Séminaire des doctorants : Équations elliptiques semi-linéaires avec un exposant critique

29 janvier 2009

Table des matières

Introduction

Le but de cet exposé est d'étudier l'existence de solutions au problème suivant :

$$\begin{aligned} &\Delta u + hu = u^{p-1} \text{ sur } \Omega, \\ &u > 0 \text{ sur } \Omega, \\ &u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, et $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Hormis le fait que ce problème mérite en lui-même d'être étudié, il se trouve qu'il apparaît naturellement en géométrie riemannienne. En effet, soit (M^n, g) une variété riemannienne de dimension $n \geq 3$, on se pose la question suivante :

Existe-t-il une métrique conforme à g, i.e $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ où u est une fonction positive, à courbure scalaire constante ?

La nouvelle courbure scalaire $S_{\tilde{g}}$ étant donnée par :

$$\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g u + S_g u = S_{\tilde{g}} u^{\frac{n+2}{n-2}}, \tag{2}$$

où Δ_g est le laplacien de Beltrami. L'existence d'une métrique conforme à courbure scalaire constante est équivalente à l'existence d'une solution positive de (2). Ce problème est plus connu sous le nom de problème de Yamabe et sera à l'origine de grand développement en analyse géométrique.

Une approche naturelle d'un tel problème est l'utilisation d'une méthode variationnelle. Mais lorsque l'exposant p devient trop grand (plus grand que l'exposant critique pour l'injection de Sobolev de H_0^1), les suites minimisantes ne sont *a priori* plus compactes. D'ailleurs, quand $p = 2^*$, la situation est très différente du cas sous-critique, comme nous allons le voir, notamment grâce à l'obstruction de Pohožaev. Néanmoins, nous montrerons que sous un certain niveau d'énergie il est possible de récupérer la compacité perdue.

Dans la première partie nous faisons quelques rappels sur les injections de Sobolev, puis dans une seconde partie, nous traiterons du cas sous-critique et de quelques obstructions pour le cas critique et sur-critique. Dans la troisième partie on démontre l'existence de solutions dans le cas critique, avec apparition d'un phénomène de petite dimension. Enfin dans la dernière partie nous énoncerons quelques développements récents sur la compréhension de ce phénomène.

Ce texte est librement inspiré de [5] et [12]. Pour plus de précisions sur le problème de Yamabe, on pourra consulter [9].

1 Injections de Sobolev et existence de fonctions extrémales

1.1 Définitions des espaces de Sobolev

Définition 1.1 *Soit $k \in \mathbb{N}$ et $p \geq 1$, on définit alors pour $u \in C^\infty(\Omega)$,*

$$\|u\|_{k,p} = \sum_{|\alpha| \leq k} \left(\int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On définit les espaces de Sobolev d'ordre k en différentiation et d'ordre p en intégration par

$W^{k,p}(\Omega) =$ *la complétion de $\{u \in C^\infty(\Omega)$ t.q. $\|u\|_{k,p} < +\infty\}$ pour la norme $\|.\|_{k,p}$,*
et
$W_0^{k,p}(\Omega) =$ *la fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{k,p}(\Omega)$.*

On notera H^1 et H_0^1 pour $W^{1,2}$ et $W_0^{1,2}$.

1.2 Injections de Sobolev : le cas classique

Par soucis de clarté, on présente ici le cas $k = 1$, voir [1] pour le cas général.

Une question naturelle est :

Sachant que $u \in W^{1,p}$, ne gagne t-on pas en intégrabilité, du fait du contrôle de son gradient ?

La réponse est affirmative, mais l'espace dépend de la position de p par rapport à n. Dans cet exposé on s'intéressera au cas où $p < n$, voir [1] pour les autres cas.

Théorème 1.1 (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev) *Supposons que $1 \leq p < n$ et posons $p^* = \frac{np}{n-p}$. Alors il existe $C > 0$, dépendant seulement de p et n, telle que*

$$\|u\|_{p^*} \leq C \|\nabla u\|_p, \tag{3}$$

pour tout $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

On remarque facilement que $p^* > p$ et donc que l'on gagne en intégrabilité. Pour ce convaincre que $L^{p^*}(\Omega)$ est le bon espace, il suffit de remplacer u par $u(\lambda\ .\ )$ dans (3). On remarquera aussi, en considérant $\ln(\ln(1 + \frac{1}{r}))$ sur $B(0,1)$, que l'inégalité est fausse si $n = p$:

$$W_0^{1,p}(\Omega) \not\subset L^\infty(\Omega).$$

Corollaire 1.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq p < n$. Alors il existe $C > 0$, dépendant seulement de p et n, telle que*

$$\|u\|_{p^*} \leq C\|\nabla u\|_p,$$

pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

On remarque alors que les normes $\|u\|_{k,p}$ et $\|\nabla u\|_p$ sont équivalentes sur $W_0^{1,p}(\Omega)$.

1.3 Meilleures constantes et fonctions extrémales

Une fois les injections démontrées, vient naturellement la question de la meilleure constante. Pour étudier cela, posons, pour $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,

$$S(\Omega, p) = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u\|_{p^*}^p}.$$

Proposition 1.1 $S(\Omega, p)$ *est indépendante de Ω, c'est à dire*

$$S(\Omega, p) = S(\mathbb{R}^n, p).$$

Preuve :
Soit $u \in C_c^\infty(\Omega)$, que l'on prolonge par 0 en dehors de Ω. Dés lors $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Donc, $C_c^\infty(\Omega)$ peut être considéré comme un sous espace de $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Par densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, on en déduit alors l'inégalité suivante

$$S(\Omega, p) = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u\|_{p^*}^p} = \inf_{u \in C_c^\infty(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u\|_{p^*}^p} \geq S(\mathbb{R}^n, p).$$

D'autre part soit $x_0 \in \Omega$ et (u_n) une suite minimisante de $S(\mathbb{R}^n, p)$ telle que $\|u_n\|_{p^*} = 1$. Par densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, on peut supposer que u_n est à support compact. Posons $v_n = \lambda_n^{\frac{p-n}{p}} u_n(\frac{x-x_0}{\lambda_n})$, en choisissant λ_n assez petit, on a $v_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Enfin en utilisant l'invariance scalaire du quotient de $\frac{\|\nabla u\|_p}{\|u\|_{p^*}}$, on obtient

$$S(\Omega, p) \leq \liminf_{n \to +\infty} \|\nabla u_n\|_p^p = S(\mathbb{R}^n, p).$$

Ce qui achève la preuve. $\square$

Pour $p = 1$, le problème est équivalent au problème isopérimétrique. Dans ce cas on a $S(\mathbb{R}^n, 1) = n^{\frac{n-1}{n}} \omega_{n-1}^{\frac{1}{n}}$ et elle est atteinte si et seulement si Ω est une boule.

Pour $p > 1$, la meilleure constante n'est jamais atteinte sur un domaine différent de $\mathbb{R}^n$ sinon on aurait une solution de l'équation d'Euler-Lagrange associé à ce problème de minimisation, c'est à dire

$$- \div (|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = u|u|^{p^*-2} \text{ sur } \mathbb{R}^n$$

$$u \geq 0 \text{ on } \Omega$$

et

$$u = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^n \setminus \Omega.$$

Par le principe du maximum u serait identiquement nulle.
Par contre elle est toujours atteinte sur $\mathbb{R}^n$ par une fonction u qui est nécessairement de la forme suivante :

$$u(x) = \lambda \left(\mu + |x - x_0|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{1-\frac{n}{p}} \tag{4}$$

avec $x_0 \in \mathbb{R}^n$, μ un réel positif et λ un réel. Nous esquissons une preuve pour $p = 2$. Soit $u \in H_0^1$ une solution du problème de minimisation, alors u (à multiplication par un scalaire près) est solution faible de

$$\Delta u = u^{2^*-1}.$$

D'après le résultat de Gidas-Ni-Nirenberg, voir [6], u est radiale. Le résultat se ramène alors, à démontrer l'unicité des solutions de l'équation radiale ayant même conditions initiales et une certaine décroissance à l'infini.

1.4 Injection de Sobolev : le cas compact

Théorème 1.2 (Rellich-Kondrakov) *Soit Ω un ouvert borné et $1 \leq p < n$. Alors pour tout $q \in [1, p^*[$ l'injection $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ est compacte.*

En particulier, toute suite bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$.

2 Le cas sous-critique et l'identité de Pohožaev

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, et $p \geq 1$. On considère, le problème suivant :

$$\Delta u + hu = u|u|^{p-2} \text{ sur } \Omega, \tag{5a}$$

$$u > 0 \text{ sur } \Omega, \tag{5b}$$

$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \tag{5c}$$

2.1 Le cas sous-critique

Afin d'étudier l'existence de solution pour cette équation, nous introduisons la notion d'opérateur coercif.

Définition 2.1 *On dit que l'opérateur $\Delta + h$ est coercif si il existe $c > 0$ tel que*

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 + hu^2 \, dx \geq c\|u\|^2_{H_0^1}$$

pour toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$.

Par exemple, on remarque que $\Delta + h$ est coercif dés que $h > -\lambda_1$ sur $\overline{\Omega}$. Ici, λ_1 est la première valeur propre du laplacien sur Ω.

Théorème 2.1 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, si $1 < p < 2^*$, alors (1) admet une solution si et seulement $\Delta + h$ est coercif.*

Preuve :
Soit u une solution du problème. En testant l'équation contre ϕ_1, un vecteur propre positif associé à la première valeur propre μ_1 de $\Delta + h$, on obtient :

$$\mu_1 \int_\Omega u\phi_1 \, dx = \int_\Omega \phi_1 u^{p-1} \, dx > 0.$$

Et alors $\mu_1 > 0$, ce qui prouve la coercivité $\Delta + h$.

Supposons maintenant que $\Delta + h$ est coercif. Observons que (5a) est l'équation d'Euler-Lagrange de la fonctionnelle suivante :

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla u|^2 + hu^2) \, dx - \frac{1}{p} \int_\Omega |u|^p \, dx$$

définie sur $H_0^1(\Omega)$. Mais cette fonctionnelle n'est ni minorée, ni majorée [1]. Toutefois on remarque, en utilisant l'homogénéité de l'équation, que l'on peut obtenir une solution de (5a) en considérant le problème sous contrainte pour la fonctionnelle suivante

$$\tilde{E}(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla u|^2 + hu^2) \, dx$$

sur

$$H = \{u \in H_0^1(\Omega) \text{ t.q } \|u\|_p = 1\}.$$

Tout d'abord, l'injection de Sobolev nous assure que H est non vide. Puis on pose

$$\lambda = \inf_{u \in H} \int_\Omega (|\nabla u|^2 + hu^2) \, dx.$$

Puisque $\Delta + h$ est coercif, on a bien $\lambda > 0$. Soit (u_n) une suite de fonctions de H telle que

$$\int_\Omega (|\nabla u_n|^2 + hu_n^2) \, dx \to \lambda \text{ quand } n \to +\infty.$$

Toujours en utilisant la coercivité de l'opérateur, on remarque que (u_n) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Quitte à extraire une sous-suite (encore notée (u_n)), il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$. Puisque $p < 2^*$, l'injection de Sobolev de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ est compacte. Quitte à extraire de nouveau, on a donc $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$ et $u \in H$. De même, on a :

$$\int_\Omega hu_n^2 \, dx \to \int_\Omega hu^2 \, dx \text{ quand } n \to +\infty.$$

1. Par contre cette fonctionnelle se prête à un argument de type "mountain-pass".

De plus la convergence faible de (u_n) nous assure que

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

On en déduit que

$$\int_\Omega (|\nabla u|^2 + hu^2)\, dx \leq \lambda.$$

Puisque $u \in H$, u est bien solution du problème de minimisation. Vu que $|u| \in H$, $|u|$ est aussi solution du problème de minimisation grâce au théorème de dérivé de la valeur absolue, voir [10]. Donc on peut supposer que u est positive. Grâce au théorème d'Euler-Lagrange, $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible de

$$\Delta u + hu = \mu u^{p-1}$$

pour $\mu \in \mathbb{R}$. En multipliant l'équation par u et en intégrant par partie, on vérifie que $\mu = \lambda > 0$. Finalement $\lambda^{\frac{1}{p-2}} u$ est une solution faible de (1). Les résultats standards de régularité et le principe du maximum, voir annexes, achèvent la preuve. ■

2.2 L'identité de Pohŏzaev et quelques conséquences

Soit u une solution du problème suivant

$$\begin{cases} \Delta u = u|u|^{p-2} - hu \text{ sur } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{6}$$

On multiplie (6) par $\langle x, \nabla u\rangle$, puis on intègre par partie chaque terme. Le premier terme donne

$$\int_\Omega \langle x, \nabla u\rangle \Delta u\, dx = \int_\Omega \langle \nabla\langle x, \nabla u\rangle, \nabla u\rangle\, dx - \int_{\partial\Omega} \langle x, \nabla u\rangle\langle \nabla u, \nu\rangle\, dx$$

où ν est la normale sortante. Mais vu que $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on a pour tout $x \in \partial\Omega$,

$$\nabla u(x) = \langle \nabla u(x), \nu\rangle \nu.$$

Le terme de droite devient alors,

$$\int_{\partial\Omega} \langle x, \nabla u\rangle\langle \nabla u, \nu\rangle\, dx = \int_{\partial\Omega} \langle x, \nu\rangle\langle \nabla u, \nu\rangle^2\, dx$$

Suit alors,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \langle x, \nabla u\rangle \Delta u\, dx &= \int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\langle x, \nabla|\nabla u|^2\rangle\, dx - \int_{\partial\Omega} \langle x, \nu\rangle\langle \nabla u, \nu\rangle^2\, dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{n}{2}|\nabla u|^2\, dx + \int_{\partial\Omega} \langle \frac{x}{2}, \nu\rangle|\nabla u|^2\, dx - \int_{\partial\Omega} \langle x, \nu\rangle\langle \nabla u, \nu\rangle^2\, dx \\ &= \frac{2-n}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \int_{\partial\Omega} \langle \frac{x}{2}, \nu\rangle\langle \nabla u, \nu\rangle^2\, dx \end{aligned}$$

En multipliant par u l'équation et en intégrant par partie on obtient

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx = \int_\Omega (|u|^p - hu^2) dx$$

Finalement, le premier terme donne

$$\begin{aligned}\int_\Omega \langle x, \nabla u\rangle \Delta u\, dx = & \frac{2-n}{2}\int_\Omega (|u|^p - hu^2)dx \\ & - \int_{\partial\Omega} \langle \frac{x}{2}, \nu\rangle \langle \nabla u, \nu\rangle^2\, dx\end{aligned} \tag{7}$$

D'autre part le second terme devient :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \langle x, \nabla u\rangle (u|u|^{p-2} - hu)\, dx &= \int_\Omega \left(\frac{1}{p}\langle x, \nabla |u|^p\rangle - \frac{1}{2}\langle xh, \nabla u^2\rangle\right)\, dx \\ &= \int_\Omega \left(-\frac{n}{p}|u|^p + \frac{1}{2} div(xh)u^2\right)\, dx\end{aligned} \tag{8}$$

On déduit alors de (7) et (8),

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left(-\frac{n}{p}|u|^p + \frac{1}{2} div(xh)u^2\right)\, dx = & \frac{2-n}{2}\int_\Omega (|u|^p - hu^2)dx \\ & - \int_{\partial\Omega} \langle \frac{x}{2}, \nu\rangle \langle \nabla u, \nu\rangle^2\, dx\end{aligned}$$

Ce qui donne finalement **l'identité de Pohožaev**,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left(\left(\frac{n-2}{2} - \frac{n}{p}\right)|u|^p + \left(h + \frac{1}{2}\langle x, \nabla h\rangle\right) u^2\right)\, dx = \\ & - \int_{\partial\Omega} \langle \frac{x}{2}, \nu\rangle \langle \nabla u, \nu\rangle^2\, dx\end{aligned} \tag{9}$$

Remarque 2.1 *Le choix de $\langle x, \nabla u\rangle$ n'est pas harzardeux, il vient une fois de plus de l'invariance scalaire de notre équation. Soit une solution u positive de (6), posons $u_\lambda(x) = \lambda^{\frac{2}{p-2}} u(\lambda x)$. On a :*

$$\Delta u_\lambda + \lambda^2 h_\lambda u_\lambda = u_\lambda^{p-1},$$

où $h_\lambda(x) = h(\lambda x)$. Soit $v = \left(\frac{d}{d\lambda}u_\lambda\right)_{\lambda=1} = \frac{2}{p-2}u + \langle x, \nabla u\rangle$, v vérifie alors

$$\Delta v + (2h + \langle x, \nabla\rangle)u + hv = (p-1)u^{p-2}v.$$

Puis en multipliant par u et en intégrant par partie on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega (2h + \langle x, \nabla h\rangle)u^2\, dx + \int_{\partial\Omega} \langle \nabla u, \nu\rangle \langle x, \nabla u\rangle &= (p-2)\int_\Omega u^{p-1} v\, dx \\ &= (p-2)\int_\Omega u^{p-1}\left(\frac{2}{p-2}u + \langle x, \nabla u\rangle\right)\, dx \\ &= \int_\Omega 2u^p + \frac{p-2}{p}\langle x, \nabla u^p\rangle\, dx \\ &= \int_\Omega \left(2 - \frac{n(p-2)}{p}\right) u^p\, dx\end{aligned}$$

Proposition 2.1 *Soit* Ω *un ouvert étoilé par rapport à* 0*,* $p > 2^*$ *et* u *une solution de*

$$\begin{aligned} &\Delta u = u|u|^{p-2} \ \textit{sur } \Omega, \\ &u = 0 \ \textit{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{10}$$

Alors u *est identiquement nulle.*

Preuve :
En remplaçant h par 0 dans (9) et en remarquant que le terme de droite est négatif, on a

$$\int_\Omega |u|^p \, dx \leq 0,$$

ce qui prouve la proposition. □

Maintenant nous examinons le cas critique. Dans le cas d'un ouvert étoilé, l'identité de Pohožaev donne l'obstruction suivante sur h.

Proposition 2.2 *Soit* Ω *un ouvert étoilé par rapport à* 0 *et* $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *satisfaisant*

$$h + \frac{\langle x, \nabla h \rangle}{2} \geq 0.$$

Si u *est une solution de*

$$\begin{cases} \Delta u + hu = u|u|^{2^*-2} \ \textit{sur } \Omega, \\ u \geq 0, \\ u = 0 \ \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{11}$$

Alors u *est identiquement nulle.*

Preuve :
En raisonnant comme dans la proposition précédente, on obtient

$$\int_\Omega hu^2 + \frac{1}{2}\langle x, \nabla h \rangle u^2 \, dx = -\int_{\partial\Omega} \langle \frac{x}{2}, \nu \rangle \langle \nabla u, \nu \rangle^2 \, dx.$$

En appliquant les hypothèse vérifiées par h, on a

$$\langle \nabla u(x), \nu \rangle \equiv 0, \text{ sur } \partial\Omega$$

Enfin, le principe du maximum fort impose $u \equiv 0$. □

En particulier si $h = \lambda$, on a nécessairement $\lambda < 0$.

3 Le cas critique

Dans cette partie on s'intéresse au cas où $p = 2^*$, notre problème devient alors

$$\Delta u + \lambda u = u|u|^{2^*-2} \text{ sur } \Omega, \tag{12a}$$
$$u > 0 \text{ sur } \Omega, \tag{12b}$$
$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \tag{12c}$$

3.1 Le résultat de Brezis-Nirenberg

Au début des années 80, Brezis et Nirenberg démontrent le résultat suivant, révélant un comportement spécifique à la dimension 3.

Théorème 3.1 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*,*

- *si* $n \geq 4$ *alors pour tout* $\lambda \in]-\lambda_1, 0[$*, (12) admet une solution.*
- *si* $n = 3$*, alors il existe* $0 < \lambda^* < \lambda_1$ *tel que pour tout* $\lambda \in]-\lambda_1, -\lambda^*[$ *(12) admet une solution,*
- *si* Ω *est une boule, alors* $\lambda^* = \frac{\lambda_1}{4}$ *et il n'existe pas de solution au problème (12) pour* $\lambda \in]0, -\lambda^*]$*.*

Par analogie avec le problème de la meilleure constante dans l'inégalité de Sobolev, on définit :

$$S_\lambda(u) = \frac{\int_\Omega (|\nabla u|^2 + \lambda u^2) dx}{\left(\int_\Omega |u|^{2^*}\, dx\right)^{\frac{2}{2^*}}}$$

et

$$S(\Omega, \lambda) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} S_\lambda(u)$$

On remarque $S(\Omega, \lambda) \leq S(\Omega, 0) = S$ pour tout $\lambda \leq 0$.

Lemma 3.1 *Soit* Ω *un domaine borné de* $\mathbb{R}^n$*,* $n \geq 3$*. Si*

$$S(\Omega, \lambda) < S,$$

alors $S(\Omega, \lambda)$ *est atteinte.*

Preuve :
Soit (u_n) une suite minimisante pour S_λ dans $H_0^1(\Omega)$, que l'on normalise avec $\|u\|_{2^*} = 1$. Quitte à remplacer notre suite par $(|u_n|)$, on peut supposer que $u_n \geq 0$. L'inégalité de Holder donne

$$S_\lambda(u) = \int_\Omega (|\nabla u|^2 + \lambda u^2) dx \geq \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - c,$$

ce qui assure que (u_n) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Quitte à extraire une sous-suite, il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ et fortement dans $L^2(\Omega)$. En utilisant le théorème de Vitali, on a,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(|u_n|^{2^*} - |u_n - u|^{2^*}\right) dx &= \int_\Omega \int_0^1 \frac{d}{dt} |u_n + (t-1)u|^{2^*}\, dt\, dx \\
&= 2^* \int_0^1 \int_\Omega \Big(u_n + (t-1)u\Big) |u_n + (t-1)u|^{2^*-2} \Big) u\, dx\, dt \\
&\to 2^* \int_0^1 \int_\Omega tu|tu|^{2^*-2} u\, dx\, dt = \int_\Omega |u|^{2^*}\, dx \text{ quand } n \to +\infty.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2\, dx = \int_\Omega |\nabla u_n - u|^2\, dx + \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + o(1).$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned}
S_\lambda(u_n) &= \int_\Omega |\nabla(u_n - u)|^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 + \lambda |u|^2 \, dx + o(1) \\
&\geq S\|u - u_n\|_{2^*}^2 + S(\lambda, \Omega)\|u\|_{2^*}^2 + o(1) \\
&\geq S\|u - u_n\|_{2^*}^{2^*} + S(\lambda, \Omega)\|u\|_{2^*}^{2^*} + o(1) \\
&\geq (S - S(\lambda, \Omega))\|u - u_n\|_{2^*}^2 + S(\lambda, \Omega) + o(1).
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $S > S(\lambda, \Omega)$, on a bien $u_n \to u$ dans $L^{2^*}(\Omega)$. On en déduit que $\|u\|_{2^*} = 1$ et

$$S_\lambda(u) \leq S(\lambda, \Omega),$$

ce qui prouve le lemme. $\square$

Preuve du théorème 3.1 :
Considérons la famille de fonctions extrémales suivantes :

$$u_\varepsilon(x) = \frac{[n(n-2)\varepsilon^2]^{\frac{n-2}{4}}}{[\varepsilon^2 + |x|^2]^{\frac{n-2}{2}}}, \ \varepsilon > 0.$$

$u_\varepsilon \in H_0^1(\mathbb{R}^n)$ et vérifie l'équation

$$\Delta u_\varepsilon = u_\varepsilon^{2^*-1} \text{ dans } \mathbb{R}^n.$$

En fait on a même $S_0(u_\varepsilon) = S$. Ce qui donne

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = \|u_\varepsilon\|_{2^*}^{2^*} = S^{\frac{n}{2}} \text{ pour tout } \varepsilon > 0.$$

Quitte à translater notre ouvert, on peut supposer que $0 \in \Omega$. Soit $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ une fonction plateau telle que $\eta \equiv 1$ sur $B(0, \rho) \subset \Omega$. Posons $\tilde{u}_\varepsilon = \eta u_\varepsilon$, on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla \tilde{u}_\varepsilon|^2 \, dx &= \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 \eta^2 \, dx + O(\varepsilon^{n-2}) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx + O(\varepsilon^{n-2}) = S^{\frac{n}{2}} + O(\varepsilon^{n-2}).
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\tilde{u}_\varepsilon|^{2^*} \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon|^{2^*} \, dx + O(\varepsilon^n) \\
&= S^{\frac{n}{2}} + O(\varepsilon^n).
\end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\tilde u_\varepsilon|^2\,dx &\geq \int_{B(0,\rho)} |u_\varepsilon|^2\,dx \\
&\geq \int_{B(0,\varepsilon)} \frac{[n(n-2)\varepsilon^2]^{\frac{n-2}{2}}}{[2\varepsilon^2]^{n-2}} \\
&+ \int_{B(0,\rho)\setminus B(0,\varepsilon)} \frac{[n(n-2)\varepsilon^2]^{\frac{n-2}{2}}}{[2|x|^2]^{n-2}} \\
&= c_1\varepsilon^2 + c_2\varepsilon^{n-2}\int_\varepsilon^\rho r^{3-n}dr \\
&= \left\{ \begin{array}{c} c\varepsilon^2 + O(\varepsilon^{n-2}),\ \text{si } n\geq 5, \\ c\varepsilon^2|\ln\varepsilon| + O(\varepsilon^2),\ \text{si } n=4, \\ c\varepsilon + O(\varepsilon^2),\ \text{si } n=3, \end{array}\right.
\end{aligned}$$

où c, c_1 et c_2 sont des constantes positives. Finalement si $n \geq 5$, on a

$$\begin{aligned}
S_\lambda(\tilde u_\varepsilon) &\leq \frac{(S^{\frac{n}{2}} - c\lambda\varepsilon^2 + O(\varepsilon^{n-2})}{(S^{\frac{n}{2}} + O(\varepsilon^n))^{\frac{2}{2^*}}} \\
&= S - c\lambda\varepsilon^2 + O(\varepsilon^{n-2}) < S,
\end{aligned}$$

pour $\varepsilon > 0$ assez petit. De la même manière pour $n = 4$, on a

$$S_\lambda(\tilde u_\varepsilon) \leq S - c\lambda\varepsilon^2|ln\varepsilon| + O(\varepsilon^2) < S$$

pour $\varepsilon > 0$ assez petit. D'après le lemme 3.1, $S(\lambda, \Omega)$ est atteint par $u \in H_0^1(\Omega)$. u vérifie alors

$$\Delta u + \lambda u = S_\lambda u^{2^*-1},$$

au sens faible. En testant cette dernière équation contre $\phi_1 > 0$ un vecteur propre du laplacien associé à λ_1, on constate que pour $\lambda > \lambda_1$, on a bien $S_\lambda > 0$. Finalement quitte à remplacer u par $S_\lambda^{\frac{4}{n-2}}u$, on obtient une solution faible de

$$\Delta u + \lambda u = u^{2^*-1}.$$

Puis les théorèmes de régularité et le principe du maximum nous assure que $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ et $u > 0$.

Par contre, lorsque $n = 3$, le gain obtenue par la présence de λ ne peut compenser la perte due à la troncature que pour λ "assez négatif". Nous donnons une preuve rapide en omettant les calculs, voir [2] pour les détails.

Supposons que $\Omega = B(0, 1)$ et soyons un peu plus précis dans le développement limité. Tout d'abord on pose $\tilde u_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\eta(r)}{(\varepsilon^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}$ et on vérifie que

$$\int_\Omega |\nabla \tilde u_\varepsilon|^2\,dx = K_1 + \omega_3\varepsilon\int_0^1 |\eta'(r)|^2dr + O(\varepsilon^2),$$

$$\int_\Omega |\tilde{u}_\varepsilon|^{2^*}\ dx = K_2 + O(\varepsilon^2)$$

et

$$\int_\Omega |\tilde{u}_\varepsilon|^2\ dx = \omega_3\varepsilon \int_0^1 |\eta(r)|^2 dr + O(\varepsilon^2),$$

où K_1 et K_2 sont deux constantes positives vérifiant $\frac{K_1}{K_2} = S$ et ω_3 est le volume de la boule unité. Finalement, en prenant $\eta(r) = \left(cos\frac{\pi r}{2}\right)$, on obtient

$$S_\lambda(\tilde{u}_\varepsilon) = S + C\left(\frac{\lambda_1}{4} - \lambda\right)\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

où C est une constante positive. En procédant comme en dimension plus grande que 4, on obtient $S(\Omega,\lambda) < S$ pour tout $\lambda \in]-\frac{\lambda_1}{4}, -\lambda_1[$. On notera que ce résultat est optimale, dans le sens où pour $\lambda \geq \frac{\lambda_1}{4}$ le problème n'admet pas de solution.
Revenons au cas d'un ouvert borné quelconque. Soit $R > 0$ tel que $|B(0,R)| = |\Omega|$. Soit $\tilde{u}$ le réarrangement symétrique décroissant de u. On sait, voir [10] et [13], que si $u \in H_0^1(\Omega)$ alors $\tilde{u} \in H_0^1(B(0,R))$ et

$$\begin{aligned} &\|\tilde{u}\|_q = \|u\|_q \text{ pour tout } q < 2^* \\ &\text{et} \\ &\|\nabla\tilde{u}\|_2^2 \leq \|\nabla u\|_2^2. \end{aligned} \tag{13}$$

D'autre part vu que $S(B(0,R),\lambda) = S$ pour $\lambda = -\frac{\lambda_1}{4}$, on a

$$\|\nabla\tilde{u}\|_2^2 - \frac{\lambda_1}{4}\|\tilde{u}\|_2^2 \geq S\|\tilde{u}\|_6^2. \tag{14}$$

En combinant (15) et (14) on obtient, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\|\nabla u\|_2^2 - \frac{\lambda_1}{4}\|u\|_2^2 \geq S\|u\|_6^2.$$

Enfin en remarquant que $\lambda_1(B(0,R)) \leq \lambda_1(\Omega)$, la dernière inégalité nous permet de dire qu'il existe $\lambda^* \in]-\lambda_1, 0[$ tel que

$$\begin{aligned} &S(\Omega,\lambda) < S \text{ pour } \lambda < \lambda^* \\ &\text{et} \\ &S(\Omega,\lambda) = S \text{ pour } \lambda \in]\lambda^*, 0[. \end{aligned} \tag{15}$$

Ce qui achève la preuve du théorème. ■

En fait, le résultat reste vraie pour des termes linéaires plus généraux. Considérons le problème suivant,

$$\Delta u + h(x)u = u|u|^{p-2} \text{ sur } \Omega, \tag{16a}$$
$$u > 0 \text{ sur } \Omega, \tag{16b}$$
$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \tag{16c}$$

Toujours dans [2], on trouve le résultat suivant,

Théorème 3.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, et $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel qu'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $h(x_0) < 0$. Si $\Delta + h$ est coercif, alors(16) admet une solution.*

Pour montrer cela, il suffit de reprendre la preuve du théorème 3.1, en choisissant x_0 comme point de concentration de notre suite de fonctions extrémales.

3.2 Existence de solutions dans le cas d'un domaine non-simplement connexe

Lorsque le domaine n'est plus simplement connexe, il existe des solutions à notre problème, lorsque $\lambda = 0$, ce qui était impossible dans le cas d'un ouvert étoilé au vu de l'identité de Pohožaev.

Théorème 3.3 (Bahri-Coron) *Soit Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$,$n \geq 3$, vérifiant les conditions suivantes : il existe $0 < R_1 < R_2 < +\infty$ telles que*

$$\Omega \supset \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } R_1 < |x| < R_2\},$$

et

$$\Omega \not\supset \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } |x| < R_1\}.$$

Alors, pour $\frac{R_2}{R_1}$ grand, le problème (12) admet une solution pour $\lambda = 0$.

4 Résultat récent sur le comportement en dimension 3

4.1 Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de solutions

En dimension 3, la situation est différente. Soit g_h la partie régulière de la fonction de Green de $\Delta + h$, on a le résultat suivant due à Druet, voir [4] .

Théorème 4.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que $\Delta + h$ est coercif, alors (16) admet une solution si et seulement si il existe $x \in \Omega$ tel que $g_h(x, x) > 0$.*

4.2 Stabilité de l'obstruction de Pohožaev

Au vu des résultats de la partie 12, il semble que la stabilité de l'obstruction de Pohožaev dépende de la dimension. En dimension 4, elle est complètement instable dans le sens ou dès que h est négatif sur Ω, le théorème 3.2 nous assure de l'existence d'une solution, alors que pour $h \equiv 0$ il n'existe aucune solution. Par contre en dimension 3, au moins lorsque Ω est une boule et $h \equiv \lambda$, il y a une sorte de stabilité autour de 0 dans le sens ou il existe un voisinage V de 0 tel que pour tout $\lambda \in V$, le problème (12) n'admet aucune solution minimisante. Afin de donner un résultat plus précis on définit la notion de stabilité suivante.

Définition 4.1 *Soit Ω un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^3$ et $(X, \|.\|)_X)$ un espace de Banach de fonctions sur Ω. Soit $h_0 \in X \cap C^1(\mathbb{R}^3)$ qui satisfait*

$$h + \frac{\langle x, \nabla h \rangle}{2} \geq 0. \tag{17}$$

On dit que l'obstruction de Pohožaev est X-stable en (h_0, Ω) si il existe $\delta(h_0, \Omega, X) > 0$ tel que pour toute fonction h vérifiant

$$\|h - h_0\|_X \leq \delta(h_0, \Omega, X),$$

le problème n'admette pas d'autre solution que la solution nulle.
On dit que l'obstruction de Pohožaev est X-stable si elle est X-stable en (h_0, Ω), pour tout domaine étoilé et pour tout $h_0 \in X \cap C^1(\Omega)$ vérifiant (17).

Comme le laissait penser le cas où h est constante, Druet et Laurain, voir [3], démontrent que l'obstruction est stable.

Théorème 4.2 *L'obstruction de Pohožaev est $C^{0,\eta}$-stable pour $\eta > 0$.*

Ce résultat est optimal. Par contre si on se restreint au solution radial sur une boule, on peut remplacer $C^{0,\eta}$ par n'importe quel L^p avec $p > 3$. On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 4.1 *Soit Ω un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\lambda \in]-\delta, +\infty[$ le problème (12) n'admet aucune solution.*

A Régularité et principe du maximum

Dans ce court appendice nous donnons deux théorèmes qui nous assurent de la régularité et de la stricte positivité des solutions faibles de notre problème. Pour plus de détails sur ces questions, on pourra consulter la "bible" [7].

A.1 Un théorème de régularité

Théorème A.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, dont le bord est lisse, et $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^∞ vérifiant $f(x,t) \leq C(1 + |t|^{2^*})$. Si $u \in H^1(\Omega)$ est solution faible de,*

$$\Delta u = f(x, u) \text{ sur } \Omega,$$
$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Alors $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

On trouvera une preuve concise du résultat suivant dans [11].

A.2 Principe du maximum de Hopf

Théorème A.2 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, dont le bord est lisse, et L opérateur de la forme*

$$L(u) = \Delta u + b^i \partial_i u + cu,$$

où b^i et c sont des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$, et de plus c est positive. Si $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ vérifie

$$L(u) \geq 0.$$

alors le minimum de u si il est négatif est atteint sur le bord ou alors u est constant.

On trouvera une preuve de ce théorème dans le chapitre 2 de [8]. En pratique on utilise le corollaire suivant :

Corollaire A.1 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, dont le bord est lisse, et $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Si $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ une fonction positive vérifiant*

$$\Delta u \geq u f(x,u) \text{ sur } \Omega,$$
$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

alors u est strictement positive sur Ω ou identiquement nulle.

Références

[1] Robert A. Adams and John J. F. Fournier. *Sobolev spaces*, volume 140 of *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam)*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second edition, 2003.

[2] Haïm Brézis and Louis Nirenberg. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. *Comm. Pure Appl. Math.*, 36(4) :437–477, 1983.

[3] O. Druet and P. Laurain. Stability of the pohožaev obstruction in dimension 3. *J.E.M.S*, 2010.

[4] Olivier Druet. Elliptic equations with critical Sobolev exponents in dimension 3. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 19(2) :125–142, 2002.

[5] Olivier Druet. *Notes de cours.* 2007.

[6] B. Gidas, Wei Ming Ni, and L. Nirenberg. Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbf{R}^n$. In *Mathematical analysis and applications, Part A*, volume 7 of *Adv. in Math. Suppl. Stud.*, pages 369–402. Academic Press, New York, 1981.

[7] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.

[8] Qing Han and Fanghua Lin. *Elliptic partial differential equations*, volume 1 of *Courant Lecture Notes in Mathematics*. New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1997.

[9] Emmanuel Hebey. *Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés*. Pure and Applied Mathematics (Amsterdam). Diderot Editeur, 1997.

[10] Elliott H. Lieb and Michael Loss. *Analysis*, volume 14 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2001.

[11] Petru Mironescu. *Notes de cours*. 2007.

[12] Michael Struwe. *Variational methods*, volume 34. Springer-Verlag, Berlin, fourth edition, 2008.

[13] Giorgio Talenti. Best constant in Sobolev inequality. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 110 :353–372, 1976.