# Feuille 6 : coniques, quadriques, espaces hermitiens

## Coniques

**Exercice 1.** On considère les coniques du plan affine euclidien $\mathbf{R}^2$ données par les équations

$$C_1 : 2x^2+4xy+5y^2-10x-1=0, \quad C_2 : 3x^2-4xy+2y-1=0, \quad C_3 : x^2+4xy+4y^2+x-4=0.$$

Déterminer la nature géométrique de ces coniques et calculer leur excentricité. On déterminera les droites asymptotes de l'hyperbole. Dessiner ces coniques.

**Exercice 2.** On se place dans un repère du plan affine. Soient $a, b, c, a', b', c' \in \mathbf{R}$ et $d \in \mathbf{R}^*$ tels que $(a, b)$ et $(a', b')$ ne sont pas proportionnels. Montrer que l'équation

$$(ax+by+c)(a'x+b'y+c') = d$$

est celle d'une hyperbole dont les asymptotes sont les droites d'équations $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$.

**Exercice 3.** Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de centre $O$ et $M$, $P$ deux points de $\mathcal{E}$ tels que la tangente à l'ellipse en $P$ est parallèle à la droite $(OM)$. Montrer que l'aire du triangle $MOP$ ne dépend pas de la position de $M$ et de $P$ sur l'ellipse.
*Indication : on pourra se ramener au cas du cercle par une transformation bien choisie.*

**Exercice 4.** Soit $ABC$ un triangle du plan affine. Montrer qu'il existe une ellipse inscrite dans le triangle $ABC$, tangente à chacun des côtés du triangle en leurs milieux.

## Quadriques

**Exercice 5.** Déterminer la nature géométrique des quadriques de $\mathbf{R}^3$ d'équations

$$\begin{aligned} Q1 : &\quad xy+3xz+z=0 \\ Q2 : &\quad xy+yz+zx+2y+1=0 \\ Q3 : &\quad 2x^2+y^2+2z^2+2xz-5=0 \\ Q4 : &\quad x^2+y^2+z^2-4xy-4xz-4yz-4z-4y+2x+1=0 \end{aligned}$$

**Exercice 6.** De quelle nature est la quadrique de $\mathbf{R}^3$ d'équation $z = xy$ ? Que peut-on dire de son intersection avec le plan horizontal passant par l'origine ?

On considère deux droites de $\mathbf{R}^3$ passant par le point de coordonnées $(0, 0, 1)$ et dirigées respectivement par les vecteurs $(1, 1, 1)$ et $(1, -1, 0)$. Trouver l'équation d'un paraboloïde hyperbolique contenant ces deux droites. *Indication : trouver l'équation du plan contenant les droites.*

**Exercice 7.** On se place sur un espace affine de dimension 3 muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Donner la liste des types de quadriques dont la forme quadratique est non dégénérée.
2. Montrer que pour chacune de ces quadriques, il existe un point tel que la symétrie centrale relativement à ce point laisse invariante la quadrique.
3. Calculer ce centre de symétrie pour la quadrique d'équation :

$$z^2+2z+xy+y=0.$$

Quelle est la nature de cette quadrique ?

## Espaces hermitiens

**Exercice 8.** On considère les applications suivantes, définies pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^2$.

1. $\phi_1(x, y) = x_1\bar{y_2} + x_2\bar{y_1}$.
2. $\phi_2(x, y) = 2x_1\bar{y_1} + ix_1\bar{y_2} + ix_2\bar{y_1} + 5x_2\bar{y_2}$,
3. $\phi_3(x, y) = (1 + i)x_1\bar{y_1} + 2x_1\bar{y_2} + 2x_2\bar{y_1} + 5x_2\bar{y_2}$,
4. $\phi_4(X, Y) = x_1\bar{y_1} + (1 + i)x_1\bar{y_2} + (1 - i)x_2\bar{y_1} + 2x_2\bar{y_2}$.

Déterminer lesquelles de ces applications sont des formes hermitiennes et, si oui, écrire leurs matrices dans la base canonique de $\mathbf{C}^2$ et donner la forme quadratique hermitienne $Q_i$ associée.

**Exercice 9.** On note $(x_1, x_2, x_3)$ les coordonnées dans $\mathbf{C}^3$ et l'on considère les formes quadratiques hermitiennes ci-dessous. Écrire chacune d'elles comme somme de carrés de modules de formes linéaires indépendantes, et déterminer sa signature et son rang.

1. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1\bar{x_1} - ix_1\bar{x_2} + ix_2\bar{x_1} - x_1\bar{x_3} - x_3\bar{x_1} + 2x_2\bar{x_2} + x_3\bar{x_3} - 2ix_2\bar{x_3} + 2ix_3\bar{x_2}$.
2. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1\bar{x_1} - 2ix_1\bar{x_2} + 2ix_2\bar{x_1} + ix_1\bar{x_3} - ix_3\bar{x_1} + 2x_2\bar{x_2} + 2x_3\bar{x_3} - 2ix_2\bar{x_3} + 2ix_3\bar{x_2}$.
3. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1\bar{x_2} + x_2\bar{x_1} + ix_1\bar{x_3} - ix_3\bar{x_1} + (1 + i)x_2\bar{x_3} + (1 - i)x_3\bar{x_2}$.

**Exercice 10.** On munit $\mathbf{C}^3$ du produit scalaire hilbertien $(\ |\ )$ usuel et l'on note $(e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Expliquer pourquoi les matrices suivantes sont diagonalisables dans une base orthonormée. Puis, pour chacune d'elles, calculer les valeurs propres et déterminer une base orthonormée de vecteurs propres :

$$\begin{pmatrix} 4 & i & i \\ -i & 4 & 1 \\ -i & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & -1 \\ -i & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ -1 & 0 & -1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2i & 1+i & 1+i \\ -1-i & 1+2i & 1-i \\ -1-i & 1-i & 1+2i \end{pmatrix}.$$

**Exercice 11.** Montrer que les matrices suivantes sont diagonalisables sur $\mathbf{C}$ et les diagonaliser.

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 12.** Soit $E = \mathbf{C}^3$ muni de sa structure hermitienne canonique. Soit $F$ le sous-espace des vecteurs $(x_1, x_2, x_3) \in E$ satisfaisant l'équation $x_1 - x_2 + ix_3 = 0$.

1. Calculer l'orthogonal de $F$.
2. Calculer la matrice de la projection orthogonale sur $F$ dans la base canonique.
3. Trouver une base orthonormale de $F$.

**Exercice 13.** On se place sur l'espace $C^0([-\pi, \pi], \mathbf{C})$ muni du produit

$$(f \mid g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

Montrer que cette formule définit une forme hermitienne et que la famille de fonctions $e_k(x) = e^{ikx}$, $k \in \mathbf{Z}$, est orthonormée.

**Exercice 14.** Soit $E$ un espace hermitien de dimension finie et $f : E \to E$ une application linéaire. Montrer que $\mathrm{im}(f)^\perp = \ker(f^*)$. On suppose de plus $f$ normale. Montrer les égalités

$$\ker(f) = \ker(f^*), \qquad \mathrm{im}(f)^\perp = \ker(f).$$