

UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT

UFR DE MATHÉMATIQUES

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2013-2014

LE PROBLÈME DE STEINER

Mémoire de licence Mathématiques-Informatique

Sous la direction de M. LAURAIN

Nom des étudiants : Elisabeth **ABBAS**
Hassia **TAMIMOU**

Mai 2014

Résumé

Appartenant à la classe des problèmes d'optimisation dans les réseaux, le problème de Steiner est au cœur de la recherche scientifique. Il consiste à construire un arbre respectant des critères géométriques particuliers. C'est l'arbre ou le réseau de Steiner. Le problème de Steiner a de nombreuses applications dans la vie réelle : la construction d'un réseau de télécommunications, l'élaboration d'un réseau routier minimal ou la détermination des arbres phylogénétiques en biologie. Il est difficile de donner une solution exacte du problème de Steiner car il est NP-complet. Toutefois, il existe des algorithmes approximatifs très performants.

Dans un premier temps, nous avons étudié le problème de Steiner classique et ses variantes d'un point de vue théorique. L'objectif était de cerner la difficulté du problème et de comprendre les algorithmes élaborés pour sa résolution. Ensuite nous nous sommes intéressées à la structure de l'arbre de Steiner. Après avoir étudié les différentes étapes de sa construction, nous avons identifié des propriétés mathématiques spécifiques au réseau de Steiner. Aussi nous avons implémenté deux algorithmes calculant l'arbre de Steiner. Cette étape nous a permis de mieux comprendre les raisons de la NP-complétude du problème.

Mots-clés : problème de Steiner ; arbre de Steiner ; réseau ; optimisation ; minimal ; algorithmes ; NP-complet

Sommaire

Introduction	4
1 La théorie du réseau de Steiner	5
1.1 La terminologie essentielle	5
1.1.1 L'arbre couvrant minimal	6
1.1.2 L'arbre de Steiner	9
1.2 La construction d'un réseau minimal	9
1.2.1 Le point de Steiner pour un triangle quelconque	10
1.2.2 Le rapport de Steiner	12
1.2.3 Les caractérisations d'un point de Steiner	13
1.2.4 Les points de Steiner pour un ensemble quelconque de points	17
1.3 Un problème NP-complet	19
2 Les résolutions algorithmiques	22
2.1 L'algorithme de Melzak	22
2.2 L'algorithme de Dreyfus-Wagner	25
2.2.1 Explication de l'algorithme	25
2.2.2 Pseudo-code de l'algorithme de Dreyfus-Wagner	26
2.2.3 Preuve de l'algorithme	28
2.3 La solution du problème des bulles de savon	28
2.3.1 Le problème des bulles de savon	28
2.3.2 L'algorithme de relaxation	29
Conclusion	34
Bibliographie	38
Annexes	39

Introduction

Les origines du problème de Steiner remontent au XVII^{ème} siècle. Le mathématicien français Pierre de Fermat se demanda comment trouver un point P dans un triangle de manière à ce que la longueur totale des arêtes concourantes au point P soit la plus petite possible. Le problème de Steiner, nommé en référence à Jakob Steiner, est la généralisation de cette question. Étant donné un ensemble S de points, il s'agit de trouver l'arbre reliant tous les sommets de S tel que sa longueur soit minimale.

La problématique est la suivante : **comment résoudre le problème de Steiner ? Quelles sont les méthodes pour calculer le réseau de Steiner ? Sont-elles efficaces ?** Dans une première partie, l'aspect théorique du problème de Steiner est présenté. La seconde partie met en parallèle les différentes résolutions algorithmiques pour le calcul du réseau de Steiner.

1

La théorie du réseau de Steiner

1.1 La terminologie essentielle

Problème de Steiner : Quel est le réseau minimal de segments connectant un ensemble arbitraire de n points ?

Définition d'un graphe

Soit S un ensemble de points dans le plan. La donnée d'un graphe est notée $G=(S,A)$. A est une relation d'adjacence qui vérifie $A \subseteq S \times S$. On dit que $(u,v) \in A$ si les deux sommets u et v sont connectés par une même arête.

Un graphe peut être :

- orienté : l'ordre est important dans la relation d'adjacence A . On peut avoir $(u,v) \in A$ sans avoir $(v,u) \in A$.
- non-orienté : Cela signifie que $(u,v) \in A \Leftrightarrow (v,u) \in A$.

Soit $\omega : S \times S \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$u,v \mapsto \|u - v\|$$

ω est une fonction de coût associée au graphe G .

Définition d'un graphe connexe

Un graphe $G=(S,A)$ est dit connexe s'il existe une suite d'arêtes permettant d'atteindre u à partir de v , pour tous $u,v \in S$.

Définition d'un graphe complet

Pour n points donnés, on appelle graphe complet l'unique graphe possédant n sommets tous reliés deux à deux par une arête.

Propriété 1. *Le graphe complet d'un ensemble de n points possède*

$$\sum_{i=1}^n (n - i) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ arêtes.}$$

Définition d'un arbre

Un arbre est un graphe non-orienté, acyclique et connexe tel que le nombre de sommets excède le nombre d'arêtes d'une unité.

Propriété 2. Soit S l'ensemble des sommets d'un arbre et A l'ensemble de ses arêtes alors $|S| = |A| + 1$.

1.1.1 L'arbre couvrant minimal

Le calcul de l'arbre couvrant minimal (ACM) d'un graphe G revient à chercher un graphe connexe G' composé uniquement d'arêtes de G et couvrant tous les sommets de G à un coût minimal. On dit que $G'=(S,A')$ couvre $G=(S,A)$ non-orienté, connexe, si :

- $A' \subseteq A$
- $\forall u,v \in S$ il existe un chemin entre u et v dans G' .

L'algorithme de Kruskal

L'algorithme de Kruskal permet de calculer un ACM. Sa complexité est $\mathcal{O}(m \log m)$, m étant le nombre d'arêtes du graphe G .

Algorithm 1 Algorithme de Kruskal

Data: G : graphe; w : fonction de poids des arêtes; UF : structure Union-Find

Result: T : ACM

Initialisation :

$n = G.taille()$, nombre de sommets du graphe G

$T = []$, arbre vide

coût $\leftarrow 0$

$A = G.ares()$, triées par ordre de poids croissant

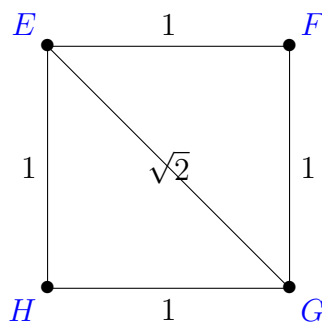
$UF = \text{UnionFind}()$, initialisée avec les sommets isolés du graphe G

```
for  $(i,j)$  dans  $A$  do
  if not  $UF.find(i,j)$  then
     $T.ajouter((i,j),w[i][j])$ 
    coût+ =  $w[i][j]$ 
     $UF.union(i,j)$ 
  end
end
return  $T$ 
```

Explication : L'algorithme de Kruskal construit itérativement un ACM du graphe G . Les arêtes sont rangées par ordre croissant de poids. A chaque itération, lorsque les deux extrémités de l'arête sélectionnée ne sont pas dans la même composante connexe, on l'ajoute à l'ACM. La structure de Union-Find permet de s'assurer que l'arête ajoutée ne forme pas de cycle.

Exemple d'application :

On veut calculer un ACM du graphe G suivant :



Initialisation

T = [], arbre vide

coût = 0

A =

EF	FG	GH	HE	EG
----	----	----	----	----

UF =

E	F	G	H
---	---	---	---

Étape 1

arête sélectionnée :EF

E et F ne sont pas dans la même composante connexe dans UF.

T =

EF

UF =

E,F	G	H
-----	---	---

 coût=1

Étape 2

arête sélectionnée :FG

F et G ne sont pas dans la même composante connexe dans UF.

T =

EF	FG
----	----

UF =

E,F,G	H
-------	---

 coût=2

Étape 3

arête sélectionnée :GH

G et H ne sont pas dans la même composante connexe dans UF.

T =

EF	FG	GH
----	----	----

UF =

E,F,G,H

 coût=3

Étape 4

arête sélectionnée :HE

H et E sont dans la même composante connexe dans UF.

L'arête HE n'est pas ajoutée.

Étape 5

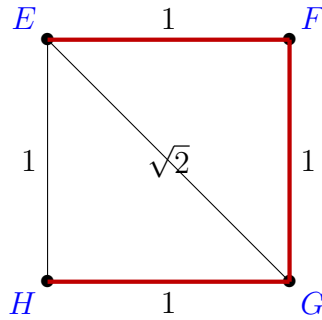
arête sélectionnée :EG

E et G sont dans la même composante connexe dans UF.

L'arête EG n'est pas ajoutée.

Fin :

L'ACM trouvé est constitué des arêtes en rouge.



L'ACM renvoyé par l'algorithme de Kruskal n'est pas unique. Pour un ensemble de points donnés, il existe plusieurs ACM. Ils ont tous la même longueur.

Remarque 1. *Lorsqu'on part d'un ensemble quelconque de n points, on construit le graphe complet de ces points. Pour trouver l'ACM, la complexité est alors de $\mathcal{O}(n^2 \log n)$. Il existe des méthodes permettant de réduire la complexité à $\mathcal{O}(n \log n)$, notamment en partant de la triangulation de Delaunay.*

Le problème de Steiner est proche du problème de l'ACM. En effet, leur point commun est de trouver un réseau minimal connectant un ensemble de points. Toutefois, il existe une différence majeure.

1.1.2 L'arbre de Steiner

Points de base ou terminaux/ Points de Steiner.

Étant donné un ensemble arbitraire de n points dans le plan, appelés points de base ou terminaux, calculer un réseau minimal de Steiner revient à trouver un ensemble de points additionnels. Ce sont les points de Steiner. L'ajout des points de Steiner permet de minimiser la longueur du réseau. Ainsi le problème de l'ACM diffère du problème de Steiner car on ajoute des points intermédiaires.

1.2 La construction d'un réseau minimal

Dans cette partie, sont développées les différentes étapes de la construction d'un réseau de Steiner. Étant donné un unique point terminal dans le plan, la longueur de l'ACM est nulle. En conséquence, le réseau de Steiner est réduit à cet unique point. Lorsqu'on considère un ensemble de deux points terminaux, l'ACM et le réseau de Steiner coïncident. En effet le chemin le

plus court entre deux points dans le plan est le segment entre ces deux points. Rajouter des points intermédiaires augmente nécessairement la longueur du réseau en construction.

1.2.1 Le point de Steiner pour un triangle quelconque

Considérons un ensemble de trois points non alignés $\{A, B, C\}$. Dans ce cas, calculer l'arbre de Steiner revient à localiser le point P à l'intérieur du triangle $\triangle ABC$ tel que la longueur totale des arêtes concourantes au point P soit la plus petite possible. Donc le point de Steiner pour un ensemble quelconque de trois points non alignés est le point de Fermat-Torricelli. L'existence et l'unicité du point de Steiner sont assurées par le théorème suivant.

Théorème 1. *Soit ABC un triangle dont les angles sont inférieurs à 120° : il existe un unique point P tel que la somme des distances PA, PB et PC est minimale. Ce point est appelé le point de Fermat-Torricelli.*

Remarque 2. *Si un des angles de $\triangle ABC$ est supérieur ou égal à 120° , le point P minimisant la somme des distances PA, PB et PC est le sommet de l'angle supérieur ou égal à 120° .*

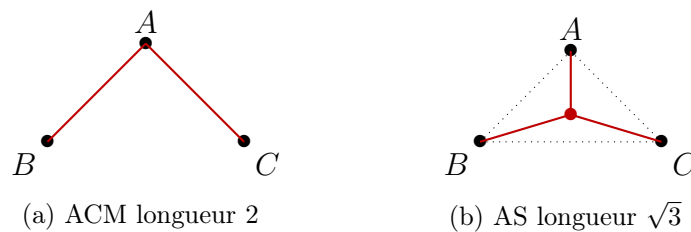


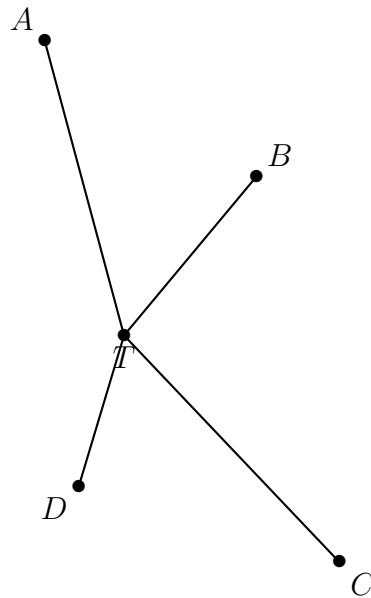
FIGURE 1.1 – Le triangle équilatéral de côté 1

Théorème 2. *S'il existe un arbre de plus petite longueur parmi tous ceux qui connectent n points donnés alors il vérifie les deux propriétés suivantes :*

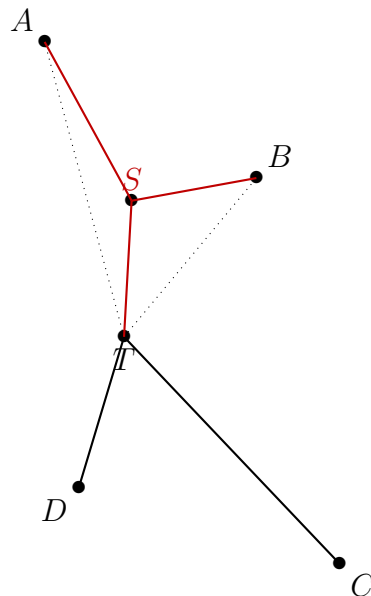
- (1) la valence de chaque point est au plus 3.
- (2) les sommets ne faisant pas partie des n sommets de base ont leurs arêtes qui forment des angles de 120° .

Démonstration. (1) Supposons qu'un tel arbre existe. Supposons qu'un point est de degré 0 dans cet arbre. Alors il n'est pas connexe, ce qui contredit la définition d'un arbre. Donc tout point est de degré au moins 1. Soit T un point de degré supérieur à 3 alors T n'est pas un point de

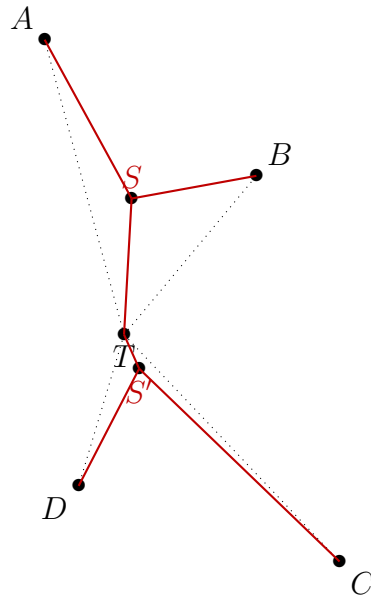
Steiner. En effet, s'il s'agissait d'un point de Steiner, toutes les arêtes concourantes en ce point formeraient des angles de 120° , ce qui est impossible. Donc il s'agit d'un point terminal.



Pour construire un arbre de Steiner, on commence par construire le point de Steiner des trois points A , B et T . Les arêtes en pointillé ne sont pas incluses dans l'arbre de Steiner. Elles sont remplacées par les arêtes rouges.



Ensuite on construit le point de Steiner des trois points T , D et C .



Au cours de la construction de l'arbre de Steiner, tous les points dont le degré initial est supérieur à 3 perdent au moins un voisin. Donc tout point d'un arbre de Steiner a une valence d'au plus 3.

(2) Pour $n = 3$, n étant le nombre de points terminaux, l'arbre de Steiner contient un unique point de Steiner. C'est le point de Fermat-Torricelli. Lorsque les trois points terminaux forment un triangle dont tous les angles sont inférieurs à 120° , les arêtes concourantes en le point de Steiner forment des angles de 120° . Par récurrence, la propriété est donc vraie pour tout n .

□

Arbre de Steiner

Définition 1. On appelle arbre de Steiner pour n points donnés ($n \geq 3$) un arbre qui contient des points supplémentaires (points de Steiner) tel que les arêtes concourantes en chaque point de Steiner forment des angles de 120° .

1.2.2 Le rapport de Steiner

Le rapport de Steiner, noté ρ , permet de savoir si un ACM est une bonne approximation de l'arbre de Steiner optimal. Moins il est élevé, plus l'ACM est proche de la solution exacte au problème de Steiner. Le rapport de Steiner est la borne supérieure de l'ensemble

$$S = \left\{ \frac{\text{longueur ACM}(G)}{\text{longueur AS}(G)} \mid G \subseteq \mathbb{R}^2 \right\}$$

Définition 2. $\varrho = \sup_{G \subseteq \mathbb{R}^2} \frac{L_{ACM}(G)}{L_{AS}(G)}$

Propriété 3. *Le rapport de Steiner vaut au moins $\sqrt{3}/2$. Il vaut exactement $\sqrt{3}/2$ lorsque les trois points terminaux forment un triangle équilatéral de côté 1.*

Pour un triangle équilatéral de côté 1, l'arbre de Steiner optimal est de longueur $\sqrt{3}$. La longueur d'un arbre de Steiner de trois points formant un triangle équilatéral est au plus 13.4% plus petite que la longueur de l'ACM.

1.2.3 Les caractérisations d'un point de Steiner

Les propriétés du point de Fermat-Torricelli

Le point de Fermat-Torricelli P de trois points non alignés A , B et C minimise la somme des distances PA , PB et PC . Soit l'ensemble $K = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid PA + PB + PC \leq AB + BC + AC\}$. On définit une fonction f à deux variables. $f : K \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) \mapsto \|\vec{PA}\| + \|\vec{PB}\| + \|\vec{PC}\|$$

Le but est de minimiser la fonction f sur K . K est fermé et borné dans \mathbb{R}^2 donc il est compact. La fonction f étant continue sur K , par compacité, elle admet (au moins) un minimum.

Lemme 1. *Soit A un point fixé du plan et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$,*

$g(x, y) \mapsto \|\vec{AP}\|$ Alors g est différentiable en tout point du plan différent de A et son gradient en P vaut $\frac{\vec{PA}}{\|\vec{PA}\|}$.

Grâce au lemme précédent, on déduit deux résultats :

- $\vec{\text{grad}}f(P) = \frac{\vec{PA}}{\|\vec{PA}\|} + \frac{\vec{PB}}{\|\vec{PB}\|} + \frac{\vec{PC}}{\|\vec{PC}\|}$
- La fonction f admet un minimum soit en l'un des points A , B , C soit en un point où son gradient s'annule, c'est-à-dire en un point où la somme des trois vecteurs $\vec{u} = \vec{PA}$, $\vec{v} = \vec{PB}$, $\vec{w} = \vec{PC}$ est nulle.

Autrement dit $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \vec{u} + \vec{v} = -\vec{w}$$

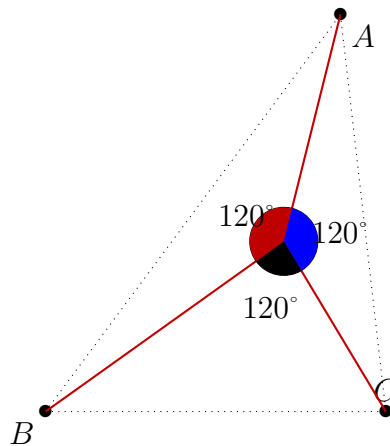
$$\Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{w}\|^2$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos(\vec{u}, \vec{v}) = -1$$

$$\Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$$

Le résultat ne dépend pas de la paire de vecteurs choisie. Ainsi $\vec{\text{grad}}f$ s'annule pour $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$. Or un tel point P ne peut exister que si tous les angles du triangle sont inférieurs à 120° . En effet, d'après la remarque 2, le minimum de la fonction f est atteint en l'un des

points A, B ou C si le triangle possède un angle supérieur ou égal à 120° .
 En conclusion, le point de Steiner P de trois points non alignés A, B et C vérifie la propriété suivante : les droites (PA) , (PB) et (PC) forment entre elles des angles de 120° . Les trois points A, B et C forment un triangle tel que les trois angles sont inférieurs à 120° .

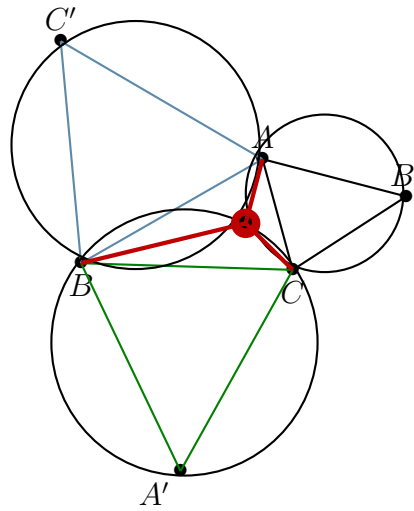


La caractérisation du point de Steiner par les cercles circonscrits.

Le point de Steiner des points A, B et C est aussi caractérisé par les propriétés suivantes.

Propriété des cercles circonscrits :

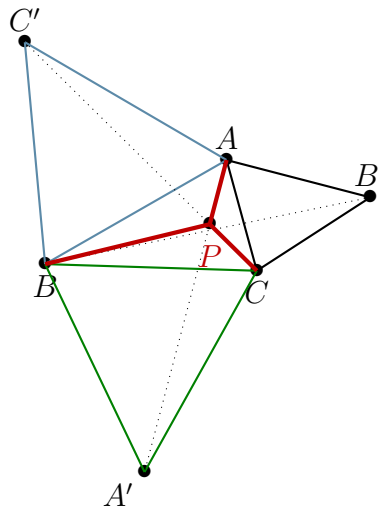
Propriété 4. *Soit P un point du triangle ABC tel que la somme des distances PA, PB et PC est minimale. Alors P est le point d'intersection des trois cercles circonscrits aux triangles équilatéraux construits à l'extérieur du triangle ABC.*



L'arbre de Steiner des trois points A, B et C est en rouge.
 Le point de Steiner est aussi caractérisé par la propriété des droites.

Propriété des droites :

Propriété 5. Soit P un point du triangle ABC tel que la somme des distances PA , PB et PC est minimale. Alors P est le point de concours des droites (AA') , (BB') et (CC') .

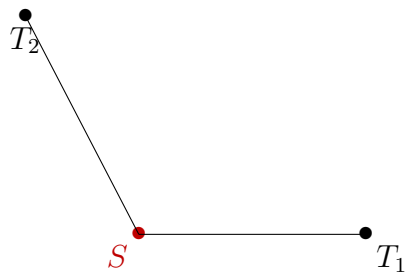


Théorème 3. Un arbre de Steiner pour un ensemble arbitraire de n points contient au plus $n - 2$ points de Steiner.

Démonstration. Supposons qu'un arbre de Steiner contient k points de Steiner. Par définition d'un arbre, il possède exactement $(n + k - 1)$ arêtes. Puisque chaque point de Steiner est de degré 3 et chaque point terminal a un degré entre 1 et 3, le nombre d'arêtes est au moins $(3k + n) / 2$. On divise par 2 car chaque arête est comptée deux fois (deux extrémités). En conséquence on a $n + k - 1 \geq (3k + n) / 2 \Rightarrow n - 2 \geq k$.

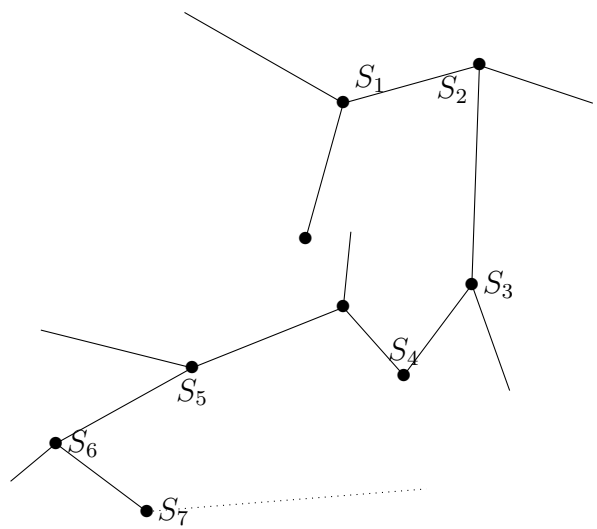
□

Lemme 2. Dans un arbre de Steiner, il y a au moins deux points terminaux reliés à un même point de Steiner.



Démonstration

Raisonnons par l'absurde. On suppose qu'aucun point de Steiner n'est relié à deux points terminaux. Alors chaque point de Steiner est relié à au moins deux autres points de Steiner. Puisque l'arbre de Steiner est acyclique, il y a une infinité de points de Steiner.

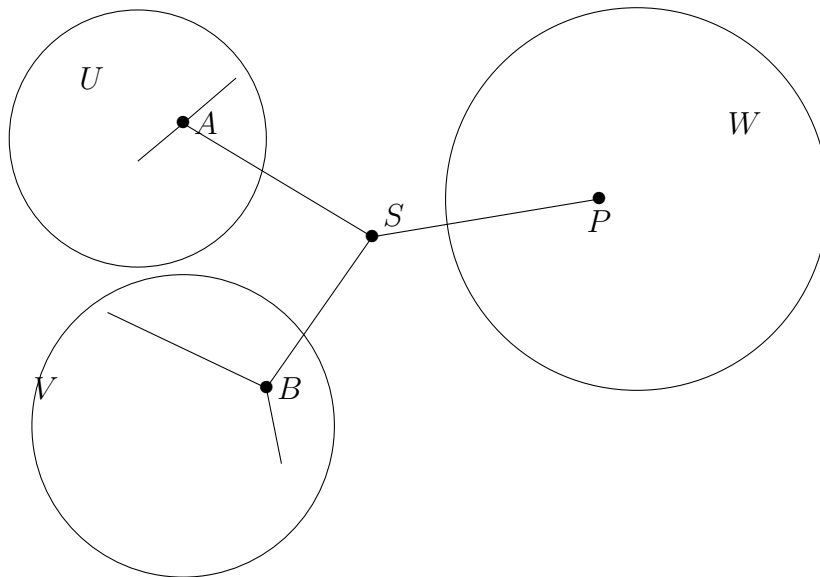


En effet chaque point de Steiner est relié à un autre point de Steiner qui est lui-même relié à un autre point de Steiner. Vu qu'on ne forme pas de cycle, on rencontre un nouveau point à chaque fois. Donc par récurrence, il y a un nombre infini de points de Steiner. Contradiction.

Théorème 4. *Pour n points fixés il existe un nombre fini d'arbres de Steiner*

Démonstration

Pour $n = 3$ il y a au plus un point de Steiner. Donc il existe un arbre de Steiner pour trois points. Pour $n \geq 4$ d'après le lemme 2 il y a au moins deux points terminaux qui sont reliés à un même point de Steiner.



De plus les composantes connexes U , V et W sont disjointes. Sinon on aurait un cycle dans l'arbre. Chaque composante U , V et W est un arbre de Steiner contenant au plus $n - 2$ points terminaux. Donc par récurrence, il y a un nombre fini d'arbres de Steiner. Le nombre total d'arbres de Steiner d'un ensemble L de points noté $N(L)$ vérifie l'inégalité suivante :

$$N(L) \leq \sum_{(A,B)} \sum_{\substack{\text{Tripartition } L \setminus \{A,B\} \\ \{U,V,W\}}} (N(U) + N(V) + N(W)).$$

$N(U)$, $N(V)$ et $N(W)$ étant finis, par récurrence $N(L)$ est fini.

1.2.4 Les points de Steiner pour un ensemble quelconque de points

Il existe différents arbres qui relient les points terminaux mais ils ne sont pas tous minimaux. De même, un ensemble de points terminaux peut

admettre plusieurs arbres de Steiner.

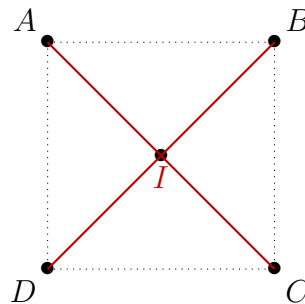
CAS PARTICULIERS

- Le carré

Soient quatre points terminaux A, B, C et D qui forment un carré de côté unitaire. On veut calculer un arbre de Steiner optimal de cet ensemble de points.

Une première tentative de minimisation.

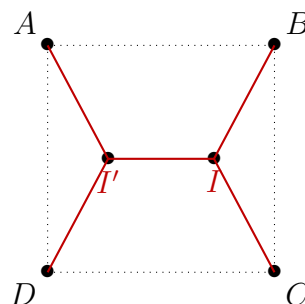
On connecte les quatre points terminaux au centre du carré.



On obtient bien un arbre : le graphe est connexe et acyclique. Il possède 5 sommets et 4 arêtes. En appliquant le théorème de Pythagore, on montre que $AC = \sqrt{2}$. Donc la longueur totale de l'arbre est $2\sqrt{2} \approx 2,828$. Cependant il ne peut être considéré comme un candidat lors de la recherche d'un arbre de Steiner. En effet le point de Steiner I est degré 4, ce qui contredit le théorème 2.

Une seconde tentative de minimisation.

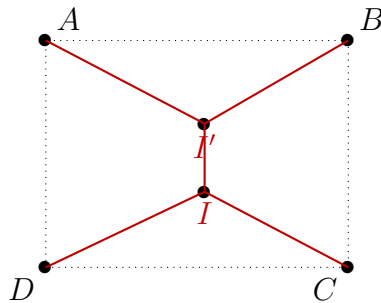
On ajoute un second point I' tel que les deux points I et I' coïncident. On fait bouger les deux points I et I' dans des directions opposées (I' vers la gauche, I vers la droite) jusqu'à atteindre une configuration de Steiner. En d'autres termes, les deux points doivent vérifier les propriétés d'un point de Steiner.



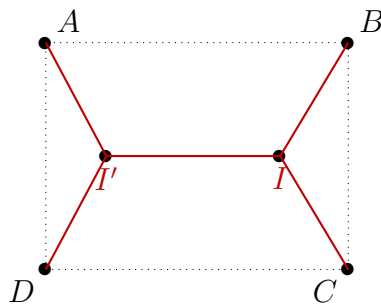
C'est l'arbre de Steiner optimal pour le carré de côté unitaire. Sa longueur est de $1 + \sqrt{3} \approx 2,732$.

- Le rectangle

Soient quatre points terminaux A , B , C et D qui forment un rectangle de longueur 4 et de largeur 3. En s'inspirant de l'exemple du carré, on obtient un premier arbre de Steiner de longueur 9,928. Les deux points de Steiner appartiennent à une droite parallèle à la largeur du rectangle.



L'arbre de Steiner optimal est obtenu lorsque les deux points de Steiner appartiennent à une droite parallèle à la longueur du rectangle. Sa longueur est 9,196.



1.3 Un problème NP-complet

Un problème de décision est une question sur une entrée (un graphe, un nombre etc...) à laquelle on répond par oui ou non. Par exemple, savoir si un nombre entier n est pair représente un problème de décision. Si la réponse au problème de décision peut être trouvée par un algorithme alors le problème est dit algorithmique. P est l'ensemble des problèmes de décision algorithmiques dont la complexité est polynomiale. NP est l'ensemble des problèmes de décision algorithmiques satisfaisant la propriété suivante : si une solution possible est donnée, il est possible de la vérifier en un temps polynomial. Un problème est dit NP-complet si :

- il est dans NP .
- il est au moins aussi difficile que tout problème de NP .

Le problème de Steiner est NP-complet. Il ne peut être résolu en un temps polynomial du nombre de paramètres, le nombre de points terminaux.

Définition 3. Problème de Steiner dans les graphes

Soit $G = (V, E, d)$ un graphe dans le plan tel que V est l'ensemble de ses sommets, E l'ensemble de ses arêtes et d une fonction de poids. Soit S un sous-ensemble de V et $k \in \mathbb{N}$. On cherche un arbre T contenant tous les points de S , de longueur minimale dont le nombre d'arêtes est au plus k .

Montrer la NP-complétude du problème de Steiner nécessite quatre étapes :

- (1) Montrer que le problème de Steiner dans les graphes noté P_1 est NP-complet. Le problème de Steiner dans les graphes est un sous-cas du problème de Steiner.
- (2) Sélectionner un problème P_2 NP-complet.
- (3) Construire une transformation f de P_2 à P_1 .
- (4) Prouver que f est polynomiale.

Démonstration

On définit une instance du problème P_1 : un graphe $G = (V, E)$, un sous-ensemble $S \subseteq V$ et un entier k . On se demande s'il existe un arbre de longueur minimale G qui contient tous les points de S avec au plus k arêtes.

- (1) Montrer que P_1 est dans NP :

Comme (G, S, k) est une instance de P_1 alors il existe un arbre de longueur minimale $T \subseteq G$ qui contient tous les points de S avec au plus k arêtes. On peut vérifier en un temps polynomial les trois propriétés suivantes :

- (a) T est bien arbre : il est connexe et ne contient aucun cycle.
- (b) T couvre tous les points du sous-ensemble S .
- (c) Le nombre d'arêtes de T n'excède pas k .

Donc P_1 est dans NP.

- (2) Sélectionner un problème P_2 NP-complet connu :

Le problème de la couverture exacte. (annexe 1)

- (3) Construire une formation f de P_2 à P_1 :

Soit l'ensemble $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ une instance de P_2 et une famille $C = \{C_1, \dots, C_n\}$ de sous-ensembles de X telle que : $C_i \subseteq X$ et $|C_i| = 3$. On veut construire une instance de P_1 à partir de X et C . Posons

$V = \{v\} \cup \{c_1, \dots, c_n\} \cup \{x_1, \dots, x_{3q}\}$. On ajoute un nouveau point v , un point pour chaque élément de la famille C et un point pour chaque élément de X . De même on peut définir l'ensemble des arêtes

$E = \{vc_1, \dots, vc_n\} \cup \left(\bigcup_{x_j \in C_i} \{c_i x_j\} \right)$. On construit une arête de v à chaque point c_i et une arête $[c_i x_j]$ si $x_i \in C_i$, C_i étant l'ensemble d'une instance de

P_2 . On définit S par $\{v, x_1, \dots, x_{3q}\}$ et $k = 4q$. On a bien défini une transformation f de P_2 à P_1 .

(4) Montrer que f est polynomiale :

Soit (X, C) une instance de P_2 et (G, S, k) une instance de P_1 . Il est clair qu'on peut vérifier les conditions de P_1 avec un algorithme polynomial, de complexité $\mathcal{O}(|E|+|V|)$. En effet, pour vérifier que T est bien un arbre, on effectue un parcours en largeur, en vérifiant qu'on peut atteindre tous les sommets de T à partir de n'importe quel sommet. La complexité du parcours en largeur est $\mathcal{O}((|V|)_T + (|E|)_T)$. En conclusion f est bien polynomiale.

Donc le problème de Steiner est NP-complet.

2

Les résolutions algorithmiques

2.1 L'algorithme de Melzak

L'algorithme de Melzak est le premier algorithme exact implémenté pour résoudre le problème de Steiner.

Idée générale :

On note X l'ensemble des points terminaux $\{a_1, \dots, a_n\}$. Dans un premier temps, on sépare X en k sous-ensembles X_i tels que :

- $|X_i| \geq 3$
- Il existe un point terminal a_i tel que $a_i \in X_i$ et $a_i \in X_{i+1} \forall i, 1 \leq i \leq k-1$.

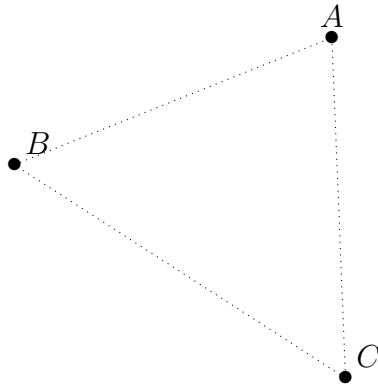
On calcule tous les arbres de Steiner pour chaque sous-ensemble X_i puis on choisit celui dont la longueur est minimale. Les arbres de Steiner des sous-ensembles X_i sont appelés les arbres de Steiner localement minimaux. Ensuite l'algorithme calcule les arbres de Steiner globalement minimaux, c'est-à-dire qu'il fusionne les arbres de Steiner localement minimaux pour chaque partitionnement de l'ensemble X . L'arbre de Steiner globalement minimal dont la longueur est minimale est renvoyé.

Lorsqu'un sous-ensemble X_i est de cardinal supérieur à 3, on réduit le problème à un calcul de l'arbre de Steiner de trois points, en substituant une paire de deux points par un point à chaque itération.

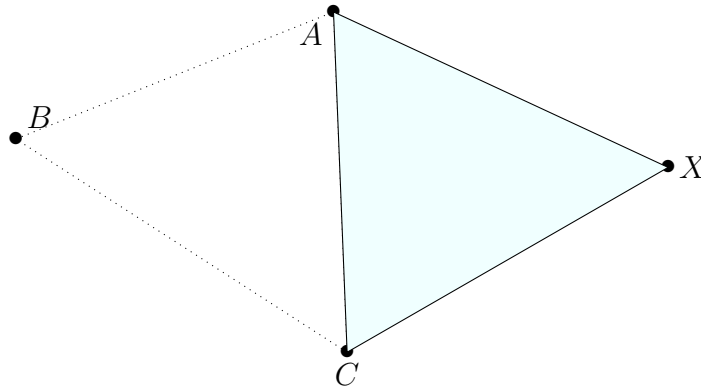
L'algorithme utilise la caractérisation du point de Steiner par les triangles équilatéraux. Pour trouver le point de Steiner de trois points formant un triangle dont tous les angles sont inférieurs à 120° , il suffit de combiner la propriété des droites et la propriété des cercles circonscrits.

Application : la procédure de substitution

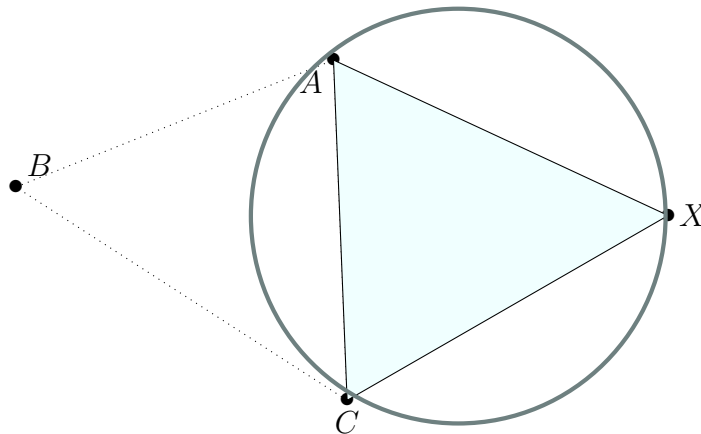
On veut calculer l'arbre de Steiner des trois points A, B et C.



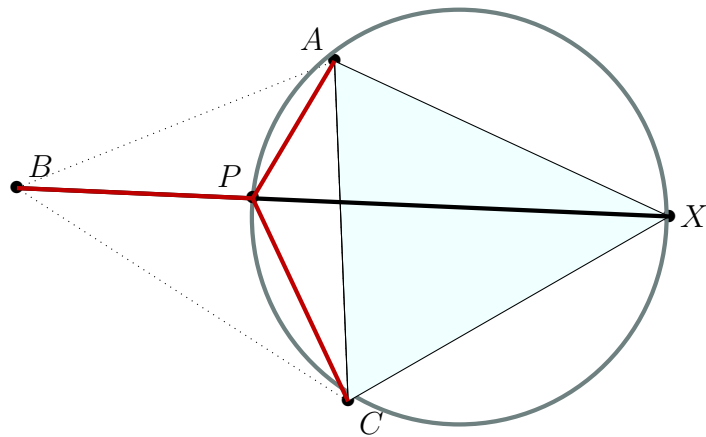
D'abord on construit le triangle équilatéral de côté AC de telle sorte que le 3^{ième} sommet X soit opposé au sommet B.



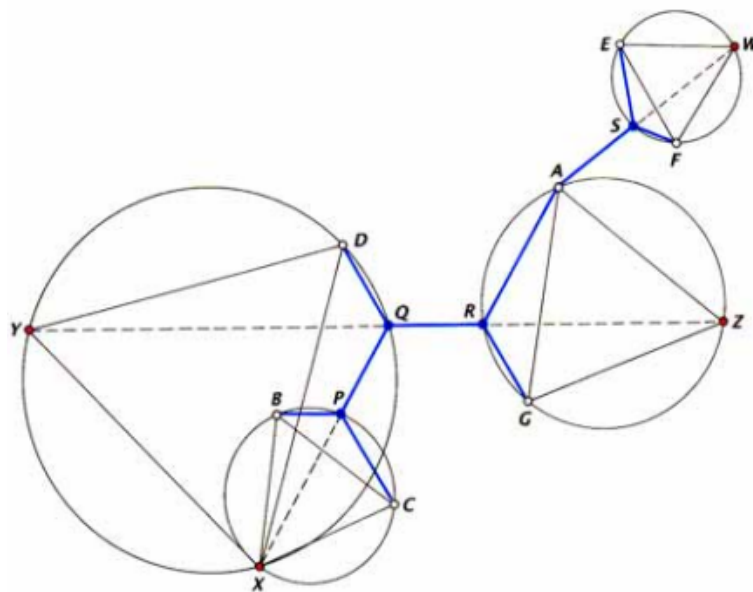
Ensuite on construit le cercle circonscrit au triangle ACX.



On construit la droite (BX) . Le point de Steiner P est l'intersection entre le cercle circonscrit et la droite (BX) . L'arbre de Steiner des points A, B et C apparaît en rouge sur la figure.



Dans l'exemple suivant, une étape possible de l'algorithme est présentée. On veut calculer l'arbre de Steiner des points A, B, C, D, E, F et G. On opte pour le partitionnement suivant $X_1 = \{A, B, C, D, G\}$ et $X_2 = \{A, E, F\}$.



Le problème est réduit à deux sous-cas : les calculs des arbres de Steiner des cinq points A, B, C, D et G et des trois points A, E et F.

Étape 1 : Un arbre de Steiner des points A, B, C, D et G.

On choisit une paire de points, par exemple (B, C) puis on applique la procédure de substitution. La paire (B, C) est remplacée par le point X. Le problème est réduit à quatre points : X, D, G et A. De nouveau, on

substitue la paire de points (D, X) par le point Y puis la paire (G, A) par le point Z . Ainsi, on construit les points de Steiner P, Q et R .

Étape 2 : Un arbre de Steiner des points A, E et F .

On applique la procédure de substitution à la paire (E, F) . Elle est donc remplacée par le point W . L'intersection de la droite (AW) avec le cercle circonscrit au triangle EFW donne le point de Steiner S . L'arbre de Steiner est dessiné en bleu.

L'algorithme de Melzak est de complexité exponentielle, même pour un petit ensemble de points terminaux. En effet, les possibilités de partitionnement de l'ensemble initial sont très nombreuses. Par exemple pour un ensemble de 10 points terminaux, il existe 512 façons de séparer l'ensemble.

2.2 L'algorithme de Dreyfus-Wagner

2.2.1 Explication de l'algorithme

L'algorithme de Dreyfus-Wagner est un algorithme exact de détermination des points de Steiner de complexité sur-exponentielle. Son but est de tester toutes les configurations possibles, existantes en nombre fini (voir preuve) et de choisir la combinaison d'arêtes la plus courte. Il a pu être amélioré par des tests qui permettent de réduire le nombre d'appels récursifs. Il s'agit de former des tripartitions d'un ensemble de points privé d'une paire (a, b) et d'appliquer la fonction sur chacune de ses partitions, en ajoutant a, b et le sommet du triangle équilatéral, formé respectivement à chacune des trois partitions.

2.2.2 Pseudo-code de l'algorithme de Dreyfus-Wagner

Algorithm 2 Algorithme de Dreyfus-Wagner

Data: L : ensemble de points

Result: R : arêtes de l'arbre de Steiner

Initialisation :

$n =$ nombre de points ;

$R = []$;

if $n \leq 1$ **then**

 | $R = []$

else if $n = 2$ **then**

 | $R = [L[0]; L[1]]$

else if $n = 3$ **then**

 | $R = \text{fermat}(L)$

else

 | $\text{longueur} = +\infty$

 | **foreach** *paire*($a ; b$) **dans** L **do**

 | On pose c_1 l'image de b par la rotation de 60° de centre a

 | On pose c_2 l'image de b par la rotation de -60° de centre a

 | **foreach** *bipartition*($W ; W'$) **dans** $L \setminus \{A ; B\}$ **do**

 | $R_{c_1} = \text{steiner}(W \cup \{c_1\})$

 | $R_{c_2} = \text{steiner}(W \cup \{c_2\})$

 | p_1 est le point relié à c_1 dans R_{c_1}

 | p_2 est le point relié à c_2 dans R_{c_2}

 | On pose $a_1 = \text{fermat}(a, b, p_1)$

 | On pose $a_2 = \text{fermat}(a, b, p_2)$

 | Si la propriété de la lune est vérifiée :

 | **foreach** *bipartition*($U ; V$) **dans** W' **do**

 | $R_a = \text{steiner}(U \cup \{a\})$

 | $R_b = \text{steiner}(V \cup \{b\})$

 | $R_1 = a_1 \cup R_a \cup R_b \cup R_{c_1}$

 | $R_2 = a_2 \cup R_a \cup R_b \cup R_{c_2}$

 | **if** $\text{longueur}(R_1) \leq \text{longueur}$ **then**

 | $R = R_1$

 | **else if** $\text{longueur}(R_2) \leq \text{longueur}$ **then**

 | $R = R_2$

 | **end**

 | **end**

 | **end**

return R

On utilise plusieurs propriétés pour éviter d'appeler la procédure steiner sur U et V .

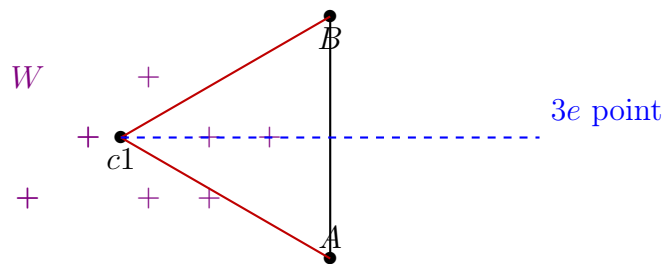
Définition 4. La lune d'une arête $[AB]$ correspond à l'intersection du cercle de centre A et de rayon AB et du cercle de centre B et de rayon AB .

Propriété 6. La propriété de la lune. Soit Γ l'arbre de Steiner correspondant à un ensemble de points. Soit $[AB] \in \Gamma$. Alors la lune L correspondant à l'arête $[AB]$ ne contient aucun point de Γ .

Démonstration. Si C est un point d'un arbre de Steiner Γ , alors dans Γ il existe un chemin joignant C à l'un des sommets de l'arête $[AB]$. Soit C un sommet de Γ qui soit dans la lune, soit γ un chemin joignant C à A sans contenir $[AB]$. Puis en retirant $[AB]$ de Γ et en ajoutant $[CB]$, on obtient un arbre plus court que l'arbre de Steiner Γ . Contradiction. \square

Propriété 7. Soit $[AB]$ une arête de l'arbre de Steiner d'un ensemble de points L . Soit c_1 le point du triangle équilatéral ABc_1 tel que $(\vec{AB}, \vec{Ac}_1) = 60^\circ$ qui permettra la construction du point de Steiner. Il existe au moins un point P dans l'ensemble $L \setminus \{A; B\}$ tel que $\sin(\vec{AB}, \vec{AP}) > 0$.

Démonstration. Soit $[AB]$ une arête d'un ensemble de point L . Soit $W \subset L \setminus \{A; B\}$ l'ensemble contenant le troisième point P du triangle ABP . Si, par construction d'un triangle équilatéral ABc_1 , nous obtenons c_1 l'image de B par la rotation de centre A et d'angle 60° et que celui-ci se trouve du même côté que tous les points W , alors c_1 a été tracé du mauvais côté, c'est-à-dire que la rotation aurait dû être de -60° . On traduit ça mathématiquement par : $\sin(\vec{AB}, \vec{AP}) > 0$.



\square

2.2.3 Preuve de l'algorithme

De part le théorème 4., on sait qu'il existe un nombre fini d'arbre de Steiner pour n points terminaux, qu'on appellera L . Cet algorithme les teste tous. Pour chaque paire de points terminaux (a, b) , on forme une bipartition de l'ensemble $L \setminus \{a, b\}$, W et W' . Pour chaque paire (a, b) on crée les deux points possibles pour obtenir un triangle équilatéral c_1 et c_2 . Puis on applique récursivement *steiner* sur $W \cup \{c_1\}$ et $W \cup \{c_2\}$, ce qui nous donne R_{c_1} et R_{c_2} . On récupère un point appartenant à une arête reliée à c_1 dans R_{c_1} qu'on appellera p_1 . De même pour R_{c_2} . Ensuite on crée une bipartition de W' , U et V et on applique *steiner* sur $U \cup \{a\}$ ($=: R_a$) et $V \cup \{b\}$ ($:= R_b$) et au final on fait l'union des ensembles et on compare les longueurs des ensembles finaux d'arêtes $R_1 = \text{fermat}(a, b, p_1) \cup R_a \cup R_b \cup R_{c_1} \setminus \{c_1\}$ et $R_2 = \text{fermat}(a, b, p_2) \cup R_a \cup R_b \cup R_{c_2} \setminus \{c_2\}$ aux autres longueurs trouvées pour les autres paires de points a et b . Ainsi l'algorithme teste bien toutes les configurations possibles.

Par ailleurs, il finit car on appelle *steiner* sur un nombre n qui décroît à chaque fois et pour $n \leq 3$ on connaît la solution donc l'algorithme s'arrête.

2.3 La solution du problème des bulles de savon

2.3.1 Le problème des bulles de savon

Définition 5. *On appelle surface minimale une surface régulière capable de minimiser son aire sous contrainte.*

Problème des bulles de savon : Pour un contour donné \mathcal{C} , il s'agit de trouver les surfaces qui ont \mathcal{C} comme frontière et qui minimisent leur aire. Lorsqu'on trempe un anneau dans une solution savonneuse, pourvu qu'il ne soit pas trop grand, on observe la formation d'un film de savon à l'intérieur de l'anneau. Le film de savon reste tendu grâce à la tension de surface : c'est l'interaction entre les molécules au bord du film et celles à l'intérieur. Maintenir cette tension au niveau du film requiert une certaine énergie. Or tout système physique tend à être dans une position qui lui demande le moins d'énergie. Ainsi pour minimiser son énergie, le film de savon tend à minimiser son aire. C'est donc une surface minimale. Plus précisément, grâce aux interactions locales des molécules et la tension de surface, le film de savon se tend jusqu'à atteindre une configuration d'équilibre. Cet équilibre minimise son aire.

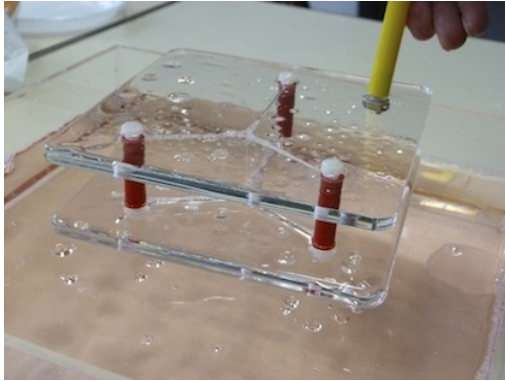


FIGURE 2.1 – Expérience avec trois points

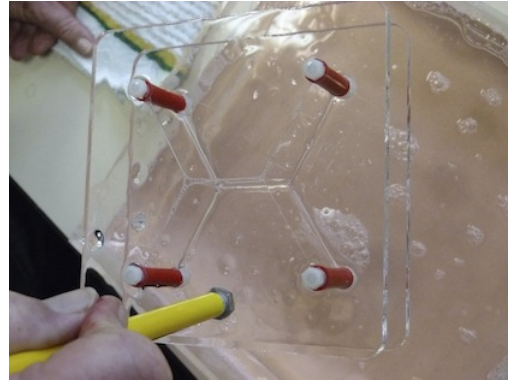


FIGURE 2.2 – Expérience avec quatre points

Pour calculer un arbre de Steiner d'un ensemble quelconque de points, a été implémenté un algorithme qui s'inspire de la propriété de minimisation des films de savon. Il s'agit de l'algorithme de relaxation.

2.3.2 L'algorithme de relaxation

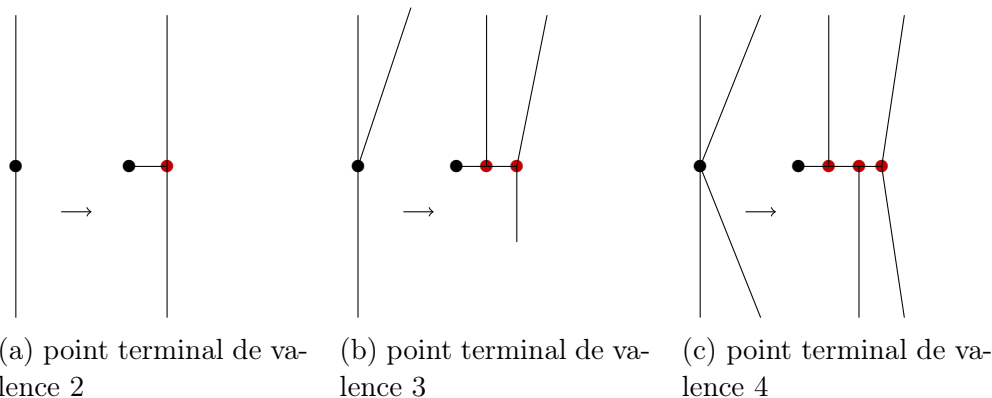
Idée générale :

Soit $N = \{a_1, \dots, a_n\}$ un ensemble de n points terminaux. On veut déterminer un arbre de Steiner de N .

Initialisation :

Dans un premier temps, on calcule un ACM des points terminaux. Ensuite on calcule un arbre de Steiner intermédiaire à partir de l'ACM. On appelle arbre de Steiner intermédiaire un arbre qui contient tous les points terminaux auquel on rajoute des points en appliquant la règle suivante : dans l'ACM lorsqu'un point est de degré 1, aucun point n'est rajouté. Lorsqu'un point a_i de coordonnées (x,y) est de degré 2, on crée un point a'_i puis on connecte a'_i au point a_i ainsi qu'aux deux voisins du point a_i . Ensuite on supprime les arêtes entre a_i et ses voisins initiaux. De manière analogue, pour un point a_i de valence n , on crée $n - 1$ points additionnels puis on redistribue les arêtes concourantes en a_i de telle sorte que a_i soit connecté aux mêmes points par les points additionnels. Les points additionnels sont tous de valence 3 mais ce ne sont pas de points de Steiner. En effet, les arêtes concourantes en ces points ne forment pas des angles de 120° entre elles. Pour un ensemble de n points terminaux, la procédure d'initialisation crée $n - 2$ points additionnels. A la fin de l'initialisation, on obtient un arbre auquel on applique le processus de relaxation. On appelle cet arbre l'arbre intermédiaire.

Le schéma suivant illustre la création des points additionnels. Les points terminaux sont en noir tandis que les points additionnels sont en rouge.



Définition 6. Une descente de gradient s'applique lorsqu'on cherche le minimum d'une fonction dérivable dont on connaît l'expression analytique mais dont le calcul direct du minimum est difficile.

Le processus de relaxation :

Le processus de relaxation simule les interactions locales qui permettent au film de savon de minimiser son aire. Il consiste en deux étapes : l'évolution et l'interaction.

L'évolution

Chaque point additionnel S bouge sous l'effet de la force \vec{F} . \vec{F} est la résultante des forces de tension de surface exercées par les trois arêtes concourantes en S. A, B et C étant les voisins de S,

$$\vec{F} = \frac{\vec{SA}}{\|SA\|} + \frac{\vec{SB}}{\|SB\|} + \frac{\vec{SC}}{\|SC\|}$$
C'est l'opposé du gradient. L'évolution est une descente de gradient. Le point S est déplacé dans une direction qui maximise localement la réduction de la longueur de l'arbre.

L'interaction :

L'interaction réorganise les connections entre les points pour minimiser la longueur de l'arbre intermédiaire. Considérons deux points additionnels voisins S et S'. Chacun est de valence 3. $\{A_1, A_2, S'\}$ sont les voisins de S et $\{A_3, A_4, S\}$ sont les voisins de S'. Supposons que S se rapproche de S' au cours de l'évolution. Si la distance entre S et S' devient inférieure à T alors une interaction est possible entre les deux points, c'est-à-dire que S peut échanger l'un de ses voisins $\{A_1, A_2\}$ avec un voisin $\{A_3, A_4\}$ de S'. Pour procéder à l'échange, trois triplets d'arêtes sont examinés : $\{A_1S, A_2S, S'S'\}$, $\{A_1S, A_2S, S'S\}$ et $\{A_1S, A_2S, S'S\}$. Le triplet $\{A_1S, A_2S, S'S\}$ n'est pas considéré car il représente une simple permutation

entre S et S' . Pour chacun des trois triplets, on calcule \vec{F} exercée au point S puis on compare les normes des trois forces. On choisit le triplet qui produit la force de plus grande intensité puis on procède à l'échange. Le schéma ci-dessous illustre l'interaction.

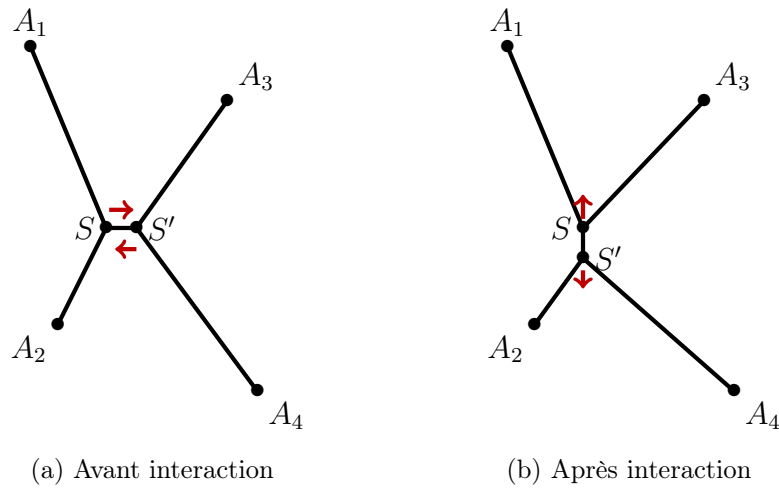


FIGURE 2.4 – Le procédé d'interaction entre S et S'

Le pseudo-code de l'algorithme de relaxation est présenté ci-dessous.

Algorithm 2.3.1: ALGORITHME DE RELAXATION(N)

$N \leftarrow$ nombre de points terminaux
 $\sigma_N \leftarrow N^{-1/2}$ **comment:** σ_N représente une unité de longueur

Initialisation :

construction d'un ACM : A

construction d'un arbre intermédiaire : A'

$T \leftarrow 700 * 0.15 * \sigma_N$

$\lambda \leftarrow 700 * 0.02 * \sigma_N$

$k \leftarrow 1$

repeat

for chaque point additionnel S de A'

Evolution :
 S a trois voisins : A, B et C
On calcule la force exercée sur S

$$\vec{F} = \frac{\vec{SA}}{\|\vec{SA}\|} + \frac{\vec{SB}}{\|\vec{SB}\|} + \frac{\vec{SC}}{\|\vec{SC}\|}$$
Déplacer le point S : $\vec{OS} \leftarrow \vec{OS} + \lambda \vec{F}$
if (parmi les trois voisins de S
do { il existe un autre point additionnel tel que la distance est plus petite que T)

Interaction :

S' est le point additionnel voisin de S tel que $\|\vec{SS'}\| \leq T$
 S' peut être A, B ou C . S'il a plusieurs possibilités pour S'
on en choisit une au hasard.
On échange les voisins entre S et S'

if $k = 100 || k = 120 || k = 140 || k = 160 || k = 180$

$T = T * 0.2$

if $k \geq 200$

$\lambda \leftarrow \lambda * 0.96$

$k \leftarrow k + 1$

until $k \leq 400$.

Conclusion

Nous avons présenté deux méthodes pour le calcul d'un arbre de Steiner : une méthode de relaxation et un algorithme exact, en y faisant une analogie physique (celle avec les bulles de savon). Lorsque le nombre de points est inférieur à dix, l'algorithme approché donne souvent la solution exacte. Il existe d'autres versions que le problème de Steiner où la fonction de coût des arêtes est plus compliquée, par exemple si on souhaite éviter des obstacles géographiques. Peut-être l'application la plus connue qui nécessite une solution au problème de Steiner : le design des circuits électroniques. Un réseau plus court de fils nécessite moins de temps pour charger ou décharger qu'un long réseau et donc augmente la rapidité des opérations du circuit. Cependant, une différence géométrique est à prendre en compte dans le problème des circuits les plus courts : il n'y a que deux directions, verticale et horizontale.

Le problème est connu sous le nom du problème rectilinéaire. Comme la solution au problème de Steiner classique, celle au problème rectilinéaire contient un arbre de Steiner avec des points de Steiner et les points originaux mais les arêtes ne se rencontrent que sous les angles 90° et 180° . Une solution exacte a été trouvée, mais elle est exponentielle et on ne dépasse pas les 40 points.

L'application la plus surprenante reste celle en phylogénie. Grâce aux solutions du problème de Steiner, on peut afficher tous les arbres phylogénétiques possibles. Les chercheurs déterminent les différences entre les acides aminés se trouvant dans les protéines entre les différents organismes et créent un point à la position correspondante au nombre de différences entre l'organisme lui-même et les autres. Les organismes avec beaucoup de similitudes dans les séquences d'acides aminés sont considérés comme proches et ceux avec beaucoup de différences sont considérés comme éloignés. En déterminant le réseau le plus court entre ces points, on détermine les ancêtres les plus probables. Les points de Steiner sont les ancêtres et les arêtes sont les liens de parenté entre les ancêtres et les organismes, qui ont muté au fil du temps.

Bien qu'on ait approfondi les connaissances en algorithmique ces dernières années, le problème du plus court chemin reste difficile.

Bibliographie

Ouvrages

Hwang,F.S., Richards,D.S., Winter,P. (1992).The Steiner Tree Problem. Amsterdam :Elsevier Science.352p.-(Annals of Discrete Mathematics :53)

Wu,B.Y., Chao,K. (2004). Spanning Trees and Optimization Problems. Londres : Chapman and Hall/CRC.200p.-(Discrete Mathematics and Its Applications :19)

Articles

Cockayne,E.J., Hewgill,D.E. (1992). Improved computation of plane Steiner minimal trees. *Algorithmica*, 7 (2/3), 219-229

Gilbert,E.N., Pollak,H.O. (1968). Steiner minimal trees. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 16 (1), 1-29

Hwang,F.K., Weng,J.F. (1992). The shortest network under a given topology. *Journal of Algorithms*, 13 (3), 468-488

Hwang,F.K., Trietsch,D. (1990). An improved algorithm for Steiner trees. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 50, 244-263

Winter, P. (1985). An algorithm for the Steiner problem in the Euclidean plane. *Networks*, 15, 323-345

Cockayne, E.J., Hewgill, D.E. (1986). Exact computation of Steiner minimal trees in the plane. *Information Processing Letters*, 22, 151-156

Winter,P., Zachariassen,M. (1997). Euclidean Steiner minimum trees : An improved exact algorithm. *Networks*, 30 (3), 149-166

Chapeau-Blondeau, F., Janez,F., Ferrier, J.L. (1997). A dynamic adaptive relaxation scheme applied to the Euclidean Steiner minimal tree problem. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 7 (4), 1037-1053

Winter, P. (1987). Steiner problem in networks. *Networks*, 17 (2), 129-167

Hwang,F.K., Du,D.-Z. (1992). A proof of the Gilbert-Pollak conjecture on

the Steiner ratio. *Algorithmica*, 7(1/6), 121-135

Sites internet

CNRS. Mathématiques savonneuses. [En ligne] (page consultée le 02/03/2014).

<http://images.math.cnrs.fr/Mathematiques-savonneuses.html>

UCSD. The shortest possible network. [En ligne] (page consultée le 02/03/2014).

http://www.math.ucsd.edu/~ronspubs/89_01_shortest_network.pdf

De Saint Julien. Minimisation d'une somme de distance, points de Fermat. [En ligne] (page consultée le 04/03/2014).

http://desaintar.free.fr/exposes/points_de_Fermat.pdf

Wikipédia. Arbre de Steiner. [En ligne] (page consultée le 01/03/2014).

http://fr.wikipedia.org/wiki/Arbre_de_Steiner

Wikipédia. Point de Fermat. [En ligne] (page consultée le 01/03/2014).

http://fr.wikipedia.org/wiki/Point_de_Fermat

University of Twente. Exact algorithms fro the Steiner tree problem. [En ligne] (page consultée le 04/03/2014).

http://doc.utwente.nl/59035/1/thesis_Wang,_Xinhui.pdf

CLAUSSE. Le problème de Steiner dans le plan euclidien. [En ligne] (page consultée le 02/03/2014).

http://antoine.clausse.free.fr/ftp/TIPE/tipe_steiner_transparents.pdf

LABORATOIRE LMIA. Triangulations de Steiner. [En ligne] (page consultée le 14/03/2014).

http://www.mage.fst.uha.fr/brevilliers/2006_seminaire_lmia_triangulations_steiner.pdf

STONY BROOK UNIVERSITY. Introduction to Algorithms. [En ligne] (page consultée le 16/03/2014).

<http://www.cs.sunysb.edu/~algorithm/video-lectures/2007/lecture1.pdf>

STONY BROOK UNIVERSITY. NP-completeness proof. [En ligne] (page consultée le 16/03/2014) .

<http://www.cs.sunysb.edu/~algorithm/video-lectures/2007/lecture20.pdf>

STONY BROOK UNIVERSITY. Minimum Spanning trees. [En ligne] (page consultée le 16/03/2014).

<http://www.cs.sunysb.edu/~algorithm/video-lectures/1997/lecture17.pdf>
UMEA UNIVERSITET. Steiner Tree. [En ligne] (page consultée le 16/03/2014).
<http://www8.cs.umu.se/kurser/TDBAfl/VT06/algorithms/BOOK/BOOK4/NODE181.HTM>

DURHAM UNIVERSITY. The Euclidean Steiner Tree Problem. [En ligne] (page consultée le 01/01/2014).
http://www.maths.dur.ac.uk/Ug/projects/highlights/CM3/Soothill_Steiner_talk.pdf

PAOLINI. Minimal connections : the classical Steiner problem and generalizations. [En ligne] (page consultée le 20/04/2014).
<http://mathematicalanalysis.unibo.it/article/view/3421>

CONCORDIA. Solving group Steiner problems as Steiner problems. [En ligne] (page consultée le 20/04/2014).
<http://users.encs.concordia.ca/~chvatal/workshop06/steiner.pdf>

UNIVERSITÄT GRIEFSWALD. The Steiner ratio of metric spaces. [En ligne] (page consultée le 20/04/2014) .
<http://www.math-inf.uni-greifswald.de/mathe/images/Boldt/cieslik-steiner-neu.pdf>

LOGOPLUS. Le problème de Steiner. [En ligne] (page consultée le 15/03/2014).
http://logoplus.pagesperso-orange.fr/recherche_operationnelle.htm

HOUARDY. An approximation for the Steiner problem in graphs. [En ligne] (page consultée le 17/03/2014).
<http://www.or.uni-bonn.de/~hougardy/paper/steiner.pdf>

UWATERLOO. The Steiner ratio for the obstacle-avoiding Steiner tree problem. [En ligne] (page consultée le 23/04/2014).
<https://uwspace.uwaterloo.ca/bitstream/handle/10012/4055/thesis-mina.pdf?sequence=1>

LOGOPLUS. Etude sur les réseaux de Steiner. [En ligne] (page consultée le 24/04/2014).
<http://logoplus.pagesperso-orange.fr/private/formalisme.pdf>

UNIVIE. An improved algorithm for computing Steiner minimal trees in d-spaces. [En ligne] (page consultée le 24/04/2014).
<http://www.mat.univie.ac.at/~neum/glopt/gicolag/talks/>

anstreicher2.pdf

UNIVERSITE PARIS DIDEROT. Comment résoudre les problèmes NP-difficiles. [En ligne] (page consultée le 10/03/2014).

http://www.liafa.univ-paris-diderot.fr/~nschaban/GT-COA/Journees_2013/Blitz/MATHIEU\%20Claire.pdf

ROMBALDI. Le problème de Fermat. [En ligne] (page consultée le 28/04/2014).

<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~rombaldi/AgregInterne/fermat.pdf>

Annexes

Le problème de la couverture exacte

On part d'un ensemble X tel que $|X|=k$. On a k' parties de cet ensemble. Il s'agit de trouver quelles parties choisir pour recouvrir exactement X . Cela signifie que l'union de ces parties doit donner l'ensemble X et aucune partie ne doit chevaucher une autre.

Par exemple on considère l'ensemble $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et 8 parties de cet ensemble :

- $\{1\ 5\}$
- $\{2\ 4\}$
- $\{2\ 3\}$
- $\{3\}$
- $\{1\ 4\ 5\}$
- $\{1\ 3\ 5\}$
- $\{2\ 5\}$
- $\{1\ 4\}$

Dans l'exemple, une couverture exacte de l'ensemble X est $\{1\ 5\}$, $\{2\ 4\}$, $\{3\}$.

Pour démontrer la NP-complétude du problème de Steiner, on utilise un sous-cas du problème de la couverture exacte : le problème de la couverture exacte par trois sous-ensembles. On a un ensemble initial X tel que $|X|=3q$, une collection C de sous-ensembles de X telle que chaque sous-ensemble est de cardinal 3. $C = \{C_1, \dots, C_n\}$, $C_i \subseteq X$, $|C_i|=3$, $1 \leq i \leq n$. On veut savoir si C contient une couverture exacte de l'ensemble X , c'est-à-dire une sous-famille $C' \subseteq C$ tel que chaque élément de X apparaît exactement une fois dans un membre de C' . Si C' est une solution alors ses éléments forment une partition de l'ensemble X et $|C'|=q$.