Théorème de Whitney pour les variétés compactes,
pour le 27 octobre

Soit M une variété compacte de dimension n.

1– Soit U un ouvert de M et $K \subset U$ compact. Montrer qu'il existe $f : M \to [0,1]$ lisse tel que $supp(f) = \{x \in M \text{ t.q. } f(x) \neq 0\} \subset U$ et $f_{|K} \equiv 1$.

2– Soit (U_i) un recouvrement ouvert de M, à l'aide du théorème du cours sur les partitions de l'unité, montrer que : il existe (V_i, f_i) tels que :
–V_i est un ouvert de M tel que $\bar{V_i} \subset U_i$ et $\bigcup V_i = M$,
–$f_i : M \to [0,1]$ est lisse et vérifie $supp(f_i) \subset U_i$ et $f_{i|V_i} \equiv 1$.

3– Montrer que toute variété compacte admet un plongement dans $\mathbb{R}^N$ pour N assez grand. On considéra un atlas fini (V_i, φ_i), une partition adéquate (V_i, f_i) et l'application

$$f = (f_1\varphi_1, \ldots, f_p\varphi_p, f_1, \ldots, f_p).$$

On definit une partie negligeable d'une variété comme suit.
Soit E une partie d'une variété M. On dira que E est négligeable. Si pour tout $x \in M$, il existe une carte (U, φ) centré en x telle que $\varphi(U \cap E)$ est de mesure nulle dans $\varphi(U)$.

4– Montrer que cette définition est cohérente.

5– Soient M et N deux variétés de dimension respective m et n et $f : M \to N$ C^1. Montrer que si $m < n$, alors $f(M)$ est néglieable. En particulier f ne peut pas être surjective.

Maintenant M est une sous-variété compacte de dimension n de $\mathbb{R}^N$.

6– Montrer que si $2n < N - 1$ alors il existe une projection qui restreinte à M soit injective. Pour cela on pourra considérer l'application $\begin{array}{rccc} \pi : & M \times M \setminus D & \to & S^{N-1} \\ & (x,y) & \mapsto & \frac{x-y}{\|x-y\|} \end{array}$.

7– Montrer que UM, le fibré unitaire de M, est une sous-variété de dimension $2n-1$ de $M \times S^{N-1}$.

8– Montrer que si $2n < N$ alors il existe une projection qui restreinte à M soit immersive[1].

9– Montrer que M admet une immersion dans $\mathbb{R}^{2n}$ et un plongement dans $\mathbb{R}^{2n+1}$.

10– En 1944 Whitney démontre qu'il existe un plongement dans $\mathbb{R}^{2n}$. Montrer proprement que c'est optimal.

[1]Mais elle sert à quoi la question précédente ?

Solution :

1– On sait qu'il existe une fonction lisse $p : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, telle que $supp(p) \subset B(0,2)$ et $p_{|B(0,1)} \equiv 1$ (fonction plateau). Soit $x \in K$ et (U_x, φ_x) une carte centré en x, avec $U_x \subset U$. Pour δ assez petit, $B(0,3\delta) \subset \varphi_x(U_x)$. On pose $V_x = \varphi_x^{-1}(B(0,\delta))$ et $f_x(y) = p\left(\dfrac{\varphi_x(y)}{\delta}\right)$ pour $y \in U_x$ et 0 sinon. De plus f_x est lisse, car composée d'application lisse sur $\varphi_x^{-1}(B(0,\frac{5\delta}{2}))$ et nulle en dehors de $\varphi_x^{-1}(B(0,2\delta))$. Enfin (V_x) est un recouvrement ouvert de K, on en extrait alors un recouvrement fini (V_{x_i}) et on vérifie que $f = 1 - \prod(1 - f_{x_i})$ convient.

2– En effet d'après le théorème du cours il existe une famille de fonctions (f_i) telle que :
–$f_i : M \to [0,1]$ soit lisse,
–$\overline{supp(f_i)} \subset U_i$,
–$(supp(f_i))$ est localement fini,
–$\sum f_i = 1$.
Soit $V_i = supp(f_i) \subset U_i$, alors vu que $\sum f_i = 1$ on a $\cup V_i = M$. De plus $\bar{V_i}$ est un fermé et donc dans le cas présent un compact de M, donc d'après le lemme il existe $f_i : M \to [0,1]$ lisse tel que $(supp(f_i)) \subset U_i$ et $f_{i|V_i} \equiv 1$.

3– Soit $(U_i, \varphi_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ un atlas fini de M, d'après le théorème précédent, il existe (V_i, f_i) telle que,
–V_i est un ouvert de M et $\overline{V_i} \subset U_i$,
–$\cup V_i = M$,
–$f_i : M \to [0,1]$ est lisse et vérifie $supp(f_i) =\subset U_i$ et $f_{i|V_i} \equiv 1$.
Dautre part, on peut prolonger φ_i par 0 en dehors de V_i par $f_i\varphi_i$ qui est une application lisse sur M. En effet φ_i est nulle en dehors de V_i et $\overline{supp(f_i)} \subset U_i$. Donc en posant

$$f = (f_1\varphi_1, \ldots, f_p\varphi_p, f_1, \ldots, f_p)$$

on obtient une application lisse de M dans $\mathbb{R}^{p(n+1)}$. C'est une immersion, en effet soit $x \in M$ alors $x \in V_i$ et dans ce cas le $i$ème bloc de $T_x f$ est $T_x\varphi_i$ qui est bijective, donc $T_x f$ est injective. Puis f est injective, car si $f(x) = f(y)$ alors il existe i tel que $f_i(x) = f_i(y) = 1$, donc $x, y \in supp(f_i) \subset U_i$, puis l'égalité $\varphi_i(x)f_i(x) = f_i(y)\varphi_i(y)$ mène à une contradiction car φ_i est bijective sur U_i. Enfin la variété de départ étant compacte, l'immersion injective est propre, c'est donc un plongement.

4– On demontre d'abord la propostion suivante. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1. L'image par f d'une partie de mesure nulle est de mesure nulle.*

En effet soit E un tel ensemble. Il suffit de montrer que pour toute boule fermé $B \subset U$, $f(E \cap B)$ est de mesure nulle. Si

$$K = \sup_{x \in B} \|df\|.$$

Le théorème des accroissements finis montre que f ets $K - lip$ sur B, donc transforme un cube de mesure $/delta$ en ensemble de mesure inférieur à $K^n \delta$. Ainsi, si $E \cap B \subset C$, où C est l'union de cubes de mesure inférieur à ε, on

$$\lambda(f(E \cap B)) \leqslant \lambda(f(C)) < K^n \varepsilon,$$

E étant de mesure nulle, on peu faire tendre ε vers 0, ce qui prouve la proposition.

Cette définition est bien cohérente, car indépendante de la carte choisie. Car d'après la proposition le changement de carte $\psi \circ \varphi^{-1}$ envoie une partie de mesure nulle sur une partie de mesure nulle. Donc si $\varphi(U \cap E)$ est de mesure nulle, il en sera de même de tous les $\psi(U \cap E)$. Il est aussi immédiat que l'union dénombrable de partie négligeable est négligeable.

5– On considère deux atlas dénombrable (U_i, φ_i) et (V_i, ψ_i) sur M et N. Ce qui est toujours possible, puisqu'on se place dans le cadre σ-compact. Pour démontrer la propriété, il suffit de montrer que l'image de chaque ouvert U_i est négligeable. Ce qui revient à montrer que pour tout i et j, $\psi_j(f(U_i)$ est de mesure nulle, c'est dire que $f_{ij}(\varphi_i^{-1}(U_i))$ est de mesure nulle, où $f_{ij} = \psi_j \circ f \circ \varphi_i : \varphi_i^{-1}(U_i) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est C^1. On s'est donc ramené au lemme de Sard, ce qui prouve la proposition.

6– Pour tout $v \in S^{N-1}$, on considère la projection orthogonal p_v de $\mathbb{R}^N$ sur $< v >^{\perp}$. Pour que p_v soit injective, il faut et il suffit que pour tout $x, y \in M$ le vecteur $x - y \notin < v >$, c'est à dire que v n'appartienne pas à l'image de $M \times M \setminus \Delta$, par

$$p : (x, y) \mapsto \frac{x - y}{\|x - y\|},$$

où Δ est la diagonal de $M \times M$. p est C^1 comme restriction de $\bar{p} : \mathbb{R}^N \setminus D \to S^{N-1}$ à la sous-variété $M \times M \setminus \Delta$. En appliquant la question précédente, on remarque que si $dim(M \times M \setminus \Delta) = 2n < N - 1 = dim(S^{N-1})$ alors l'ensemble des v pour lesquels $p_{v|M}$ n'est pas injective est négligeable.

7– Tout d'abord, on démontre une petite généralisation du théorème du cours : Soit $f : M \to N$ une application lisse, les antécédent d'un point régulier forment une sous-variété de M.

En effet soient $y \in N$ un point régulier, $x \in M$ tel que $f(x) = y$, (U, φ) une carte de M centrée en x et (V, ψ) une carte de N centrée en y. Alors $\widetilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est une submersion, donc d'après le théorème du cours $\widetilde{f}^{-1}(\psi(y))$ est une sous variété de

$\varphi(U)$, φ réalisant un difféo, $\varphi(\varphi(U) \cap \widetilde{f}^{-1}(\psi(y))) = U \cap f^{-1}(y)$ est une sous variété de M. finalement $f^{-1}(y)$ est bien une sosu-variété de M, car c'est une sous-variété de M autour de chacun de ses points.

réponse à la question :

Soit $(x, v) \in UM \subset \mathbb{R}^N \times S^{N-1}$ et (V, ψ) une carte trivialisante centrée en x. On considère $\varphi : V \times S^{N-1} \to \mathbb{R}^{N-n} \times \mathbb{R}^{N-n}$ définie par

$$\varphi(x, v) = (\psi^{n+1}(x), \ldots, \psi^N(x), d\psi_x^{n+1}(v), \ldots, d\psi_x^N(v)).$$

On a alors

$$d\varphi(x, v)(w_1, w_2) = (d\psi_x^{n+1}(w_1), \ldots, d\psi_x^N(w_1), \\ d^2\psi_x^{n+1}(v, w_1) + d\psi_x^{n+1}(w_2), \ldots, d^2\psi_x^N(v, w_1) + d\psi_x^N(w_2)).$$

On va montrer que que φ est une submersion. Soit $(V, W) \in \mathbb{R}^{N-n} \times \mathbb{R}^{N-n}$, ψ étant un difféo il existe $(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ tel que $(d\psi_x^{n+1}(w_1), \ldots, d\psi_x^N(w_1)) = V$ et $(d\psi_x^{n+1}(w_2), \ldots, d\psi_x^N(w_2)) = W - (d^2\psi_x^{n+1}(v, w_1), \ldots, d^2\psi_x^N(v, w_1))$. Mais en utilsant le fait que $(d\psi_x^{n+1}(v), \ldots, d\psi_x^N(v)) = 0$ (car il s'agit d'une carte tricvialisante), on vérifie que que l'on peut choisir w_2 de sorte que $w_2 \in T_v S^{N-1}$(il suffit de lui retirer sa projection selon v).
D'après l'assertion ci-dessus, on voit que $UM \cap (V \times S^{N-1}) = \varphi^{-1}(0, 0)$ est une sous-variété de $V \times S^{N-1}$ de dimension $2n - 1$, UM est donc localement une sous variété de $\mathbb{R}^N \times S^{N-1}$. Finalement c'est une sous variété de $\mathbb{R}^N \times S^{N-1}$ et a fortiori une sous variété de dimension $2n - 1$ de $M \times S^{N-1}$.

Autre solution :
Considérer $f : TM \setminus \{0_x\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, v) = \|v\|^2$.

8– Pour que $p_{v|M}$ soit une immersion, il faut et il suffit que v n'appartiennent à aucun sous-espace tangent à M. En considérant, la projection $pr2 : UM \to S^{N-1}$ défini par $pr_2(x, v) = v$, on remarque que son image est négligeable dés que $2n - 1 < 2N - 1$. C'est à dire que l'ensemble des vecteurs v tels que p_v ne soit pas une immersion est negligeable dans S^{N-1}.

9– Tant que $N > 2n + 1$, alors il existe v dans S^{N-1} tel que p_v soit une immersion injective, c'est à dire un plongement puisque la variété de départ est compacte, donc en itérant on trouve un plongement de notre variété de départ dans $\mathbb{R}^{2n+1}$. Enfin, en appliquant la question précédente à l'image de ce plongement on trouve une immersion de M dans $\mathbb{R}^{2n}$.