

Programme de l'examen final

Notions et techniques à connaître

Voici une liste de notions à connaître pour l'examen final. En *italique*, les algorithmes à savoir appliquer sur des exemples explicites.

Chapitre 0 – Rappels

1. Rang d'une matrice. Forme échelonnée, échelonnée réduite.
2. *Algorithme du pivot de Gauss.*

Chapitre 1 – Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

1. Définition d'une forme quadratique, d'une forme bilinéaire symétrique, d'une matrice symétrique.
2. Lien entre fq et fbs par les identités de polarisation, expression matricielle dans une base, changement de base.
3. Rang, noyau d'une fq.
4. Orthogonalité et dualité.
5. *Algorithme de réduction de Gauss.* Théorème d'inertie de Sylvester.

Chapitre 2 – Espaces euclidiens et groupes orthogonaux $O(n)$

1. Définition d'un produit scalaire et d'une norme. Cauchy-Schwartz. Pythagore
2. Définitions d'isométrie et du groupe orthogonal.
3. Adjoint d'un endomorphisme.
4. Endomorphisme auto-adjoint, lien avec les formes quadratiques et les matrices symétriques.
5. *Théorème spectral* (diagonalisation simultanée).
6. Projections et symétries orthogonales. Expressions dans une base orthonormée adaptée.
7. *Orthonormalisation de Gram-Schmidt.*

8. Orientation d'un espace vectoriel.
9. Classification des isométries vectorielles en dimension 2. *Détermination pratique des caractéristiques de telles isométries. Expression de telles isométries dans des bases explicites.* Angles orientés dans le plan. Formule de composition de deux symétries et de deux rotations dans le plan.
10. Classification des isométries vectorielles en dimension 3. *Détermination pratique des caractéristiques de telles isométries. Expression de telles isométries dans des bases explicites.* Formule de Rodrigues. Formule du produit vectoriel.
11. Classification des éléments de $O(n)$.

La décomposition en valeurs singulières n'est pas exigible.

Chapitre 3 – Espaces affines, coniques et quadriques

1. Applications affines, espace affine euclidien, isométries affines.
2. Classification des isométries affines en dimensions 2 et 3.
3. Polynôme de degré 2 dans un espace affine. Quadrique affine. Coniques à centre.
4. Classification des coniques affines. *Détermination pratique de la nature d'une conique.*
5. Classification des quadriques en dimension 3. *Détermination pratique de la nature d'une quadrique en dimension 3.*

La notion d'excentricité n'est pas exigible, tout comme le chapitre sur les formes hermitiennes.