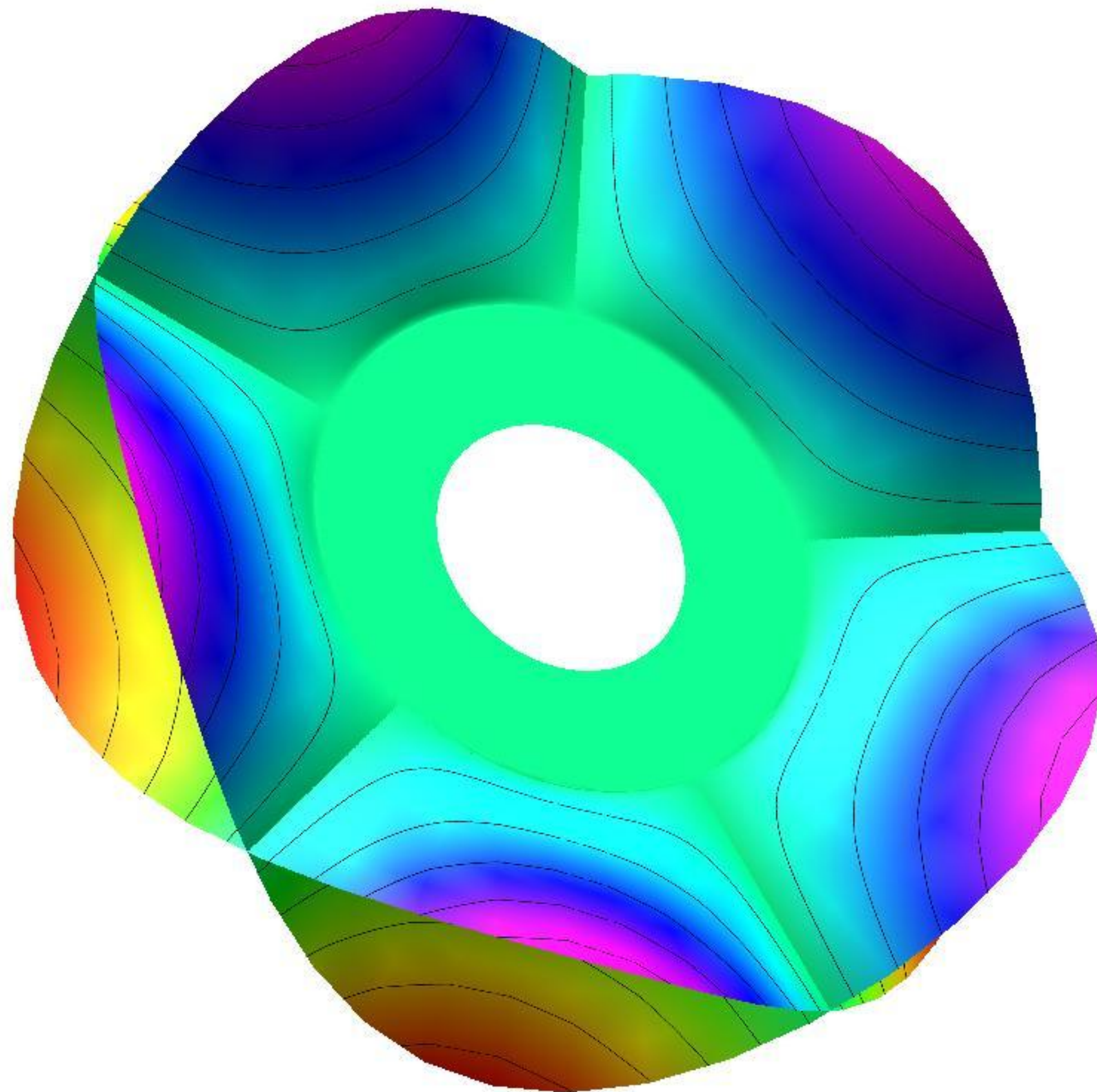


Géométrie symplectique des variétés de caractères sauvages



P. Boalch, CNRS Orsay

Plan

- ① Géométrie symplectique & Hamiltonienne
- ② version modérée
- ③ version sauvage

① Géométrie symplectique & Hamiltonienne

Var. symplectique : (M, ω)

M var. différentiable (ou analytique, algébrique, ...)

$\omega \in \Gamma(\Omega^2(M))$ 2-form, fermée, non dégén.

$$\begin{aligned} \omega^\# : TM &\xrightarrow{\sim} T^*M \\ v &\longmapsto \omega(v, \cdot) \end{aligned}$$

① Géométrie symplectique & Hamiltonienne

Var. symplectique : (M, ω)

M var. différentiable (ou analytique, algébrique, ...)

$\omega \in \Gamma(\Omega^2(M))$ 2-form, fermée, non dégén.

$$\omega^\# : \mathcal{T}M \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}^*M$$

$$v \mapsto \omega(v, \cdot)$$

Alors les fonctions donnent les champs vectoriels

$$f \mapsto df \mapsto (\omega^\#)^{-1}(df) \in \Gamma(\mathcal{T}M)$$

!!
 v_f

$$\{f, g\} = \omega(v_f, v_g) \text{ crochet de Poisson}$$

Exemples de base

- Fibres cotangentes $M = T^*N$
($\omega = d\lambda$, λ forme de Liouville)

Exemples de base

- Fibres cotangentes $M = T^*N$
($\omega = d\lambda$, λ forme de Liouville)

- Orbites coadjointes $\mathcal{O} = \mathfrak{g}^*$

exemple: $G = GL_n(\mathbb{C})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = M_{n \times n}(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{g}^*$

$$\mathcal{O} = \{ gAg^{-1} \mid g \in G \} \quad \text{avec } A \in \mathfrak{g}$$

$$\omega_A([X, A], [Y, A]) = \text{Tr}([X, Y]A)$$

Opérations pour construire d'autres exemples

- Produits $M_1 \times M_2$

Opérations pour construire d'autres exemples

- Produits $M_1 \times M_2$

- Réduction symplectique $M \rightsquigarrow M//G = \mu^{-1}(0)/G$

$G \curvearrowright M$, $\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ application moment

$(\forall x \in \mathfrak{g}, H_x := \langle \mu, x \rangle \text{ alors } \nu_x = \nu_{H_x})$

Opérations pour construire d'autres exemples

• Produits $M_1 \times M_2$

• Réduction symplectique $M \rightsquigarrow M//G = \mu^{-1}(0)/G$

$G \curvearrowright M$, $\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ application moment

$(\forall X \in \mathfrak{g}, H_X := \langle \mu, X \rangle \text{ alors } \nu_X = \nu_{H_X})$

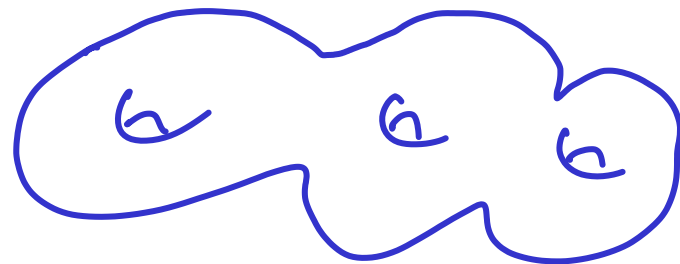
Exemple : $\mathfrak{O}_1 \times \dots \times \mathfrak{O}_m // G$ est symplectique

\parallel

$\{(A_1, \dots, A_m) \in \mathfrak{O}_1 \times \dots \times \mathfrak{O}_m \mid \sum A_i = 0\} / G$

Mais il existe des exemples (importants!) de dimension finie
qui viennent de la dimension infinie

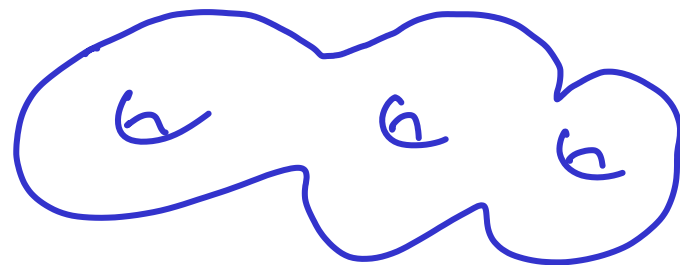
Σ surface de Riemann compacte



$\rightarrow \mathcal{M} = \text{Hom}(\pi_1(\Sigma), G) / G$ est symplectique
 $\cong \{ \text{connexions plates (de rg. } n) \} / \text{iso.}$

Mais il existe des exemples (importants!) de dimension finie
qui viennent de la dimension infinie

Σ surface de Riemann compacte



$\rightsquigarrow \mathcal{M} = \text{Hom}(\pi_1(\Sigma), G) / G$ est symplectique
 $\cong \{ \text{connexions plates (de rg. } n) \} / \text{iso.}$

Construction d'Atiyah-Bott (1982)

$\mathcal{A} = \{ \text{connexions } C^\infty \text{ (de rg. } n) \}$

espace affine, symplectique

$\mathcal{G} = C^\infty(\Sigma, G) \curvearrowright \mathcal{A}$

action de jauge

La courbure est une application moment $\rightsquigarrow \mathcal{M} = \mu^{-1}(0) / \mathcal{G}$

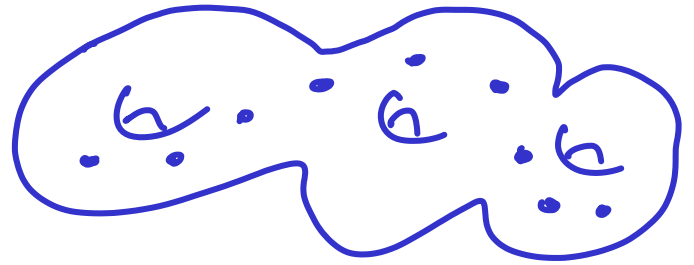
② version modifiée

Σ surface de Riemann compacte

$$a_1, \dots, a_m \in \Sigma$$

$$\Sigma^\circ = \Sigma \setminus \{a_1, \dots, a_m\}$$

$\mathcal{M} = \text{Hom}(\pi_1(\Sigma^\circ), G) / G$ est de Poisson

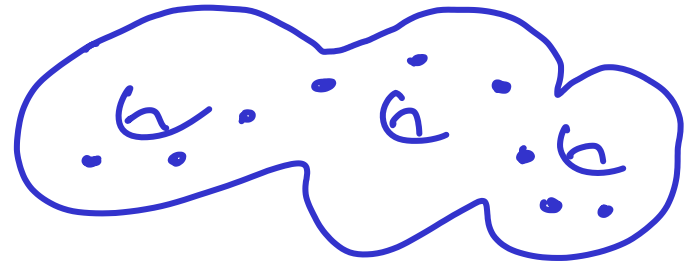


② version modérée

Σ surface de Riemann compacte

$$a_1, \dots, a_m \in \Sigma$$

$$\Sigma^\circ = \Sigma \setminus \{a_1, \dots, a_m\}$$



$\mathcal{M} = \text{Hom}(\pi_1(\Sigma^\circ), G) / G$ est de Poisson

$\underline{e} = (e_1, \dots, e_m) \subset G^m$ classes de conjugaison

$\rightsquigarrow \mathcal{M}(\underline{e}) = \text{Hom}_{\underline{e}}(\pi_1(\Sigma^\circ), G) / G \subset \mathcal{M}$
est symplectique

« variété de caractères modérée »

Présentation explicite

($g = \text{genre de } \Sigma$)

$$\mathcal{M}(\underline{e}) \cong \{ \underline{A}, \underline{B}, \underline{M} \in G^{2g, \underline{e}} \mid M_1 \cdots M_m \prod_{i=1}^g A_i B_i A_i^{-1} B_i^{-1} = 1 \} / G$$

SUR LES GROUPES DES ÉQUATIONS LINÉAIRES

PAR

H. POINCARÉ

À PARIS.

Dans trois mémoires (Acta Mathematica T. 1, p. 1—62: *Sur les groupes fuchsien*s; Acta T. 1, p. 193—294: *Sur les fonctions fuchsien*nes; Acta T. 3, p. 49—92: *Sur les groupes kleiné*ens) j'ai étudié les groupes discontinus formés par des substitutions linéaires et les fonctions uniformes qui ne sont pas altérées par les substitutions de ces groupes. Avant de montrer comment ces fonctions et d'autres analogues donnent les intégrales des équations linéaires à coefficients algébriques, il est nécessaire de résoudre deux problèmes importants:

1°. Étant donnée une équation linéaire à coefficients algébriques, déterminer son groupe.

2°. Étant donnée une équation linéaire du 2^d ordre dépendant de certains paramètres arbitraires, disposer de ces paramètres de manière que le groupe de l'équation soit fuchsien.

§ 1. *Invariants fondamentaux.*

Occupons-nous d'abord du premier de ces problèmes.

Considérons une équation quelconque à coefficients algébriques:

$$(1) \quad \frac{d^p v}{dx^p} + \varphi_{p-1}(x, y) \frac{d^{p-1} v}{dx^{p-1}} + \varphi_{p-2}(x, y) \frac{d^{p-2} v}{dx^{p-2}} + \dots$$

points P_μ : son groupe de Poincaré (ou groupe fondamental) peut être engendré, comme on sait, par $2p$ éléments $A_i, B_i (i = 1, 2, \dots, p)$ correspondant aux rétrosections sur r , et l éléments correspondant aux points P_μ et que nous noterons C_μ , ces éléments étant liés par la seule relation

$$R(A, B, C) = A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \dots A_p B_p A_p^{-1} B_p^{-1} C_1 C_2 \dots C_l = 1.$$

On sait qu'il y a une correspondance biunivoque entre les surfaces de recouvrement d'une surface donnée et les sous-groupes de son groupe de Poincaré : soit en particulier \mathfrak{N}' la surface de recouvrement de r' qui correspond au plus petit sous-groupe invariant contenant les l éléments C_μ ; à tout chemin fermé sur r' , tournant n_μ fois autour de P_μ dans un voisinage suffisamment petit de P_μ , correspondra alors un chemin fermé sur \mathfrak{N}' , de sorte que P_μ est pour \mathfrak{N}' un point de ramification d'ordre n_μ , \mathfrak{N}' se composant, au voisinage de P_μ , d'une infinité de cercles à n_μ feuilletts, pointés en leur centre ; on obtient alors la surface \mathfrak{N} en adjoignant à chacun de ces cercles un point correspondant à P_μ , et cela pour $\mu = 1, 2, \dots, l$. La surface \mathfrak{N} ainsi définie est simplement connexe ; si $l = 0$ elle n'est autre que la surface universelle de recouvrement de r ; la variable ω qui la représente conformétement sur le cercle unité est ce qu'on appelle, dans la théorie des fonctions automorphes, l'uniformisante principale de r relative à la signature (P_μ, n_μ) ; quant à la variable τ définie plus haut, on peut la considérer comme une uniformisante locale de \mathfrak{N} au voisinage d'un

substitution parabolique ; il n'en aurait pas été de même si nous avions admis pour \mathfrak{N} des ramifications d'ordre infini.

On désignera par K le corps des fonctions uniformes et partout méromorphes sur \mathfrak{N} : comme il a été dit, on aura principalement à considérer des fonctions de K ; celles-ci peuvent être considérées aussi comme des fonctions de ω , méromorphes dans tout l'intérieur du cercle unité ; parmi elles, les fonctions de k sont les fonctions fuchsienues de ω , invariantes par le groupe \mathfrak{G} . On aura à considérer aussi des matrices sur k et sur K : ce seront les matrices dont les éléments appartiennent à k ou respectivement à K .

Soit de plus di une différentielle, supposée donnée une fois pour toutes, du corps k , c'est-à-dire une expression $dj = ydx$, x et y étant deux éléments de k , x non constant, y non identiquement nul ; par une différentielle de k ou respectivement de K , on entendra toute expression $f.dj$, f appartenant à k ou à K ; de même, si F est une matrice sur k ou sur K , $F.dj$ sera appelée une matrice différentielle sur k ou sur K . Une différentielle $f.dj$ sera dite *finie* en un point de \mathfrak{N} si $f.dj/d\tau$ y est finie (et par conséquent holomorphe), τ étant l'uniformisante locale correspondante ; une matrice, ou une matrice différentielle, sera dite finie en un point de \mathfrak{N} , si chacun de ses éléments y est fini. Plus généralement, on peut avoir à considérer dans certains cas des expressions de la forme $f(dj)^a$ ou $F(dj)^a$, a étant quelconque (mais généralement entier) : une expression $F(dj)^a$ sera dite *finie* en un point de \mathfrak{N} si $F(dj/d\tau)^a$ y est holomorphe. $d\omega$ est une différentielle

Holomorphic Vector Bundles on a Compact Riemann Surface

By

M. S. NARASIMHAN and C. S. SESHADRI in Bombay

1. Introduction

We prove in this paper that the equivalence classes of holomorphic vector bundles arising from n -dimensional irreducible unitary representations of the fundamental group π of a compact Riemann surface X of genus $g (\geq 2)$ form a complex manifold M of complex dimension $n^2(g - 1) + 1$. For $n = 1$, this complex manifold is the Picard variety of X . It may be remarked that the number $n^2(g - 1) + 1$ has been calculated heuristically by A. WEIL as the dimension of the "field of hyperabelian functions" [10].

Two holomorphic vector bundles arising from unitary representations of π are isomorphic if and only if the representations are equivalent [Proposition 4.2]; this fact allows one to introduce a real analytic manifold structure on M which is independent of the complex structure on X^1). Let $\Omega = \mathbf{U}(n) \times \cdots \times \mathbf{U}(n)$ ($2g$ times) and $f: \Omega \rightarrow \mathbf{SU}(n)$ the map defined by

$$(A_1, B_1, \dots, A_g, B_g) \rightarrow A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \dots A_g B_g A_g^{-1} B_g^{-1}.$$

The set of homomorphisms of π into the unitary group $\mathbf{U}(n)$ is identified with $f^{-1}(I)$, where I is the identity matrix. We prove that the tangent vectors to Ω

Non-abelian moduli spaces

3.1 Moduli spaces of representations

In Chapter 2 we studied the torus $H^1(\Sigma, U(1))$ which parametrizes homomorphisms

$$\pi_1(\Sigma) \rightarrow U(1).$$

We shall now consider the space $H^1(\Sigma, G)$ which parametrizes conjugacy classes of homomorphisms

$$\pi_1(\Sigma) \rightarrow G$$

where G is any compact simply connected Lie group. For simplicity we shall frequently work with the special case $G = SU(n)$.

Now $\pi_1(\Sigma)$ has generators $A_1, \dots, A_g, \dots, B_1, \dots, B_g$ with the one relation

$$\prod_{i=1}^g [A_i, B_i] = 1. \tag{3.1.1}$$

It follows that $H^1(\Sigma, G)$ is the quotient by G of the subset of G^{2g} lying over 1 in the map $G^g \times G^g \rightarrow G$ given by $\prod [A_i, B_i]$. This shows that $H^1(\Sigma, G)$ is a compact Hausdorff space. More precisely it is a manifold of dimension $2(g-1) \dim G$ at all *irreducible* points (i.e. where the image of $\pi_1(\Sigma)$ generates G). This follows by examining the linearization of (3.1.1). This has been examined in great detail by Narasimhan and Seshadri [22] and also by Newstead [23].

Présentation explicite

($g = \text{genre de } \Sigma$)

$$\mathcal{M}(\underline{e}) \cong \{ \underline{A}, \underline{B}, \underline{M} \in G^{2g, \underline{e}} \mid M_1 \cdots M_m \prod_{i=1}^g A_i B_i A_i^{-1} B_i^{-1} = 1 \} / G$$

\rightsquigarrow semble être une version multiplicative d'un quotient symplectique

Présentation explicite

($g = \text{genre de } \Sigma$)

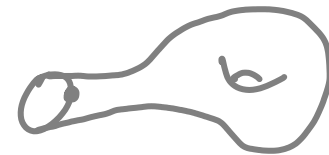
$$\mathcal{M}(\underline{e}) \cong \{ \underline{A}, \underline{B}, \underline{M} \in G^{2g, \underline{e}} \mid M_1 \dots M_m \prod_{i=1}^g A_i B_i A_i^{-1} B_i^{-1} = 1 \} / G$$

→ semble être une version multiplicative d'un quotient symplectique

Approche TQFT (Alekseev-Malkin-Mumforden 1997)

- $\mathcal{C} \subset G$, $\mu_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \hookrightarrow G$

- $\mathcal{D} = G \times G$, $\mu_{\mathcal{D}}(A, B) = ABA^{-1}B^{-1}$



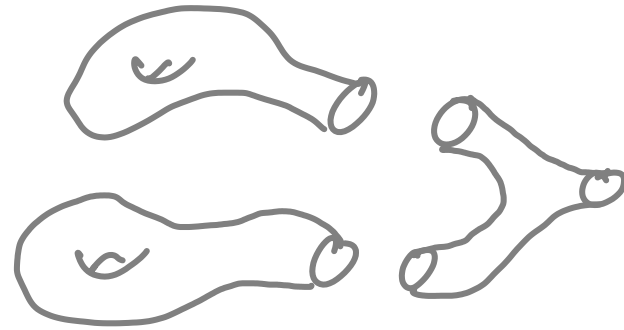
sont des espaces « q -Hamiltoniens» avec des applications moment à valeurs dans le groupe G

Opérations

- Produit de «fusion»

$$M = M_1 \otimes M_2$$

$$\mu = \mu_1 \times \mu_2$$

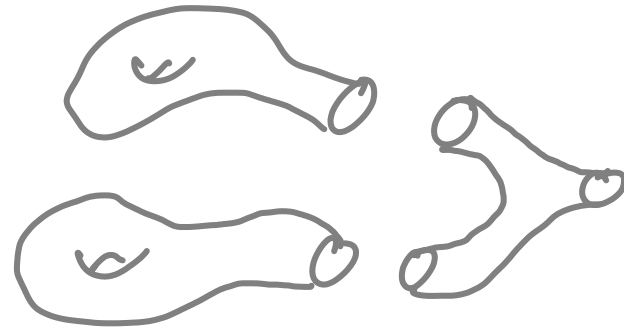


Opérations

- Produit de «fusion»

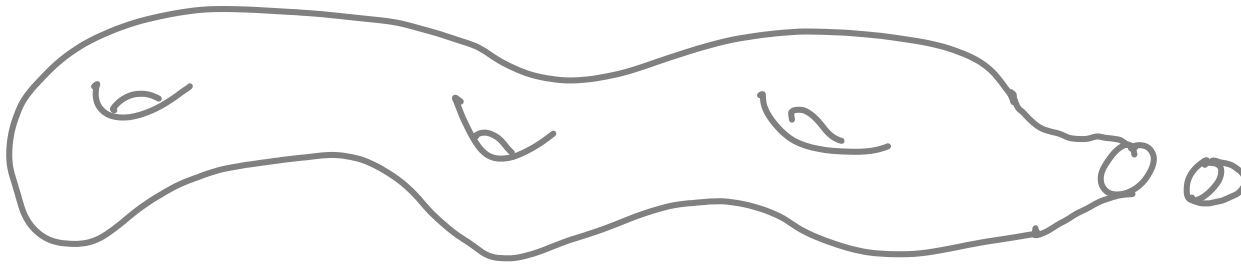
$$M = M_1 \otimes M_2$$

$$\mu = \mu_1 * \mu_2$$



- Réduction q -Hamiltonienne

$$M//G = \mu^{-1}(1)/G$$



$$\rightarrow \mathcal{M}(\underline{e}) = e_1 \otimes \dots \otimes e_m \otimes \mathbb{1} \otimes \dots \otimes \mathbb{1} // G$$

constⁿ
algébrique

Example ($g=0$)

$$\mathcal{M}(\underline{e}) = \{ (M_1, \dots, M_m) \mid M_1 M_2 \dots M_m = 1, M_i \in e_i \} / G$$

$$\mathcal{M}^*(\underline{\theta}) = \{ (A_1, \dots, A_m) \mid A_1 + \dots + A_m = 0, A_i \in \theta_i \} / G$$

Exemple ($g=0$)

$$\mathcal{M}(\underline{e}) = \{ (M_1, \dots, M_m) \mid M_1 M_2 \dots M_m = 1, M_i \in e_i \} / G$$

$\nu \uparrow$ Riemann-Hilbert

$$\mathcal{M}^*(\underline{\theta}) = \{ (A_1, \dots, A_m) \mid A_1 + \dots + A_m = 0, A_i \in \theta_i \} / G$$

$$\nabla = d - \left(\frac{A_1}{z-a_1} + \dots + \frac{A_m}{z-a_m} \right) dz$$

- ν est holom. & symplectique ($e_i = \exp(2\pi i \nu_i \theta_i)$)
- $\dim \mathcal{M}^* = \dim \mathcal{M}$

Exemple ($g=0$)

$$\mathcal{M}(\underline{e}) = \{ (M_1, \dots, M_m) \mid M_1 M_2 \dots M_m = \mathbb{1}, M_i \in e_i \} / G$$

\nearrow Riemann-Hilbert

$$\mathcal{M}^*(\underline{\theta}) = \{ (A_1, \dots, A_m) \mid A_1 + \dots + A_m = 0, A_i \in \theta_i \} / G$$

$$\nabla = d - \left(\frac{A_1}{z-a_1} + \dots + \frac{A_m}{z-a_m} \right) dz$$

- ∇ est holom. & symplectique ($e_i = \exp(2\pi i \tau_i) \theta_i$)
- $\dim \mathcal{M}^* = \dim \mathcal{M}$

Mais il existe bcp de connexions algébriques qui ne sont pas de cette forme (même localement): les connexions irrégulières

Birkhoff (1913) a donné des présentations qui généralisent celles pour $\mathcal{M}(\underline{e})$, pour les connexions irreg. génériques (voir aussi Jimbo-Miwa-Ueno 1981)

$$M_1 M_2 \cdots M_m = 1$$

avec $M_i = C_i^{-1} h_i \underline{S}_i C_i$

$$C_i \in G$$

$$h_i \in T \quad (\text{tore maximal de } G)$$

\underline{S}_i un produit de matrices triangulaires spécifiques

Birkhoff (1913) a donné des présentations qui généralisent celles pour $\mathcal{M}(\underline{e})$, pour les connexions irreg. génériques (voir aussi Jimbo-Miwa-Ueno 1981)

$$M_1 M_2 \cdots M_m = 1$$

avec $M_i = C_i^{-1} h_i \underline{S}_i C_i$

$$C_i \in G$$

$$h_i \in T \quad (\text{tore maximal de } G)$$

\underline{S}_i un produit de matrices triangulaires spécifiques

- Structure symplectique? (\ll Atiyah-Bott irrégulière \gg , Adv. Math 2001)

Birkhoff (1913) a donné des présentations qui généralisent celles pour $\mathcal{M}(\underline{e})$, pour les connexions irreg. génériques (voir aussi Jimbo-Miwa-Ueno 1981)

$$M_1 M_2 \cdots M_m = 1$$

avec $M_i = C_i^{-1} h_i \underline{S}_i C_i$

$$C_i \in G$$

$$h_i \in T \quad (\text{tore maximal de } G)$$

\underline{S}_i un produit de matrices triangulaires spécifiques

- Structure symplectique? (\ll Atiyah-Bott irrégulière \gg , Adv. Math 2001)
- Approche TQFT (algébrique)? (Arxiv 0203, Duke 2007)

Birkhoff (1913) a donné des présentations qui généralisent celles pour $\mathcal{M}(\underline{e})$, pour les connexions irreg. génériques (voir aussi Jimbo-Miwa-Ueno 1981)

$$M_1 M_2 \cdots M_m = 1$$

avec $M_i = C_i^{-1} h_i \underline{S}_i C_i$

$$C_i \in G$$

$$h_i \in T \quad (\text{tore maximal de } G)$$

\underline{S}_i un produit de matrices triangulaires spécifiques

- Structure symplectique? (\ll Atiyah-Bott irrégulière \gg , Adv. Math 2001)
- Approche TQFT (algébrique)? (Arxiv 0203, Duke 2007)
- Ça marche pour les gps $\neq \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$? (IMRN 2002)

Birkhoff (1913) a donné des présentations qui généralisent celles pour $\mathcal{M}(\underline{e})$, pour les connexions irreg. génériques (voir aussi Jimbo-Miwa-Ueno 1981)

$$M_1 M_2 \cdots M_m = 1$$

avec $M_i = C_i^{-1} h_i \underline{S}_i C_i$

$$C_i \in G$$

$$h_i \in T \quad (\text{tore maximal de } G)$$

\underline{S}_i un produit de matrices triangulaires spécifiques

- Structure symplectique? (\ll Atiyah-Bott irrégulière \gg , Adv. Math 2001)
- Approche TQFT (algébrique)? (Arxiv 0203, Duke 2007)
- Ça marche pour les gps $\neq \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$? (IMRN 2002)
- Et pour les connexions non-génériques? (2009, 2014, cas générale B.-Yamakawa '15)

Birkhoff (1913) a donné des présentations qui généralisent celles pour $\mathcal{M}(\underline{e})$, pour les connexions irreg. génériques (voir aussi Jimbo-Miwa-Ueno 1981)

$$M_1 M_2 \cdots M_m = 1$$

avec $M_i = C_i^{-1} h_i \underline{S}_i C_i$, $C_i \in G$, $h_i \in T$
 \underline{S}_i un produit de matrices triangulaires spécifiques

- D'où viennent ces présentations bizarres?
- C'était quoi la motivation?
- Structure symplectique? (« Atiyah-Bott irrégulière », Adv. Math 2001)
- Approche TQFT (algébrique)? (Arxiv 0203, Duke 2007)
- Ça marche pour les gps $\neq \mathcal{O}_{\text{Ln}}(\mathbb{C})$? (IMRN 2002)
- Et pour les connexions non-génériques? (2009, 2014, cas générale B.-Yamagawa '15)

Exemple de base $G = GL_2(\mathbb{C})$, $m=1$, $g=0$

$$T = \begin{pmatrix} * & \\ & * \end{pmatrix}, U_+ = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, U_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} \subset G = GL_2(\mathbb{C})$$

Thm (0203- / Duke '07)

$\mathcal{A} = G \times T \times (U_+ \times U_-)^k$ est un espace q -Hamiltonien

pour le groupe $G \times T$

$$\mu_G(C, h, \underline{\Sigma}) = C^{-1} h \underline{\Sigma} C$$

$$\mu_T(C, h, \underline{\Sigma}) = h^{-1}$$

Exemple de base $G = GL_2(\mathbb{C})$, $m=1$, $g=0$

$$T = \begin{pmatrix} * & \\ & * \end{pmatrix}, U_+ = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, U_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} \subset G = GL_2(\mathbb{C})$$

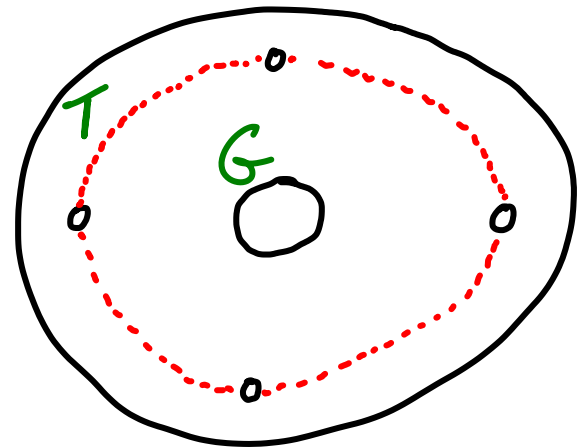
Thm (0203- / Duke '07)

$A = G \times T \times (U_+ \times U_-)^k$ est un espace q -Hamiltonien

pour le groupe $G \times T$

$$\mu_G(C, h, \underline{\Sigma}) = C^{-1} h \underline{\Sigma} C$$

$$\mu_T(C, h, \underline{\Sigma}) = h^{-1}$$



Exemple de base $G = GL_2(\mathbb{C})$, $m=1$, $g=0$

$$T = \begin{pmatrix} * & \\ & * \end{pmatrix}, U_+ = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, U_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} \subset G = GL_2(\mathbb{C})$$

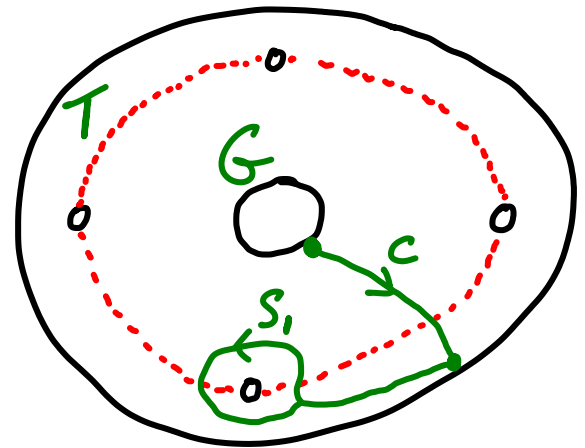
Thm (0203- / Duke '07)

$\mathcal{A} = G \times T \times (U_+ \times U_-)^k$ est un espace q -Hamiltonien

pour le groupe $G \times T$

$$\mu_G(C, h, \underline{\Sigma}) = C^{-1} h \underline{\Sigma} C$$

$$\mu_T(C, h, \underline{\Sigma}) = h^{-1}$$



Exemple de base $G = GL_2(\mathbb{C})$, $m=1$, $g=0$

$$T = \begin{pmatrix} * & \\ & * \end{pmatrix}, U_+ = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, U_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} \subset G = GL_2(\mathbb{C})$$

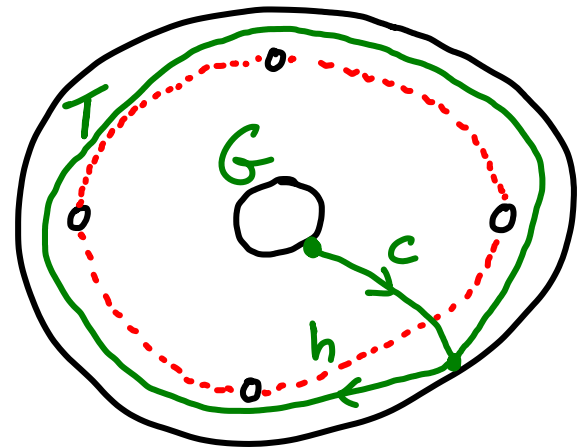
Thm (0203- / Duke '07)

$\mathcal{A} = G \times T \times (U_+ \times U_-)^k$ est un espace q -Hamiltonien

pour le groupe $G \times T$

$$\mu_G(C, h, \underline{\Sigma}) = C^{-1} h \underline{\Sigma} C$$

$$\mu_T(C, h, \underline{\Sigma}) = h^{-1}$$



Exemple de base $G = GL_2(\mathbb{C})$, $m=1$, $g=0$

$$T = \begin{pmatrix} * & \\ & * \end{pmatrix}, U_+ = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, U_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} \subset G = GL_2(\mathbb{C})$$

Thm (0203- / Duke '07)

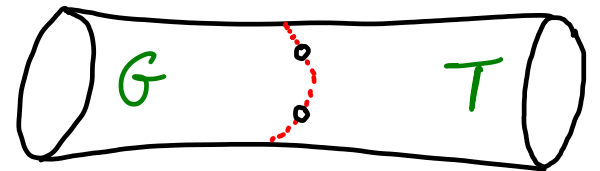
$A = G \times T \times (U_+ \times U_-)^k$ est un espace q -Hamiltonien

pour le groupe $G \times T$

$$\mu_G(C, h, \underline{\Sigma}) = C^{-1} h \underline{\Sigma} C$$

$$\mu_T(C, h, \underline{\Sigma}) = h^{-1}$$

espace de « fission »



Exemple de base $G = GL_2(\mathbb{C})$, $m=1$, $g=0$

$$T = \begin{pmatrix} * & \\ & * \end{pmatrix}, U_+ = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, U_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} \subset G = GL_2(\mathbb{C})$$

Thm (0203- / Duke '07)

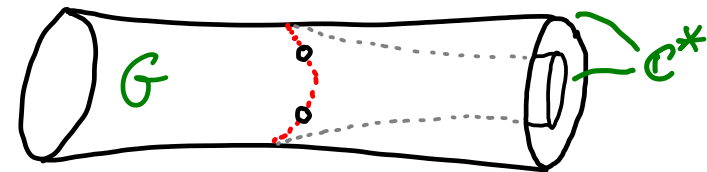
$A = G \times T \times (U_+ \times U_-)^k$ est un espace q -Hamiltonien

pour le groupe $G \times T$

$$\mu_G(C, h, \underline{\Sigma}) = C^{-1} h \underline{\Sigma} C$$

$$\mu_T(C, h, \underline{\Sigma}) = h^{-1}$$

espace de « fission »



Exemple de base $G = GL_2(\mathbb{C})$, $m=1$, $g=0$

$$T = \begin{pmatrix} * & \\ & * \end{pmatrix}, U_+ = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, U_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} \subset G = GL_2(\mathbb{C})$$

Thm (0203- / Duke '07)

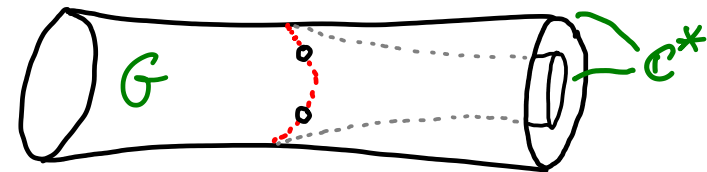
$\mathcal{A} = G \times T \times (U_+ \times U_-)^k$ est un espace q -Hamiltonien

pour le groupe $G \times T$

$$\mu_G(\mathbb{C}, h, \underline{\Sigma}) = \mathbb{C}^{-1} h \underline{\Sigma} \mathbb{C}$$

$$\mu_T(\mathbb{C}, h, \underline{\Sigma}) = h^{-1}$$

espace de « fission »

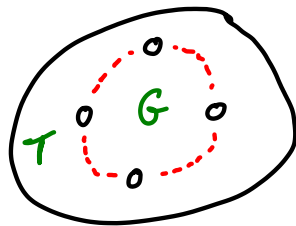


Cor $\mathcal{B} = \mathcal{A} // G$ est un T -espace q -Ham.

$$= \{ h, S_1, \dots, S_{2k} \mid h S_1 S_2 \dots S_{2k} = 1 \}$$

$$\cong \{ a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C} \mid (a_1, \dots, a_n) \neq 0 \}$$

Continuant d'Euler
 $n = 2k - 2$





S P E C I M E N
ALGORITHMI SINGULARIS.

Auctore
L. EULERO.

I.

Consideratio fractionum continuarum, quarum usus uberrimum per totam Analyfin iam aliquoties ostendi, deduxit me ad quantitates certo quodam modo ex indicibus formatas, quarum natura ita est comparata, ut singularem algorithmum requirat. Cum igitur summa Analyseos inuenta maximam partem algorithmo ad certas quasdam quantitates accommodato

6. Haec ergo teneatur definitio signorum (), inter quae indices ordine a sinistra ad dextram scribere constitui; atque indices hoc modo clausulis inclusi in posterum denotabunt numerum ex istis indicibus formatum. Ita a simplicissimis casibus inchoando, habebimus:

$$(a) = a$$

$$(a, b) = ab + x$$

$$(a, b, c) = abc + c + a$$

$$(a, b, c, d) = abcd + cd + ad + ab + x$$

$$(a, b, c, d, e) = abcde + cde + ade + abe + abc + e + c + a$$

etc.

Cor $\mathcal{B} = \mathcal{A} // G$ est un T -espace q -Ham.

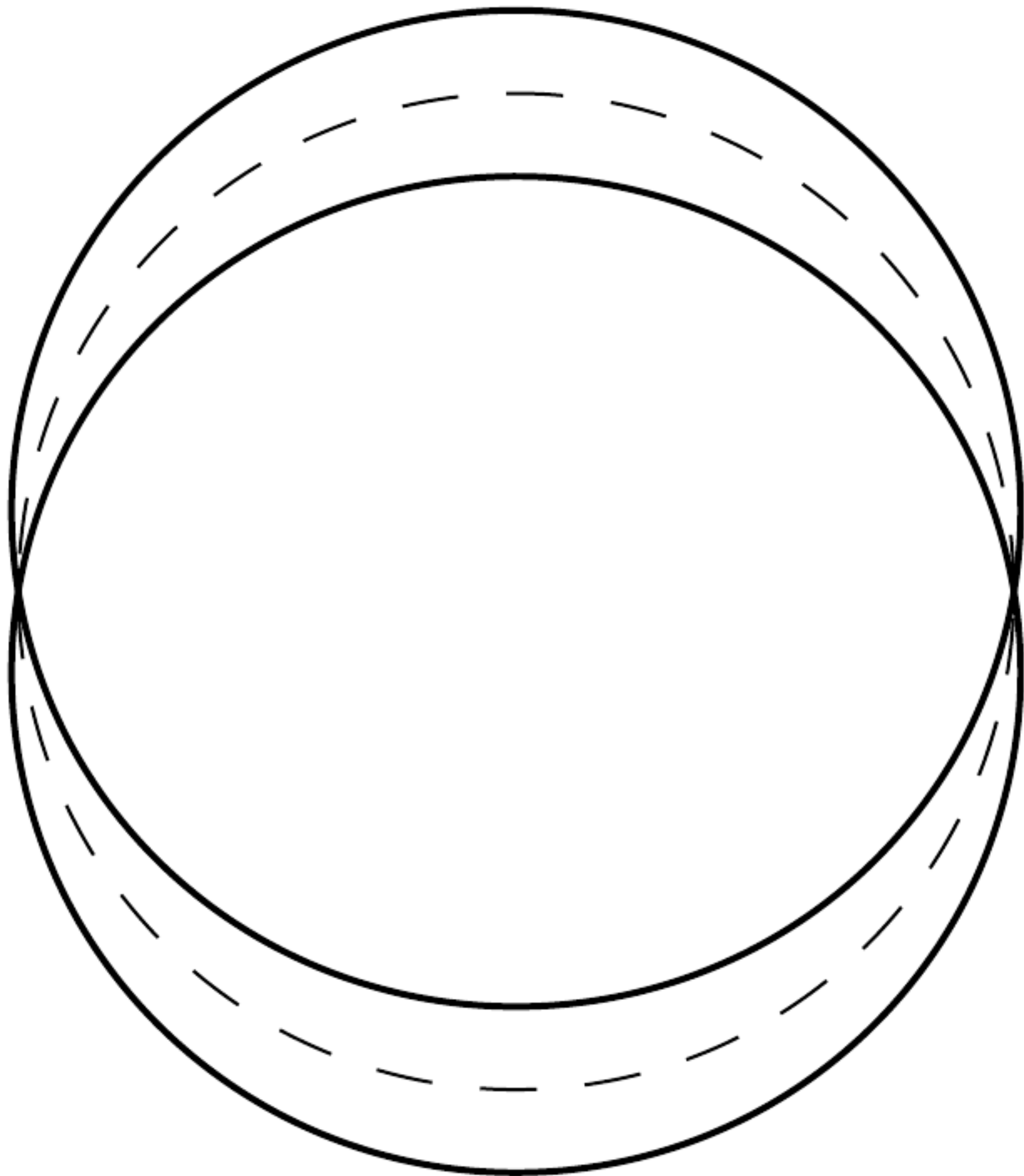
$$= \{ h, S_1, \dots, S_{2k} \mid h S_1 S_2 \dots S_{2k} = 1 \}$$

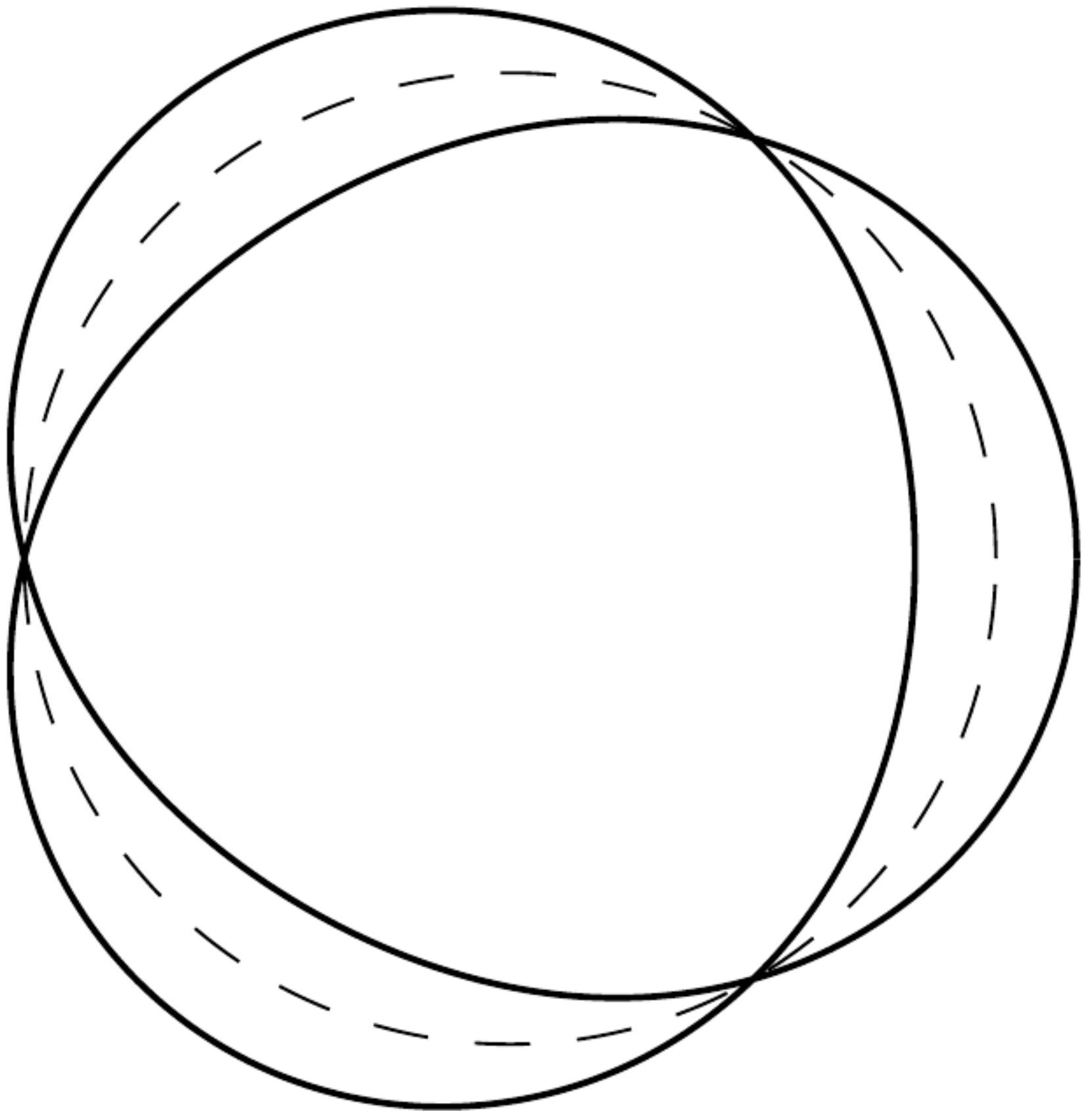
$$\cong \{ a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C} \mid (a_1, \dots, a_n) \neq 0 \}$$

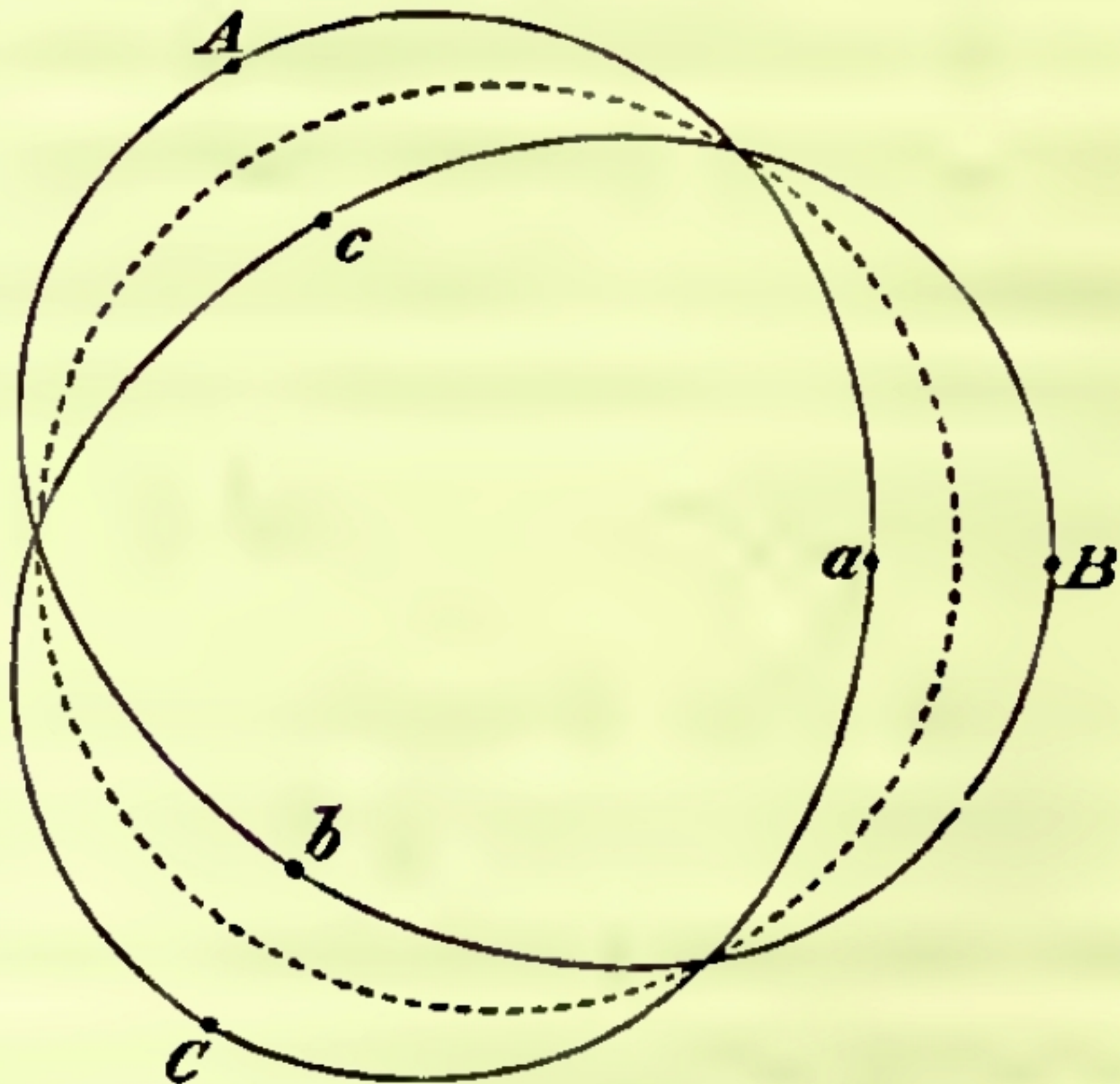
Continuant d'Euler
 $n = 2k - 2$

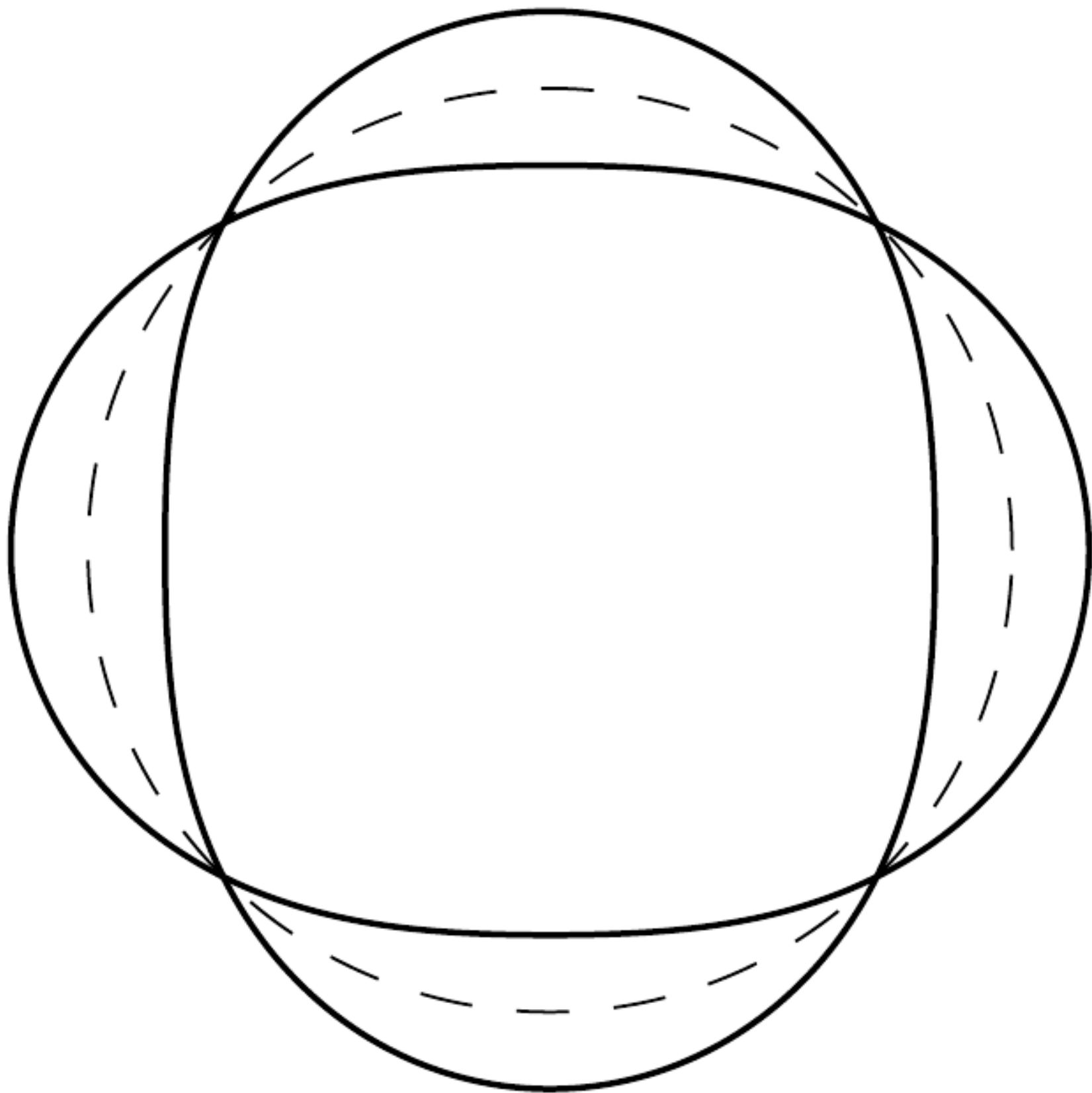
$$\mu_T = \begin{pmatrix} (a_1, \dots, a_n) & 0 \\ 0 & (a_n, \dots, a_1)^{-1} \end{pmatrix} : \mathcal{B} \rightarrow T$$

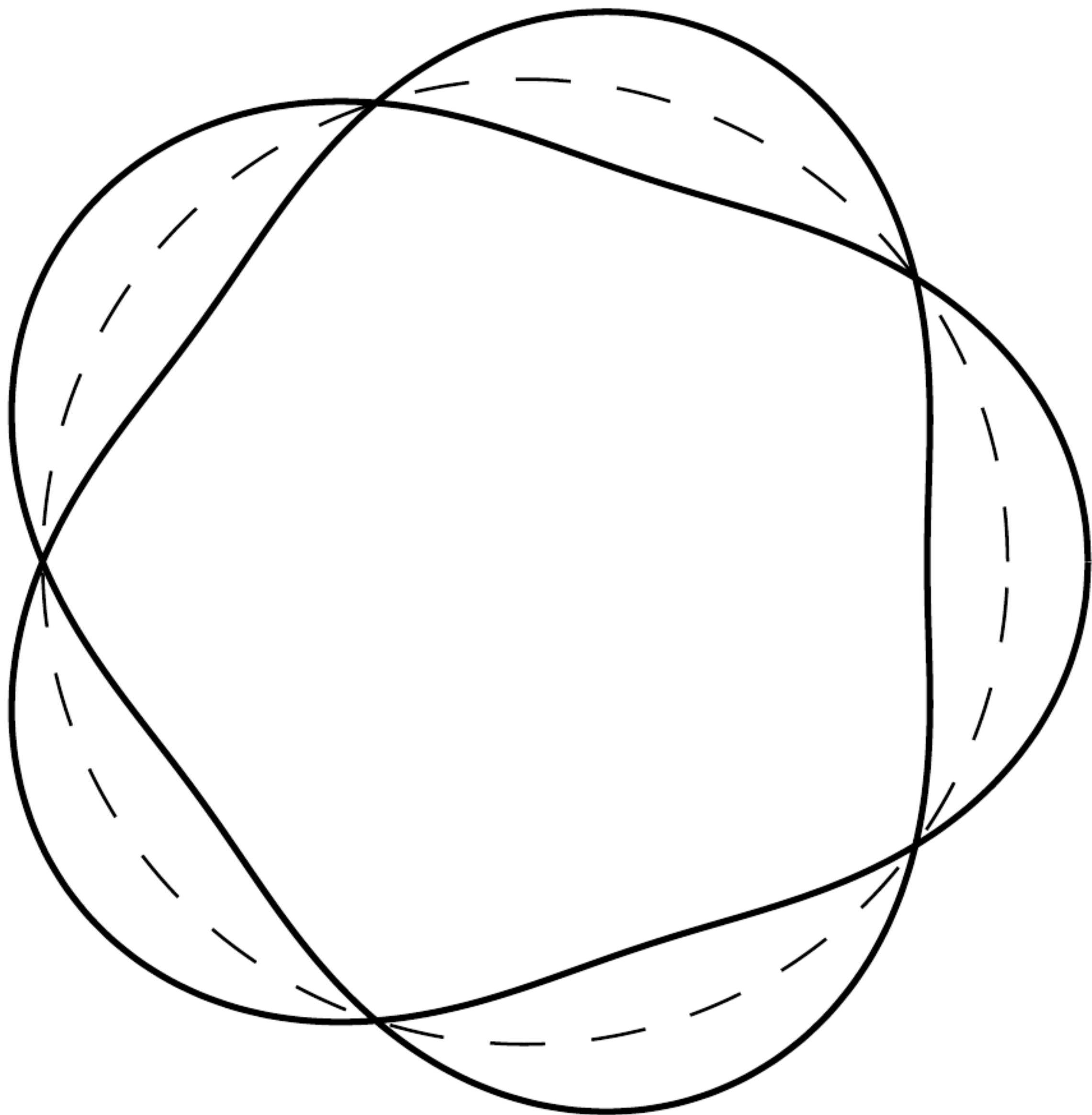
<< Les continuants d'Euler sont des applications moment
à valeurs dans un groupe >>

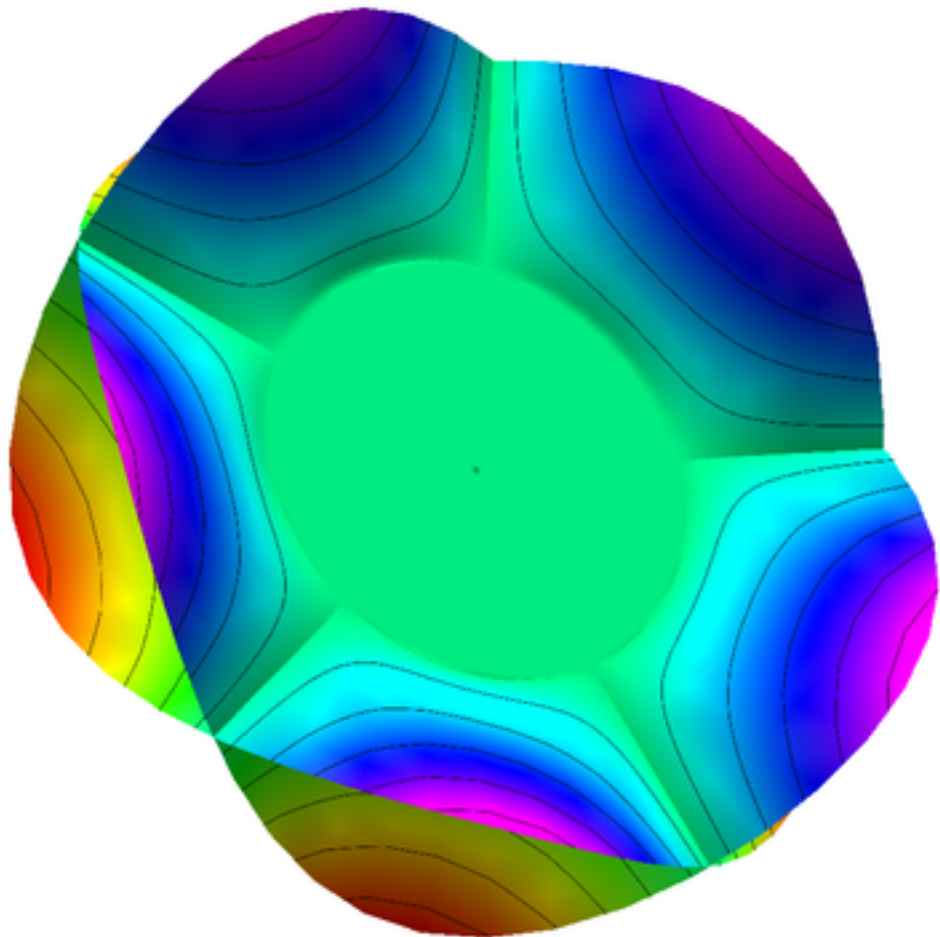


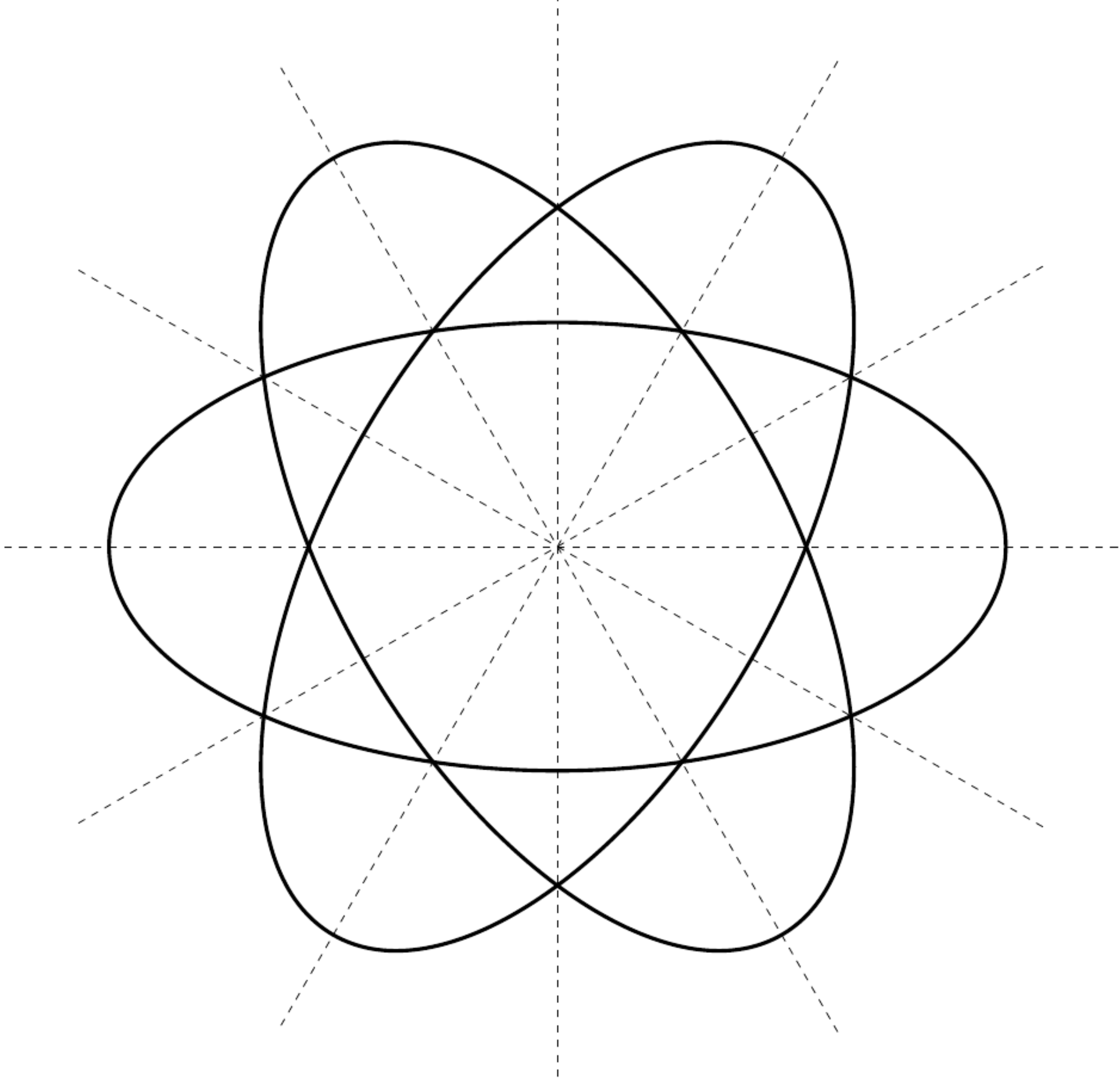


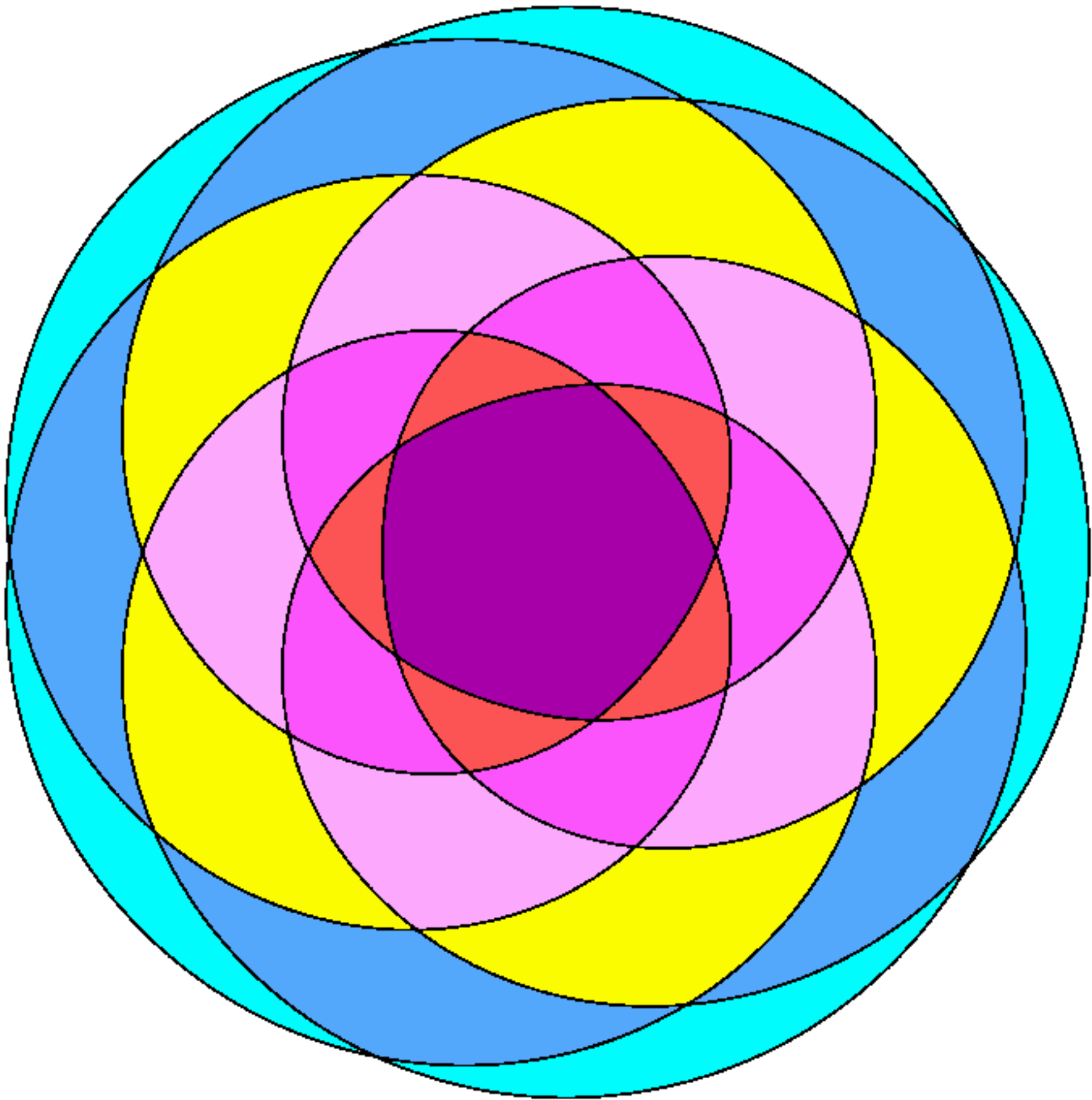












Choix au bord

$$G = \sigma \text{Ln}(C)$$

$$\exp(q) \quad , \quad q = \sum_1^k c_i x^{i/r} \quad , \quad \begin{array}{l} k, r \in \mathbb{N} \\ c_i \in \mathbb{C} \end{array}$$

Choix au bord

$$G = \text{GL}_n(\mathbb{C})$$

$$\exp(q), \quad q = \sum_1^k c_i x^{i/r}, \quad \begin{array}{l} k, r \in \mathbb{N} \\ c_i \in \mathbb{C} \end{array}$$

Classe
irrégulière
 \mathcal{Q}

- $\langle q_1 \rangle, \dots, \langle q_s \rangle$ orbites de Galois, tailles r_1, \dots, r_s
- multiplicités m_1, \dots, m_s $n = \sum_1^s m_i r_i$

- $e_i \in \text{GL}_{m_i}(\mathbb{C}) \quad i=1, \dots, s$

cas modéré: $\langle 0 \rangle, m=n$

Choix au bord

$$G = \text{GL}_n(\mathbb{C})$$

$$\exp(q), \quad q = \sum_1^k c_i x^{i/r}, \quad \begin{array}{l} k, r \in \mathbb{N} \\ c_i \in \mathbb{C} \end{array}$$

Classe
irrégulière
 \mathcal{Q}

- $\langle q_1 \rangle, \dots, \langle q_s \rangle$ orbites de Galois, tailles r_1, \dots, r_s
- multiplicités m_1, \dots, m_s $n = \sum_1^s m_i r_i$

- $e_i \in \text{GL}_{m_i}(\mathbb{C}) \quad i=1, \dots, s$

cas modéré: $\langle 0 \rangle, m=n$

Surface de Riemann sauvage : $\tilde{\Sigma} = (\Sigma, (a_1, \dots, a_m), (Q_1, \dots, Q_m))$
(courbe irrégulière)

Idée

$$\Sigma \sim + \mathcal{C} \sim \Rightarrow \mathcal{M}(\Sigma, \mathcal{C}) = \text{Hom}_{\mathcal{G}}(\Pi, \mathcal{G}) / H_{\mathcal{C}} \sim$$

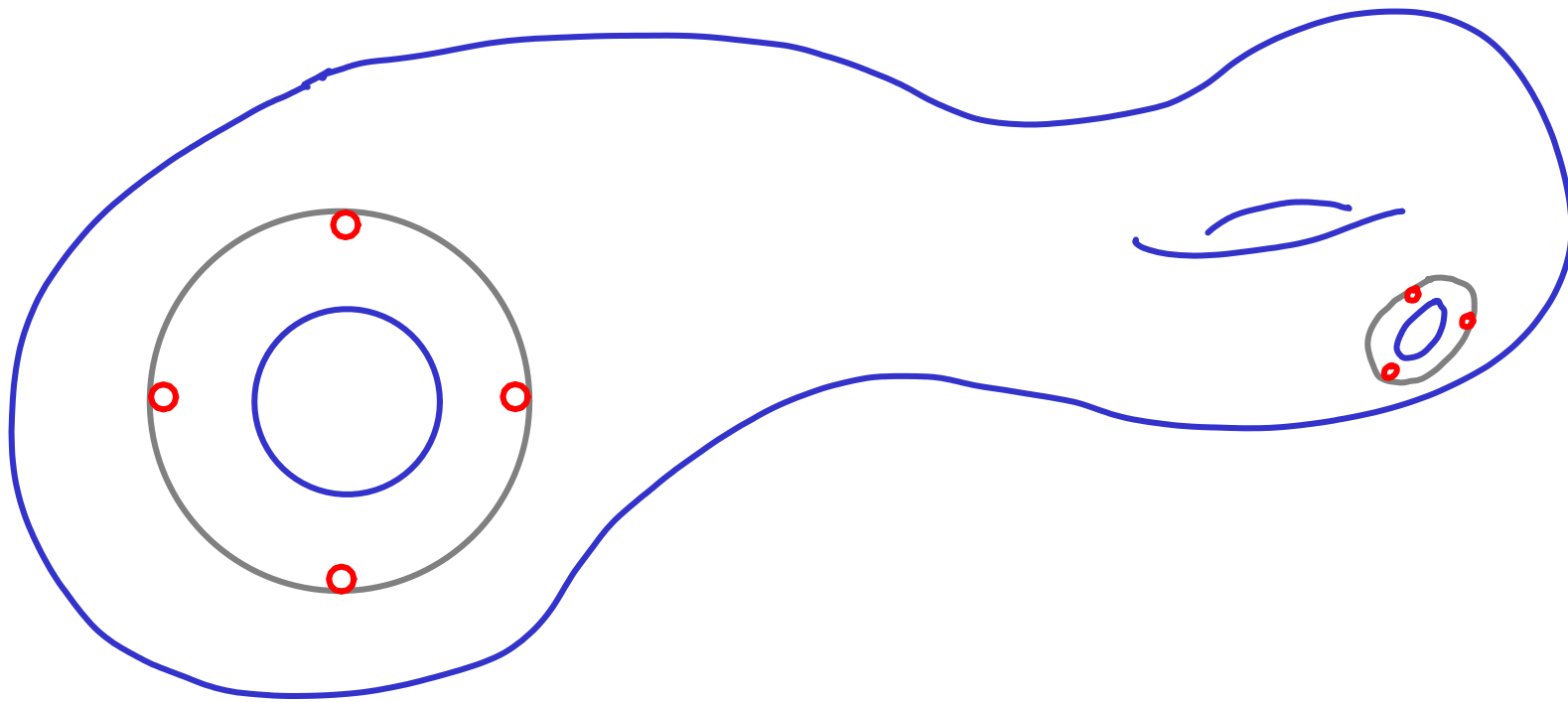
var. de caractères sauvage

(symplectique algébrique)

Idée

$$\Sigma \sim + \mathcal{C} \sim \Rightarrow \mathcal{M}(\Sigma, \mathcal{C}) = \text{Hom}_{\mathcal{G}}(\pi, \mathcal{G}) / \mathcal{H}$$

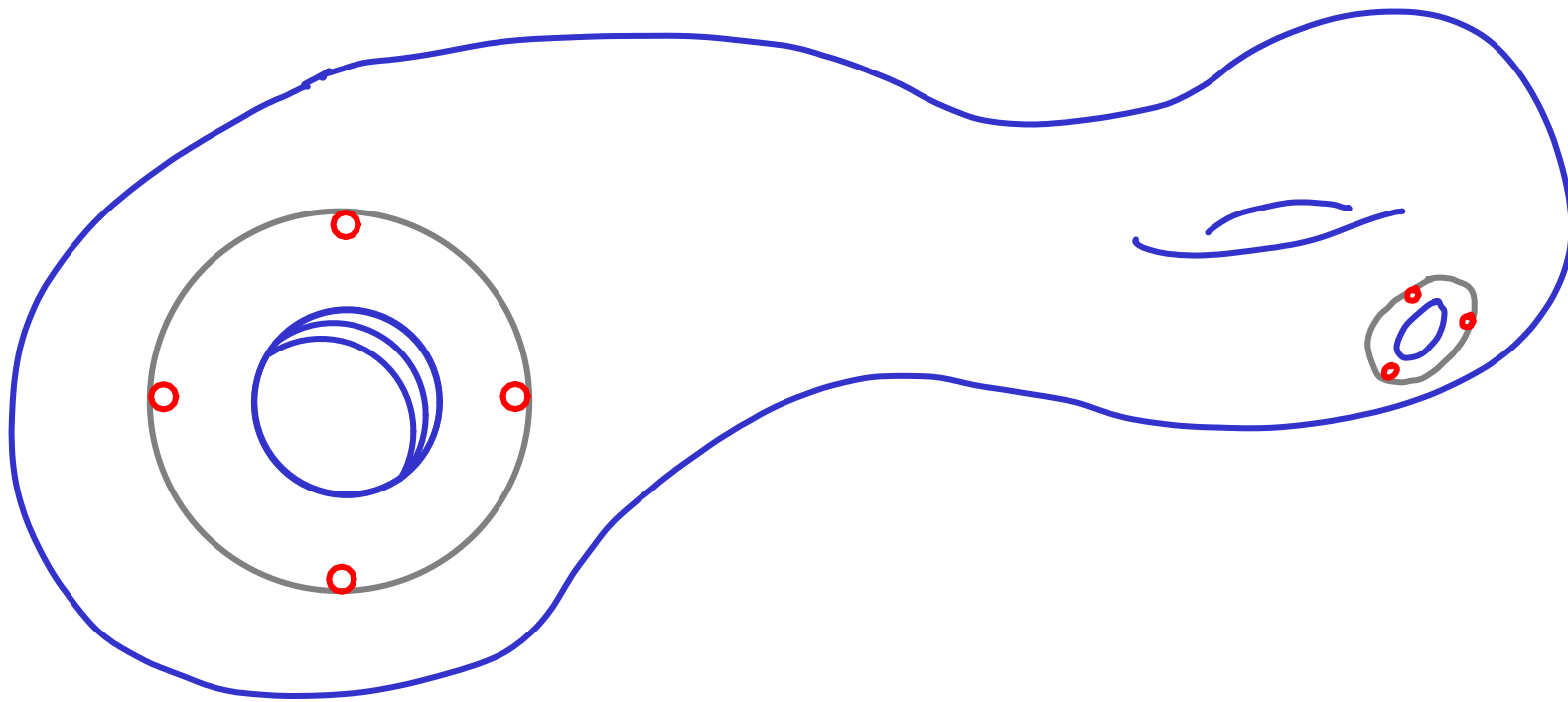
var. de caractères sauvage
(symplectique algébrique)



Idée

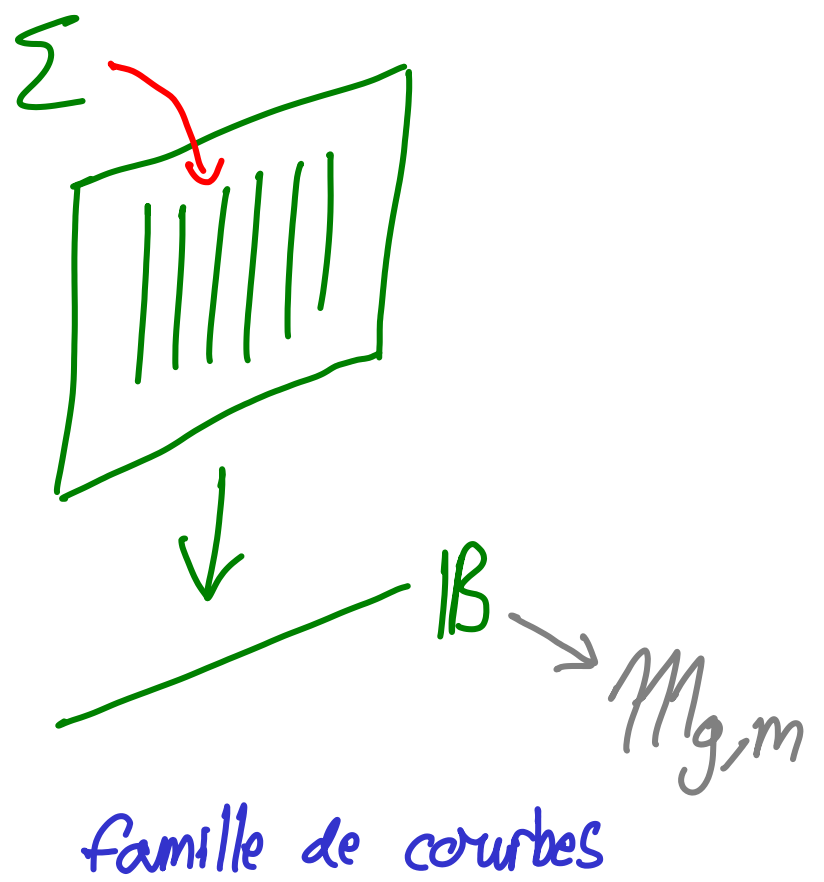
$$\Sigma \sim + \mathcal{C} \sim \Rightarrow \mathcal{M}(\Sigma, \mathcal{C}) = \text{Hom}_{\mathcal{G}}(\pi, \mathcal{G}) / \mathcal{H}$$

var. de caractères sauvage
(symplectique algébrique)



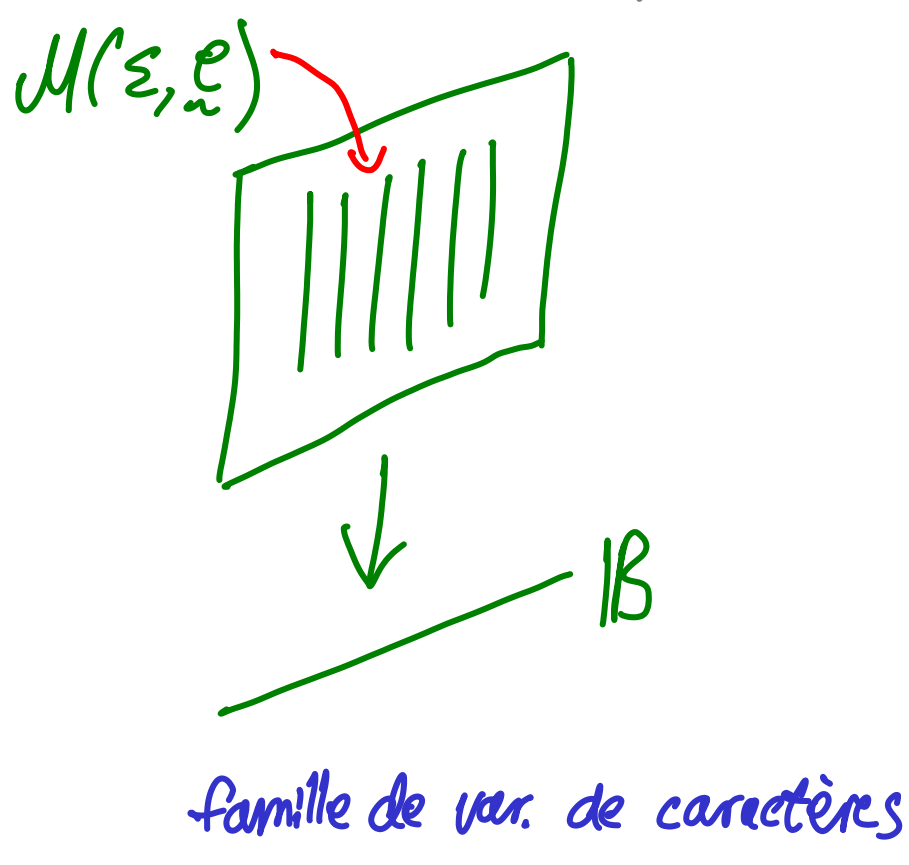
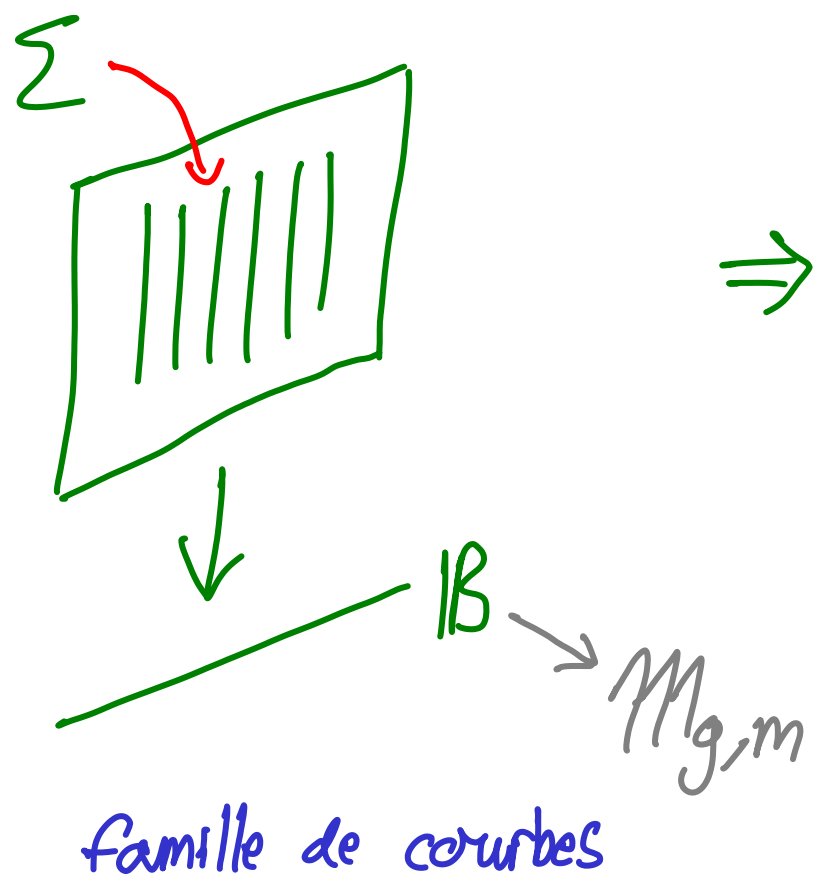
Motivation 1 Géométrie des eqns. diff's non-linéaires

(Pamlevé, isomonodromie)



Motivation 1 Géométrie des eqns. diffs non-linéaires

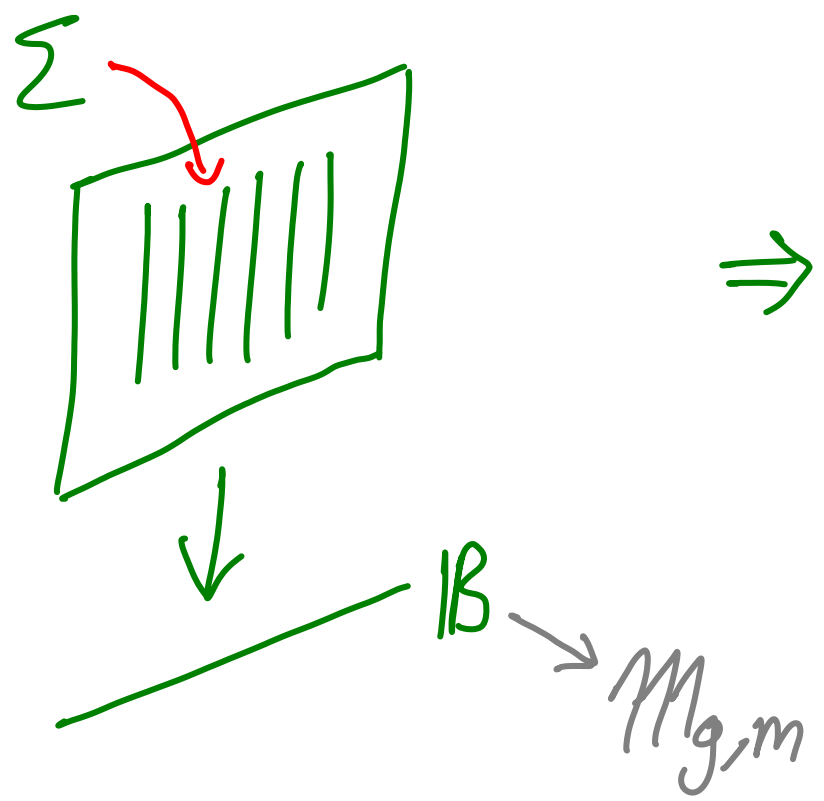
(Pamlevé, isomonodromie)



\Rightarrow

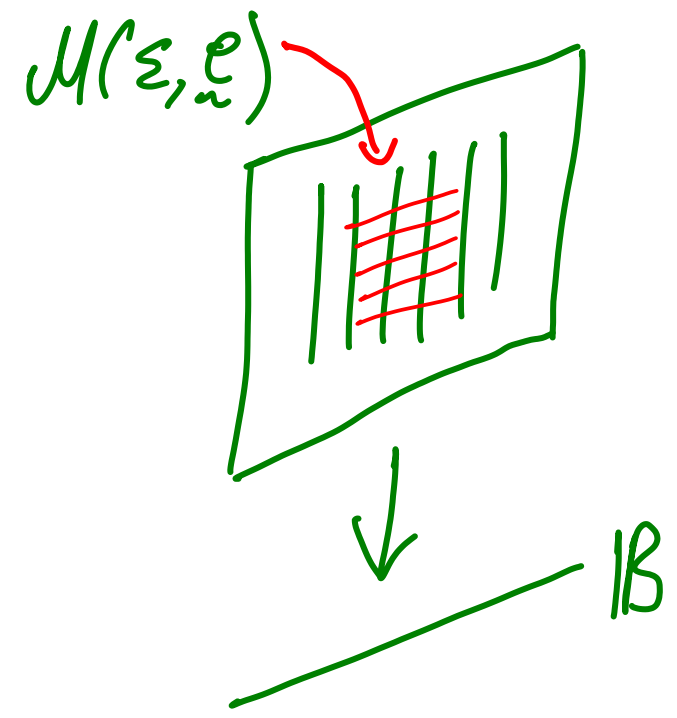
Motivation 1 Géométrie des eqns. diffs non-linéaires

(Pamlevé, isomonodromie)



famille de courbes

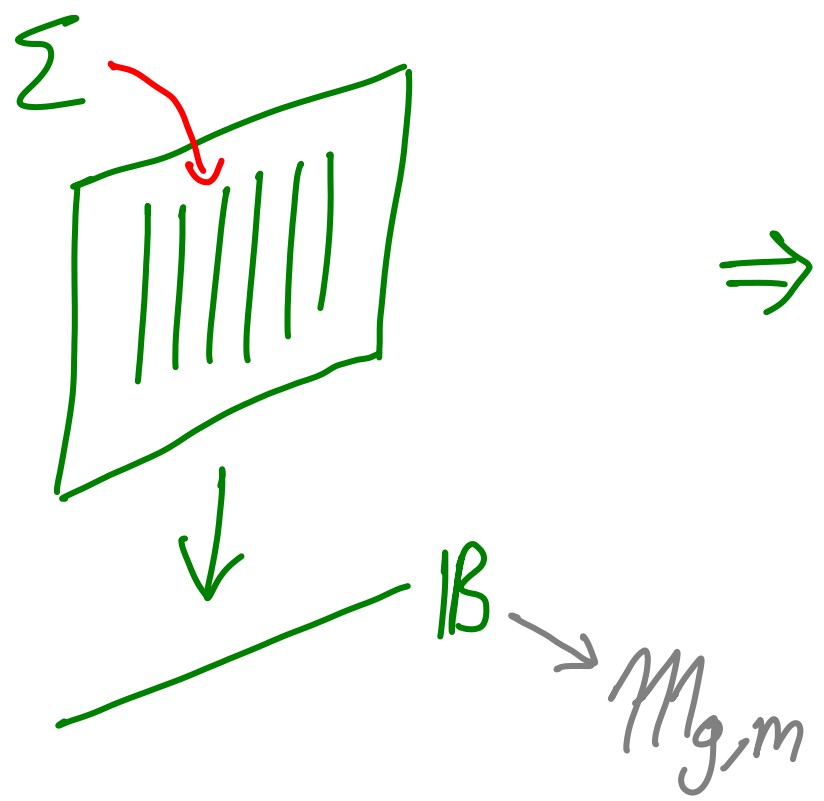
\Rightarrow



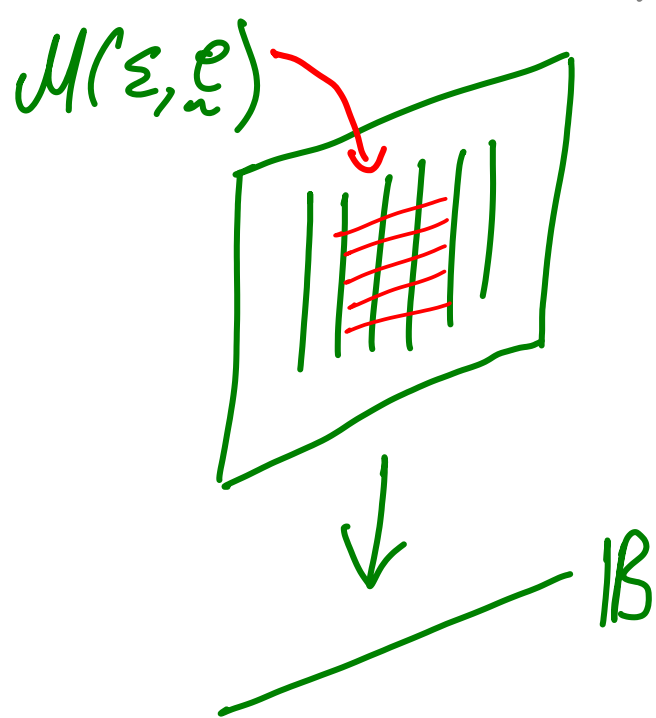
\Rightarrow systeme local de var. de caractères

Motivation 1 Géométrie des eqns. diffs non-linéaires

(Pamlevé, isomonodromie)



famille de courbes

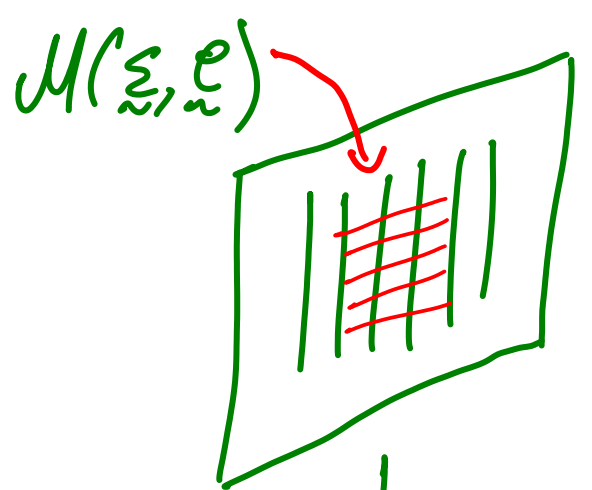
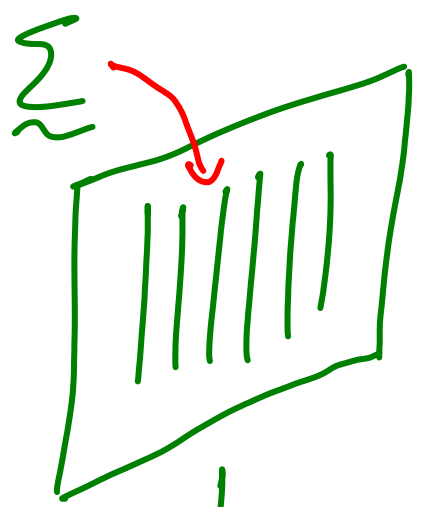


\Rightarrow système local de var. de caractères
 symplectique (Atiyah-Bott)
 Goldman

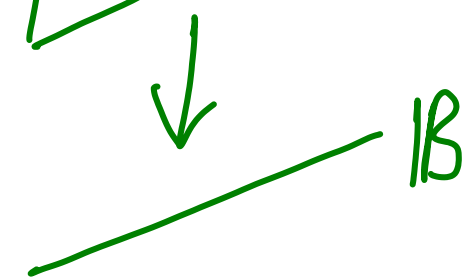
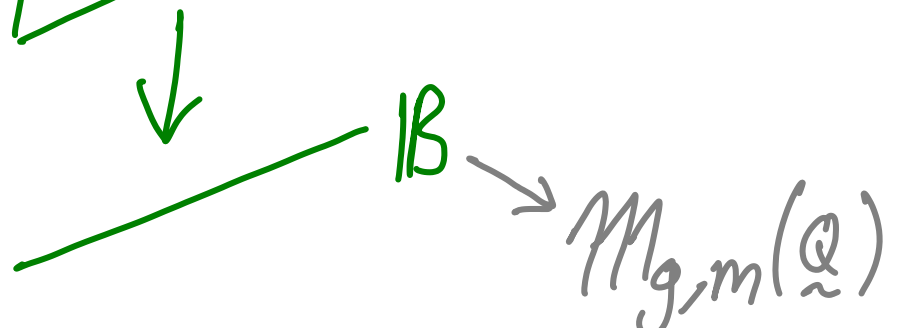
$\pi_1(\mathcal{M}_{g,m}) \cong \mathcal{M}(\underline{\varepsilon}, \underline{e})$
 (groupe modulaire)

Motivation 1 Géométrie des eqns. diffs non-linéaires

(Pamlevé, isomonodromie)



\Rightarrow



famille de courbes irreg. admissible \Rightarrow

systeme local de var. de caractères Sauvages
 symplectique (Atiyah-Bott)
 Goldman

$\pi_1(\mathcal{M}_{g,m}(\mathbb{Q})) \cong \mathcal{M}(\Sigma, e)$
 (groupe modulaire sauvage)

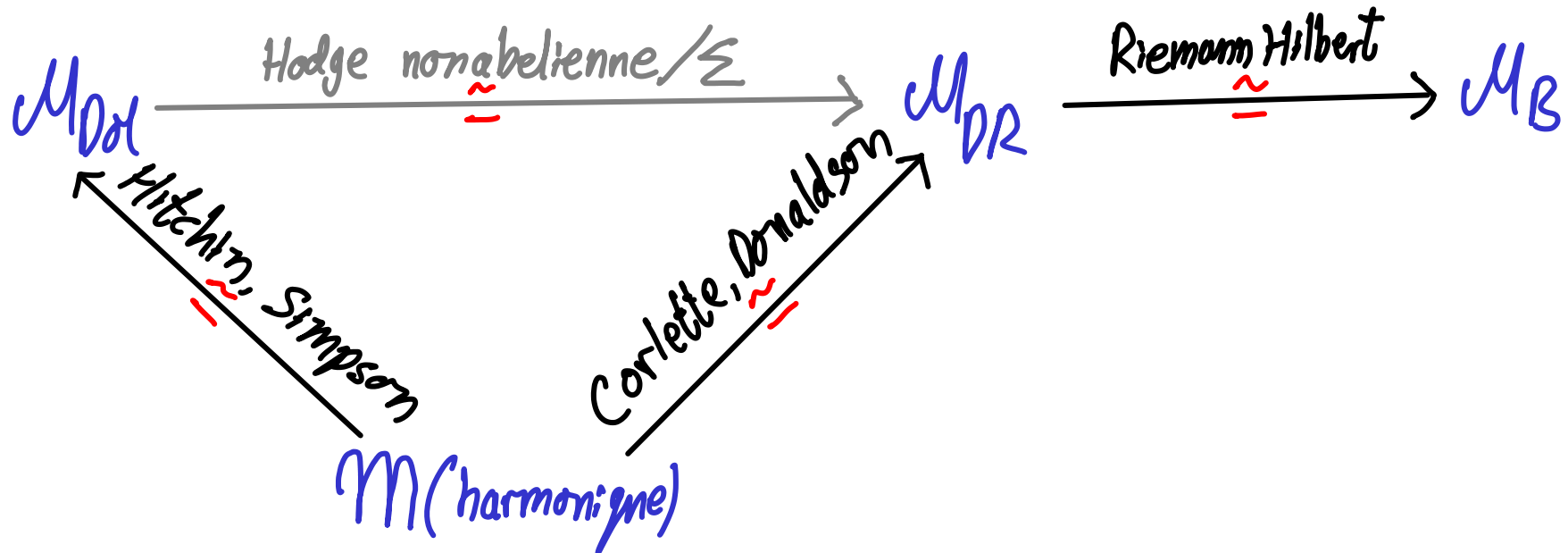
(B. '01 \rightarrow B.-Yamakawa '15)

Motivation 2: Variétés hyperkähleriennes / théorie de Hodge non abélienne

fibres de Higgs

fibres à connexion

var. de caractères



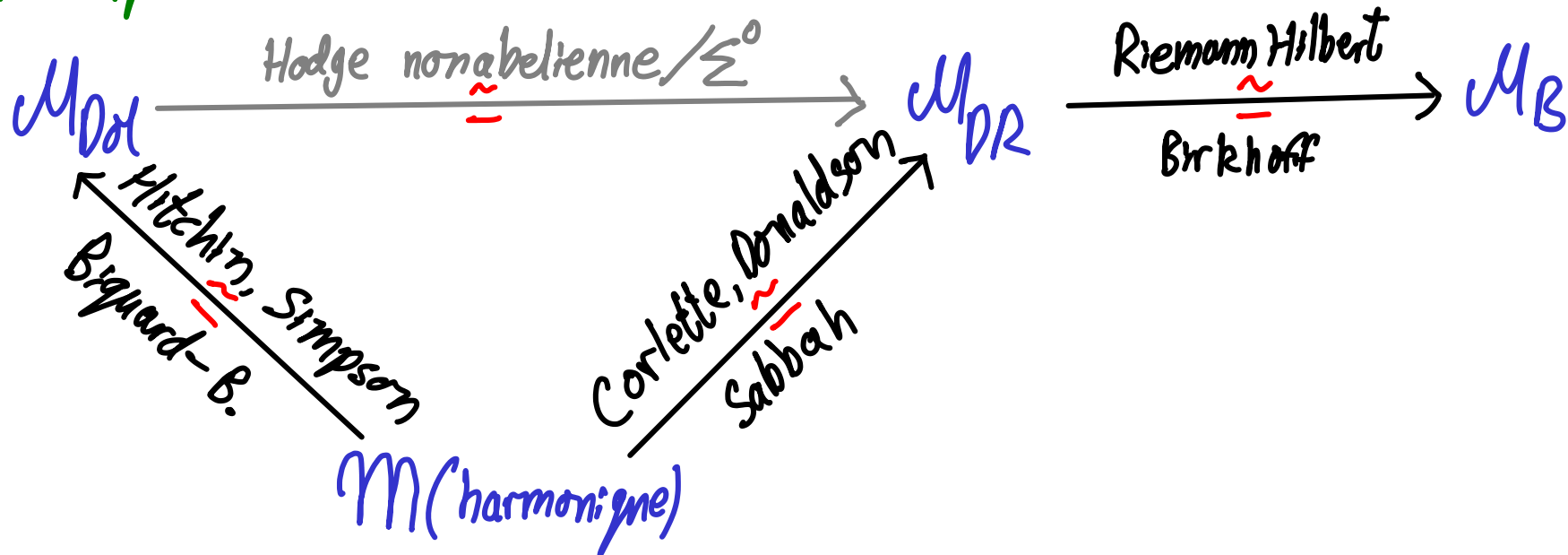
var. hyperkähleriennes de solutions
des équ. diff. de Hitchin / Σ

Motivation 2: Variétés hyperkähleriennes / théorie de Hodge non abélienne

fibres de Higgs
méromorphes

fibres à connexion
méromorphes

var. de caractères
sauvage



var. hyperkählienne de solutions
des équ. diff's de Hitchin / Σ^0

Exemple: les surfaces $\langle\langle xyz + x + y + z = c \rangle\rangle$
de Flaschka-Newell ont des métriques hyperkähleriennes complètes ($c \in \mathbb{C}^*$ générique)