'opérateurs

$$T^{\text{ad}} \longrightarrow \prod_{\mathfrak{D}/S} \mathbb{G}_{m, \mathfrak{D}}$$

défini ci-dessus. En effet, il suffit de le vérifier dans le cas où les deux groupes sont épinglés, où c'est facile.

Il s'ensuit en particulier que dans l'isomorphisme

$$H^1(S, T^{\text{ad}}) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(\underline{\text{Dyn}}(G))$$

de 3.14, la classe du fibré P est transformée en $\text{cl}(\mathfrak{g}'^{\mathfrak{D}}) - \text{cl}(\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}})$. Le fibré P est donc trivial si et seulement si $\mathfrak{g}'^{\mathfrak{D}}$ et $\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}}$ sont isomorphes.

355 Si (G, B, T) est quasi-déployable, par exemple si on prend pour G le groupe $G'_{\text{q-ép.}}$, avec son couple de Killing canonique, il s'ensuit que l'image de la classe de P n'est autre que l'obstruction au quasi-déploiement de G' définie en 3.9.

3.16. Symétries

3.16.1. — Soient S un préschéma, G un S -groupe réductif, $B \supset T$ un couple de Killing de G . On rappelle (Exp. XXII, 5.9.1) qu'il existe un unique groupe de Borel B^- de G tel que $B \cap B^- = T$. Si $X \in \Gamma(\mathfrak{D}, \mathfrak{g}^{\mathfrak{D}})^*$ définit un quasi-épinglage de G relativement à (B, T) (3.9), alors $Y = -X^{-1} \in \Gamma(\mathfrak{D}, (\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}})^{\vee})^*$ définit un quasi-épinglage de G relativement à (B^-, T) ; on dit que c'est le *quasi-épinglage opposé*.

Si $\mathcal{R}$ est une donnée radicielle réduite épinglée et si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{R}$ -épinglage du S -groupe réductif G , on définit un $\mathcal{R}$ -épinglage $\mathcal{E}^-$ dit *opposé* à $\mathcal{E}$ de la manière suivante : on garde le même tore maximal T , on prend l'opposé de l'isomorphisme $D_S(M) \xrightarrow{\sim} T$, et on « épingle » par $Y_\alpha = -X_\alpha^{-1} \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^{-\alpha})^*$, pour $\alpha \in R_0$. Le quasi-épinglage sous-jacent à $\mathcal{E}^-$ est le quasi-épinglage opposé au quasi-épinglage sous-jacent à $\mathcal{E}$.

Remarque. — Dans les notations de Exp. XIX, 3.1, si on pose

$$w_\alpha(X_\alpha) = \exp(X_\alpha) \exp(-X_\alpha^{-1}) \exp(X_\alpha),$$

on a $w_\alpha(X_\alpha) = w_{-\alpha}(Y_\alpha)$ (loc. cit., 3.1 (vi)).

Proposition 3.16.2. — Soient S un préschéma, G un S -groupe réductif.

(i) Soit T un tore maximal de G ; il existe un unique

$$i_T \in (\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, T)/T^{\text{ad}})(S) \subset \text{Aut}_{S\text{-gr.}}(T)$$

356 tel que $i_T(t) = t^{-1}$ pour toute section t de T .

(ii) Soit (B, T) un couple de Killing de G ; il existe une unique section

$$w_{B, T} \in (\underline{\text{Norm}}_G(T)/T)(S) = W_G(T)(S)$$

telle que $\text{int}(w_{B, T})(B) = B^-$ (avec l'abus de langage évident).

(iii) Soit $\mathcal{Q} = (B, T, X)$ un quasi-épinglage de G , $\mathcal{Q}^- = (B^-, T, Y)$ le quasi-épinglage opposé ; il existe un unique automorphisme intérieur de G

$$n_{\mathcal{Q}} \in \underline{\text{Norm}}_{\text{ad}(G)}(T^{\text{ad}})(S) \subset \text{Aut}_{S\text{-gr.}}(G)$$

tel que $n_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}^-$, c'est-à-dire : $n_{\mathcal{Q}}(T) = T$, $n_{\mathcal{Q}}(B) = B^-$, $n_{\mathcal{Q}}(X) = Y$.

(iv) Soit $(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ un épinglage de G , $(\mathcal{R}, \mathcal{E}^-)$ l'épinglage opposé ; il existe un unique automorphisme de G

$$u_{\mathcal{E}} \in \text{Aut}_{S\text{-gr.}}(G, T) \subset \text{Aut}_{S\text{-gr.}}(G)$$

tel que $u_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}^-$, c'est-à-dire $u_{\mathcal{E}}(t) = t^{-1}$ pour toute section t de T , $\text{Ad}(u_{\mathcal{E}})X_{\alpha} = Y_{\alpha}$ pour $\alpha \in R_0$.

Démonstration. (ii) résulte de Exp. XXII, 5.5.5 (ii), puis (iii) résulte de 3.10, et (iv) résulte de Exp. XXIII, 4.1. Enfin pour prouver (i), on peut supposer G épinglé. L'existence résulte de (iv) par exemple, l'unicité du fait qu'un automorphisme de G qui induit l'identité sur T est donné par une section de T^{ad} (2.11).

Corollaire 3.16.3. — On a

357

$$i_T^2 = w_{B,T}^2 = n_{\mathcal{Q}}^2 = u_{\mathcal{E}}^2 = e.$$

De plus, i_T (resp. $u_{\mathcal{E}}$) est $\neq e$ si $G \neq e$, et $w_{B,T}$ (resp. $n_{\mathcal{Q}}$) est $\neq e$ si G n'est pas un tore.

Corollaire 3.16.4. — Dans la situation de (iii) (resp. (iv)), $n_{\mathcal{Q}}$ se projette sur $w_{B,T}$ (resp. $u_{\mathcal{E}}$ se projette sur i_T) par le morphisme canonique

$$\underline{\text{Norm}}_{\text{ad}(G)}(T^{\text{ad}}) \longrightarrow W_{\text{ad}(G)}(T^{\text{ad}}) \simeq W_G(T),$$

resp.

$$\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, T) \longrightarrow \text{Aut}_{S\text{-gr.}}(G, T)/T^{\text{ad}}.$$

Corollaire 3.16.5. — Les définitions précédentes sont compatibles avec l'extension de la base, et sont fonctorielles par isomorphisme (en un sens évident).

Proposition 3.16.6. — (i) On peut définir de manière unique pour chaque groupe réductif G sur un préschéma S un élément

$$s_G \in \underline{\text{Autext}}(G)(S)$$

de telle manière que cette construction soit fonctorielle en G par isomorphisme, soit compatible avec les changements de base et que chaque fois que T est un tore maximal du S -groupe réductif G , s_G soit l'image de i_T par le morphisme canonique

$$\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, T)/T^{\text{ad}} \longrightarrow \underline{\text{Autext}}(G).$$

(ii) On a $s_G^2 = e$, s_G est un élément central de $\underline{\text{Autext}}(G)$.

(iii) Sous les conditions de 3.16.2 (ii), si on identifie $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, B, T)/T^{\text{ad}}$ à $\underline{\text{Autext}}(G)$ (2.2), on a

$$w_{B,T} i_T = i_T w_{B,T} = s_G.$$

358

(iv) Sous les conditions de 3.16.2 (iv), si on identifie $\underline{\text{Aut}}_{\text{S-gr.-ép}}(G, \mathcal{R}, \mathcal{E})$ à $\underline{\text{Autext}}(G)$ (1.3 (iii)), on a

$$n_{\mathcal{E}} u_{\mathcal{E}} = u_{\mathcal{E}} n_{\mathcal{E}} = s_G .$$

Démonstration. (i) se prouve sans difficulté par descente. D'autre part, comme i_T est évidemment une section centrale et de carré e dans $\underline{\text{Aut}}_{\text{S-gr.}}(T)$, (ii) en résulte immédiatement ; (iii) est une conséquence de (iv) par descente. Enfin, sous les conditions de (iv), il est clair que $n_{\mathcal{E}} u_{\mathcal{E}} = u_{\mathcal{E}} n_{\mathcal{E}}$ et que cet automorphisme de G respecte l'épingleage ; modulo l'identification faite, il est donc égal à son image dans $\underline{\text{Autext}}(G)$; mais $n_{\mathcal{E}}$ est intérieur et $u_{\mathcal{E}}$ se projette sur s_G .

Remarque 3.16.7. — (i) On détermine explicitement a_G dans chacun des cas de la classification grâce à (iii) : il suffit pour chaque donnée radicielle irréductible épinglée de composer la symétrie par rapport à l'origine avec la symétrie dans le groupe de Weyl (i.e. l'élément du groupe de Weyl tel que $w(R_0) = -R_0$). On trouve les résultats suivants : on a $s_G = e$ sauf pour A_n ($n \geq 2$), D_n (n impair) et E_6 , auquel cas s_G est l'unique « automorphisme extérieur » non trivial.

(ii) L'automorphisme $u_{\mathcal{E}}$ est celui qui sert à fabriquer « les formes réelles compactes » dans la théorie des algèbres de Lie semi-simples.

359 **Remarque 3.16.8.** — On a défini en 3.16.1 une involution dans le S-préschéma $Q = \underline{\text{Isomint}}(G_{\text{q-ép.}}, G)$ des quasi-épingleages de G (cf. 3.12.1) ; par transport de structure de $G_{\text{q-ép.}}$ à G , on voit aussitôt que cette involution est donnée par l'action d'un élément de $\text{ad}(G_{\text{q-ép.}})(S)$: l'élément n_0 défini (3.16.2 (iii)) par le quasi-épingleage canonique de $G_{\text{q-ép.}}$.

De la même manière, on a défini une involution dans le S-préschéma

$$P = \underline{\text{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\text{Ép}_S(\mathcal{R}), G)$$

des $\mathcal{R}$ -épingleages de G (cf. 1.20). Raisonant comme précédemment, on voit que cette involution est donnée par l'action de l'automorphisme u_0 de $\text{Ép}_S(\mathcal{R})$ défini (3.16.2 (iv)) par l'épingleage canonique de $\text{Ép}_S(\mathcal{R})$.

4. Isotrivialité des groupes réductifs et des fibrés principaux sous les groupes réductifs

4.1. Définitions. Théorème d'isotrivialité

Définition 4.1.1. — Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes, P un fibré principal homogène sous G . On dit que P est *localement isotrivial* (resp. *semi-localement isotrivial*) si pour tout point $s \in S$ (resp. tout ensemble fini F de points de S contenu dans un ouvert affine) il existe un ouvert U de S contenant s (resp. F) et un morphisme *étale fini surjectif* $S' \rightarrow U$ tel que $P_{S'}$ soit trivial.

360 **Définition 4.1.2.** — Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif. On dit que G est *loc.isot.* (resp. *semi-loc.isot.*) si pour tout point $s \in S$ (resp. tout ensemble fini F de points de S contenu dans un ouvert affine) il existe un ouvert U de S contenant s (resp. F) et un morphisme *étale fini surjectif* $S' \rightarrow U$ tel que $G_{S'}$ soit déployable.

Remarque 4.1.3. — (i) L'équivalence de catégories de 1.17 respecte par définition l'isotrivialité locale (resp. semi-locale.)

(ii) Ajoutons aux conditions de 4.1.1 : G localement de présentation finie sur S . Alors le fibré principal P (ou le groupe réductif G) est localement isotrivial (resp. semi-localement isotrivial) si et seulement si pour tout $S' \rightarrow S$, S' local (resp. semi-local), $P_{S'}$ est isotrivial (ou $G_{S'}$ isotrivial), c'est-à-dire s'il existe $S'' \rightarrow S'$ étale fini surjectif tel que $P_{S''}$ soit trivial (ou $G_{S''}$ déployé).

(iii) Dans le cas des tores, la définition 4.1.2 coïncide avec celle de Exp. IX, 1.1.

4.1.4. — Rappelons (Exp. XXII, 4.3 et 6.2) que pour tout groupe réductif G , nous avons introduit les groupes $\text{rad}(G)$, $\text{corad}(G)$ et $\text{dér}(G)$. Les groupes $\text{rad}(G)$ et $\text{corad}(G)$ sont des tores, qui sont triviaux lorsque G est déployé ; de plus, il existe une isogénie $\text{rad}(G) \rightarrow \text{corad}(G)$. Le S -groupe $\text{dér}(G)$ est semi-simple, on a $G/\text{dér}(G) = \text{corad}(G)$; il s'ensuit que pour tout fibré principal homogène P sous G , $P/\text{dér}(G)$ est un fibré principal homogène sous $\text{corad}(G)$. Ceci dit, on a :

Théorème 4.1.5. — *Soient S un préschéma, G un S -groupe réductif de type constant.* 361

(i) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) *G est localement (resp. semi-localement) isotrivial.*
- (b) *Le tore $\text{rad}(G)$ l'est.*
- (b') *Le tore $\text{corad}(G)$ l'est.*
- (c) *Le revêtement galoisien de S associé à G (3.11) l'est.*

Si T est un tore maximal de G , ces conditions sont également équivalentes à

- (d) *Le tore T est localement (resp. semi-localement) isotrivial*

(ii) *Soit P un fibré principal homogène sous G ; pour que P soit localement (resp. semi-localement) isotrivial, il faut et il suffit que le $\text{corad}(G)$ -fibré principal $P/\text{dér}(G)$ le soit.*

Corollaire 4.1.6. — *Les conditions de (i) sont vérifiées lorsque G est semi-simple ou lorsque S est localement noethérien et normal (ou plus généralement géométriquement unibranche). Les conditions de (ii) sont vérifiées lorsque G est localement (resp. semi-localement) isotrivial.*

Pour (i), la première assertion est triviale sur (b), la seconde résulte de (c) et Exp. X, 5.14 et 5.15. Pour (ii), il suffit de remarquer qu'en vertu du théorème 90, un fibré principal sous un tore trivial est semi-localement isotrivial.

4.2. Démonstration : le cas semi-simple

Démontrons d'abord, en vue d'une référence ultérieure :

Proposition 4.2.1. — *Soient S un préschéma, G un S -groupe réductif, T un tore maximal de G (resp. B un groupe de Borel, resp. $B \supset T$ un couple de Killing de G), P* 362

un fibré principal homogène sous G , G' la forme tordue de G associée à P (via le morphisme $\text{int} : G \rightarrow \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)$). On a un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} P / \underline{\text{Norm}}_G(T) &\xrightarrow{\sim} \underline{\text{Tor}}(G') \\ (\text{resp. } P/B &\xrightarrow{\sim} \underline{\text{Bor}}(G'), \\ \text{resp. } P/T &\xrightarrow{\sim} \underline{\text{Kil}}(G')). \end{aligned}$$

Par construction, G' est le quotient de $P \times_S G$ par une certaine opération de G ($(p, g')g = (pg, g^{-1}g'g)$); on a donc un morphisme $P \times_S G \rightarrow G'$, c'est-à-dire un morphisme

$$P \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_S(G, G'),$$

qui, comme on le voit aussitôt, se factorise par un morphisme

$$f : P \longrightarrow \underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, G'),$$

(pour vérifier cette assertion, on peut supposer $G = P$, auquel cas on a $G' = G$, $f = \text{int}$). L'application ensembliste $p \mapsto f(p)(T)$ définit un morphisme

$$P \longrightarrow \underline{\text{Tor}}(G').$$

Pour vérifier que ce morphisme induit un isomorphisme $P / \underline{\text{Norm}}_G(T) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Tor}}(G')$ comme annoncé, on peut de nouveau supposer $P = G$ auquel cas on est ramené à Exp. XXII, 5.8.3 (iii). (En fait, loc. cit. devrait être remplacé par l'énoncé ci-dessus). On raisonne de même pour $\underline{\text{Bor}}$ et $\underline{\text{Kil}}$.

363 Proposition 4.2.2. — Soient S un schéma semi-local, G un S -groupe semi-simple de type constant.

- (i) G est isotrivial.
- (ii) Tout fibré principal sous G est isotrivial.

Prouvons (i). Quitte à faire une extension étale finie surjective de la base, on peut, par 3.9.2, supposer G quasi-déployé. Mais alors G est isotrivial par construction (3.11, le groupe E est fini). Pour prouver (ii), on peut, en vertu de (i), supposer G déployé; on est alors ramené à :

Lemme 4.2.3. — Soit S un schéma semi-local. Tout fibré principal sous un groupe réductif déployé est isotrivial.

En effet, avec les notations de 4.2.1, où $B \supset T$ désigne le couple de Killing canonique de G déployé, le S -préschéma $\underline{\text{Kil}}(G')$ possède une section, après extension étale finie surjective de la base, en vertu de 3.9.2. On peut donc réduire le groupe structural de G à T , or T est trivial, donc $H^1(S, T) = 0$ (théorème 90).

Corollaire 4.2.4. — Soient S un préschéma et

$$1 \longrightarrow G \longrightarrow G' \longrightarrow G'' \longrightarrow 1$$

une suite exacte de S -préschémas en groupes (pour (fpqc)), G étant semi-simple de type constant. Soit P un fibré principal homogène sous G' , supposons le fibré associé P/G représentable (par exemple G'' affine sur S). Pour que P soit localement isotrivial

(resp. semi-localement isotrivial), il faut et il suffit que P/G le soit (comme fibré sous G').

Si P est trivial, P/G l'est aussi, ce qui montre que la condition est nécessaire. 364
Réciproquement, supposons S local (resp. semi-local) et P/G isotrivial, donc trivialisé par une extension S' de S étale finie et surjective. Étendant la base à S' , on peut réduire le groupe structural de $P_{S'}$ à $G_{S'}$. Mais S' est encore semi-local et $G_{S'}$ semi-simple de type constant, donc le fibré obtenu est isotrivial (4.2.2).

4.3. Démonstration : cas général. — Remarquons d'abord que 4.1.5 (ii) résulte aussitôt de l'application de 4.2.4 à la suite exacte

$$1 \longrightarrow \text{dér}(G) \longrightarrow G \longrightarrow \text{corad}(G) \longrightarrow 1.$$

Démontrons donc (i). Si G est déployé, $\text{rad}(G)$ et $\text{corad}(G)$ sont triviaux, ainsi que $\text{rev}(G)$; on a donc (a) $\Rightarrow$ (b), (b'), (c).

4.3.1. — On a (c) $\Rightarrow$ (a). Soit $\mathcal{R}$ le type de G ; on a une suite exacte

$$1 \longrightarrow \text{ad}(\dot{\text{Ép}}_S(\mathcal{R})) \longrightarrow \underline{\text{A}}_S(\mathcal{R}) \longrightarrow E_S \longrightarrow 1.$$

Appliquant 4.2.4 au fibré $P = \underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(\dot{\text{Ép}}_S(\mathcal{R}), G)$ et au fibré associé $\text{rev}(G) = P/\text{ad}(\dot{\text{Ép}}_S(G))$, on a (c) $\Rightarrow$ (a).

4.3.2. — On a (b) $\Rightarrow$ (a). Il nous suffit de prouver que si $\text{rad}(G)$ est trivial, G est semi-localement isotrivial. Or soit $G_0 = \dot{\text{Ép}}_S(\mathcal{R})$; considérons la catégorie des couples (G', f) , où G' est une forme de G_0 et f un isomorphisme de $\text{rad}(G_0)$ sur $\text{rad}(G)$.

On sait (2.16) que cette catégorie est équivalente à la catégorie des fibrés principaux 365
homogènes sous un certain S -groupe H extension d'un groupe constant tordu fini par un groupe semi-simple. Il nous suffit de prouver que tout fibré principal sous H est semi-localement isotrivial, or cela résulte aussitôt de 4.2.4.

4.3.3. — On a (b') $\Rightarrow$ (a). On peut raisonner comme précédemment (ce sera d'ailleurs le même groupe H qui s'introduira). On peut aussi voir que (b) et (b') sont équivalentes : un tore isogène à un tore localement trivial est également localement trivial (cf. Exp. IX, 2.11 (iii)).

4.3.4. — On a (d) $\Rightarrow$ (a). Il suffit de prouver qu'un groupe de type constant possédant un tore maximal trivial est semi-localement isotrivial; or cela résulte aussitôt de 2.14.

4.3.5. — On a (a) $\Rightarrow$ (d). Il suffit de prouver qu'un tore maximal d'un groupe déployé est semi-localement isotrivial. Or on a plus précisément :

Lemme 4.3.6. — Soient S un schéma semi-local, G un S -groupe réductif, T_0 un tore maximal trivial de G , $W_0 = \underline{\text{Norm}}_G(T_0)/T_0$ (c'est un S -groupe localement constant, et constant si G est de type constant, par 2.14), T un tore maximal de G .

Il existe un morphisme $S' \rightarrow S$ qui est principal homogène sous W_0 (donc étale fini et surjectif, et même principal galoisien si G est de type constant), tel que $T_{S'}$ soit conjugué à $(T_0)_{S'}$ par un élément de $G(S')$ (et donc en particulier trivial).

366 En effet, on sait que $\underline{\text{Transp}}_G(T_0, T)$ est un fibré principal homogène sous $\underline{\text{Norm}}_G(T_0)$ (cf. par exemple Exp. XI, 5.4 bis). Posons $S' = \underline{\text{Transp}}_G(T_0, T)/T_0$; c'est un fibré principal homogène sous W_0 . Étendant la base de S à S' , on peut réduire le groupe structural de $\underline{\text{Transp}}_G(T_0, T)$ à T_0 . Or S' est semi-local et T_0 trivial, donc $\underline{\text{Transp}}_G(T_0, T)$ possède une section sur S' . C.Q.F.D.

4.4. Utilisation de l'existence de tores maximaux

En utilisant le théorème d'existence de tores maximaux de Grothendieck (Exp. XIV, 3.20), on peut préciser considérablement les résultats précédents. Énonçons tout de suite :

Théorème 4.4.1. — Soient S un schéma semi-local, $\mathcal{R}$ une donnée radicielle réduite épinglée, W son groupe de Weyl, E le groupe de ses automorphismes. (On rappelle que E opère naturellement sur W et que le produit semi-direct $A = W \cdot E$ s'identifie au groupe des automorphismes de $\mathcal{R}$ non épinglée, cf. Exp. XXI, 6.7.2).

(i) Tout fibré principal homogène sous $\text{Ép}_S(\mathcal{R})$ est trivialisé par un revêtement principal galoisien $S' \rightarrow S$ de groupe W .

(ii) Soit G un S -groupe réductif de type $\mathcal{R}$; soit $\text{rev}(G) = \underline{\text{Isomext}}(\text{Ép}_S(\mathcal{R}), G)$ le revêtement galoisien de S de groupe E associé. Soit W_0 la forme de W_S associée à $\text{rev}(G)$. Il existe un morphisme $S' \rightarrow S$, qui est un fibré principal homogène sous W_0 , tel que $G_{S'}$ soit quasi-déployable (i.e. possède un groupe de Borel).

367 (iii) Tout S -groupe réductif de type $\mathcal{R}$ est déployé par un revêtement principal galoisien $\overline{S} \rightarrow S$ de groupe A .

Énonçons d'abord :

Proposition 4.4.2. — Soient S un préschéma, G un S -groupe réductif, T un tore maximal de G , P un fibré principal homogène sous G , G' la forme tordue de G associée à P (on a alors, cf. 4.2.1, un isomorphisme canonique $P/\underline{\text{Norm}}_G(T) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Tor}}(G')$). Soit T' un tore maximal de G' , définissant un morphisme composé

$$S \longrightarrow \underline{\text{Tor}}(G') \xrightarrow{\sim} P/\underline{\text{Norm}}_G(T).$$

Considérons les morphismes canoniques

$$P \longrightarrow P/T \longrightarrow P/\underline{\text{Norm}}_G(T)$$

et prenons-en les images réciproques par le morphisme précédent :

$$\begin{array}{ccccc} P & \longrightarrow & P/T & \longrightarrow & P/\underline{\text{Norm}}_G(T) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ H & \longrightarrow & S' & \longrightarrow & S. \end{array}$$

Alors S' (resp. H) est un fibré principal homogène au-dessus de S (resp. S') sous $W_G(T)$ (resp. $T_{S'}$). De plus, si on fait opérer $W_G(T)$ sur T de la manière évidente, le fibré associé à S' est isomorphe à T' .

Les deux premières assertions sont triviales, la dernière se prouve comme l'assertion correspondante de 2.6.

Corollaire 4.4.3. — Soient S un préschéma semi-local, G un S -groupe réductif, T un tore maximal de G . Supposons l'une des deux conditions suivantes satisfaites : 368

(i) T est trivial.

(ii) T est contenu dans un groupe de Borel de G , et G est soit adjoint, soit simplement connexe.

Soit en outre P un fibré principal homogène sous G . Il existe un S -préschéma S' , qui est un fibré principal homogène sous $W_G(T)$, tel que $P_{S'}$ soit trivial.

En effet, si G' est la forme de G associée à P , G' possède un tore maximal T' (Exp. XIV, 3.20). Reprenant les notations de la proposition précédente, on voit que $H^1(S', T_{S'}) = 0$ (en vertu du théorème 90 pour (i), de 3.14 pour (ii)). Le morphisme $H \rightarrow S'$ possède une section, donc $P_{S'}$ possède aussi une section sur S' . C.Q.F.D.

Démontrons maintenant le théorème. L'assertion (i) est un cas particulier du corollaire précédent (prendre $G = \text{Ép}_S(\mathcal{A})$, muni de son tore trivial canonique). Prouvons (ii). On sait (3.12), que G est une forme tordue intérieure de

$$G_0 = \underline{\underline{Q \cdot \text{Ép}_{\text{rev}(G)/S}(\mathcal{A})}}.$$

Si T_0 est le tore maximal canonique de G_0 , $W_{G_0}(T_0)$ est bien le groupe W_0 décrit dans l'énoncé. La forme G de G_0 correspond à un fibré principal homogène P sous $\text{ad}(G_0)$ ($P = \underline{\text{Isomint}}(G_0, G)$). Le groupe $W_{\text{ad}(G_0)}(T_0^{\text{ad}})$ est canoniquement isomorphe à W_0 , et on obtient le résultat voulu en appliquant 4.4.3 à la situation $(\text{ad}(G_0), T_0^{\text{ad}}, P)$, l'hypothèse (ii) de 4.4.3 étant bien vérifiée. Démontrons enfin (iii). Reprenons les notations de (ii); on a un diagramme 369

$$\begin{array}{ccc} & \text{rev}(G) & \\ & \downarrow E_S & \\ S & \xleftarrow{W_0} & S' \end{array}$$

On sait que $G_{S'}$ est isomorphe à $(G_0)_{S'}$ et que $(G_0)_{\text{rev}(G)}$ est déployable. Si on pose $\overline{S} = S' \times_S \text{rev}(G)$, $G_{\overline{S}}$ est bien déployable, et il ne reste plus qu'à vérifier que $\overline{S}$ est bien un revêtement principal galoisien de S de groupe A , ce qui résulte du lemme plus général suivant (naturellement valable dans tout site) :

Lemme 4.4.4. — Soient S un préschéma, G et H deux S -préschémas en groupes, $G \rightarrow \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(H)$ une opération de G sur H , E un G -fibré principal homogène, F un H_0 -fibré principal homogène, où H_0 est la forme de H associée à E . Alors $E \times_S F$ est muni

naturellement d'une structure de fibré principal homogène sous le produit semi-direct $H \cdot G$.

Notons $(e, g) \mapsto eg$ (resp. $(f, u) \mapsto fu$) l'opération (à droite) de G sur E (resp. de H_0 sur F). Notons

$$p : E \times_S H \longrightarrow H_0$$

la projection canonique (H_0 est par définition le quotient de $E \times_S H$ par G y opérant suivant la formule $(e, h)g = (eg, g^{-1}hg)$). Considérons le morphisme

$$r : E \times_S F \times_S H \times_S G \longrightarrow E \times_S F$$

défini ensemblistement par

$$r(e, f, h, g) = (eg, fp(e, h)).$$

370 Le morphisme r définit bien une opération du produit semi-direct $H \cdot G$ sur $E \times_S F$. En effet, on a ensemblistement

$$r(r(e, f, h, g), h', g') = (egg', fp(e, h)p(eg, h'));$$

Mais

$$p(e, h)p(eg, h') = p(e, h)p(e, gh'g^{-1}) = p(e, hgh'g^{-1}),$$

d'où

$$r(r(e, f, h, g), h', g') = r(e, f, hgh'g^{-1}, gg'),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Pour prouver maintenant que cette loi est bien une loi de fibré principal homogène, on peut supposer que E et F sont triviaux, auquel cas on voit aussitôt que $E \times_S F$ est également un fibré trivial.

5. Décomposition canonique d'un groupe adjoint ou simplement connexe

Dans ce numéro, nous allons utiliser les résultats du n°1 pour généraliser au cas des préschémas une décomposition classique des groupes adjoints (resp. simplement connexe). Pour ne pas surcharger indéfiniment la rédaction, les démonstrations sont esquissées et le détail en est laissé au lecteur; en fait il s'agit toujours de démonstrations absolument standard de théorie des fibrés principaux : réduction du groupe structural, torsion, ...

5.1. — Rappelons (Exp. XXI, 7.4) qu'un diagramme de Dynkin est réunion disjointe de ses composantes connexes, qui sont des diagrammes de Dynkin. De plus, tout diagramme de Dynkin connexe non vide correspondant à une donnée radicielle est isomorphe à l'un des diagrammes type $(A_n, B_n, \dots, G_2)$ qui ont été exhibés en Exp. XXI, 7.4.6. Dans la suite, nous ne nous intéresserons qu'à des diagrammes de Dynkin dont les composantes connexes sont de l'un des types précédents. Soit $\mathbf{T}$ l'ensemble de ces diagrammes type. Pour tout diagramme de Dynkin D , soit $n(\mathbf{t})$ le nombre de composantes connexes de D isomorphes à $\mathbf{t}$, où $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$. Le type de D est par définition $\sum_{\mathbf{t} \in \mathbf{T}} n(\mathbf{t}) \mathbf{t}$.

Un diagramme de Dynkin de type $\mathbf{t}$ est dit *simple* de type $\mathbf{t}$, un diagramme de Dynkin de type $n\mathbf{t}$ est dit *isotypique* de type $\mathbf{t}$. Soit D_0 l'ensemble des composantes connexes de D et soit

$$a : D_0 \longrightarrow \mathbf{T}$$

l'application évidente. Le type de D n'est autre que $\sum_{x \in D_0} a(x)$.

5.2. — Soient S un préschéma, D un S -schéma de Dynkin (vérifiant la condition restrictive énoncée ci-dessus). Le conoyau du couple de morphismes $R \rightrightarrows D$ (R = schéma des liaisons de D) est noté D_0 . C'est le « schéma des composantes connexes » de D (il existe trivialement lorsque D est constant ; le cas général s'en déduit par descente) ; c'est un S -schéma constant tordu fini. On a un morphisme canonique

$$a : D_0 \longrightarrow \mathbf{T}_S.$$

Pour $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, posons $a^{-1}(\mathbf{t}) = D_{0,\mathbf{t}}$; c'est un sous-schéma de D_0 , dont l'image réciproque dans D , notée $D_{\mathbf{t}}$, est la *composante isotypique* de type $\mathbf{t}$ du schéma de Dynkin D . Chaque $D_{\mathbf{t}}$ est un sous-schéma de D , et on a

372

$$D = \coprod_{\mathbf{t} \in \mathbf{T}} D_{\mathbf{t}}.$$

Remarquons que le degré de $D_{0,\mathbf{t}}$ en $s \in S$ est $n(s, \mathbf{t})$, si le type de D en s est $\sum_{\mathbf{t}} n(s, \mathbf{t}) \mathbf{t}$.

5.3. — Dans la suite, nous ne considérerons que des groupes semi-simples adjoints (resp. simplement connexes). Pour simplifier le langage, nous énoncerons les résultats pour des groupes adjoints ; *tous les énoncés resteront valables* si on y substitue partout *simplement connexe* à *adjoint*.

Rappelons qu'une donnée radicielle réduite adjointe est déterminée à isomorphisme près par le type de ses diagrammes de Dynkin. On dira donc qu'une donnée radicielle adjointe $\mathcal{R}$ (resp. un groupe semi-simple adjoint G) est de type $\sum n(\mathbf{t}) \mathbf{t}$ si ses diagrammes de Dynkin le sont (resp. si son type est donné par une donnée radicielle adjointe de type $\sum n(\mathbf{t}) \mathbf{t}$). On dira que $\mathcal{R}$ ou G est *simple* de type $\mathbf{t}$ (resp. *isotypique* de type $\mathbf{t}$), si son type est $\mathbf{t}$ (resp. $n\mathbf{t}$, $n \geq 0$).

Si G est un groupe semi-simple adjoint, on utilisera les symboles $\underline{\text{Dyn}}_0(G)$ et $\underline{\text{Dyn}}_{0,\mathbf{t}}(G)$ dans le sens défini en 5.2.

5.4. — Soient $\mathbf{t}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, des éléments distincts de $\mathbf{T}$, et soit $\mathcal{R}_i$ une donnée radicielle adjointe épinglée isotypique de type $\mathbf{t}_i$. Considérons le produit $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \times \dots \times \mathcal{R}_n$ (Exp. XXI, 6.4.1). Soit S un préschéma tel que les différents $\acute{\text{Eps}}_S(\mathcal{R}_i)$ existent (cf. Exp. XXV). On vérifie aussitôt qu'il existe un isomorphisme canonique

$$(*) \quad \acute{\text{Eps}}_S(\mathcal{R}) = \acute{\text{Eps}}_S(\mathcal{R}_1) \times_S \dots \times_S \acute{\text{Eps}}_S(\mathcal{R}_n).$$

De plus, si E_i désigne le groupe des automorphismes de $\mathcal{R}_i$, E le groupe des auto-

373

morphismes de $\mathcal{R}$, D_i (resp. D) le diagramme de Dynkin de $\mathcal{R}_i$ (resp. $\mathcal{R}$), on a des isomorphismes :

$$D = \coprod D_i, \quad E = \coprod E_i, \\ E \simeq \text{Aut}(D), \quad E_i \simeq \text{Aut}(D_i).$$

Combinant avec (*) et 1.4, on voit que (*) induit un isomorphisme

$$\underline{\underline{A}}_S(\mathcal{R}) \simeq \underline{\underline{A}}_S(\mathcal{R}_1) \times \cdots \times \underline{\underline{A}}_S(\mathcal{R}_n).$$

Proposition 5.5. — Soient S un préschéma, G un S -groupe semi-simple adjoint. Il existe une décomposition unique

$$G \simeq \prod_{\mathbf{t} \in \mathbf{T}} G_{\mathbf{t}},$$

où $G_{\mathbf{t}}$ est un S -groupe semi-simple adjoint isotypique de type $\mathbf{t}$. De plus, la décomposition précédente induit des isomorphismes

$$\underline{\underline{\text{Dyn}}}_{\mathbf{t}}(G) \simeq \underline{\underline{\text{Dyn}}}(G_{\mathbf{t}}), \quad \underline{\underline{\text{Aut}}}_{S\text{-gr.}}(G) \simeq \prod_{\mathbf{t} \in \mathbf{T}} \underline{\underline{\text{Aut}}}_{S\text{-gr.}}(G_{\mathbf{t}}).$$

Cela a en effet été démontré ci-dessus lorsque G est déployé. Dans le cas général, on peut supposer G de type constant $\mathcal{R}$. Utilisant la décomposition précédente de $\underline{\underline{A}}_S(\mathcal{R})$ et 1.17, on en déduit la décomposition voulue de G . Les autres résultats se prouvent alors par descente.

374 **Remarque 5.6.** — Plus généralement, si G et H sont deux groupes semi-simples adjoints, on a comme suit des isomorphismes canoniques (le diagramme est commutatif) :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\underline{\text{Isom}}}_{S\text{-gr.}}(G, H) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{\mathbf{t} \in \mathbf{T}} \underline{\underline{\text{Isom}}}_{S\text{-gr.}}(G_{\mathbf{t}}, H_{\mathbf{t}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{\underline{\text{Isomext}}}(G, H) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{\mathbf{t} \in \mathbf{T}} \underline{\underline{\text{Isomext}}}(G_{\mathbf{t}}, H_{\mathbf{t}}) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \underline{\underline{\text{Isom}}}_{\text{Dyn}}(\text{Dyn}(G), \text{Dyn}(H)) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{\mathbf{t} \in \mathbf{T}} \underline{\underline{\text{Isom}}}_{\text{Dyn}}(\underline{\underline{\text{Dyn}}}(G_{\mathbf{t}}), \underline{\underline{\text{Dyn}}}(H_{\mathbf{t}})). \end{array}$$

Remarque 5.7. — On peut donner une caractérisation intrinsèque de $G_{\mathbf{t}}$, que nous énonçons ci-après sans démonstration : c'est le plus grand sous-groupe réductif de G invariant (et d'ailleurs caractéristique) et isotypique de type $\mathbf{t}$.

La proposition précédente permet de ramener l'étude des groupes semi-simples adjoints à celle des groupes semi-simples adjoints isotypiques. C'est cette étude que nous allons faire ci-dessous.

5.8. — Soient $\mathcal{R}$ une donnée radicielle réduite épinglée adjointe *simple* de type $\mathbf{t}$, I un ensemble fini non vide, $\mathcal{R}^I$ la donnée radicielle produit de copies $\mathcal{R}_i$ de $\mathcal{R}$, pour $i \in I$. Notons E le groupe des automorphismes de $\mathcal{R}$, qui s'identifie au groupe des automorphismes du diagramme de Dynkin D de $\mathcal{R}$. Le diagramme de Dynkin de $\mathcal{R}^I$ s'identifie à D^I , ce qui montre que l'on a une suite exacte :

$$1 \longrightarrow \mathrm{Aut}(D)^I \longrightarrow \mathrm{Aut}(D^I) \longrightarrow \mathrm{Aut}(I) \longrightarrow 1 ,$$

où $\mathrm{Aut}(I)$ désigne le groupe des permutations de I . Il s'ensuit que l'isomorphisme canonique 375

$$\mathrm{Ép}_S(\mathcal{R})^I \simeq \mathrm{Ép}_S(\mathcal{R}^I)$$

induit une suite exacte

$$1 \longrightarrow \underline{\underline{A}}_S(\mathcal{R})^I \longrightarrow \underline{\underline{A}}_S(\mathcal{R}^I) \longrightarrow \underline{\underline{Aut}}(I_S) \longrightarrow 1 ,$$

le dernier groupe étant le S-groupe constant associé à $\mathrm{Aut}(I)$. Remarquons d'autre part que I s'identifie canoniquement à l'ensemble des composantes connexes de D^I . Si G est un S-groupe semi-simple de type $\mathcal{R}^I$, définissant (cf. 1.17) un fibré principal homogène P sous $\underline{\underline{A}}_S(\mathcal{R}^I)$, la définition de $\underline{\underline{Dyn}}(G)$ par descente (3.7), et celle de $\underline{\underline{Dyn}}_0(G)$ (5.2), montre que le fibré associé à P par le morphisme $A_S(\mathcal{R}^I) \rightarrow \underline{\underline{Aut}}(I_S)$ n'est autre que $\underline{\underline{Isom}}_S(I_S, \underline{\underline{Dyn}}_0(G))$, correspondant à la forme $\underline{\underline{Dyn}}_0(G)$ de I_S . Utilisant à nouveau l'équivalence de catégories 1.17 et la suite exacte précédente, on en déduit par un raisonnement formel qu'il existe un $\underline{\underline{Dyn}}_0(G)$ -groupe réductif de type $\mathcal{R}$, soit G_0 , et un S-isomorphisme $G \simeq \prod_{\underline{\underline{Dyn}}_0(G)/S} G_0$.

Proposition 5.9. — Soient S un préschéma, G un S-groupe semi-simple adjoint isotypique de type $\mathbf{t}$. Il existe un $\underline{\underline{Dyn}}_0(G)$ -groupe semi-simple adjoint G_0 simple de type $\mathbf{t}$, et un S-isomorphisme (uniques)

$$G \simeq \prod_{\underline{\underline{Dyn}}_0(G)/S} G_0 .$$

De plus, cet isomorphisme induit une suite exacte

$$1 \longrightarrow \prod_{\underline{\underline{Dyn}}_0(G)/S} \underline{\underline{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G_0) \longrightarrow \underline{\underline{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G) \longrightarrow \underline{\underline{Aut}}_S(\underline{\underline{Dyn}}_0(G)) \longrightarrow 1 .$$

On peut évidemment supposer G de type constant $n \mathbf{t}$. La première assertion a déjà été démontrée (l'assertion d'unicité est évidente). La seconde se déduit alors du cas déployé par descente. 376

On peut regrouper 5.5 et 5.9 :

Proposition 5.10. — Soient S un préschéma, G un S-groupe semi-simple adjoint, $\mathfrak{D} = \underline{\underline{Dyn}}(G)$ son schéma de Dynkin.

(i) Il existe une décomposition canonique

$$G \simeq \prod_{\mathbf{t} \in \mathbf{T}} \prod_{\mathfrak{D}_{0,\mathbf{t}}/S} G_{0,\mathbf{t}} \simeq \prod_{\underline{\underline{Dyn}}_0(G)/S} G_0 ,$$

où chaque $G_{0,t}$ est un $\underline{\text{Dyn}}_{0,t}(G)$ -groupe simple adjoint de type t (resp. où G_0 est un $\underline{\text{Dyn}}_0(G)$ -groupe semi-simple adjoint dont le type en $x \in \underline{\text{Dyn}}_0(G)$ est $a(x) \in \mathbf{T}$ (le morphisme $a : \underline{\text{Dyn}}_0(G) \rightarrow \mathbf{T}_S$ a été défini en 5.2)).

(ii) Les décompositions précédentes induisent des suites exactes isomorphes (notées verticalement) :

$$\begin{array}{ccc}
 & 1 & 1 \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 \prod_{t \in \mathbf{T}} \prod_{\mathfrak{D}_{0,t}/S} \underline{\text{Aut}}_{\text{gr.}}(G_{0,t}) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{\underline{\text{Dyn}}_0(G)/S} \underline{\text{Aut}}_{\text{gr.}}(G_0) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G) & \xrightarrow{\quad} & \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \prod_{t \in \mathbf{T}} \underline{\text{Aut}}_S(\underline{\text{Dyn}}_{0,t}(G)) & \xrightarrow{\sim} & \underline{\text{Aut}}_{S,a}(\underline{\text{Dyn}}_0(G)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 1 & & 1
 \end{array}$$

377 où $\underline{\text{Aut}}_{S,a}(D_0)$ dénote le schéma des automorphismes de $\underline{\text{Dyn}}_0(G)$ qui commutent au morphisme $a : \underline{\text{Dyn}}_0(G) \rightarrow \mathbf{T}_S$.

Corollaire 5.11. — Sous les conditions précédentes, les trois catégories suivantes sont équivalentes :

- (i) la catégorie des fibrés principaux homogènes sous G .
- (ii) la catégorie des fibrés principaux homogènes sous G_0 .
- (iii) la catégorie produit, pour $t \in \mathbf{T}$, des catégories des fibrés principaux homogènes sous les $G_{0,t}$.

Cela se déduit formellement des décompositions précédentes et de 8.4.

Corollaire 5.12. — On a des isomorphismes canoniques

$$\underline{\text{Tor}}(G) \simeq \prod_{t \in \mathbf{T}} \prod_{\mathfrak{D}_{0,t}/S} \underline{\text{Tor}}(G_{0,t}) \simeq \prod_{\underline{\text{Dyn}}_0(G)/S} \underline{\text{Tor}}(G_0),$$

et de même en remplaçant $\underline{\text{Tor}}$ par $\underline{\text{Bor}}$ (resp. $\underline{\text{Kil}}$).

Trivial à partir du cas déployé.

Remarque 5.13. — Le morphisme canonique

$$\underline{\text{Dyn}}(G) \longrightarrow \underline{\text{Dyn}}_0(G)$$

permet de considérer $\underline{\text{Dyn}}(G)$ comme un $\underline{\text{Dyn}}_0(G)$ -schéma de Dynkin ; en fait c'est le schéma de Dynkin $\underline{\text{Dyn}}(G_0)$ de G_0 .

De même si $T \subset B$ est un couple de Killing de G , correspondant canoniquement au couple de Killing $T_0 \subset B_0$ de G_0 , on vérifie que les obstructions au quasi-déploiement de G et G_0 , qui se trouvent (3.9) dans $\text{Pic}(\underline{\text{Dyn}}(G)) = \text{Pic}(\underline{\text{Dyn}}(G_0))$ coïncident. On en déduit :

Corollaire 5.14. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

378

- (i) G est quasi-déployable,
- (ii) G_0 est quasi-déployable,
- (iii) chaque $G_{0,t}$, $t \in T$, est quasi-déployable.

6. Automorphismes des groupes de Borel des groupes réductifs

Lemme 6.1. — *Soient S un préschéma, (G, T, M, R) un S -groupe déployé, R_0 un système de racines simples de R , B le groupe de Borel correspondant. Alors B^u est engendré comme faisceau (fppf) en groupes par les U_α , $\alpha \in R_0$.*

Soit H le sous-faisceau en groupes de B^u engendré par les U_α , $\alpha \in R_0$. Prouvons $H \supset U_\beta$ par récurrence sur l'entier > 0 , $\text{ord}_{R_0}(\beta)$ (cf. Exp. XXI, 3.2.15). L'assertion est vérifiée par hypothèse pour $\text{ord}(\beta) = 1$. Supposons donc $\text{ord}(\beta) > 1$ et $U_\gamma \subset H$ dès que $\text{ord}(\gamma) < \text{ord}(\beta)$. Il existe $\alpha \in R_0$ tel que $\beta - \alpha \in R_+$ (Exp. XXI, 3.1.1). Soit p le plus grand entier tel que $\beta - p\alpha = \beta' \in R_+$. On a $U_\alpha, U_{\beta'} \subset H$, $\beta' - \alpha \notin R$. On est donc ramené à prouver :

Lemme 6.2. — *Reprenons les notations de Exp. XXIII, 6.4. Supposons $p = 1$, c'est-à-dire $\beta - \alpha$ non racine. Si H est un sous-faisceau en groupes de B^u tel que $U_\alpha, U_\beta \subset H$, alors $U_{i\alpha+j\beta} \subset H$ chaque fois que $i\alpha + j\beta \in R$, $i > 0$, $j > 0$.*

Distinguons quatre cas suivant la valeur de $q = 0, 1, 2, 3$. Dans la suite x et y désignent deux sections arbitraires de $\mathbb{G}_{a,S'}, S' \rightarrow S$.

Si $q = 0$, il n'y a rien à démontrer.

Si $q = 1$, on a $p_{\alpha+\beta}(\pm x) = p_\beta(-1)p_\alpha(-x)p_\beta(1)p_\alpha(x) \in H(S')$, donc $U_{\alpha+\beta} \subset H$. 379

Si $q = 2$, on a de même

$$p_{\alpha+\beta}(\pm xy)p_{2\alpha+\beta}(\pm x^2y) = p_\beta(-y)p_\alpha(-x)p_\beta(y)p_\alpha(x) \in H(S'),$$

d'où, quitte à changer certains signes

$$F(x, y) = p_{\alpha+\beta}(xy)p_{2\alpha+\beta}(x^2y) \in H(S').$$

Or on a aussitôt $F(x, 1)F(-1, x) = p_{2\alpha+\beta}(x^2 - x)$. Si $a \in \mathbb{G}_a(S)$, l'équation $X^2 - X = a$ définit une extension libre et surjective de S (c'est $\text{Spec } \mathcal{O}_S[X]/(X^2 - X - a)$) ; on a donc $p_{2\alpha+\beta}(a) \in H(S')$ donc $U_{2\alpha+\beta} \subset H$, donc aussi $\overline{U_{\alpha+\beta}} \subset H$ (car $F(1, a) \in H(S')$).

Si $q = 3$, on a de même

$$F(x, y) = p_{\alpha+\beta}(xy)p_{2\alpha+\beta}(x^2y)p_{3\alpha+\beta}(x^3y)p_{3\alpha+2\beta}(x^3y^2) \in H(S');$$

mais

$$p_{3\alpha+2\beta}(\pm x) = F(1, 1)^{-1}p_\beta(-x)F(1, 1)p_\beta(x) \in H(S'),$$

donc aussi

$$K(x, y) = p_{\alpha+\beta}(xy)p_{2\alpha+\beta}(x^2y)p_{3\alpha+\beta}(x^3y) \in H(S').$$

On a donc déjà prouvé $U_{3\alpha+2\beta} \subset H$. Calculant alors

$$K(x+y, 1)K(-x, 1)K(1, y)^{-1}$$

modulo $U_{3\alpha+2\beta}$, on trouve

$$p_{2\alpha+\beta}(2x^2 + y^2 + 2xy - y)p_{3\alpha+\beta}(y^3 + 3xy^2 + 3x^2y - y) \in H(S').$$

Si $a \in \mathbb{G}_a(S)$, les « équations »

$$\begin{aligned} x^2 &= -xy - y + 1 - a \\ y^2 &= 3y - 2 + 3a \end{aligned}$$

380 définissent une extension libre et surjective de S ; l'expression précédente donne alors $p_{3\alpha+\beta}(a) \in H(S')$. On a donc prouvé

$$U_{3\alpha+\beta}, \quad U_{3\alpha+2\beta} \subset H, \quad p_{\alpha+\beta}(xy)p_{2\alpha+\beta}(xy^2) \in H(S'),$$

et on est ramené au calcul précédent.

Remarque 6.2.1. — La démonstration précédente montre qu'on aurait pu remplacer l'hypothèse « $H \supset U_\alpha, U_\beta$ » par « $H \supset U_\alpha$ ou U_β , et H est invariant sous $\text{int}(U_\alpha)$ et $\text{int}(U_\beta)$ ».

Théorème 6.3. — Soient S un préschéma, G et G' deux S -groupes semi-simples, B (resp. B') un sous-groupe de Borel de G (resp. G'). Tout isomorphisme $B \xrightarrow{\sim} B'$ est induit par un unique isomorphisme $G \xrightarrow{\sim} G'$.

L'assertion est locale pour la topologie étale et on peut supposer G déployé : $G = (G, T, M, R)$, B étant défini par le système de racines positives R_+ de R . L'isomorphisme donné $u : B \xrightarrow{\sim} B'$ induit un isomorphisme de T sur un tore maximal T' de B' , donc de G' . L'isomorphisme donné $T \simeq D_S(M)$ donne un isomorphisme $T' \simeq D_S(M)$ dans lequel les éléments de R_+ deviennent les racines constantes de B' par rapport à T' , donc les éléments de R les racines constantes de G' par rapport à T' . Comme G et G' sont semi-simples, les coracines sont déterminées par dualité (Exp. XXI, 1.2.5), ce qui prouve que (T', M, R) est un déploiement de G' tel que $\mathcal{R}(G) = \mathcal{R}(G')$.

381 Appliquant Exp. XXIII, 5.1 (Théorème d'unicité), on en déduit qu'il existe un unique isomorphisme $G \xrightarrow{\sim} G'$ coïncidant avec u sur T et les U_α , $\alpha \in R_0$. Par 5.1, la restriction de cet isomorphisme à B est u . C.Q.F.D.

Remarque 6.3.1. — (i) Utilisant Exp. XXII, 4.1.9 et raisonnant comme dans loc. cit. 4.2.12, on peut dans l'énoncé du théorème remplacer « isomorphisme » par « isogénie » (resp. « isogénie centrale »).

(ii) Le théorème est faux pour les groupes réductifs. Prendre par exemple $G = G' = \mathrm{SL}_2 \times \mathbb{G}_m$ identifié au groupe des matrices

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix} \mid ad - bc = 1, h \text{ inversible} \right\};$$

prendre pour $B = B'$ le groupe de Borel défini par $c = 0$ et pour u l'automorphisme de $B : u(a, b, d, h) = (a, b, d, ah)$.

Corollaire 6.4. — *Le foncteur $(G, B) \mapsto B$ de la catégorie des couples : (S-groupes semi-simples, groupe de Borel) dans la catégorie des S-préschémas en groupes (les morphismes sont les isomorphismes) est pleinement fidèle.*

Corollaire 6.5. — *Soient S un préschéma, G un S-groupe semi-simple, B un groupe de Borel de G , B' un S-groupe localement isomorphe à B pour (fpqc). Alors B' est localement isomorphe à B pour la topologie étale finie locale et il existe un S-groupe semi-simple G' dont B' soit un groupe de Borel; G' est unique à un unique isomorphisme près induisant l'identité sur B' .*

Corollaire 6.6. — *Soient S un préschéma, G un S-groupe semi-simple, B un groupe de Borel de G . Alors $\underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-gr.}}(B)$ est représentable par un S-préschéma affine et lisse, $\underline{\mathrm{Autext}}(B)$ est représentable par un S-préschéma étale et fini, et les morphismes évidents induisent un isomorphisme de suites exactes*

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & B_{\mathrm{ad}} & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, B) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Autext}}(G) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ 1 & \longrightarrow & B_{\mathrm{ad}} & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Autext}}(B) \longrightarrow 1. \end{array}$$

Cela résulte aussitôt de 2.1 et des résultats précédents. On laisse au lecteur le soin de développer les analogues des résultats des N^{os} 1,2,3,4 dans le cadre ci-dessus.

Remarque 6.7. — Si S est un préschéma et B un S-groupe, B ne peut donc être groupe de Borel que d'un unique groupe semi-simple, bien déterminé par B . Il reste donc à caractériser les S-groupes B qui sont bien groupes de Borel de groupes semi-simples. La question ne semble pas comporter de réponse simple. Signalons par exemple qu'il existe des S-groupes lisses, affines, extension d'un tore trivial et de groupes additifs (définissant même un demi-système de racines), dont toutes les fibres sont des groupes de Borel de groupes semi-simples, mais qui ne sont pas groupe de Borel d'un groupe semi-simple. Par exemple, prenons le groupe de Borel canonique d'un groupe de type B_2 déployé sur le schéma des nombres duals sur un corps k , et modifions la constante 2 de la seconde relation de commutation de Exp. XXIII, 3.3.1 (iii) en la remplaçant par un scalaire différent, égal à 2 sur la fibre spéciale. La fibre spéciale du groupe obtenu sera bien un groupe de Borel d'un groupe semi-simple, mais le groupe lui-même n'en sera pas un. La traduction cohomologique de ce fait (cf. Exp. III, 3.10) est le suivant :

soient k un corps, G un k -groupe semi-simple de type B_2 , B un sous-groupe de Borel de G ; alors $H^2(B, \mathcal{L}ie(B/k)) \neq 0$.

7. Représentabilité des foncteurs $\underline{\text{Hom}}_{S\text{-gr.}}(G, H)$, pour G réductif

7.1. Le cas déployé

7.1.1. — Soient S un préschéma, G un S -groupe épinglé, T son tore maximal, R_0 l'ensemble des racines simples et, pour $\alpha \in R_0$,

$$u_\alpha \in U_\alpha^*(S), \quad w_\alpha \in \underline{\text{Norm}}_G(T)(S),$$

les éléments définis par l'épinglage.

Soit d'autre part H un S -préschéma en groupes ; nous nous intéressons au foncteur $\underline{\text{Hom}}_{S\text{-gr.}}(G, H)$, et plus précisément au morphisme

$$q : \underline{\text{Hom}}_{S\text{-gr.}}(G, H) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_{S\text{-gr.}}(T, H).$$

Soit donc

$$f_T : T \longrightarrow H$$

un S -homomorphisme, considérons $q^{-1}(f_T) = \mathcal{F}$. C'est le foncteur défini par

$$\mathcal{F}(S') = \{f \in \text{Hom}_{S'\text{-gr.}}(G_{S'}, H_{S'}) \mid f = (f_T)_{S'} \text{ sur } T_{S'}\}.$$

384 On a un morphisme de S -foncteur

$$i : \mathcal{F} \longrightarrow H^{2n},$$

où $n = \text{Card}(R_0)$, défini ensemblistement par $i(f) = (f(u_\alpha), f(w_\alpha))$. En vertu de Exp. XXIII, 1.9, i est d'ailleurs un monomorphisme.

Proposition 7.1.2. — *Si H est séparé sur S , $\mathcal{F}$ est représentable et i est une immersion fermée.*

La technique habituelle de représentabilité relative nous montre qu'il suffit de prouver qu'étant données des sections

$$v_\alpha, h_\alpha \in H(S), \quad \text{pour } \alpha \in R_0,$$

les S -préschémas S' tels qu'il existe un S' -homomorphisme

$$f : G_{S'} \longrightarrow H_{S'}$$

prolongeant $(f_T)_{S'}$ et vérifiant $f(u_\alpha) = v_\alpha$, $f(w_\alpha) = h_\alpha$, sont exactement ceux qui se factorisent par un certain sous-préschéma fermé de S . On peut évidemment supposer S affine.

Pour simplifier la suite, disons qu'un morphisme $X \rightarrow Y$ de schémas affines vérifie la condition (L) si Y est le spectre d'une $\mathcal{O}(X)$ -algèbre qui est un $\mathcal{O}(X)$ -module libre. Il est clair que si l'on se restreint à la catégorie des schémas affines, un produit, ou un composé de morphismes vérifiant (L) vérifie (L) et que (L) est stable par extension de la base.

Lemme 7.1.3. — Supposons S affine, et soit $\alpha \in R_0$. Considérons le morphisme

$$a : T \times_S T \longrightarrow \mathbb{G}_{a,S}$$

défini ensemblistement par $a(t, t') = \alpha(t) + \alpha(t')$.

385

(i) a est fidèlement plat et de présentation finie.

(ii) Soit R le carré fibré de a . Le morphisme structural $R \rightarrow S$ vérifie (L).

Il est d'abord clair que le morphisme a est surjectif, $\alpha : T \rightarrow \mathbb{G}_{m,S}$ l'étant. Il est trivial que a est de présentation finie. Comme α vérifie (L), il suffit, pour prouver (i) et (ii) de montrer que le morphisme

$$u : \mathbb{G}_{m,S}^2 \longrightarrow \mathbb{G}_{a,S}$$

défini ensemblistement par $u(x, y) = x + y$ vérifie (L). Autrement dit, il suffit de vérifier que pour tout anneau A , l'anneau $A[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$ est un module libre sur son sous-anneau $A[X + Y]$. Or les éléments $(XY)^p$, $(XY)^p X$, $p \in \mathbb{Z}$ forment une base. En effet, il suffit de vérifier que pour tout $q \in \mathbb{Z}$, et toute famille $\{a_{ij} \in A \mid i, j \in \mathbb{Z}\}$, il existe des éléments $b_{n,p}$, $c_{n,p} \in A$, $0 \leq n \leq q$, $p \in \mathbb{Z}$, uniques, tels que

$$\sum_{-q \leq i-j \leq q+1} a_{ij} X^i Y^j = \sum_{\substack{0 \leq n \leq q \\ p \in \mathbb{Z}}} \left(b_{n,p} (X + Y)^n (XY)^p X + c_{n,p} (X + Y)^n (XY)^p \right).$$

Démontrons cette assertion par récurrence ascendante sur q . Elle est triviale pour $q \leq -1$; supposons $q \geq 0$ (et donc $q + 1 > -q$) et supposons l'assertion vraie pour $q - 1$. Prenant dans les deux membres les termes de la forme $X^a Y^b$ avec $a - b = q + 1$, puis avec $a - b = -q$, on obtient immédiatement

$$a_{q+i+1,i} = b_{q,i} \quad \text{et} \quad q_{i,i+p} = c_{q,i}.$$

Cela démontre d'abord que s'il y a une solution, alors les $b_{q,i}$ et $c_{q,i}$ sont déterminés par les relations précédentes. Soustrayant alors des deux membres

$$b_{q,i} (X + Y)^q (XY)^i X + c_{q,i} (X + Y)^q (XY)^i,$$

on est ramené aux assertions d'existence et d'unicité déjà prouvées par l'hypothèse de récurrence.

Lemme 7.1.4. — Soit $\alpha \in R_0$, et soit $b : T \times_S T \rightarrow H$ le morphisme défini ensemblistement par

$$b(t, t') = (\text{int}(f_T(t))v_\alpha)(\text{int}(f_T(t'))v_\alpha).$$

Soit $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow H$ un S -morphisme. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f_α est un morphisme de groupes ; on a $f_\alpha(u_\alpha) = v_\alpha$; on a

$$f_T(t)f_\alpha(x)f_T(t)^{-1} = f_\alpha(\alpha(t)x)$$

pour tous $t \in T(S')$, $x \in U_\alpha(S')$, $S' \rightarrow S$.

(ii) On a $f_\alpha(u_\alpha) = v_\alpha$ et la relation

$$f_\alpha(a(t, t')u_\alpha) = b(t, t')$$

pour tous $t, t' \in T(S')$, $S' \rightarrow S$.

Si f_α vérifie (i), on a $f_\alpha(\alpha(t)u_\alpha) = \text{int}(f_T(t))v_\alpha$, ce qui entraîne aussitôt (ii). Réciproquement, supposons (ii) vérifiée et démontrons les différentes conditions de (i); prouvons d'abord la dernière. Comme a est couvrant pour (fpqc), il suffit de

387

$$f_T(t)f_\alpha(a(t', t'')u_\alpha)f_T(t)^{-1} = f_\alpha(\alpha(t)a(t', t'')u_\alpha);$$

or ceci s'écrit aussi

$$f_T(t)b(t', t'')f_T(t)^{-1} = b(tt', tt''),$$

propriété évidente sur la définition de b . Reste à prouver que f_α est un morphisme de groupes. Or la propriété précédente donne aussitôt

$$\begin{aligned} f_\alpha(\alpha(t)u_\alpha)f_\alpha(\alpha(t')u_\alpha) &= (\text{int}(f_T(t))f_\alpha(u_\alpha)) \cdot (\text{int}(f_T(t'))f_\alpha(u_\alpha)) \\ &= b(t, t') = f_\alpha(\alpha(t)u_\alpha + \alpha(t)\alpha(t)v_\alpha). \end{aligned}$$

On a donc $f_\alpha(x + x') = f_\alpha(x)f_\alpha(x')$, chaque fois que x et x' sont des sections de l'ouvert U_α^* de U_α , qui est schématiquement dense; on conclut alors par Exp. XVIII, 1.4.

7.1.5. — Fixons-nous provisoirement un $\alpha \in R_0$. Le morphisme a est fidèlement plat quasi-compact, donc $\mathbb{G}_{a,S}$ s'identifie au quotient de $T \times_S T$ par la relation d'équivalence R définie par a . Soit

$$R \begin{array}{c} \xrightarrow{i_1} \\ \xrightarrow{i_2} \end{array} T \times_S T$$

cette relation d'équivalence.

Pour que le morphisme b se factorise par a , il faut et il suffit que $b \circ i_1 = b \circ i_2$; autrement dit, si on note K le noyau du couple de morphismes

$$R \begin{array}{c} \xrightarrow{b \circ i_1} \\ \xrightarrow{b \circ i_2} \end{array} H,$$

il faut et il suffit que $K = R$. Or H est supposé séparé sur S , donc K est un sous-préschéma fermé de R . D'autre part, R est essentiellement libre sur S (7.1.3).

388

7.1.6. — Si S' est un S -préschéma, pour qu'il existe sur S' un f_α vérifiant les conditions de 7.1.4 (i) (et alors nécessairement unique), il faut et il suffit que $K_{S'} = R_{S'}$, et que le morphisme f_α obtenu vérifie $f_\alpha(u_\alpha) = v_\alpha$.

La première condition est équivalente au fait que $S' \rightarrow S$ se factorise par un certain sous-préschéma fermé de S (Exp. VIII, 6.4); si on remplace S par ce sous-préschéma fermé, la seconde condition définit à nouveau un sous-préschéma fermé de S (égalité de deux sections de H , or H est supposé séparé sur S).

Quitte à remplacer S par ce sous-préschéma fermé, on peut donc supposer qu'il existe un morphisme $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow H$ vérifiant les conditions de 7.1.4 (i). Prenant l'intersection des sous-préschémas de S obtenus pour chaque $\alpha \in R_0$, on peut supposer cette condition vérifiée pour tout $\alpha \in R_0$.

7.1.7. — De même, considérons pour chaque $\alpha \in R_0$ les deux morphismes de S-groupes

$$f_T \circ \text{int}(w_\alpha), \quad \text{int}(h_\alpha) \circ f_T : T \longrightarrow H.$$

Comme H est séparé sur S et T essentiellement libre sur S , le même raisonnement que précédemment montre que, quitte à remplacer S par un sous-préschéma fermé, on peut supposer que pour tout $\alpha \in R_0$ on a

$$f_T \circ \text{int}(w_\alpha) = \text{int}(h_\alpha) \circ f_T.$$

7.1.8. — Utilisant maintenant le théorème de générateurs et relations (Exp. XXIII, 3.5), on voit qu'il existe un homomorphisme de groupes $f : G \rightarrow H$ vérifiant les conditions exigées si et seulement si un certain ensemble fini de relations algébriques

$$R_i((h_\alpha), (v_\alpha), (f_T(\alpha^*(-1)))) = e$$

(entre les sections $h_\alpha, v_\alpha, f_T(\alpha^*(-1))$ ($\alpha \in R_0$), de H) est vérifié. Comme H est séparé sur S , cela définit encore un sous-préschéma fermé de S , et on a terminé.

Corollaire 7.1.9. — Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif déployé, T son tore maximal, H un S-préschéma en groupes séparé sur S . Soit d'autre part $\mathcal{P}$ une propriété de morphismes telle que :

- (i) Une immersion fermée vérifie $\mathcal{P}$.
- (ii) Le composé de deux morphismes vérifiant $\mathcal{P}$ vérifie aussi $\mathcal{P}$.
- (iii) $\mathcal{P}$ est stable par changement de base.
- (iv) Le morphisme structural $H \rightarrow S$ vérifie $\mathcal{P}$.

Alors le morphisme canonique

$$\underline{\text{Hom}}_{\text{S-gr.}}(G, H) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_{\text{S-gr.}}(T, H)$$

est représentable par des morphismes séparés vérifiant $\mathcal{P}$.

En effet, on peut supposer G épinglé ; le morphisme structural $H^{2n} \rightarrow S$ vérifie $\mathcal{P}$ et on conclut par 7.1.2.

Corollaire 7.1.10. — Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif déployé, et H un S-préschéma en groupes lisse et quasi-séparé sur S à fibres affines. Alors le foncteur $\underline{\text{Hom}}_{\text{S-gr.}}(G, H)$ est représentable par un S-préschéma localement de présentation finie et séparé sur S .

En effet, comme H est lisse et quasi-séparé sur S , on peut considérer sa composante neutre H^0 , qui est séparée, de présentation finie et à fibres affines (Exp. VI). Comme G est à fibres connexes, on peut remplacer H par H^0 . Comme G et H sont alors de présentation finie, on peut supposer S noethérien, et on applique 7.1.9 en prenant pour $\mathcal{P}$ la propriété « de type fini ». Mais, par Exp. XV, 8.9, on sait que $\underline{\text{Hom}}_{\text{S-gr.}}(T, H)$ est représentable par un S-préschéma séparé et localement de type fini.

Remarque 7.1.11. — Si H est affine sur S , on peut remplacer la référence à Exp. XV par Exp. IX, 4.2.

7.2. Cas général

Proposition 7.2.1. — Soient S un préschéma, G un S -groupe réductif, T un tore maximal de G . Soit d'autre part H un S -préschéma en groupes, tel que le morphisme structural $H \rightarrow S$ vérifie la condition suivante :

(+) Chaque point $s \in S$ possède un voisinage ouvert U tel que le morphisme $H_U \rightarrow U$ soit quasi-projectif.

Alors le morphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr.}}(G, H) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr.}}(T, H)$$

est représentable par des morphismes vérifiant (+).

391 Lorsque G est déployable relativement à T , on applique 7.1.9 en prenant pour $\mathcal{P}$ la propriété (+) ci-dessus. Lorsque G est localement isotrivial, par exemple semi-simple (4.2.2), on remarque que l'assertion du théorème est locale pour la topologie étale finie locale (en effet, la propriété d'être quasi-projectif est locale pour la topologie étale finie globale et assure l'effectivité de la descente pour cette topologie, cf. SGA 1, VIII, 7.7). Enfin, dans le cas général, on utilise le lemme suivant :

Lemme 7.2.2. — Soient S un préschéma, G un S -groupe réductif, T un tore maximal de G , G' le groupe dérivé de G (Exp. XXII, 6.2), $T' = T \cap G'$ le tore maximal de G' correspondant à T (Exp. XXII, 6.2.8). Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G & \longleftarrow & G' \\ \uparrow & & \uparrow \\ T & \longleftarrow & T' \end{array}$$

est une somme amalgamée dans la catégorie des S -faisceaux en groupes : c.-à-d., pour tout S -faisceau en groupe H , le carré suivant est cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{S\text{-gr.}}(G, H) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{S\text{-gr.}}(G', H) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{S\text{-gr.}}(T, H) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{S\text{-gr.}}(T', H). \end{array}$$

En effet, si $\mathrm{rad}(G)$ est le radical de G , alors $\mathrm{rad}(G) \subset T$, donc

$$\mathrm{rad}(G) \cap G' = \mathrm{rad}(G) \cap T' = K,$$

et le produit dans G induit des isogénies (Exp. XXII, 6.2)

$$i : G' \times_S \mathrm{rad}(G) \longrightarrow G, \quad j : T' \times_S \mathrm{rad}(G) \longrightarrow T.$$

392 Soient $f_{G'} : G' \rightarrow H$, $f_T : T \rightarrow H$, et $f_{T'} : T' \rightarrow H$ des homomorphismes tels que $f_{G'}|_{T'} = f_T|_{T'} = f_{T'}$. Montrons qu'il existe un unique homomorphisme $f : G \rightarrow H$ induisant $f_{G'}$ et f_T . Soit $f_{\mathrm{rad}} = f_T|_{\mathrm{rad}(G)}$ et soit

$$f_1 = f_{G'} \cdot f_{\mathrm{rad}} : G' \times_S \mathrm{rad}(G) \longrightarrow H.$$

Pour que f existe (et il sera évidemment unique), il faut et il suffit que f_1 induise l'identité sur le noyau de i , c'est-à-dire que $f_{G'}$ et f_{rad} coïncident sur K ; mais l'existence de f_T montre par le même raisonnement que $f_{T'}$ et f_{rad} coïncident sur K . Il n'y a plus qu'à remarquer que $f_{G'}$ et $f_{T'}$ coïncident évidemment sur $K \subset T'$.

Raisonnant maintenant comme en 7.1.10, on déduit de 7.2.1 :

Corollaire 7.2.3. — Soient S un préschéma, G un S -groupe réductif, H un S -préschéma en groupes, lisse et quasi-projectif sur S à fibres affines. Alors $\underline{\text{Hom}}_{\text{S-gr.}}(G, H)$ est représentable par un S -préschéma localement de présentation finie et séparé sur S .

7.3. Phénomènes particuliers à la caractéristique 0

Si G et H sont deux S -groupes lisses, $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ leurs Algèbres de Lie, on a un morphisme canonique

$$\text{Lie} : \underline{\text{Hom}}_{\text{S-gr.}}(G, H) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_S\text{-Alg. de Lie}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}),$$

où le second membre a une définition évidente.

Proposition 7.3.1. — Soient S un préschéma de caractéristique 0 (i.e. un $\mathbb{Q}$ -préschéma), G un S -groupe réductif, H un S -préschéma en groupes lisse et quasi-projectif sur S à fibres affines. 393

- (i) $\underline{\text{Hom}}_{\text{S-gr.}}(G, H)$ est représentable par un S -préschéma lisse et séparé sur S .
- (ii) Si G est semi-simple, ce préschéma est affine et de présentation finie sur S .
- (iii) Si G est simplement connexe (Exp. XXII, 4.3.3), le morphisme canonique

$$\text{Lie} : \underline{\text{Hom}}_{\text{S-gr.}}(G, H) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_S\text{-Alg. de Lie}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$$

est un isomorphisme.

Lemme 7.3.2. — Soient k un corps de caractéristique 0, G un k -groupe réductif, V un k -espace vectoriel de dimension finie, $G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation linéaire de G dans V . On a

$$H^0(G, V) = H^0(\mathfrak{g}, V), \quad H^i(G, V) = 0, \quad \text{pour } i > 0.$$

La première relation est vraie en général pour un groupe lisse et connexe (Exp. VI) ; dans le cas d'un groupe réductif, on peut la démontrer comme suit : on peut supposer k algébriquement clos, donc G déployable, donc G engendré par des sous-groupes isomorphes à $\mathbb{G}_{m,k}$, et il suffit de vérifier l'assertion pour ce groupe, ce qui est facile. De cette première relation résulte que $H^0(G, V)$ est un foncteur exact en V lorsque G est semi-simple ; $\mathfrak{g}$ est en effet alors une Algèbre de Lie semi-simple et on applique 394 Bourbaki, *Lie*, chapitre I, § 6, exercice 1, (b). L'assertion reste vraie lorsque G est réductif ; en effet, si l'on introduit le radical R de G et le quotient G/R qui est semi-simple, on a $H^0(G, V) = H^0(G/R, H^0(R, V))$, et $H^0(G, -)$ est composé de deux foncteurs exacts. Appliquant alors Exp. I, 5.3.1, on en déduit $H^i(G, V) = 0$ pour $i > 0$.

Remarque 7.3.3. — Sous les conditions précédentes, si G est semi-simple, on a $H^1(\mathfrak{g}, V) = H^2(\mathfrak{g}, V) = 0$, cf. [BLie], loc. cit. (b) et (d).

7.3.4. — Démontrons maintenant la proposition. On sait déjà, par 7.2.3, que $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}\text{-gr.}}(G, H)$ est représentable par un S-préschéma localement de présentation finie et séparé sur S; pour montrer qu'il est lisse, il suffit de prouver qu'il est infinitésimalement lisse (Exp. XI, 1.8), ce qui résulte de Exp. III, 2.8 (i) par 7.3.2. On a donc prouvé (i).

Montrons que (ii) résulte de (iii). Il suffit d'abord de prouver que $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}\text{-gr.}}(G, H)$ est affine sur S, il sera alors de présentation finie sur S, car il est lisse sur S par (i); de toutes façons $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{\mathrm{S}}\text{-Alg. de Lie}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est représentable par un sous-préschéma fermé de

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{\mathrm{S}}\text{-Mod.}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \simeq W(\mathfrak{g}^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{S}}} \mathfrak{h})$$

qui est un S-préschéma affine, et la conclusion voulue apparaît lorsque G est simplement connexe.

Dans le cas général, on peut supposer G déployé, donc $G \simeq \acute{\mathrm{E}}_{\mathrm{pS}}(\mathcal{R})$; introduisant la donnée radicielle simplement connexe $\mathrm{scon}(\mathcal{R})$ (Exp. XXI, 6.5.5), et utilisant le théorème d'existence (Exp. XXV, 1.1), on construit un S-groupe simplement connexe $\overline{G}$ et une isogénie centrale $\overline{G} \rightarrow G$. Le noyau K de cette isogénie est un S-groupe diagonalisable fini (donc un S-groupe constant tordu, S étant de caractéristique 0) et $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}\text{-gr.}}(K, H)$ est (trivialement) représentable par un S-préschéma séparé (si $K \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathrm{S}}$, alors $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}\text{-gr.}}(K, H)$ est isomorphe à $\mathrm{Ker}(H \xrightarrow{n} H)$). On a une suite exacte de « S-préschémas pointés » :

$$1 \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}\text{-gr.}}(G, H) \xrightarrow{u} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}\text{-gr.}}(\overline{G}, H) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}\text{-gr.}}(K, H),$$

donc u est une immersion fermée, donc $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}\text{-gr.}}(G, H)$ est affine sur S.

7.3.5. — Démontrons enfin (iii). Raisonnant comme dans la démonstration de (i) et utilisant 7.3.3, on peut montrer que le S-préschéma $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{\mathrm{S}}\text{-Alg. de Lie}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est lisse sur S. Pour démontrer (iii), on peut donc supposer que $S = \mathrm{Spec}(k)$, où k est un corps algébriquement clos de caractéristique 0; il suffit même de prouver que $\mathcal{L}ie$ est bijectif sur les points à valeurs dans k et qu'il induit une bijection sur les espaces tangents en deux points correspondants. Montrons d'abord que

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-gr.}}(G, H) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg. de Lie}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$$

est bijectif.

Si u est un homomorphisme de G dans H, le graphe de u est un sous-groupe connexe de $G \times_k H$ qui est déterminé par son algèbre de Lie qui est le graphe de $\mathcal{L}ie(u)$; l'application est donc injective. Réciproquement, si $v : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ est un homomorphisme d'Algèbres de Lie, le graphe $\mathfrak{g}$ de v est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$; comme $\mathfrak{g}$ est sa propre algèbre dérivée, $\mathfrak{k}$ est sa propre algèbre dérivée, donc (CHEVALLEY, *Théorie des groupes de Lie*, Tome 2, § 14, Th. 15) est algébrique. Elle est donc l'algèbre de Lie d'un sous-groupe connexe K de $G \times_k H$. Comme

$$\dim(K) = \dim(\mathfrak{k}) = \dim(\mathfrak{g}) = \dim(G)$$

et comme $K \cap H$ est fini (car son algèbre de Lie est nulle), le morphisme canonique $\mathrm{pr}_1 : K \rightarrow G$ est fini et dominant; comme G est connexe, il est surjectif; c'est donc

une isogénie. Comme G est simplement connexe, c'est un isomorphisme (cf. Exp. XXI, 6.2.7) et K est le graphe d'un homomorphisme de k -groupes $u : G \rightarrow H$ tel que $\mathcal{L}ie(u) = v$.

Enfin, soit $u : G \rightarrow H$ un homomorphisme. L'espace tangent à $\underline{\text{Hom}}_{k\text{-gr.}}(G, H)$ en u s'identifie à $Z^1(G, \mathfrak{h})$ (cf. Exp. II, 4.2 ; G opère sur $\mathfrak{h}$ par $\text{Ad}_H \circ u$) ; de la même manière, on peut prouver que l'espace tangent à $\underline{\text{Hom}}_{k\text{-Alg. de Lie}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ en $\mathcal{L}ie(u)$ s'identifie à $Z^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Il nous faut donc prouver que l'application canonique $Z^1(G, \mathfrak{h}) \rightarrow Z^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est bijective. Mais $H^1(G, \mathfrak{h}) = H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = 0$ (7.3.2 et 7.3.3) et cette application s'identifie à l'application évidente

$$\mathfrak{h}/H^0(G, \mathfrak{h}) \longrightarrow \mathfrak{h}/H^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}),$$

et on conclut par 7.3.2.

Remarque 7.3.6. — Il est vraisemblable que si S est un préschéma localement noethérien, G un S -groupe semi-simple simplement connexe, H un S -préschéma en groupes lisse, $\widehat{G}$ et $\widehat{H}$ leurs complétés formels le long de la section unité, tout homomorphisme de $\widehat{G}$ dans $\widehat{H}$ provient d'un unique homomorphisme de G dans H , ce qui généraliserait 7.3.1 (iii). Lorsque S est le spectre d'un corps et H est affine et de type fini, cela résulte d'un théorème de Dieudonné (*Lie groups and Lie hyperalgebras...*, VI, Am. J. of Maths, 1957, p. 369, th. 4). On notera cependant que, si S n'est pas de caractéristique nulle, la conjecture précédente devient fausse si on abandonne l'hypothèse que S est localement noethérien (car autrement on en déduirait que $\underline{\text{Hom}}_{\text{S-gr.}}(G, H)$ serait toujours affine sur S , ce qui n'est pas le cas, comme nous le verrons dans 7.4 ci-dessous). 397

7.4. Un exemple

À titre d'exemple, nous allons déterminer

398

$$\underline{\text{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\text{SL}_{2,S}, \text{SL}_{2,S}).$$

7.4.1. — On rappelle (Exp. XX, n°5), que $\text{SL}_{2,S}$ est le S -schéma en groupes formé des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sur S vérifiant $ad - bc = 1$. Un tore maximal T est défini par le monomorphisme $\alpha^* : \mathbb{G}_{m,S} \rightarrow \text{SL}_{2,S}$

$$\alpha^*(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}.$$

Une racine de G par rapport à T est définie par $\alpha(\alpha^*(z)) = z^2$, un monomorphisme

$$p : \mathbb{G}_{a,S} \longrightarrow \text{SL}_{2,S}$$

correspondant étant défini par

$$p(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, le représentant du groupe de Weyl correspondant à $u = p(1)$ est

$$w = \begin{pmatrix} & 0 & 1 \\ -1 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Rappelons d'autre part (Exp. XX, 6.2) que $\mathrm{SL}_{2,S}$ est engendré par T , $p(\mathbb{G}_{a,S})$ et w ,
 399 soumis aux relations

$$\begin{aligned}\alpha^*(z)p(x)\alpha^*(z^{-1}) &= p(z^2x), \\ w\alpha^*(z)w^{-1} &= \alpha^*(z^{-1}), \\ w^2 &= \alpha^*(-1), \\ (wu)^3 &= 1.\end{aligned}$$

7.4.2. — Soit f un endomorphisme de $\mathrm{SL}_{2,S}$. Il définit d'abord un homomorphisme $f \circ \alpha^* : \mathbb{G}_{m,S} \rightarrow \mathrm{SL}_{2,S}$. Le noyau $\mathrm{Ker}(f \circ \alpha^*)$ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{G}_{m,S}$, donc est localement sur S égal à un $\mu_{n,S}$ ($n \geq 1$) ou à $\mathbb{G}_{m,S}$. Quitte à restreindre S , on peut donc supposer qu'il existe un $n \in \mathbb{N}$ et un monomorphisme

$$f' : \mathbb{G}_{m,S} \longrightarrow \mathrm{SL}_{2,S}$$

tels que $f \circ \alpha^*(z) = f'(z^n)$.

En vertu de la conjugaison des monomorphismes $\mathbb{G}_{m,S} \rightarrow \mathrm{SL}_{2,S}$, on peut, après extension couvrante pour (ét) de la base, trouver une section g de G telle que $f \circ \alpha^*(z) = \mathrm{int}(g) \circ \alpha^*(z^n)$. Transformant f par $\mathrm{int}(g)$, on est donc ramené au cas où il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $f \circ \alpha^*(z) = \alpha^*(z^n)$.

7.4.3. — Considérons maintenant le morphisme

$$f \circ p : \mathbb{G}_{a,S} \longrightarrow \mathrm{SL}_{2,S}.$$

Il vérifie la condition

$$\alpha^*(z^n)(f \circ p)(x)\alpha^*(z^n)^{-1} = (f \circ p)(z^2x).$$

Si $n = 0$, il s'ensuit aussitôt que $f \circ p$ est invariant sous les homothéties de $\mathbb{G}_{a,S}$, donc
 400 constant. Si $n \neq 0$, on peut appliquer Exp. XXII, 4.1.9 ; $x \mapsto x^n$ est un endomorphisme de $\mathbb{G}_{a,S}$, il existe un $\lambda \in \mathbb{G}_{m,S}$ tel que

$$f \circ p(x) = p(\lambda x^n);$$

cette relation est d'ailleurs valable pour $n = 0$, en prenant $\lambda = 1$. Quitte à de nouveau étendre S , on peut trouver un $z \in \mathbb{G}_{m,S}$ avec $z^2 = \lambda$. Remplaçant f par $\mathrm{int}(\alpha^*(z)) \circ f$, on est donc ramené au cas où l'on a

$$f \circ \alpha^*(z) = \alpha^*(z^n), \quad f \circ p(x) = p(x^n).$$

7.4.4. — Enfin, on doit avoir $f(w)\alpha^*(z^n)f(w)^{-1} = \alpha^*(z^n)^{-1}$ et $(f(w)u)^3 = 1$. En vertu de Exp. XX, 3.8, cela entraîne $f(w) = w^n$. Comme G est engendré par T , $p(\mathbb{G}_{a,S})$ et w cela entraîne que pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G(S')$, $S' \rightarrow S$, on a

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & b^n \\ c^n & d^n \end{pmatrix}.$$

7.4.5. — Résumant la discussion précédente, on voit que *localement* sur S pour la topologie étale, on peut trouver pour tout endomorphisme f de $\mathrm{SL}_{2,S}$ un automorphisme (intérieur) ϕ de $\mathrm{SL}_{2,S}$, et un entier $n \geq 0$ tel que $f = \phi \circ F_n$, où

$$F_n \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & b^n \\ c^n & d^n \end{pmatrix}.$$

Remarquons que si $f = \phi \circ F_n$, l'entier n est bien déterminé par une fibre f_s de f , par exemple par $\mathrm{Ker}(f_s)$. Il s'ensuit que n est une fonction localement constante sur S .

7.4.6. — On en déduit aussitôt que si f est un endomorphisme de $\mathrm{SL}_{2,S}$, S se décompose canoniquement en somme de sous-préschémas ouverts et fermés S_0, S_1, S_{p^n} (où p^n décrit l'ensemble des puissances > 0 des nombres premiers) tels que : 401

- (i) f_{S_0} est le morphisme nul,
- (ii) f_{S_1} est un isomorphisme (= un automorphisme intérieur),
- (iii) S_{p^n} est de caractéristique p , $f_{S_{p^n}}$ se décompose de manière unique sous la forme $\phi \circ F_p^n$, où ϕ est un automorphisme intérieur et F_p l'endomorphisme de Frobenius de $\mathrm{SL}_{2, \mathbb{F}_p}$.

7.4.7. — En d'autres termes, $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}\text{-gr.}}(\mathrm{SL}_{2, \mathbb{Z}}, \mathrm{SL}_{2, \mathbb{Z}})$ est le préschéma somme :

- (i) d'un schéma isomorphe à $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$,
- (ii) d'un schéma isomorphe à $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbb{Z}\text{-gr.}}(\mathrm{SL}_{2, \mathbb{Z}}) \simeq \mathrm{ad}(\mathrm{SL}_{2, \mathbb{Z}})$,
- (iii) pour chaque nombre p et chaque entier > 0 d'un schéma isomorphe à $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbb{F}_p\text{-gr.}}(\mathrm{SL}_{2, \mathbb{F}_p}) \simeq \mathrm{ad}(\mathrm{SL}_{2, \mathbb{F}_p})$.

7.4.8. — Il s'ensuit en particulier que

- (i) $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{F}_p\text{-gr.}}(\mathrm{SL}_{2, \mathbb{F}_p}, \mathrm{SL}_{2, \mathbb{F}_p})$ a un nombre infini de composantes connexes, et donc *n'est pas quasi-compact*.
- (ii) Si S est un schéma d'inégales caractéristiques, $\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr.}}(\mathrm{SL}_{2, S}, \mathrm{SL}_{2, S})$ *n'est pas plat* sur S .

8. Appendice : Cohomologie d'un groupe lisse sur un anneau hensélien. Cohomologie et foncteur $\prod$

Proposition 8.1. — Soient S un schéma local hensélien, s son point fermé, G un S -schéma en groupes lisse tel que tout sous-ensemble fini de G soit contenu dans un ouvert affine ^(*). Alors 402

- (i) Si P est un fibré principal homogène sous G , il existe un $S' \rightarrow S$ étale fini et surjectif qui trivialisent P . On a $\mathrm{Fib}(S, H) \simeq H_{\mathrm{\acute{e}t}}^1(S, H)$.

^(*) Cette dernière condition est en fait inutile (cf. Grothendieck, *Groupe de Brauer* III, in *Dix Exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland, 1968, théorème 11.7 et remarques 11.8.3).

(ii) Pour tout morphisme $S' \rightarrow S$ étale fini et surjectif, l'application canonique

$$H^1(S'/S, G) \longrightarrow H^1(S' \otimes_S k(s)/k(s), G_s)$$

est bijective.

(iii) L'application canonique

$$\text{Fib}(S, G) \longrightarrow \text{Fib}(k(s), G_s)$$

est bijective.

8.1.2. — Si K est une extension séparable finie de $k(s)$, il existe un $S' \rightarrow S$ étale fini surjectif tel que $K \simeq S' \otimes_S k(s)$. Si P est un fibré principal homogène sous G , P est lisse sur S , donc P_s lisse sur $k(s)$; il existe donc une extension séparable finie K de $k(s)$ tel que P_K possède une section. Représentant K comme il a été dit ci-dessus, on voit que $P_{S'}$ possède une section par le « lemme de Hensel », ce qui prouve la première partie de (i).

403

Réciproquement, si P est un *faisceau* principal homogène sous G pour la topologie étale, il existe un $S' \rightarrow S$ étale fini surjectif qui trivialisent P (en effet toute famille couvrante d'un schéma local hensélien pour la topologie étale est majorée par une famille réduite à un morphisme $S' \rightarrow S$ de la forme voulue).

En vertu de l'hypothèse de descente faite sur G , P est représentable (SGA 1, VIII, 7.6), ce qui achève de prouver (i), et montre que (ii) entraîne (iii). Il ne nous reste donc qu'à prouver (ii).

8.1.3. — L'application de (ii) est injective : soient P et Q deux fibrés principaux homogènes sous G trivialisés par S' . Considérons le S -faisceau en groupes $H = \underline{\text{Isom}}_{G\text{-fibrés}}(P, Q)$; comme $H_{S'}$ est isomorphe à $G_{S'}$, H est représentable, en vertu de la deuxième hypothèse sur G , cf. ci-dessus. Si $H(k(s)) \neq \emptyset$, $H(S) \neq \emptyset$ par le lemme de Hensel, donc P et Q sont isomorphes.

8.1.4. — Prouvons enfin que l'application de (ii) est surjective, ou encore que l'application canonique

$$Z^1(S'/S, G) \longrightarrow Z^1(S' \otimes_S k(s)/k(s), G_s)$$

est surjective. Soit $\mathbf{Z}^1$ le S -foncteur défini par

$$\mathbf{Z}^1(T) = Z^1(S' \times_S T/T, G_T);$$

l'application précédente s'identifie à l'application

$$\mathbf{Z}^1(S') \longrightarrow \mathbf{Z}^1(S' \otimes_S k(s));$$

par une nouvelle application du lemme de Hensel, il suffit de prouver que $\mathbf{Z}^1$ est représentable par un S -préschéma lisse.

404 **8.1.5.** — Prouvons que $\mathbf{Z}^1$ est représentable par un S-préschéma localement de présentation finie. Soit $\mathbf{C}^i$, $i = 0, 1, \dots$, le S-foncteur défini par

$$\mathbf{C}^i(\mathbf{T}) = \mathbf{C}^i(S' \times_{\mathbf{S}} \mathbf{T}/\mathbf{T}, \mathbf{G}_{\mathbf{T}}),$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{C}^i(\mathbf{T}) = \mathbf{G}((S' \times_{\mathbf{S}} \mathbf{T}/\mathbf{T})^{i+1}) = \mathbf{G}((S'/S)^{i+1} \times_{\mathbf{S}} \mathbf{T}),$$

ou encore

$$\mathbf{C}^i = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{S}}((S'/S)^{i+1}, \mathbf{G}).$$

Comme $\mathbf{Z}^1$ est obtenu à partir de $\mathbf{C}^1$ et $\mathbf{C}^2$ par produits fibrés, il suffit de prouver que $\mathbf{C}^i$, $i = 1, 2$, est représentable par un S-préschéma localement de présentation finie.

8.1.6. — Si $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{S}$ est un morphisme étale fini surjectif qui décompose S' , alors

$$\mathbf{C}^i \times_{\mathbf{S}} \mathbf{T} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{T}}((S' \times_{\mathbf{S}} \mathbf{T}/\mathbf{T})^{i+1}, \mathbf{G}_{\mathbf{T}})$$

est représentable par un produit de n copies de $\mathbf{G}_{\mathbf{T}}$, où n est le degré de $(S'/S)^{i+1}$. Appliquant une nouvelle fois l'hypothèse sur $\mathbf{G}$, on en déduit que $\mathbf{C}^i$ est bien représentable par un S-préschéma localement de présentation finie (SGA 1, VIII, *loc. cit.*).

8.1.7. — Pour prouver que $\mathbf{Z}^1$ est lisse, il nous faut maintenant, par définition, prouver que si $\mathbf{T}$ est un S-schéma *affine*, $\mathbf{T}_0$ le sous-préschéma fermé défini par l'Idéal $\mathcal{J}$ de carré nul, l'application canonique

$$\mathbf{Z}^1(\mathbf{T}) \longrightarrow \mathbf{Z}^1(\mathbf{T}_0)$$

est surjective. Comme $\mathbf{G}$ est lisse, l'application canonique $\mathbf{G}(\mathbf{T}) \rightarrow \mathbf{G}(\mathbf{T}_0)$ est surjective, et il suffit de prouver que l'application canonique 405

$$\mathbf{H}^1(S' \times_{\mathbf{S}} \mathbf{T}/\mathbf{T}, \mathbf{G}_{\mathbf{T}}) \longrightarrow \mathbf{H}^1(S' \times_{\mathbf{S}} \mathbf{T}_0/\mathbf{T}_0, \mathbf{G}_{\mathbf{T}_0})$$

est bijective.

Changeant légèrement de notations et généralisant les hypothèses, il nous suffit maintenant de prouver :

Lemme 8.1.8. — Soient S et S' deux schémas affines, $S' \rightarrow S$ un morphisme fidèlement plat, $\mathcal{J}$ un Idéal de carré nul sur S , S_0 le sous-préschéma fermé qu'il définit, $\mathbf{G}$ un S-groupe lisse. Posons $S'_0 = S' \times_S S_0$, $\mathbf{G}_0 = \mathbf{G} \times_S S_0$. L'application canonique

$$\mathbf{H}^1(S'/S, \mathbf{G}) \longrightarrow \mathbf{H}^1(S'_0/S_0, \mathbf{G}_0)$$

est bijective.

Remarque 8.1.9. — Si on suppose $\mathbf{G}$ commutatif, la même assertion est valable pour tous les $\mathbf{H}^i$, $i > 0$, avec une démonstration analogue.

Soit $\mathcal{M}_0$ le $\mathcal{O}_{S_0}$ -Module quasi-cohérent

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{L}ie(G_0/S_0) \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{I}.$$

Pour chaque S_0 -préschéma T_0 (resp. chaque S -préschéma T), posons

$$M_0(T_0) = H^0(T_0, \mathcal{M}_0 \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{T_0}),$$

(resp. $M(T) = M_0(T_0)$). Soit d'autre part $\overline{G} = \prod_{S/S_0} G_0$ le S -foncteur en groupes défini par $\overline{G}(T) = G_0(T_0)$. On sait (Exp. III, n°0), qu'il existe pour tout S -schéma affine T une suite exacte, fonctorielle en T :

406

$$1 \longrightarrow M(T) \longrightarrow G(T) \longrightarrow \overline{G}(T) \longrightarrow 1$$

Nous avons à étudier l'application

$$H^1(S'/S, G) \longrightarrow H^1(S'_0/S_0, G_0) = H^1(S'/S, \overline{G}).$$

Supposons d'abord G commutatif. On a alors une suite exacte de cohomologie

$$H^1(S'/S, M) \longrightarrow H^1(S'/S, G) \longrightarrow H^1(S'/S, \overline{G}) \longrightarrow H^2(S'/S, M);$$

mais

$$H^i(S'/S, M) = H^i(S'_0/S_0, M_0) = H^i(S'_0/S_0, \mathcal{M}_0),$$

et on sait (TDTE II, B, Lemme 1.1), que $H^i(S'_0/S_0, \mathcal{M}_0) = 0$ pour $i \neq 0$.

Si maintenant G n'est pas commutatif, il nous faut utiliser la suite exacte de cohomologie non abélienne. Si $u \in Z^1(S'/S, G)$, on sait que les éléments de $H^1(S'/S, G)$ qui ont même image dans $H^1(S'/S, \overline{G})$ que la classe de u sont dans l'image de l'application cobord correspondante :

$$H^1(S'/S, M_u) \longrightarrow H^1(S'/S, G),$$

où M_u est le S -foncteur M « tordu par u ». De même, si v est un élément de $Z^1(S'/S, \overline{G})$, il existe un « cobord »

$$\Delta(v) \in H^2(S'/S, M_v),$$

où M_v est le S -foncteur M « tordu par v », tel que $\Delta(v) = 0$ si et seulement si la classe de v est dans l'image de $H^1(S'/S, G)$. Il nous suffit de prouver que l'on a $H^1(S'/S, M_u) = H^2(S'/S, M_v) = 0$.

407

Or rappelons (Exp III, n°0) que l'opération de $\overline{G}$ sur M définie par la suite exacte n'est autre que celle qui se déduit fonctoriellement de la représentation adjointe de G_0 :

$$\text{ad} : G_0 \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{\mathcal{O}_{S_0}}(\mathcal{L}ie(G_0/S_0)).$$

L'élément u (resp. v) opère donc dans $M_{S' \times_S S'}$ par l'intermédiaire d'un $S'_0 \times_{S_0} S'_0$ -automorphisme de $\mathcal{L}ie(G_0/S_0)$. Comme u (resp. v) est un cocycle, cet automorphisme est une donnée de descente; notons $\mathcal{L}_u$ (resp. $\mathcal{L}_v$) le $\mathcal{O}_{S_0}$ -Module quasi-cohérent obtenu. On vérifie aussitôt que pour $T \rightarrow S$, on a

$$M_u(T) = H^0(T_0, \mathcal{L}_u \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{T_0})$$

et la même relation en remplaçant u par v . On a donc

$$\begin{aligned} H^1(S'/S, M_u) &= H^1(S'_0/S_0, \mathcal{L}_u \otimes \mathcal{I}) \\ H^2(S'/S, M_v) &= H^2(S'_0/S_0, \mathcal{L}_v \otimes \mathcal{I}), \end{aligned}$$

et les deux sont bien nuls en vertu du résultat déjà utilisé.

Proposition 8.2. — Soient $\mathcal{C}$ une catégorie possédant des produits fibrés, munie d'une topologie moins fine que la topologie canonique, $S' \rightarrow S$ un morphisme de $\mathcal{C}$, G' un S' -faisceau en groupes, G le S -faisceau en groupes $\prod_{S'/S} G'$. Soit $H_S^1(S', G') \subset H^1(S', G')$ l'ensemble des classes de faisceaux principaux homogènes sous G' qui sont trivialisés par un crible de S' obtenu par changement de base à partir d'un crible couvrant convenable de S . L'application canonique $H^1(S, G) \rightarrow H^1(S', G')$ définie par le foncteur

$$P \longmapsto P \times_S S'$$

induit une bijection

$$H^1(S, G) \xrightarrow{\sim} H_S^1(S', G');$$

la bijection réciproque est définie par le foncteur $P' \mapsto \prod_{S'/S} P'$.

Pour tout objet X de $\mathcal{C}_S$, on a par définition un isomorphisme fonctoriel en X

$$\mathrm{Hom}_S(X, G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{S'}(X \times_S S', G').$$

On a donc pour chaque S -objet T une bijection fonctorielle en T

$$H^1(T/S, G) \xrightarrow{\sim} H^1(T'/S', G').$$

Remplaçant maintenant l'unique morphisme $T \rightarrow S$ par une famille couvrante quelconque de S et passant à la limite inductive, on en déduit la première partie de l'énoncé. La seconde partie s'en déduit sans difficultés.

Lemme 8.3. — Sous les conditions de 8.2, l'assertion $H_S^1(S', G') = H^1(S', G')$ est locale sur S : supposons qu'il existe une famille couvrante $\{S_i \rightarrow S\}$ telle que pour tout i , on ait $H_{S_i}^1(S' \times_S S_i, G') = H^1(S' \times_S S_i, G')$. Alors $H_S^1(S', G') = H^1(S', G')$.

En effet, soit P' un faisceau principal homogène sous G' . Pour tout i , posons $P'_i = P' \times_{S'} (S' \times_S S_i)$; en vertu de l'hypothèse, il existe une famille couvrante $\{S_{ij} \rightarrow S_i\}$ telle que pour chaque j , $P' \times_{S'} (S' \times_S S_{ij})$ possède une section. Mais $\{S_{ij} \rightarrow S\}$ est une famille couvrante de S , et P' est bien trivialisé par la famille couvrante de S' obtenue à partir de celle-là par changement de base.

Proposition 8.4. — Soit $S' \rightarrow S$ un morphisme étale fini de préschémas. Soient G' un S' -faisceau en groupes, G le S -faisceau en groupes $\prod_{S'/S} G'$. Pour la topologie étale (resp. étale finie locale, resp. (fpqc)), les foncteurs

$$\begin{aligned} P &\longmapsto P \times_S S' \\ \prod_{S'/S} P' &\longleftarrow P' \end{aligned}$$

induisent des bijections réciproques l'une de l'autre :

$$H^1(S, G) \simeq H^1(S', G').$$

Par 8.2, il suffit de montrer que $H_S^1(S', G') = H^1(S', G')$. Par 8.3, il suffit de le faire localement pour la topologie étale finie locale ; on peut donc supposer que S' est une somme directe finie de copies de S , soit I_S , où I est un ensemble fini convenable. Alors G' est donné par une famille $(G_i)_{i \in I}$ de faisceaux sur S et

$$H^1(S', G') \simeq \prod_{i \in I} H^1(S, G_i).$$

D'autre part

$$H^1(S, G) \simeq \prod_{i \in I} H^1(S, G_i),$$

d'où, en vertu de 8.2, $H_S^1(S', G') = H^1(S', G')$.

C.Q.F.D.

Remarques 8.5. — On peut interpréter 8.2 et 8.3 par la suite exacte suivante (f est le morphisme $S' \rightarrow S$ donné)

$$1 \longrightarrow H^1(S, f_*(G')) \longrightarrow H^1(S', G') \longrightarrow H^0(S, R^1 f_*(G')).$$

410 Dans le cas commutatif, cette suite exacte résulte de la suite spectrale de Leray ; elle est encore valable dans le cas non commutatif (cf. Thèse de Giraud).

Sous cette forme, on voit que le résultat est encore valable si f est seulement supposé *fini*, ou simplement *entier*, la topologie étant la topologie *étale*, car pour tout G' , on a

$$R^1 f_*(G') = \text{faisceau final},$$

en vertu de SGA 4, VIII, 5.3.

D'autre part, ce résultat devient faux si on prend une topologie telle que (fpqc) ou (fppf), même si $S = \text{Spec}(k)$, k corps algébriquement clos de caractéristique $p \neq 0$, $S' = \text{Spec}(k[t]/t^2)$, $G' = \mu_p$ ou α_p .

De même, 8.2 devient faux, même pour la topologie étale, si on y supprime l'hypothèse que f est fini, comme on le voit en prenant pour f une immersion ouverte ; par exemple si $S = \text{Spec}(V)$, V anneau de valuation discrète complet à corps résiduel algébriquement clos, S' étant l'ouvert induit au point générique, et G' le groupe constant $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{S'}$, avec n premier à la caractéristique résiduelle de V , on a $H^1(S, G) = 0$, $H^1(S', G') \neq 0$. Remplaçant d'ailleurs S' par $S \amalg S'$, on en déduit un exemple analogue, avec $S' \rightarrow S$ étale surjectif, donc couvrant pour la topologie envisagée.