Compléments d'intégration et séries de Fourier 2016, Feuille d'exercices 3

1. Sommes de Riemann

En utilisant les sommes de Riemann, calculer les limites des suites :

a) $a_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{0}^{n-1} cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$,

b) $b_n = \displaystyle\sum_{0}^{2n-1} \frac{1}{2n+3k}$,

c) $c_n = \displaystyle\sum_{n}^{2n} \frac{1}{k}$,

d) $d_n = \displaystyle\sum_{n}^{2n} \frac{n}{k^2} sin\left(\frac{n\pi}{k}\right)$,

e) $e_n = \displaystyle\sum_{1}^{n} \frac{\sqrt{n}+k}{n^2+k^2}$.

2. Limite des normes L^p

Soit f une application continue d'un intervalle compact $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$.

a) Montrer que $\forall \delta > 0\ \exists \alpha > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}\ \int_a^b |f(x)|^n\,dx \geqslant \alpha(\|f\|_\infty - \delta)^n$.

b) Montrer que $\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0$ tel que $\forall n \geqslant N\ \left(\int_a^b |f(x)|^n\,dx\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \|f\|_\infty - \varepsilon$.

c) En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^n\,dx\right)^{\frac{1}{n}} = \|f\|_\infty.$$

3.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une application de classe C^1 (où $a, b \in \mathbb{R}, a < b$). Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ pour tout $k \in [0,n]$, et on définit

$$r(n) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) - \int_a^b f(t)\,dt.$$

a) Montrer que

$$r(n) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_k) - f(t))\,dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_{k+1})f'(t)\,dt.$$

b) En déduire, en utilisant le théorème de la moyenne, que

$$\lim_{n\to+\infty} |nr(n)| \leqslant (b-a)|f(b)-f(a)|.$$

4.

Soient $-1 < a < 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, \pi/2]$, $u_n(t) = a^n \cos^n(t)$.

a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge uniformement sur $[0, \pi/2]$ vers une fonction limite que l'on déterminera.

b) En déduire que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 - a\cos t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\, dt \right) a^n \,.$$

5. Convergence en moyenne

Soient a, b deux nombres réels tels que $a < b$. Pour tout $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ on pose

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

a) Soit $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ telle que $f \geqslant 0$ et $\int_a^b |f(x)|\, dx = 0$. Montrer que $f \equiv 0$.

b) Montrer que $\| \,.\, \|_1$ est une norme sur $C([a,b], \mathbb{R})$.

La convergence au sens de $\| \,.\, \|_1$ dans $C([a,b], \mathbb{R})$ sera dite convergence en moyenne.

c) Etudier la convergence en moyenne de la suite de fonctions $x \mapsto x^n$ sur $[0,1]$.

d) Dans $C([a,b], \mathbb{R})$ la convergence uniforme implique-t-elle la convergence en moyenne ?

e) La convergence en moyenne implique-t-elle la convergence uniforme ? simple ?

6. Riemann-Lebesgue

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique continue de période $T > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n(f) = \int_a^b f(nt) dt \,.$$

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_x^{x+T} f(t)\, dt = \int_0^T f(t)\, dt \,.$$

b) La suite de fonctions $f_n(t) = f(nt)$ converge-t-elle simplement sur $[a,b]$?

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(f)$.

7.

Déterminer la nature des intégrales suivantes ($\alpha \geqslant 0$ est un paramètre)

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\sin(\sqrt{t}) - \tan(\sqrt{t})}{t^2}\,dt\,, \quad I_2 = \int_1^2 \frac{\cos t}{1-\sqrt{t}}\,dt\,, \quad I_3 = \int_0^1 \frac{e^{it^{-1}}}{t}\,dt\,,$$

$$I_4 = \int_e^4 \frac{dt}{\ln^\alpha(\ln t)}\,, \quad I_5 = \int_0^1 \frac{\operatorname{ch} t - \cos t}{t^2\sqrt{t}}\,dt\,, \quad I_6 = \int_0^{(\pi/2)^2} \frac{\tan(\sqrt{t})}{t}\,dt\,,$$

$$I_7 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\sin\left(\frac{1}{t}\right)dt\,, \quad I_8 = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{|t^2-3t+2|}}\,, \quad I_9 = \int_1^{+\infty} \sin^\alpha\left(\frac{1}{t}\right)dt\,,$$

$$I_{10} = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{\operatorname{sh} t}-1}{|t|^\alpha}\,dt\,, \quad I_{11} = \int_0^{+\infty}\left(e^{-\frac{1}{t}} - \frac{t}{t+1}\right)dt\,, \quad I_{12} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\tan^\alpha t}\,.$$

8.

a) Étudier selon la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature de l'intégrale

$$J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha\sqrt{t^2-1}}\,.$$

b) Calculer $J(\alpha)$ lorsque $\alpha = 1, 2, 3$ et 4.

9. Intégrales de Bertrand

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Donner les valeurs de α et β pour lesquelles l'intégrale impropre $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta t}$ est convergente.

b) Même question pour l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta t}$.

10. Intégrales de Fresnel

a) En utilisant un changement de variable approprié, montrer que l'intégrale impropre suivante est convergente :

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,dt\,.$$

b) En déduire la nature des intégrales de Fresnel

$$\int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt \ , \ \int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt \, .$$

c) Ces intégrales sont-elles absolument convergentes ?

11.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue périodique de période $T > 0$, non identiquement nulle, et telle que $\int_0^T f(t)\, dt = 0$.

a) Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une primitive de f. Montrer que F est périodique et en déduire que F est bornée (justifier votre réponse).

b) Montrer que la fonction $g(t) = \dfrac{f(t)}{t}$ est intégrable au sens impropre sur $[T, +\infty)$.

c) Montrer que la fonction $|g(t)|$ n'est pas intégrable au sens impropre sur $[T, +\infty)$.

12.

Soient $a > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue admettant des limites en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que l'intégrale impropre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x+a) - f(x))\, dx$$

est convergente et la calculer.

Exercice 14 (Fonction Gamma). Pour un nombre réel s, on considère l'intégrale impropre

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt \, .$$

1) Pour quelles valeurs de s, $\Gamma(s)$ est-il bien défini ?

2) Montrer que $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ pour tout $s > 0$. En déduire la formule

$$\Gamma(n+1) = n!$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Montrer que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, puis calculer $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) Calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

13. Formule de Wallis

(1) Calculer par récurrence les intégrales

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n(t)\, dt$$

(2) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\frac{I_{2k+2}}{I_{2k}} \leqslant \frac{I_{2k+1}}{I_{2k}} \leqslant 1$, en déduire la formule de Wallis :

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{(2.3 \ldots 2k)^2}{(2k+1)(2k-1!)^2} = \frac{\pi}{2}$$