

# Dynamique des homéomorphismes du tore et graphe fin des courbes

D'après Jonathan Bowden, Sebastian Hensel, Kathryn Mann,  
Emmanuel Militon et Richard Webb  
et plein d'autres  
*Ceci est un brouillon !*

Pierre-Antoine Guihéneuf et Frédéric Le Roux

2024

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Enoncés	3
1.2	Surfaces	5
1.3	Courbes	5
1.4	Homéomorphismes	9
1.5	Graphes	10
1.6	Connexité	11
<b>2</b>	<b>Ensemble de rotation dans le tore</b>	<b>15</b>
2.1	Définition	15
2.2	Convexité	16
2.3	La forme de $\rho(F)$ : exemples et questions ouvertes	21
2.4	Orbites périodiques	23
2.5	Majoration de la longueur de translation	24
<b>3</b>	<b>Gromov-hyperbolicité</b>	<b>27</b>
3.1	Définition	28
3.2	Exemples	28
3.3	Quasi-isométries, quasi-géodésiques	28
3.4	Produit de Gromov	33
3.5	Groupes hyperboliques	35
3.6	Le graphe des courbes du tore	36

<b>4</b>	<b><math>\mathcal{C}</math> et <math>\mathcal{C}^\dagger</math> hyperboliques</b>	<b>41</b>
4.1	Un critère d'hyperbolicité . . . . .	41
4.2	Hyperbolicité uniforme des graphes de courbes . . . . .	44
4.3	Hyperbolicité des graphes de courbes fins (enfin!) . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Bord à l'infini</b>	<b>50</b>
5.1	Le bord et sa topologie . . . . .	50
5.2	Classification des isométries . . . . .	51
5.3	Lemme du ping-pong . . . . .	53
<b>6</b>	<b>BHMMW : Loxodromiques de <math>\mathcal{C}^\dagger(\mathbf{T}^2)</math></b>	<b>54</b>
6.1	Classification de Nielsen-Thurston . . . . .	54
<b>7</b>	<b>Action loxodromique sur <math>\mathcal{C}</math></b>	<b>58</b>
7.1	Un exemple . . . . .	58
7.2	Homéos pseudo-Anosov . . . . .	69
<b>8</b>	<b>Quasi-morphismes ?</b>	<b>70</b>
8.1	Groupes libres . . . . .	70
8.2	Groupes agissant sur un espace hyperbolique . . . . .	71

# 1 Introduction

## 1.1 Énoncés

Le but du cours est d'expliquer les objets et les arguments principaux des preuves des deux énoncés suivants.

**Théorème 1.1** ([BHW22]). *Soit  $\Sigma$  une surface compacte de genre  $g \geq 1$ . Alors le graphe fin des courbes,  $\mathcal{C}^\dagger(\Sigma)$ , est hyperbolique au sens de Gromov.*

**Théorème 1.2** ([BHM<sup>+</sup>22]). *Soit  $h \in \text{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$ . Alors  $h$  agit de façon loxodromique sur  $\mathcal{C}^\dagger(\mathbf{T}^2)$  ssi l'ensemble de rotation de  $h$  est d'intérieur non vide.*

Dans ce qui suit, nous allons définir tranquillement tous ces objets. Voici des définitions (trop) rapides. Les surfaces compactes de genre  $\geq 1$  sont le tore, le tore à deux trous, le tore à trois trous, etc.. Le graphe fin des courbes  $\mathcal{C}^\dagger(\mathbf{T}^2)$  a pour sommets les courbes  $\alpha$  fermées simples non homotopes à 0, et pour arêtes les paires  $(\alpha, \beta)$  avec  $|\alpha \cap \beta| \leq 1$ . On munit l'ensemble des sommets de la distance naturelle, la plus grande pour laquelle deux sommets adjacents sont à distance 1. Le graphe est dit *hyperbolique* si "les triangles sont fins" : il existe une constante  $\delta$  telle que pour tous sommets  $\alpha, \beta, \gamma$ , et tous choix de plus courts chemins  $[\alpha, \beta], [\beta, \gamma], [\gamma, \alpha]$  joignant ces sommets dans le graphe, chacun des côtés est inclus dans le  $\delta$ -voisinage de la réunion des deux autres.

Un élément  $h$  est dit *loxodromique* si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} d(\alpha, h^n(\alpha)) > 0$$

(ce nombre est bien défini, et ne dépend pas du choix de  $\alpha$ ). Les homéos  $h$  du tore agissent de façon naturelle sur  $\mathcal{C}^\dagger(\mathbf{T}^2)$  par l'action "une courbe  $\alpha \in \mathcal{C}^\dagger(\mathbf{T}^2)$  est envoyée sur  $h(\alpha) \in \mathcal{C}^\dagger(\mathbf{T}^2)$ ".

L'ensemble de rotation est une partie compacte et convexe du plan qui décrit l'ensemble des façons dont les points s'enroulent autour du tore sous l'action itérée d'un homéomorphisme  $h$ ; il sera étudié dans la section 2. Disons simplement que le fait qu'il soit d'intérieur non vide entraîne une dynamique riche : entropie positive (théorème de Llibre-McKay [LM91]), infinité d'orbites périodiques (théorème de Franks [Fra89]). Le théorème 2 relie ainsi une propriétés dynamique classique à la géométrie d'un nouveau graphe hyperbolique.

La motivation principale pour ces résultats est une question issue d'un article publié en 2008 par Burago, Ivanov et Polterovitch : *la longueur des commutateurs est-elle bornée sur le groupe  $\text{Homeo}_0(M)$ , composante connexe de l'identité dans le groupe des homéomorphismes d'une variété compacte  $M$  ?*<sup>1</sup> A la suite de travaux de ces auteurs et de Tsuboi, on sait que la réponse est positive lorsque la dimension de  $M$  est différente de 2 ou 4. Les travaux que nous étudions permettent de montrer que la situation est très différente sur les surfaces.

**Corollaire 1.3.** *[BHW22] Dans le groupe simple  $\text{Homeo}_0(\Sigma)$ , la longueur des commutateurs est non bornée. Mieux, la longueur stable des commutateurs est non triviale, l'espace des quasi-morphismes est de dimension infinie.*

NB : C'est faux en dimension supérieure, et sur la sphère ou le disque.

Le groupe  $\text{Homeo}_0(\Sigma)$  est simple, et en particulier il est parfait, c'est-à-dire que tout élément peut s'écrire comme un produit de commutateurs. La *longueur des commutateurs* de  $h$ ,  $cl(h)$ , est le nombre minimum de facteurs nécessaires pour écrire  $h$  comme un tel produit. La longueur stable des commutateurs est

$$scl(h) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} cl(h^n).$$

Les quasi-morphismes sont des outils algébriques pour minorer la longueur stable des commutateurs. L'idée très vague est qu'un groupe qui agit sur un graphe hyperbolique "ressemble" à un groupe libre, et (sous certaines hypothèses) on peut généraliser la construction des quasi-morphismes des groupes libres appelés *quasi-morphismes de Brooks*.

Ces deux théorèmes ont deux ancêtres vénérables, qui sont aussi des outils de la preuve (on rentrera dans les détails de ces énoncés, en particulier on donnera les définitions, plus tard) .

**Théorème 1.4** ([MM99]). *Le graphe des courbes,  $\mathcal{C}(\Sigma)$ , est hyperbolique (sauf cas particuliers), les homéomorphismes pseudo-Anosov agissent de façon loxodromique.*

**Théorème 1.5** ([HPW15], ...). *Le graphe des courbes est uniformément hyperbolique, et on en a une preuve "élémentaire".*

Le théorème de Masur et Minsky a de nombreuses conséquences sur l'algèbre du "mapping class group" des surfaces, dont font partie les célèbres

---

1. En réalité, ces auteurs s'intéressent en premier lieu aux groupes de difféomorphismes, mais les deux points sont équivalents en ce concerne les questions qu'on étudie ici.

groupes de tresses d'Artin. On espère utiliser le théorème de Bowden-Hansel-Webb pour récolter des propriétés analogues sur l'algèbre des groupes d'homéomorphismes des surfaces.

Notons que le théorème 1.2 a été généralisé par Guihéneuf-Militon aux surfaces de genre supérieur [GM23].

## 1.2 Surfaces

Dans tout ce cours on s'intéressera uniquement aux surfaces connexes et orientables ; on ne mentionne plus ces deux adjectifs dans la suite.

**Définition 1.6.** Une *surface* (sans bord) est un espace topologique  $S$  dans lequel tout point a un voisinage homéomorphe au plan. On suppose en général que  $S$  est  $\sigma$ -compacte (réunion dénombrable de compacts) pour éviter les gags. Une *surface à bord* est un espace topologique,  $\sigma$ -compact, dans lequel tout point a un voisinage homéomorphe au plan ou au demi-plan fermé.

Dans la suite, on considérera des surfaces  $\Sigma$  compactes à bord, et potentiellement munies d'un ensemble fini  $F \subset (\Sigma \setminus \partial\Sigma)$  dont les éléments sont appelés *pointes* et qu'on voit comme des points qu'on enlèvera de la surface. On notera alors  $(\Sigma, F)$  le couple (surface, pointes), qu'on appellera *surface pointée*. NB : si on munit  $\Sigma$  d'une métrique, alors cela induit naturellement une métrique (bornée) sur  $\Sigma \setminus F$ .

**Théorème 1.7** (Revêtement universel des surfaces). *Soit  $(\Sigma, F)$  une surface pointée, telle que  $\Sigma$  n'a pas de bord. Alors le revêtement universel de  $\Sigma \setminus F$  est homéomorphe au plan, à moins que  $\Sigma = \mathbf{S}^2$  et  $F = \emptyset$ .*

**Théorème 1.8** (Classification des surfaces). *Soient deux surfaces pointées  $(\Sigma_1, F_1)$  et  $(\Sigma_2, F_2)$ . Alors  $\Sigma_1 \setminus F_1$  et  $\Sigma_2 \setminus F_2$  sont homéomorphes ssi les surfaces  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  ont le même genre et le même nombre de composantes de bord, et si  $F_1$  et  $F_2$  sont de même cardinal.*

*De plus, si  $B_i^j$  et  $F_i^k$  sont les composantes de bord et les pointes de  $\Sigma_i$ , on peut choisir l'homéo entre les surfaces de telle manière qu'il envoie  $B_1^j$  sur  $B_2^j$  et  $F_1^k$  sur  $F_2^k$ .*

Pour définir le genre, on a besoin d'introduire des courbes.

## 1.3 Courbes

**Définition 1.9.** Une *courbe fermée* (ou *lacet*) est une image du cercle par une application continue. La courbe est *simple* si l'application est injective.

Une courbe fermée sur une surface  $S$  est dite *essentielle* si elle n'est pas homotope à 0. Une courbe fermée simple sur une surface est dite *séparante* si son complémentaire possède deux composantes connexes. Une courbe est dite *périphérique* si elle est homotope à une composante connexe du bord, ou à un lacet inclus dans un voisinage arbitrairement petit d'une pointe.

On identifie souvent (et allègrement) une courbe vue comme une application et son image.

**Définition 1.10.** Le *genre* d'une surface compacte (sans pointe, sans bord) est le nombre maximum de courbes fermées simples disjointes pouvant être tracées sur cette surface sans la déconnecter.

On appellera genre de la surface pointée  $(\Sigma, F)$  le genre de  $\Sigma$ . NB : Le genre permet de retrouver la caractéristique d'Euler-Poincaré par la formule  $\chi(\Sigma \setminus F) = 2 - 2g - |F|$ .

Remarquons que le complémentaire d'une courbe fermée simple dans une surface connexe possède au plus deux composantes connexes. C'est une conséquence de l'existence de *voisinages tubulaires* aux courbes, qui donne une propriété beaucoup plus forte :

**Théorème 1.11** (Voisinages tubulaires). *Pour toute courbe fermée simple  $\gamma : \mathbf{S}^1 \rightarrow \Sigma$ , il existe un voisinage  $A$  de  $\gamma$ , ainsi qu'un homéomorphisme  $h : [-1, 1] \times \mathbf{S}^1 \rightarrow A$  tel que  $h(0, \cdot) = \gamma$ . On a un énoncé analogue pour les arcs simples, i.e. les plongements de  $[0, 1]$ .*

Ce résultat est classique pour les courbes lisses, on a d'ailleurs l'énoncé analogue pour toute sous-variété lisse compacte d'une variété). Dans le cas continu, par contre, il est spécifique à la dimension 2 (les célèbres **sphères cornues d'Alexander** n'ont pas de voisinage tubulaire). Il fait partie de la famille des théorèmes de **Schoenflies**.

**Corollaire 1.12.** *On se place dans une surface compacte à bord et à pointes ("de type fini"). À homéo près il n'y a qu'une seule courbe non séparante et qu'un nombre fini de courbes séparantes. Plus précisément : pour toute paire de courbes non séparantes  $\alpha_1, \alpha_2$  il existe un homéo qui envoie  $\alpha_1$  sur  $\alpha_2$  (complément : on peut aussi envoyer les pointes où on veut).*

*Démonstration.* Soit  $\Sigma_1$  une surface compacte, et  $\alpha_1$  une courbe fermée simple non séparante sur  $\Sigma_1$ . En découpant  $\Sigma_1$  le long de  $\alpha_1$  on obtient une surface  $\Sigma'_1$  compacte, connexe puisque  $\alpha_1$  est non séparante, avec deux composantes de bord de plus que  $\Sigma_1$ , qu'on note  $\alpha_1^1$  et  $\alpha_1^2$ . Le fait que  $\Sigma'_1$  est bien une surface à bord provient de l'existence d'un voisinage tubulaire de  $\alpha_1$ . Si

maintenant on choisit une surface  $\Sigma_2$  homéomorphe à  $\Sigma_1$ , et une courbe  $\alpha_2$  non séparante sur  $\Sigma_2$ , la construction analogue donne une surface à bord  $\Sigma'_2$ , avec deux composantes de bord en plus  $\alpha_2^1$  et  $\alpha_2^2$ . D'après la classification des surfaces, les surfaces  $\Sigma'_1$  et  $\Sigma'_2$  sont homéomorphes, via un homéo qu'on note  $h_0$ . on peut de plus supposer que  $h_0$  envoie  $\alpha_1^1$  sur  $\alpha_2^1$  et  $\alpha_1^2$  sur  $\alpha_2^2$  (au sens des images des courbes).

On peut ajuster l'homéomorphisme près des composantes de bord pour qu'il induise un homéomorphisme entre les deux surfaces initiales qui envoie  $\alpha_1$  sur  $\alpha_2$  (où les courbes sont vues comme des fonctions). Pour ceci, si les homéos  $h_0 \circ \alpha_1^1$  et  $\alpha_2^1$  (qui ont mêmes ensemble de départ et d'arrivée) n'agissent pas pareil sur l'orientation, on commence par composer  $h_0$  par un homéo de  $\Sigma'_1$  induit par un homéo de  $\Sigma_1$  qui renverse l'orientation et préserve  $\alpha_1$ . On peut donc supposer que les homéos  $h_0 \circ \alpha_1^1$  et  $\alpha_2^1$  sont isotopes, autrement dit que l'homéo du cercle  $\alpha_2^1 h_0^{-1} (\alpha_1^1)^{-1}$  est isotope à l'identité. Soit  $I$  une telle isotopie<sup>2</sup> :  $I^0 = \text{Id}_{\mathbf{S}^1}$  et  $I^1 = \alpha_2^1 h_0^{-1} (\alpha_1^1)^{-1}$ . Dans les coordonnées données par un voisinage tubulaire de  $\alpha_2$ , pour  $(t, \theta) \in [0, 1] \times \mathbf{S}^1$ , on pose  $g_1$  l'homéo qui envoie un voisinage de la composante de bord  $\alpha_1^1$  de  $\Sigma'_1$  sur un voisinage de la composante de bord  $\alpha_2^1$  de  $\Sigma'_2$ , défini par  $g_1(t, \theta) = (t, I^t(\theta))$ . On peut définir de même un homéo  $g_2$  qui envoie un voisinage de  $\alpha_1^2$  sur un voisinage de  $\alpha_2^2$ . On peut étendre ces homéos en un homéo  $g : \Sigma'_1 \rightarrow \Sigma'_2$  par l'identité ; on vérifie facilement que l'homéo  $h = g \circ h_0 : \Sigma'_1 \rightarrow \Sigma'_2$  vérifie bien  $h\alpha_1^1 = \alpha_2^1$  et  $h\alpha_1^2 = \alpha_2^2$ , et passe au quotient en un homéo  $h : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  qui satisfait  $h\alpha_1 = \alpha_2$ .  $\square$

**Définition 1.13.** Soient  $\alpha, \beta$  deux courbes fermées simples se rencontrant en un point  $x$ . On dit que l'intersection est *transverse* au point  $x$  si  $\beta$  est localement de part et d'autre de  $\alpha$ . Plus précisément, soit  $A$  un voisinage tubulaire de  $\alpha$ , et  $A^+, A^-$  les deux composantes connexes de  $A \setminus \alpha$ . Soit aussi  $t_0$  tel que  $\beta(t_0) = x$ . Alors l'intersection est transverse s'il existe  $\tau > 0$  tel que

$$\beta((t_0 - \tau, t_0)) \subset A^+, \beta((t_0, t_0 + \tau)) \subset A^-$$

ou le contraire. On dit que les deux courbes sont *en position transverse* si leur intersection est finie, et toutes les intersections sont transverses.

On a le complément suivant du théorème du voisinage tubulaire : si  $\alpha, \beta$  sont transverses alors il existe un voisinage tubulaire  $h : [-1, 1] \times \mathbf{S}^1 \rightarrow A$  de  $\alpha$  que  $\beta$  traverse "tout droit" :  $h^{-1}(\beta \cap A)$  est une réunion de segments horizontaux  $[-1, 1] \times \{\theta\}$ .

---

2. Facile à construire : la composante connexe de l'identité dans les homéos du cercle est convexe, puisque tous ses éléments sont strictement croissants.

**Définition 1.14.** Deux courbes fermées simples  $\alpha, \beta$  sont *en position minimale* si elle minimisent le nombre de points d'intersection dans leurs classes d'homotopies :

$$|\alpha \cap \beta| = \min\{|\alpha' \cap \beta'| \mid \alpha' \simeq \alpha, \beta' \simeq \beta\}.$$

Ce nombre est alors appelé *nombre d'intersection géométrique*, il ne dépend que de la classe d'homotopie de  $\alpha$  et  $\beta$ , on le note  $i(\alpha, \beta) = i([\alpha], [\beta])$ ; il va jouer un rôle plus bas.

**Exercice 1.** Vérifier que

$$|\alpha \cap \beta| = \min\{|\alpha \cap \beta'| \mid \beta' \simeq \beta\}.$$

*Indication* : le corollaire 1.12.

La proposition ci-dessous entraîne que le nombre d'intersection géométrique est toujours bien défini.

**Définition 1.15.** Étant données deux courbes fermées simples  $\alpha, \beta$ , un *bigone* (bordé par les deux courbes) est un (ensemble homéomorphe à un) disque  $D$  dans  $\Sigma$  dont le bord est formé d'un arc de  $\alpha$  et d'un arc de  $\beta$ . Le bigone est dit *minimal* s'il ne contient pas d'autre bigone bordé par les deux courbes.

Remarquer que tout bigone contient un bigone minimal.

**Proposition 1.16** (Critère du bigone). *Soient  $\alpha, \beta$  deux courbes fermées simples.*

1. *Il existe une courbe fermée simple  $\beta'$ , en position transverse avec  $\alpha$ , et arbitrairement proche de  $\beta$ ; en particulier,  $\beta'$  est homotope à  $\beta$ .*
2. *Les deux courbes sont en position minimale si et seulement si elles sont en position transverse et ne bordent aucun bigone.*

*Idée de preuve.* Second point. Supposons que les deux courbes bordent un bigone, alors elles bordent un bigone minimal. En poussant  $\beta$  dans un voisinage du bigone on peut supprimer le bigone, ce qui fait diminuer de 2 le nombre de points d'intersection : ainsi elles n'étaient pas en position minimale. Noter que pour définir proprement l'homotopie (ou même l'isotopie), on a besoin d'un analogue de la proposition sur le voisinage tubulaire : le bigone est homéomorphe à un disque (théorème de [Schoenflies](#)).

Pour la réciproque, le point clé est le suivant. Excluons le cas particulier de la sphère. Supposons que nos deux courbes ne bordent aucun bigone. Le revêtement universel de la surface  $S$  est homéomorphe au plan. Soit  $x_1, \dots, x_k$  les points d'intersection entre  $\alpha : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \rightarrow S$  et  $\beta$ ,  $\tilde{\alpha}$  un relevé (d'ensemble de départ  $\mathbf{R}$  puisque  $\alpha$  n'est pas contractile) de  $\alpha$ ,  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$  des relevés respectifs de  $x_1, \dots, x_k$  appartenant à  $\tilde{\alpha}|_{[0,1]}$ , et  $\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_k$  des relevés de  $\beta$  rencontrant tels que  $\tilde{\beta}_i$  rencontre  $\tilde{x}_i$ .

Notons que les  $\tilde{\beta}_i$  sont des relevés deux-à-deux différents : si on avait  $\tilde{\beta}_i = \tilde{\beta}_j$ , ça forcerait l'existence d'un bigone entre  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}_i$  (défini par les points  $\tilde{x}_i$  et  $\tilde{x}_j$ ), donc d'un bigone minimal (dans le plan), et en réfléchissant un peu on voit qu'un tel bigone se projette en un bigone de  $S$ .

Alors  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}_i$  sont deux courbes homéomorphes à des droites proprement plongées dans le plan, et  $\tilde{x}_i$  est leur seul point d'intersection. Aucune homotopie ne peut supprimer ce point d'intersection entre ces deux relevés : tout  $\alpha' \simeq \alpha$  a un relevé  $\tilde{\alpha}'$  qui rencontre au moins  $k$  relevés de  $\beta$ , ce qui implique (puisque ces relevés sont deux-à-deux disjoints par simplicité de  $\beta$ ) que  $|\alpha' \cap \beta| \geq k$ .  $\square$

**Exercice 2.** Soient  $\alpha, \beta$  deux courbes fermées simples qui ont un unique point d'intersection, et l'intersection en ce point est transverse. Montrer que ces deux courbes sont en position minimale. En déduire qu'elles sont essentielles et non périphériques.

## 1.4 Homéomorphismes

Les travaux décrits dans ce cours s'inscrivent dans l'étude des propriétés algébriques des groupes d'homéomorphismes.

**Définition 1.17.** Pour  $S$  une surface (compacte ou non), on note  $\text{Homeo}(S)$  le groupe des homéomorphismes de  $\Sigma$ . Cet groupe est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, qui en fait un groupe topologique : les applications  $(f, g) \mapsto f \circ g, f \mapsto f^{-1}$  sont continues. Une *isotopie* entre  $f, g \in \text{Homeo}(\Sigma)$  est une application continue (ou *chemin*)  $I : [0, 1] \rightarrow \text{Homeo}(\Sigma)$  tel que  $I(0) = f$  et  $I(1) = g$ . On note  $\text{Homeo}_0(S)$  l'ensemble des homéos de  $S$  isotopes à l'identité.

Si  $(\Sigma, F)$  est une surface à pointes, on peut remarquer qu'un homéomorphisme de  $S = \Sigma \setminus F$  s'étend toujours à  $F$  en un homéomorphisme de  $\Sigma$ . De même, une isotopie sur  $S$  s'étend en une isotopie sur  $\Sigma$  fixant chaque point de  $F$ .

**Théorème 1.18** (Epstein). *Soient  $\alpha_1 : \mathbf{S}^1 \rightarrow \Sigma$ ,  $\alpha_2 : \mathbf{S}^1 \rightarrow \Sigma$  deux courbes fermées simples sur une surface (connexe, orientable)  $\Sigma$ . Supposons que  $\alpha_1, \alpha_2$  sont homotopes. Elles sont alors isotopes : il existe  $f \in \text{Homeo}_0(\Sigma)$  tel que  $\alpha_2 = f \circ \alpha_1$ .*

*Idée de preuve.* Si deux courbes homotopes sont disjointes, on montre qu'elles bordent une sous-surface homéomorphe à l'anneau  $[0, 1] \times \mathbf{S}^1$ . On utilise cet anneau pour pousser l'une sur l'autre.

Si deux courbes homotopes se rencontrent, on commence par faire une petite isotopie pour les mettre en position transverse. On montre ensuite qu'il existe un bigone entre les deux courbes. Comme dans la preuve du critère du bigone, on peut "pousser l'une des courbes à travers le bigone" par une isotopie pour faire diminuer de 2 le nombre de points d'intersection. On réitère jusqu'à obtenir des courbes disjointes, et on termine avec l'anneau.  $\square$

## 1.5 Graphes

Soit  $(\Sigma, F)$  une surface compacte à pointes. Si  $\Sigma$  est la sphère, on demande que  $|F| \geq 4$ . On pose  $S = \Sigma \setminus F$ . On définit ici le *graphe fin des courbes*, puis son ancêtre le *graphe des courbes*. Une remarque : dans ce cours, on va s'intéresser au graphe fin uniquement dans le cas d'une surface compacte (sans pointe), et principalement pour le tore. Pour étudier ce graphe, on aura besoin du graphe fin des surfaces avec des pointes.

**Définition 1.19.** On appelle *graphe fin des courbes* le graphe  $\mathcal{C}^\dagger(S)$  suivant :

- Les sommets du graphe sont les courbes fermées simples de  $S$  qui sont essentielles et non périphériques (sans paramétrage ni orientation).
- Deux sommets  $\alpha_1, \alpha_2$  sont reliés par une arête, ce qu'on notera  $\alpha_1 - \alpha_2$ , lorsque les courbes sont disjointes ; sur le tore, on met également une arête lorsque leur intersection contient au plus un point ; sur la sphère avec 4 pointes, on met également une arête si l'intersection contient au plus deux points.

Exemple : dessiner quelques courbes et le bout de graphe correspondant. Remarquer qu'il y a des courbes à distance 2 avec un nombre arbitrairement grand d'intersections...

La remarque suivante explique pourquoi ce graphe est intéressant. **Le groupe  $\text{Homeo}(\Sigma)$  agit par *automorphismes* sur le graphe  $\mathcal{C}^\dagger(\Sigma)$ .** Ceci signifie la chose suivante. Pour chaque courbe  $\alpha$  qui est un sommet du graphe,

la courbe  $h(\alpha)$  est encore (évidemment) un sommet ; si  $\alpha_1 - \alpha_2$  est une arête, alors  $h(\alpha_1) - h(\alpha_2)$  est encore (évidemment) une arête. Ainsi,  $h$  induit une bijection  $h_*$  de l'ensemble des sommets qui préserve la structure de graphe, ce qu'on appelle un automorphisme du graphe. On a de plus  $(gh)_* = g_*h_*$  : l'application  $h \mapsto h_*$  est un morphisme de groupe de  $\text{Homeo}(\Sigma)$  vers  $\text{Aut}(\mathcal{C}^\dagger(\Sigma))$ . Ce morphisme est évidemment injectif : en effet, chaque homéomorphisme distinct de l'identité bouge au moins une courbe. On dit que l'action est fidèle.

**Définition 1.20.** On appelle *graphe des courbes* le graphe  $\mathcal{C}(\Sigma)$  suivant :

- Les sommets du graphe sont les **classes d'isotopie** de courbes fermées simples essentielles non périphériques.
- Deux sommets  $a_1, a_2$  sont reliés par une arête lorsque les classes peuvent être réalisées par des courbes disjointes (le nombre d'intersection a été défini dans la définition 1.14) :

$$a_1 - a_2 \Leftrightarrow \exists \alpha_1 \in a_1, \exists \alpha_2 \in a_2, \alpha_1 \cap \alpha_2 = \emptyset \Leftrightarrow i(a_1, a_2) = 0.$$

Sur le tore avec zéro ou une pointe, on met aussi une arête lorsque  $i(a_1, a_2) \leq 1$  ; sur la sphère avec 4 pointes, on met aussi une arête si  $i(a_1, a_2) \leq 2$ .

Le groupe  $\text{Homeo}(\Sigma)$  agit également par automorphismes, mais ici le noyau de l'action est non trivial, et constitué du groupe  $\text{Homeo}_0(\Sigma)$  des homéomorphismes isotopes à l'identité. L'action induit donc une action du groupe quotient

$$\text{Homeo}(\Sigma)/\text{Homeo}_0(\Sigma)$$

appelé *mapping class groupe* (groupe modulaire, ou encore groupe des classes d'isotopies) de la surface.

## 1.6 Connexité

Soit  $S$  une surface compacte, éventuellement avec pointes, de genre au moins 1. NB : pour la suite le cas qui nous intéresse le plus est le tore avec plein de pointes.

**Proposition 1.21.**  $\mathcal{C}(S)$  est connexe.

**Lemme 1.22.**

$$d_{\mathcal{C}(S)}(a, b) \leq 2i(a, b) + 1,$$

où  $i(a, b)$  est le nombre d'intersection géométrique

*Démonstration.* On considère des représentants  $\alpha$  et  $\beta$  de  $a$  et  $b$  qui sont en position minimale : elles sont en position transverse, et il n'y a pas de bigone. On démontre la propriété par récurrence sur  $i(a, b)$ .

Si  $i(a, b) = 0$ , alors  $d_{\mathcal{C}(S)}(a, b) \leq 1$ .

Si  $i(a, b) = 1$ , alors dans le cas du tore avec zéro ou une pointe on n'a rien à faire. Sinon, un voisinage régulier de  $\alpha \cup \beta$  est homéomorphe à un tore moins un point ; la courbe bordant le trou de ce tore est disjointe des deux autres, et elle est essentielle et non périphérique, sans quoi on serait dans le cas du tore ou du tore à une pointe. On a donc  $d_{\mathcal{C}(S)}(a, b) \leq 2$ .

Supposons maintenant qu'il y a au moins deux points d'intersection. On oriente  $\alpha$  et  $\beta$  en choisissant un sens de parcours. On considère un sous-arc  $\alpha'$  de  $\alpha$  dont les extrémités sont deux points d'intersection successifs le long de  $\alpha$  ; autrement dit  $\alpha' \cap \beta$  ne contient que les deux extrémités de  $\alpha'$ . Dans un voisinage de  $\alpha'$  on a deux possibilités selon que (1)  $\beta$  traverse  $\alpha$  dans le même sens aux deux extrémités de  $\alpha'$ , ou au contraire (2) dans des sens opposés.

Dans le cas (1), en remplaçant un morceau de  $\beta$  par  $\alpha'$ , on fabrique deux courbes fermées simples  $\beta_1, \beta_2$  ; on les pousse un peu de côté (sans changer de notation). Les courbes  $\beta_1, \beta_2$  rencontrent chacune  $\beta$  en un unique point, et l'intersection est transverse. Elles sont donc en position minimale avec  $\beta$  (critère du bigone), et en particulier elles sont essentielles et non périphériques. Chaque point d'intersection de  $\alpha$  avec  $\beta$  donne lieu ou bien à un point d'intersection avec  $\beta_1$ , ou bien avec  $\beta_2$ , mais pas les deux : on garde celle qui a le moins de points d'intersection, moitié moins qu'avant donc. On a ainsi trouvé une courbe à distance 1 ou 2 de  $\beta$  en se débarrassant d'au moins la moitié des points d'intersection géométrique : par exemple  $d(\alpha, \beta) \leq 2 + d(\alpha, \beta_1)$  et  $i(\alpha, \beta_1) \leq i(\alpha, \beta)/2 \leq i(\alpha, \beta) - 1$ .

Dans le cas (2) les deux nouvelles courbes sont disjointes de  $\beta$ , et ont chacune au minimum deux points d'intersection de moins avec  $\alpha$ . Chacune est essentielle, sans quoi elle borderait un disque, ce qui contredirait le critère du bigone. Si l'une des deux n'est pas périphérique, on a  $d(\alpha, \beta) \leq 1 + d(\alpha, \beta_1)$  et  $i(\alpha, \beta_1) \leq i(\alpha, \beta) - 2$ . Si les deux courbes sont périphériques, alors  $\beta$  borde un disque à deux pointes. Dans ce cas, on change d'arc  $\alpha'$  en le remplaçant par l'arc suivant le long de  $\alpha$ . Si la procédure échoue à nouveau, alors  $\beta$  borde également un disque à deux pointes de l'autre côté : ce qui veut dire que  $\Sigma$  est la sphère à 4 pointes, cas qu'on a exclu.

En itérant la procédure, on se débarrasse à chaque étape d'au moins 1 point d'intersection, et la nouvelle courbe est à distance au plus 2 de la précédente ; et la procédure termine lorsqu'il reste au plus un point d'intersection, avec une courbe à distance au plus 2 de  $\alpha$ . D'où la formule (notez que la

formule précise importe peu...).

□

On va en déduire la connexité du graphe fin.

**Proposition 1.23.**  $\mathcal{C}^\dagger(S)$  est connexe.

*Démonstration.* Vu ce qui précède, il suffit de montrer qu'on peut relier deux courbes dans une même classe d'isotopie. Ceci découle du fait suivant : deux courbes  $C^0$ -proches sont à distance  $\leq 2$ . En effet, pour toutes courbes disjointes  $\alpha, \alpha'$ , toute courbe  $C^0$ -proche de  $\alpha$  est encore disjointe de  $\alpha'$ . □

Le lemme suivant donne une estimée optimale, et sera utilisé dans le chapitre sur l'ensemble de rotation.

**Lemme 1.24** (Connexité fine, [BHM<sup>+</sup>22]). *Si  $a$  et  $b$  sont homotopes, alors*

$$d_{\mathcal{C}^\dagger}(a, b) \leq \text{largeur}(a, b) + 1,$$

où  $\text{largeur}(a, b)$  est le nombre de translatsés de  $a$  qu'un translatsé de  $b$  rencontre, dans le revêtement associé à  $a$ .

*Démonstration.* Nous faisons la preuve dans le cas du tore. Ce qui suit s'inspire de la rédaction de [LRW22, proposition 4.2]

Posons  $\ell = \text{largeur}(a, b)$ . Si  $\ell = 0$  le résultat est évident, on suppose que  $\ell \geq 1$ . Pour démontrer le lemme, il suffit de trouver une courbe  $a_1$  qui est disjointe de  $a$  et telle que  $\text{largeur}(a, a_1) = \text{largeur}(a, b) - 1$  ; ensuite une récurrence fournit un chemin  $a_0 = a, a_1, \dots, a_{\ell+1} = b$  de  $a$  à  $b$  dans le graphe.

**Exercice 3.** Traiter graphiquement le cas  $\ell = 1$  : dessiner  $a$  et  $b$  telles que  $\text{largeur}(a, b) = 1$ , puis une courbe  $a_1$  disjointe de  $a$  et de  $b$ .

Soit  $S = \mathbf{R} \times \mathbf{S}^1$ . Soit  $T$  la translation  $(t, x) \mapsto (t + 1, x)$ . On considère le revêtement  $S \rightarrow S/T \simeq \mathbf{T}^2$ . Soit, pour chaque  $t$ ,  $\alpha_t = \{t\} \times \mathbf{S}^1$ . On peut supposer que la courbe  $a$  du lemme est la projection de  $\alpha_0$ . Par hypothèse, il existe un relevé  $\beta$  de  $b$  qui est disjoint de  $\alpha_0, \alpha_{\ell+1}$  mais rencontre  $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ .

Soit  $A$  l'anneau compact bordé par  $\alpha_0, \alpha_1$ . La continuité uniforme de  $\beta$  (en tant qu'application du cercle dans  $S$ ) entraîne :

**Lemme 1.25.** *L'ensemble des composantes connexes de  $A \cap \beta$  qui rencontrent  $\alpha_{\frac{1}{2}}$  est fini.*

Soit maintenant  $\beta' = T^{-\ell}(\beta)$ . Elle est disjointe de  $\beta$ , elle rencontre  $\alpha_0$  mais pas  $\alpha_1$ .

**Lemme 1.26.** *Il existe une courbe  $\alpha'_1$ , homotope à  $\alpha_0$ , dans l'intérieur de l'anneau  $A$ , et disjointe de  $\beta$  et de  $\beta'$ .*

Ce lemme permet de conclure la preuve, en prenant pour  $a_1$  la courbe projetée de  $\alpha'_1$  dans le tore.  $\square$

*Preuve du lemme 1.26.* On considère l'ensemble  $B$  des bigones formés d'un arc de  $\beta$  et d'un arc de  $\alpha_1$  et qui rencontrent  $\alpha_{\frac{1}{2}}$ . Cet ensemble est fini d'après le lemme précédent. En poussant un à un les arcs de  $\beta$  presque entièrement à travers ces bigones, on construit un homéomorphisme  $H$  de  $A$  tel que  $H(\beta)$  est disjoint de  $\alpha_{\frac{1}{2}}$ .

Symétriquement, on a un ensemble fini  $B'$  des bigones formés d'un arc de  $H(\beta')$  et d'un arc de  $\alpha_0$ . Notons que chacun de ces bigones est disjoint de  $H(\beta)$ . En poussant ces bigones, on construit un homéomorphisme  $H'$  de  $A$ , qui ne bouge pas  $H(\beta)$ , et tel que  $H'H(\beta')$  est disjoint de  $\alpha_{\frac{1}{2}}$ .

Maintenant il suffit de prendre  $\alpha' = (H'H)^{-1}(\alpha_{\frac{1}{2}})$ .  $\square$

**Exercice 4.** Adapter la preuve aux surfaces de genre  $> 1$ .

## 2 Ensemble de rotation dans le tore

### 2.1 Définition

Dans toute cette section, on considère  $f \in \text{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$ . Le revêtement universel de  $\mathbf{T}^2 \simeq \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$  est  $\mathbf{R}^2$ , on peut donc relever  $f$  en un homéomorphisme  $F$  de  $\mathbf{R}^2$ . Celui-ci commute avec les translations entières  $z \mapsto z + \mathbf{n}$  avec  $\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^2$  : on le voit en prenant un chemin  $I$  de  $\text{Homeo}(\mathbf{T}^2)$  reliant l'identité à  $f$ , qu'on relève à  $\tilde{I}$  à  $\mathbf{R}^2$ , alors pour tout  $\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^2$  et tout  $t \in [0, 1]$ , on a  $\tilde{I}^t(\tilde{x}) - \tilde{I}^t(\tilde{x} - \mathbf{n}) \in \mathbf{Z}^2$ , c'est de plus une fonction continue de  $t$  qui vaut  $\mathbf{n}$  en  $t = 0$  ; en évaluant en  $t = 1$  on obtient la propriété désirée. Réciproquement, tout homéomorphisme du plan qui commute aux translations entières induit un homéomorphisme du tore qui est isotope à l'identité. Les autres relevés de  $f$  sont les composés de  $F$  avec une translation entière.

**Définition 2.1** ([MZ89]). L'ensemble de rotation  $\rho(F)$  est l'ensemble des limites des suites convergentes du type

$$\frac{1}{n_k} (F^{n_k}(x_k) - x_k)$$

où  $(x_k)$  est une suite quelconque de points du plan, et  $(n_k)$  est une suite d'entiers qui tend vers  $+\infty$ .

On déduit facilement de la définition que l'ensemble de rotation est compact, non vide. Changer de relevé  $F$  revient à effectuer une translation entière (dans  $\mathbf{Z}^2$ ) : l'ensemble de rotation  $\rho(f)$  est bien défini en tant que compact du plan, modulo l'action de  $\mathbf{Z}^2$  par translation sur l'ensemble des compacts du plan.

Soit  $x$  un point quelconque,  $(p, q)$  un vecteur entier, et  $x' = x + (p, q)$  un point se projetant sur le même point que  $x$  dans le tore, alors  $F(x') - x' = F(x) - x$ . Autrement dit, l'application  $F - \text{Id}$  induit une application sur le tore  $\mathbf{T}^2$ , à valeurs dans  $\mathbf{R}^2$ . En particulier, on obtient une définition équivalente de l'ensemble de rotation en prenant les points  $x_k$  dans un domaine fondamental du tore, par exemple  $[0, 1]^2$ .

**Exercice 5.** 1. Montrer que  $\|F - \text{Id}\|_\infty := \sup_{x \in \mathbf{R}^2} \|F(x) - x\| < +\infty$ .

2. En déduire que l'ensemble de rotation est un invariant de conjugaison : si  $G$  est un relevé d'un homéo du tore isotope à l'identité, alors  $\rho(GFG^{-1}) = \rho(F)$ .

3. Montrer qu'en revanche, si  $A \in SL_2(\mathbf{Z})$ , on a  $\rho(AFA^{-1}) = A\rho(F)$ .

4. Montrer que pour tout  $q \in \mathbf{Z}$ , on a  $\rho(F^q) = q\rho(F)$ .

*Indication* : commencer par  $q \in \mathbf{N}$  ; l'une des inclusions est facile, pour l'autre effectuer la division euclidienne de  $n$  par  $q$ . Alternativement, cette formule découle de la proposition 2.2 ci-dessous.

**Exercice 6. Ensemble de rotation via les mesures** Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur le tore, qui est invariante par  $f$ , on définit le vecteur de rotation de  $\mu$  par la formule

$$\rho(\mu) = \int_{\mathbf{T}^2} \varphi_F(x) dx$$

où  $\varphi_F$  est la fonction induite sur le tore par  $F - \text{Id}$ . L'ensemble de rotation des mesures pour  $F$  est l'ensemble des nombres de rotation des toutes les mesures invariantes.

1. Montrer que cet ensemble est convexe.
2. Montrer que cet ensemble contient l'ensemble de rotation défini plus haut. *Indication* : on s'inspirera de la preuve du théorème de Krylov–Bogolyubov pour construire une mesure invariante.
3. Montrer que tout point extrémal de cet ensemble est le nombre de rotation d'une mesure ergodique.
4. Soit  $\mu$  une mesure ergodique, montrer que son nombre de rotation est dans l'ensemble de rotation de  $F$ . *Indications* : on pourra appliquer le théorème de Birkhoff à la fonction  $\varphi_F$ .
5. Avec la convexité de l'ensemble de rotation (cf plus bas), en déduire l'égalité des deux ensembles.

## 2.2 Convexité

**Théorème 2.2.** *L'ensemble de rotation est convexe. De plus la suite de compacts*

$$\frac{1}{n} F^n([0, 1]^2)$$

*converge vers  $\rho(F)$  pour la distance de Hausdorff sur l'espace des parties compactes du plan.*

On rappelle que la **distance de Hausdorff** est définie de la façon suivante : étant donnés deux compacts  $K_1, K_2$  du plan,  $d_H(K_1, K_2)$  est l'infimum des  $d > 0$  pour lesquels

$$K_1 \subset V_d(K_2), \quad K_2 \subset V_d(K_1).$$

Ici  $V_d(K)$  désigne le  $d$ -voisinage de  $K$ , c'est-à-dire l'ensemble des points à distance  $< d$  d'un point de  $K$ . La distance de Hausdorff est une distance ! (le seul point non évident est l'inégalité triangulaire). Etant donnée une partie compacte  $C$  du plan, l'ensemble  $\mathcal{K}(C)$  des parties compactes de  $C$ , muni de  $d_H$ , est compact. En particulier, pour montrer la convergence d'une suite d'éléments de  $\mathcal{K}(C)$  il suffit de montrer que toutes ses valeurs d'adhérence sont égales.

**Exercice 7.** Vérifier que la définition de  $\rho(F)$  donnée plus haut correspond à la réunion de toutes les valeurs d'adhérences de la suite  $\frac{1}{n}F^n([0, 1]^2)$ , qu'on pourrait appeler la limite supérieure de la suite (la limite inférieure serait l'intersection de toutes les valeurs d'adhérence).

Une partie  $D$  du plan est dite  $q$ -convexe si son enveloppe convexe est incluse dans  $V_q(D)$ . Ceci revient à demander que  $d_H(D, \text{Conv}(D)) \leq q$ . Le lemme-clé pour la preuve de la proposition est le suivant.

**Lemme 2.3.** *Soit  $D$  une partie connexe par arcs du plan qui se projette injectivement dans le tore. Alors  $D$  est  $\sqrt{2}$ -convexe.*

Remarquons que l'hypothèse de projection injective revient à demander que  $D$  soit disjoint de tous ses translatés entiers. Le " $\sqrt{2}$ " vient du fait suivant : Pour tout demi-disque fermé  $A$  de rayon  $\sqrt{2}$ , privé de son diamètre, tout point  $z \in \mathbf{R}^2$  a au moins un translaté entier  $z + (p, q)$  dans  $A$ . En effet, un tel demi-disque contient un quart de disque de même rayon avec un bord vertical et un bord horizontal, qui lui-même contient un carré semi-ouvert de côté 1.

*Preuve de la proposition.* Le principe de la preuve est de montrer la convergence de la suite de compacts vers un certain ensemble limite, puis de remarquer que cet ensemble limite doit être l'ensemble de rotation : en effet (presque) par définition, l'ensemble de rotation est égal à la réunion des valeurs d'adhérence de cette même suite.

Démontrons la convergence. Notons d'abord que pour toute fonction  $\varphi$  sur le plan,  $\|\varphi \circ F\|_\infty = \|\varphi\|_\infty$ . Par inégalité triangulaire itérée, on obtient alors  $\|F^n - \text{Id}\|_\infty \leq n\|F - \text{Id}\|_\infty$ . On en déduit que les éléments de notre suite sont des parties d'une boule fermée (de centre 0 et rayon  $\sqrt{2} + \|F - \text{Id}\|_\infty$ ). Puisque l'ensemble des parties compactes de cette boule forme une partie compacte pour la distance de Hausdorff, il nous suffit de montrer que toutes les valeurs d'adhérences de notre suite sont égales (voir remarque plus haut).

On considère deux valeurs d'adhérence quelconques

$$A = \lim_{n_k} \frac{1}{n_k} F^{n_k}([0, 1]^2), \quad B = \lim_{m_\ell} \frac{1}{m_\ell} F^{m_\ell}([0, 1]^2)$$

et on va montrer que  $A \subset B$ .

Pour ceci, on commence par fixer deux entiers positifs  $m$  et  $n$  (on pense  $1 \ll m \ll n$ , plus tard ce seront des termes des suites  $(m_\ell)$  et  $(n_k)$ ), et on effectue la division euclidienne :  $n = mq + r$  avec  $0 \leq r < m$ . Un point important de la preuve consiste à remarquer que le déplacement d'un point quelconque  $x \in [0, 1]^2$  sous  $F^n$  est essentiellement une somme de déplacements sous  $F^m$  : on écrit  $F^{qm}(x) - x$  comme une somme de termes du type  $F^m(y) - y$ , et on divise par  $qm$  :

$$\frac{1}{qm} (F^{qm}(x) - x) = \frac{1}{m} \frac{1}{q} \left( \sum_{i=0}^{q-1} F^m(F^{mi}(x)) - F^{mi}(x) \right).$$

Dans le terme de droite, puisque  $F^m$  commute avec les translations entières, on peut remplacer chaque  $F^{mi}(x)$  par n'importe quel translaté entier de ce point, choisissons un translaté  $y_i \in [0, 1]^2$ . En regroupant les termes négatifs (qui sont "petits"), l'égalité peut s'écrire

$$\frac{1}{qm} F^{qm}(x) = \frac{1}{m} \left( \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} F^m(y_i) \right) + \delta$$

où l'erreur  $\delta$  a une norme majorée par  $\sqrt{2}(\frac{1}{qm} + \frac{1}{m})$ . Le terme principal, si on omet le facteur  $\frac{1}{m}$ , appartient à l'enveloppe convexe de l'ensemble  $F^m([0, 1]^2)$ , qui est  $\sqrt{2}$ -convexe d'après le lemme 2.3 : en tenant compte du facteur  $\frac{1}{m}$ , ce terme principal appartient donc à

$$V_{\frac{\sqrt{2}}{m}} \left( \frac{1}{m} F^m([0, 1]^2) \right).$$

Enfin, soit  $M$  un nombre majorant tous les  $\|F^{r'} - \text{Id}\|_\infty$  pour  $r' = 1, \dots, m-1$  (chaque  $F^{r'}$  est à distance bornée de l'identité par commutation avec les translations entières ; remarquer que ce nombre  $M$  ne dépend que de  $m$ , et pas de  $n$ ). On a

$$F^n(x) = F^{qm}(x) + \delta'$$

où l'erreur  $\delta'$  est majorée en norme par  $M$ . En combinant avec ce qui précède, on obtient

$$\frac{1}{n} F^n(x) \in \frac{qm}{n} V_\varepsilon \left( \frac{1}{m} F^m([0, 1]^2) \right)$$

avec  $\varepsilon = \frac{M}{qm} + \sqrt{2}(\frac{1}{qm} + \frac{2}{m})$  ; le point important est que  $\varepsilon$  tend vers 0 lorsque  $m$  et  $n$  tendent vers  $+\infty$ .

Pour  $m$  fixé, on applique maintenant l'estimée précédente à chaque entier  $n = n_k$ , et on fait tendre  $k$  vers  $+\infty$ . On obtient que

$$A \subset \overline{V_{\frac{\sqrt{2}}{m}}} \left( \frac{1}{m} F^m([0, 1]^2) \right)$$

(remarquer que le quotient  $q_k$  de  $n_k$  par  $m$  tend vers l'infini). On applique ensuite cette inclusion pour chaque entier  $m = m_\ell$ , en passant à la limite on obtient  $A \subset B$ . On en déduit l'égalité de toutes les valeurs d'adhérence, et donc la convergence de la suite.

Il ne reste plus qu'à montrer que l'ensemble de rotation est convexe. On vient de voir que c'est la limite de Hausdorff des ensembles  $\frac{1}{n} F^n([0, 1]^2)$ , qui sont  $\sqrt{2}/n$ -convexes par le lemme 2.3. On termine avec le fait suivant.

**Fait 2.4.** *Soit  $(K_n)$  une suite de compacts du plan qui converge vers un compact  $K$ , et supposons que chaque  $K_n$  est  $\varepsilon_n$ -convexe, avec  $(\varepsilon_n)$  qui tend vers 0. Alors  $K$  est convexe.*

Le fait repose sur l'observation élémentaire suivante. Si  $(x_i), (y_i)$  sont deux familles de points, on a

$$\left\| \frac{1}{n} \sum x_i - \frac{1}{n} \sum y_i \right\| \leq \|(x_i) - (y_i)\|_\infty.$$

On en déduit que l'application "enveloppe convexe" est 1-lipschitz :

$$d_H(\text{Conv}(K), \text{Conv}(K')) \leq d_H(K, K').$$

Pour obtenir le fait, on remarque d'autre part que si  $K$  est  $\varepsilon$ -convexe, alors  $d_H(\text{Conv}(K), K) \leq \varepsilon$ . Il n'y a plus qu'à appliquer l'inégalité triangulaire et passer à la limite. □

*Preuve du lemme 2.3.* Soit  $x$  un point de l'enveloppe convexe. On veut montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , la boule  $B_{\sqrt{2}+\varepsilon}(x)$  rencontre  $D$ . Considérons l'ensemble des directions  $\theta$  telles que la demi-droite issue de  $x$ , de direction  $\theta$ , rencontre  $D$ . Il s'agit d'une partie compacte et connexe du cercle, qui doit contenir un demi-cercle, sans quoi il existerait une droite séparant  $x$  de  $D$ . On peut donc choisir  $a, b \in D$  tels que  $x \in [a, b]$ .<sup>3</sup> Par connexité (par arcs) il existe un chemin  $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$  tel que  $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$ .

Quitte à raccourcir  $\gamma$  et à changer  $a, b$ , on peut supposer que :

---

3. Voir aussi [cette section de l'article Wikipedia sur le théorème de Caratheodory](#).

- (\*)  $\gamma$  ne rencontre la droite  $(ab)$  qu'à ses extrémités : il existe  $t_1 < t_2 \in [0, 1]$  tels que  $\gamma(t_1), \gamma(t_2) \in (ab)$  (la droite portée par le segment  $[a, b]$ ),  $x \in [\gamma(t_1), \gamma(t_2)]$  et pour tout  $t \in ]t_1, t_2[$ ,  $\gamma(t) \notin (ab)$ .

Pour montrer ceci, on oriente la droite  $(ab)$  telle que  $a < b$  (et donc  $a < x < b$ ). On pose  $t_1 = \sup\{t \in [0, 1] \mid \gamma(t) \in (ab), \gamma(t) \leq x\}$ . Puisque l'ensemble est fermé et non vide (0 est dedans), on a bien  $\gamma(t_1) \in (ab)$  et  $\gamma(t_1) < x$  (égalité stricte car  $x \notin D$ ). On considère alors  $t_2 = \inf\{t \in [t_1, 1] \mid \gamma(t) \in (ab), \gamma(t) \geq x\}$ . De nouveau, l'inf est un min,  $\gamma(t_2) \in (ab)$  et  $\gamma(t_2) > x$ . Cela implique que  $t_1 < t_2$ . Supposons qu'il existe  $t \in ]t_1, t_2[$  tel que  $\gamma(t) \in (ab)$ . Le fait que  $t < t_1$  implique que  $\gamma(t) > x$ . Donc par définition de  $t_2$ , on a  $\gamma(t) \geq t_2$ , contradiction. On a bien la propriété souhaitée.

Quitte à tourner le dessin on peut bien supposer que  $(ab)$  est une droite horizontale, et que  $\gamma$  est au-dessus de  $(ab)$  (sans oublier que ceci "tourne" aussi le réseau  $\mathbf{Z}^2$ ; bon, du coup ça n'est peut-être pas une bonne idée, en fait on veut surtout pouvoir parler du demi-plan qui est "au-dessus" de  $(ab)$ ).

On raisonne maintenant par l'absurde, en supposant que la boule fermée  $\overline{B_{\sqrt{2}}(x)}$  est disjointe de  $D$ . Alors par (\*) la courbe  $\alpha$  formée de  $\gamma$  et du segment  $[ab]$  est une courbe fermée simple. On considère le demi-disque  $A$  intersection de  $\overline{B_{\sqrt{2}}(x)}$  et du demi-plan ouvert au-dessus de  $(ab)$ . On utilise alors le fait évoqué plus haut : Il existe  $v \in \mathbf{Z}^2$  tels que  $a + v \in A$ . On va obtenir une contradiction en montrant que  $\gamma + v$  rencontre  $\gamma$ , ce qui entraîne que  $D + v$  rencontre  $D$ .

Par hypothèse sur  $A$ , on ne peut pas avoir  $v = 0$ , en fait le vecteur  $v$  a une composante verticale  $> 0$ . Le point  $a + v$  est alors à l'intérieur de la courbe de Jordan  $\alpha$  (considérer un segment partant de ce point et sortant de  $A$  par son diamètre). Si on considère un point  $p$  de  $\gamma$  le plus loin de la droite  $(ab)$  on voit que  $p + v$  est strictement plus loin de  $(ab)$  : ce point est donc à l'extérieur de la courbe de Jordan  $\alpha$ . La courbe  $\gamma + v$  relie un point intérieur à  $\alpha$  à un point extérieur, elle doit donc couper  $\alpha$ . D'autre part  $\gamma + v$  est disjointe de  $(ab)$  puisque  $\gamma$  est dans le demi-plan au-dessus de  $(ab)$  et  $v$  pointe vers le haut. Donc  $\gamma + v$  rencontre  $\gamma$ .  $\square$

**Corollaire 2.5.**  $\rho(F) \subset \text{Conv}(F - \text{Id})([0, 1]^2)$ . Plus généralement, Pour tout entier  $n > 0$ ,

$$\rho(F) \subset \frac{1}{n} \text{Conv}((F^n - \text{Id})([0, 1]^2)).$$

*Démonstration.* Le premier point suit immédiatement de l'écriture de  $F^n(x) - x$  comme somme de termes du type  $F(y) - y$ . Le second point

découle du premier point appliqué à  $F^n$  et de l'égalité  $\rho(F^n) = n\rho(F)$ , qui découle du théorème.  $\square$

**Exercice 8.** Montrer que dans l'énoncé de la proposition, on peut remplacer  $[0, 1]^2$  par n'importe quel carré de côté au moins 1.

**Exercice 9.** 1. Montrer que l'ensemble de rotation dépend de façon semi-continue de  $F$  : pour tout  $F_0 \in \text{Homeo}(\mathbf{R}^2, \mathbf{Z}^2)$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un voisinage de  $F_0$  dans  $\text{Homeo}(\mathbf{R}^2, \mathbf{Z}^2)$  tel que tout homéomorphisme  $F$  dans ce voisinage a son ensemble de rotation inclus dans  $V_\varepsilon(\rho(F_0))$ . *Indication : utiliser le théorème et le corollaire.*

2. Montrer que l'autre semi-continuité est fautive : l'application  $F \mapsto \rho(F)$  n'est pas continue. On prend pour  $F_0$  une rotation fibrée (voir ci-dessous), et la compose en poussant un tout petit peu dans le sens transverse aux cercles invariants.

### 2.3 La forme de $\rho(F)$ : exemples et questions ouvertes

**Des rotations** Pour  $\alpha \in \mathbf{R}^2$ , la translation de  $\mathbf{R}^2$  de vecteur  $\alpha$  passe au quotient au tore et induit un homéo d'ensemble de rotation  $\{\alpha\}$ .

**Des rotations fibrées...** On pose

$$F_\phi : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x, y + \phi(x)),$$

où  $\phi : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1$  est une fonction continue. Cet homéo de  $\mathbf{R}^2$  commute aux translations entières et descend donc en un homéo  $f_\phi$  de  $\mathbf{T}^2$ . On voit que  $f_\phi$  préserve le feuilletage de  $\mathbf{T}^2$  en cercles verticaux. Sur chaque cercle d'abscisse  $x$ ,  $f_\phi$  agit comme une rotation d'angle  $\phi(x)$ .

**Exercice 10.** Montrer que l'ensemble de rotation de  $F_\phi$  est  $\{0\} \times [\min \phi, \max \phi]$ .

**Qu'on compose !** On pose maintenant

$$G_\phi : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x + \phi(y), y),$$

et  $H = F_{\cos(2\pi x)} \circ G_{\cos(2\pi y)}$ . Cet homéo passe au quotient à  $\mathbf{T}^2$  en  $h$ . On vérifie alors que les quatre points  $(0, 0)$ ,  $(0, 1/2)$ ,  $(1/2, 0)$  et  $(1/2, 1/2)$  sont fixes par

$h$  et ont pour vecteurs de rotation  $(1, 1), (1, -1), (-1, 1)$  et  $(-1, -1)$ . Ainsi, par la convexité de  $\rho(H)$ , on sait que  $[-1, 1]^2 \subset \rho(h)$ . D'autre part, on voit facilement que  $H(x) - x \in [-1, 1]^2$ , ce qui implique (par récurrence) que  $\rho(h) \subset [-1, 1]^2$ . On vient de montrer que  $\rho(h) = [-1, 1]^2$ .

**Un flot qu'on arrête** L'exemple qui suit est généralement attribué à Katok (qui n'a pourtant jamais écrit ce résultat). On fixe un champ de vecteurs  $X \equiv (1, \alpha)$  constant sur le tore, avec  $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ . On se donne également une fonction continue  $\varphi : \mathbf{T}^2 \rightarrow [0, 1]$  ne s'annulant qu'en un point :  $\varphi^{-1}(\{0\}) = \{p\}$ . Et on considère  $f \in \text{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$  le temps 1 du flot engendré par le champ de vecteurs  $x \mapsto \varphi(x)X$ . On voit assez facilement que l'ensemble de rotation de  $f$  est inclus dans le segment  $[0, 1](1, \alpha)$ . Il s'avère que selon le comportement de  $\varphi$  au voisinage de  $p$ , l'ensemble de rotation sera un point ou un segment : par exemple si  $\varphi(x) \sim_{x \rightarrow p} \|x - p\|^k$  pour un certain  $k \geq 2$ , alors  $\rho(f) = \{0\}$ , en revanche si  $\varphi(x) \sim_{x \rightarrow p} \|x - p\|$  alors  $\rho(f)$  sera un segment non trivial (la condition sur  $\varphi$  au voisinage de  $p$  se traduit en termes d'intégrabilité du temps de retour sur une section globale, par exemple un cercle vertical). C'est l'exemple "le plus simple" d'homéo ayant un ensemble de rotation qui est un segment non trivial de pente irrationnelle.

Déterminer les formes possibles d'ensembles de rotation est une question qui motive la communauté depuis plus de 30 ans. Une partie de la recherche a été guidée par la conjecture de Franks-Misiurewicz : les deux compères ont déterminé que les ensembles de rotation de temps 1 de flots sont forcément d'un des trois types suivants [FM90] :

- un singleton ;
- un segment de pente rationnelle dont la droite d'appui passe par un point à coordonnées rationnelles ;
- un segment de pente rationnelle dont un des points extrémaux est un point à coordonnées rationnelles.

Ils ont alors conjecturé que tout homéo du tore dont l'ensemble de rotation est d'intérieur vide devait avoir un ensemble de rotation ayant l'une des formes ci-dessus. Cette conjecture a été infirmée par Avila (jamais publié, 10 ans après avoir été annoncé!) et un cas particulier a été démontré par Le Calvez et Tal [LCT18].

Pour les ensembles de rotation d'intérieur non vide, on sait que tout polytope à sommets rationnels est l'ensemble de rotation d'un homéo [Kwa92] et on a des exemples d'ensembles de rotation qui ne sont pas des polytopes [Kwa95] (mais ayant un ensemble de points extrémaux qui n'a qu'un nombre

fini de points d'accumulation). On sait également que le bord ne contient pas de segment de pente irrationnelle contenant un point à coordonnées rationnelles dans son intérieur [LCT18]. Et c'est tout. En particulier, on ne sait pas s'il existe d'ensemble de rotation dont la frontière est une courbe  $C^1$ .

## 2.4 Orbites périodiques

Soit  $x$  un point périodique de  $f$  de période  $q$ , et  $X$  un relevé de  $x$ . Les points  $F^q(X)$  et  $X$  se projettent tous deux sur le point  $x$ , il existe donc un vecteur entier  $\mathbf{p}$  tel que  $F^q(X) = X + \mathbf{p}$ . Le vecteur  $\frac{\mathbf{p}}{q}$  est appelé *vecteur de rotation* du point  $x$ . On voit facilement que ce vecteur appartient à l'ensemble de rotation de  $F$ , on dit qu'il est *réalisé par une orbite périodique*.

**Exercice 11.** Montrer que le vecteur de rotation de  $x$  appartient à l'ensemble de rotation. Montrer que tous les points de l'orbite de  $x$  ont le même vecteur de rotation.

On admet le théorème quivant, conséquence du célèbre (et difficile) théorème feuilleté équivariant de Patrice Le Calvez [LC05] (mais sous cette forme, c'est probablement dû à Alain Sauzet, [Sau01]).

**Théorème 2.6.** *Soit  $f$  un homéo du tore, isotope à l'identité, et  $F$  un relevé. Supposons que  $F$  n'a pas de point fixe.*

*Alors il existe une courbe fermée simple  $\gamma$  du tore qui se relève en une droite topologique qui est la frontière d'un attracteur pour  $F$ .*

Une partie  $\Delta$  du plan est appelée *droite topologique* s'il existe un homéomorphisme du plan qui l'envoie sur une droite. C'est bien le cas de tout relevé d'une courbe fermée simple du tore : en effet il existe un homéomorphisme du tore envoyant une telle courbe sur la projection d'une droite (par exemple la droite  $y = 0$ ), et le relevé de cet homéomorphisme fait le job. Une droite topologique est la frontière de deux demi-plans topologiques, situés de part et d'autre. Un demi-plan fermé  $P$  est un *attracteur* pour  $F$  si  $F(P) \subset P$ .

**Lemme 2.7.** *Sous les conclusions du théorème, supposons que  $\gamma$  est isotope à  $C(p, q)$ . Alors l'ensemble de rotation est inclus dans l'un des demi-plan bordés par la droite vectorielle dirigée par  $(p, q)$ .*

*Démonstration.* Puisque l'ensemble de rotation est invariant par conjugaison, quitte à conjuguer par un homéo isotope à l'identité, on peut supposer que  $\gamma = C(p, q)$ . Pour simplifier, supposons que  $(p, q) = (0, 1)$ , et que le demi-plan  $\{x \geq 0\}$  est attractif. Choisissons un point  $x \in [0, 1]^2$ . Dans cette

situation, noter que le déplacement  $F^n(x) - x$  a sa première coordonnée minorée par  $-1$ . En divisant par  $n$  et en passant à la limite on obtient que l'ensemble de rotation est inclus dans le demi-plan  $\{x \geq 0\}$ .  $\square$

En enchaînant le théorème et le lemme, on obtient : si  $F$  n'a pas de point fixe alors  $0$  n'est pas dans l'intérieur de l'ensemble de rotation. Par contraposition, si  $0$  est dans l'intérieur de l'ensemble de rotation, alors  $F$  a un point fixe, et donc aussi  $f$ .

**Corollaire 2.8** (Théorème de Franks). *Si l'ensemble de rotation contient un vecteur totalement rationnel  $(p/r, q/r)$  (sous forme irréductible) dans son intérieur, alors il existe un point périodique de période  $r$  et de nombre de rotation  $(p/r, q/r)$ .*

*Démonstration.* Appliquer ce qui précède à  $F^r - (p, q)$ .  $\square$

**Exercice 12.** 1. Soit  $f \in \text{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$ . Supposons qu'il existe une courbe fermée simple homotope à  $C(p, q)$  et disjointe de son image par  $f$ . Que peut-on dire de l'ensemble de rotation d'un relevé  $F$  de  $f$  ?

2. Jarek Kwapisz a montré que tout polygone convexe dont les sommets ont des coordonnées rationnelles est réalisé comme ensemble de rotation d'un certain  $F \in \text{Homeo}(\mathbf{R}^2, \mathbf{Z}^2)$ . En déduire qu'il existe un homéomorphisme  $f$  sans point fixe n'admettant aucune courbe essentielle disjointe de son image (exemple dû à Bestvina-Handel, répondant à une question de Lucien Guillou).

## 2.5 Majoration de la longueur de translation

On va démontrer la première moitié du théorème de [BHM<sup>+</sup>22], la plus facile (proposition 2.9 plus bas).

On considère l'action de  $f$  sur le graphe fin des courbes. On appelle *longueur de translation* d'une isométrie  $h$  d'un espace métrique quelconque le nombre suivant :

$$|h| = \lim \frac{1}{n} d(\alpha, h^n(\alpha)) \quad (1)$$

où  $\alpha$  est n'importe quel élément de l'espace. Les isométries ayant une longueur de translation positive sont appelées *loxodromiques* (voir la définition 5.6).

**Exercice 13.** (1) La limite existe et est indépendante de  $\alpha$ . *Indication :* pour l'existence, penser à M. Fekete.

(2) La longueur de translation est invariante par conjugaison par une isométrie.

Soit  $f \in \text{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$ .

**Proposition 2.9.** *Si l'ensemble de rotation de  $f$  est d'intérieur vide, alors la longueur de translation  $|f|$  de l'action de  $f$  sur le graphe fin des courbes est nulle.*

On appellera *largeur horizontale* d'un sous-ensemble de  $\mathbf{R}^2$  le diamètre de sa projection orthogonale sur l'axe horizontal.

**Lemme 2.10.** *La longueur de translation  $|f|$  est majorée par la largeur horizontale de l'ensemble de rotation de  $f$ .*

*Démonstration du lemme.* Soit  $\alpha$  une courbe fermée simple verticale dans  $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$  (i.e.  $\alpha(t) = (0, t)$ ). Par le Lemme 1.24 appliqué à  $\alpha$  et  $f^n(\alpha)$ , qui sont homotopes puisque  $f$  est isotopes à l'identité, on a

$$\text{largeur}(\alpha, f^n(\alpha)) \geq d_{\mathcal{C}^+}(\alpha, f^n(\alpha)) - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n|f|.$$

Cela signifie, en notant  $F$  un relevé de  $f$ , que le diamètre de la projection orthogonale de  $F^n(\alpha)$  sur une droite horizontale est asymptotiquement plus grand que  $n|f|$  : pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , il existe  $x_n, y_n \in \alpha$  qui satisfont  $p_1(F^n(x_n) - F^n(y_n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\gtrsim} n|f|$  (où  $p_1$  est la projection sur la première coordonnée). Par la caractérisation de la proposition 2.2 pour les ensembles de rotation, cela implique que l'ensemble de rotation contient deux points  $a, b$  avec  $p_1(a - b) \geq |f|$ .  $\square$

*Démonstration de la proposition.* Comme l'ensemble de rotation est convexe (proposition 2.2) et – par hypothèse – d'intérieur vide, il est inclus dans une droite. On sépare les cas suivant que la pente de cette droite est rationnelle ou non.

Si l'ensemble de rotation de l'homéo  $f$  est inclus dans un segment de pente rationnelle, quitte à conjuguer  $f$  par  $A \in SL_2(\mathbf{Z})$ , on peut supposer que ce segment est vertical (voir les exercices 5 et 13). Le lemme 2.10 affirme alors que  $|f| = 0$ .

Si maintenant l'ensemble de rotation de l'homéo  $f$  est inclus dans un segment de pente irrationnelle, on raisonne par approximation : soit  $\theta \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  la pente de la droite portant l'ensemble de rotation. Par **théorème de Dirichlet** (lui-même conséquence directe du principe des tiroirs éponyme), il existe une suite  $(p_k/q_k)$  de rationnels, avec  $q_k$  tendant vers  $+\infty$ , tels que

$|q_k\theta - p_k| \leq 1/q_k$ . Par théorème de Bézout, il existe une matrice  $A_k \in SL_2(\mathbb{Z})$  ayant  $(-p_k \ q_k)$  comme première ligne. Remarquons que

$$A_k \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_k\theta - p_k \\ * \end{pmatrix}$$

a sa première coordonnée de valeur absolue inférieure à  $1/q_k$ . Ainsi, si  $J$  est un segment de pente  $\alpha$ , on a

$$\text{largeur horizontale}(A_k J) \leq \frac{1}{q_k} \text{largeur horizontale}(J) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0.$$

En appliquant cette propriété à l'ensemble de rotation de  $F$ , on en déduit (par le 3. de l'exercice 5) que la largeur horizontale de  $\rho(A_k F A_k^{-1})$  tend vers 0, ce qui implique, par le lemme 2.10, que  $|f| = \lim_{k \rightarrow +\infty} |A_k f A_k^{-1}| = 0$ .  $\square$

En fait, avec un peu plus de travail, on a même une minoration de l'aire de l'ensemble de rotation : par [BHM<sup>+</sup>22, Proposition 5.2], l'aire de  $\rho(F)$  est au moins  $\sqrt{3}|f|^2/8$ .

**Exercice 14. La longueur de translation fonction de l'ensemble de rotation ?** Le théorème étudié dans la section précédente donne une majoration de la longueur de translation de  $f$  en fonction de son ensemble de rotation. On peut se demander s'il existe une relation fonctionnelle entre les deux quantités : au delà de l'inégalité précédente, peut-on déterminer complètement la longueur de translation lorsqu'on connaît l'ensemble de rotation ? La réponse est négative. Nous allons voir qu'il existe deux homéos ayant le même ensemble de rotation (qui sera un grand carré) et n'ayant pas la même longueur de translation.

On fixe un entier positif  $k$ . On reprend les homéomorphismes du plan de la section d'exemple plus haut,  $F = F_{\cos(2\pi x)}$ ,  $G = G_{\cos(2\pi y)}$ ,  $H = F \circ G$ , qui se projettent respectivement sur les homéomorphismes du tore  $f, g, h$ . On rappelle qu'on a déterminé l'ensemble de rotation de  $H$ ,  $\rho(H) = [-1, 1]^2$ .

1. Que vaut  $\rho(H^k)$  ?
2. On admet l'autre direction du théorème de [BHM<sup>+</sup>22] : puisque l'ensemble de rotation de  $H$  a de l'intérieur, la longueur de translation de  $h$  est  $|h| > 0$ . Que vaut  $|h^k|$  ?
3. Soit  $\alpha$  la courbe  $t \mapsto t(1, 0)$ , vue comme sommet du graphe fin des courbes du tore. On remarque que  $G(\alpha) = \alpha$ . Montrer que la distance dans le graphe vaut  $d(F^k(\alpha), \alpha) = 2$ . *Il s'agit de trouver une courbe à distance 1 à la fois de  $\alpha$  et de  $F^k(\alpha)$ .* . . . En déduire que la longueur de translation  $|f^k g^k|$  est majorée par 2.
4. Conclure.

### 3 Gromov-hyperbolicité

La notion d'hyperbolicité qu'on présente ici a été introduite par Gromov dans les années 80 [Gro87]. Elle a l'énorme avantage de pouvoir profiter de plein de propriétés des espaces de courbure négative (divergence des géodésiques, notion de bord, et des tas d'autres choses) avec des arguments portant uniquement sur les distances, donc sans avoir à s'encombrer de l'artillerie lourde de la géométrie différentielle (par exemple de la courbure, des connexions, etc.).

Cadre restreint, qui nous intéresse en priorité :  $X$  est un graphe, en général supposé connexe. On munit l'ensemble des sommets (que par abus on note aussi  $X$ ) de la distance à valeurs entières qui vaut 1 entre deux sommets adjacents :

**Définition 3.1.** Un *chemin* dans  $X$  est une application  $\gamma : I \rightarrow X$  où  $I$  est un intervalle de  $\mathbf{Z}$ , telle que  $\gamma(p), \gamma(p+1)$  sont adjacents pour tout  $p$ . Si  $I = \llbracket a, b \rrbracket$  est un intervalle borné, alors  $b - a$  est la *longueur* du chemin, et on dit que le chemin va de  $\gamma(a)$  à  $\gamma(b)$ . La distance entre deux points  $x, y$  du graphe est le minimum des longueur des chemins allant de  $x$  à  $y$ . Un chemin réalisant ce minimum est appelé *géodésique*. Par extension, un chemin défini sur un intervalle non borné est dit géodésique si toutes ses restrictions à des intervalles bornés sont géodésiques.

#### Exercice 15.

1. Vérifier que la restriction d'un chemin géodésique est géodésique.
2. Vérifier que la distance définie ci-dessus est bien une distance.

Remarquons que cette définition de distance sur un graphe fait que les automorphismes de ce graphe sont exactement ses isométries (en particulier, tout homéo d'une surface peut désormais être vu comme une isométrie du graphe des courbes fin).

Dans tout ce qui suit, on note  $V_\delta(C)$  le  $\delta$ -voisinage d'une partie  $C$  de  $X$ ,

$$V_\delta(C) = \{x \in X \mid \exists y \in C, d(x, y) \leq \delta\}.$$

Le cas particulier des graphes permet de simplifier un peu certains arguments "techniques", mais la théorie de Gromov a pour cadre général les espaces métriques dits *géodésiques*, pour lesquels pour tout  $x, y$  il existe une géodésique les joignant, c'est-à-dire un plongement  $\alpha : [0, d] \rightarrow X$  avec  $d = d(x, y)$ ,  $\alpha(0) = x, \alpha(d) = y$  et  $d(\alpha(s), \alpha(t)) = |s - t|$  pour tous  $s, t$ . Les graphes rentrent dans ce cadre général à condition de remplacer l'ensemble des sommets par la **réalisation géométrique** du graphe.

### 3.1 Définition

Étant donnés deux sommets  $x, y$  de  $X$ , on note  $[xy]$  une géodésique quelconque joignant  $x$  et  $y$ . Un *triangle géodésique* de sommets  $x, y, z$  est un triangle dont les côtés sont des segments géodésiques  $[xy], [yz], [zx]$ .

**Définition 3.2.** Un triangle géodésique est  $\delta$ -fin si chaque côté est inclus dans le  $\delta$ -voisinage de la réunion des deux autres.

**Définition 3.3.** Soit  $\delta > 0$ . L'espace géodésique  $X$  est dit  $\delta$ -hyperbolique si tous les triangles géodésiques de  $X$  sont  $\delta$ -fins. Il est hyperbolique (au sens de Gromov) s'il est  $\delta$ -hyperbolique pour un certain  $\delta$  (cette condition sur les triangles est parfois appelée *condition de Rips*).

### 3.2 Exemples

(1) Un arbre est 0-hyperbolique.

(2)  $\mathbf{Z}^2$  n'est pas hyperbolique.

(2)  $\mathbf{H}^2$ . La plus célèbre des variétés hyperboliques. On peut par exemple le définir comme le disque unité ouvert dans le plan euclidien, avec la métrique riemannienne euclidienne du disque multipliée par  $4/(1 - \|x\|^2)^2$ . Concrètement, la longueur d'une courbe est donnée par

$$\int_0^1 2 \frac{\|\gamma'(t)\|}{1 - \gamma(t)^2} dt$$

et la distance entre deux points est l'infimum des longueur des courbes les joignant. Comme  $\mathbf{H}^2$  n'est pas un graphe, il faut généraliser la définition. Pour un espace métrique quelconque, on définit une géodésique (réelle) comme un plongement isométrique d'un intervalle de  $\mathbf{R}$ . Ensuite les triangle  $\delta$ -fins et l'hyperbolicité sont définis comme dans un graphe.

(3) (Unique) triangulation idéale du plan hyperbolique ("Complexe de Farey") : voir plus loin.

### 3.3 Quasi-isométries, quasi-géodésiques

On définit ici le cadre de la "géométrie à grande échelle", cadre dans lequel se place la notion d'espace hyperbolique au sens de Gromov.

**Définition 3.4.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application entre deux graphes, on dit que  $f$  est un *plongement quasi-isométrique* s'il existe  $\lambda, K$  tels que pour tous  $x, x'$ ,

$$\frac{1}{\lambda}d(x, x') - K \leq d(f(x), f(x')) \leq \lambda d(x, x') + K.$$

C'est une *quasi-isométrie* si elle est de plus "grossièrement surjective" :  $Y$  est à distance bornée de  $f(X)$ ; on dit alors que les graphes  $X$  et  $Y$  sont *quasi-isométriques*.

**Exercice 16.** Ceci définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des graphes.

**Exercice 17.**

1. Soit  $X$  un graphe,  $\overline{X}$  sa réalisation géométrique. Montrer que le plongement naturel de  $X$  dans  $\overline{X}$  est une quasi-isométrie.
2. Soit  $X$  un graphe,  $d$  un entier positif. On considère le graphe  $X_d$  obtenu à partir de  $X$  en reliant par des arêtes toutes les paires de sommets à distance  $\leq d$  dans  $X$ . Montrer que  $X$  et  $X_d$  sont quasi-isométriques.
3. Soit  $\Sigma$  une surface compacte,  $d$  un entier  $\geq 1$ , on définit le graphe  $\mathcal{C}_d^\dagger(\Sigma)$  en prenant le même ensemble de sommets que pour  $\mathcal{C}^\dagger(\Sigma)$ , mais en mettant une arête entre deux sommets  $\alpha, \beta$  si le cardinal de  $\alpha \cap \beta$  est  $\leq d$ . Montrer que ce graphe est quasi-isométrique à  $\mathcal{C}^\dagger(\Sigma)$ . On pourra utiliser le Lemme 1.22.

La question qui nous préoccupe maintenant est la suivante : *La propriété d'être hyperbolique au sens de Gromov est-elle invariante par quasi-isométrie ?* La réponse est positive, mais ceci ne suit pas directement de la définition, parce que l'image d'une géodésique par une quasi-isométrie n'est pas une géodésique, mais seulement une *quasi-géodésique*. L'invariance va alors découler de *lemme de Morse*, qui permet d'approcher uniformément tout segment quasi-géodésique par un segment géodésique.

**Définition 3.5.** Un *segment quasi-géodésique* est un plongement quasi-isométrique  $c : \llbracket a, b \rrbracket \rightarrow X$  d'un intervalle borné de  $\mathbf{Z}$ . On parle de  $(\lambda, K)$ -quasi-géodésique si on veut spécifier les constantes.

NB : dans le cas de  $\mathbf{Z}$ , qui est celui qui nous intéresse, la majoration peut se remplacer par l'existence d'une constante  $K'$  telle que pour tout  $k$ ,  $d(c(k), c(k+1)) \leq K'$ .

Exemples : une  $(1, 0)$ -quasi-géodésique est un chemin géodésique. Dans le plan euclidien, la spirale logarithmique  $r = e^\theta$  est un rayon quasi-géodésique qui n'est pas à distance bornée d'une demi-droite.

**Définition 3.6.** La distance de Hausdorff entre deux parties  $C, C'$  du graphe  $X$  est le plus petit entier  $d$  tel que

$$C \subset V_d(C') \quad \text{et} \quad C' \subset V_d(C).$$

C'est une distance sur l'ensemble des parties bornées de  $X$ .

**Proposition 3.7** (Lemme de Morse). *Étant donnés  $\delta, \lambda, K$ , il existe une constante  $R = R(\delta, \lambda, K)$  ayant la propriété suivante. Tout segment  $(\lambda, K)$ -quasi-géodésique d'extrémités  $x_0, y_0$  dans un espace  $\delta$ -hyperbolique  $X$  est à distance de Hausdorff  $\leq R$  d'un chemin géodésique  $[x_0 y_0]$ .*

**Corollaire 3.8.** *Si  $X$  et  $Y$  sont deux graphes quasi-isométriques, et si  $X$  est hyperbolique au sens de Gromov, alors  $Y$  l'est aussi.*

*Démonstration du corollaire.* Par hypothèse, sachant que la relation de quasi-isométrie est symétrique, on a une  $(\lambda, K)$ -quasi-isométrie  $f : Y \rightarrow X$ . Supposons que  $X$  est  $\delta$ -hyperbolique. On veut montrer que  $Y$  est également hyperbolique, pour ça on considère un triangle géodésique de sommets  $y_0, y_1, y_2$  dans  $Y$  ; on veut montrer que ce triangle est fin. L'image par  $f$  des trois côtés géodésiques  $[y_0 y_1], [y_1 y_2], [y_2 y_3]$  nous donne trois segments  $(\lambda, K)$  quasi-géodésiques. On applique le lemme de Morse à chacun de ces segments, ce qui nous donne  $R$  et trois géodésiques qui sont à distance de Hausdorff  $\leq R$  de ces trois segments. On a maintenant un triangle géodésique dans  $X$ , de sommets  $f(y_0), f(y_1), f(y_2)$ . Puisque  $X$  est  $\delta$ -hyperbolique, chaque côté est inclus dans le  $\delta$ -voisinage de la réunion des deux autres. On en déduit que chacun des segments quasi-géodésique  $f([y_0 y_1]), f([y_1 y_2]), f([y_2 y_3])$  est inclus dans le  $2R + \delta$ -voisinage des deux autres. On utilise enfin que  $f$  est une quasi-isométrie, pour voir que chacun des côtés du triangle géodésique initial est inclus dans le  $\delta'$ -voisinage des deux autres, avec  $\delta' = \lambda(2R + \delta + K)$ . Ainsi,  $Y$  est  $\delta'$ -hyperbolique.  $\square$

*Preuve du lemme de Morse.* Dans toute la preuve, on dira qu'une quantité est Majorée (avec une Majuscule), sans plus de précision, si on a une borne qui ne dépend que des constantes  $\delta, \lambda, K$ .

Soit  $c : [0, \ell] \rightarrow X$  une  $(\lambda, K)$ -quasi-géodésique joignant deux points  $x_0$  et  $y_0$ . Le but est donc de montrer que la distance de Hausdorff de  $c$  à  $[x_0, y_0]$  est Majorée. Remarque préliminaire :

1. On a  $\ell \leq \lambda d(x_0, y_0) + K\lambda$ ,
2. la distance entre deux points successifs est Majorée par  $\lambda + K$ .

**Lemme 3.9.** *On peut supposer que  $c$  est un chemin dans le graphe  $X$ .*

On appellera alors  $\ell$  la longueur du chemin  $c$ .

*Démonstration.* Soit  $\ell'$  la somme des distances entre deux points successifs de  $c$ , on définit  $c' : \llbracket 0, \ell' \rrbracket \rightarrow X$  en joignant les points successifs de  $c$  par des géodésiques. C'est une  $((\lambda + K)\lambda, K + 2/\lambda)$ -quasi-géodésique (vérifier, la constante est probablement fautive mais n'a aucune importance...).

De plus la distance de Hausdorff entre  $c$  et  $c'$  est Majorée :  $d_H(c', c) \leq \lambda + K$ . Un segment géodésique  $[x_0, y_0]$  à distance de Hausdorff bornée de  $c'$  sera aussi à distance bornée de  $c$ , avec une borne ne dépendant que de  $\delta, \lambda, K$ , comme voulu.  $\square$

Le lemme suivant est valable pour tout chemin (pas nécessairement quasi-géodésique).

**Lemme 3.10** (Estimée logarithmique). *Soit  $c$  un chemin de longueur  $\ell$  joignant deux points  $x_0, y_0 \in X$ . Alors*

$$[x_0, y_0] \subset V_D(c)$$

avec  $D = \delta(\log_2 \ell + 1)$ .

*Démonstration.* Quitte à étendre notre chemin par un chemin qui stationne en  $y_0$ , on suppose que  $\ell$  est une puissance de 2,  $\ell = 2^N$ , et on est ramené à montrer l'estimée avec  $D = N\delta$ .

Soit  $z$  n'importe quel point de la géodésique  $[x_0, y_0]$ . On va majorer  $d(z, c)$  en construisant une suite de points  $z_0 = z, \dots, z_N \in c$  et  $d(z_i, z_{i+1}) \leq \delta$ . Ceci prouvera l'estimée.

On considère le point  $p = c(\ell/2)$ , et on applique la définition d'hyperbolicité au triangle géodésique de sommets  $x_0, y_0, p$  et au point  $z \in [x_0, y_0]$ . On en déduit le point  $z_1$  qui est sur l'un des côtés  $[x_1, y_1]$  ( $= [x_0, p]$  ou  $[p, y_0]$ ) de ce triangle.

Et on recommence en remplaçant  $z_0, x_0, y_0, c$  par  $z_1, x_1, y_1$  et l'une des deux moitiés de  $c$ .  $\square$

On veut maintenant déduire de l'estimée logarithmique une moitié du lemme de Morse, à savoir l'inclusion  $[x_0, y_0] \subset V_m(C)$  mais cette fois-ci avec  $m$  qui est constante (indépendante de  $d(x_0, y_0)$ , contrairement à l'estimée précédente).

**Lemme 3.11** (Le pire des points). *Soit  $c$  un chemin quasi-géodésique joignant deux points  $x_0, y_0$ . Alors*

$$[x_0, y_0] \subset V_m(c)$$

avec  $m = m(\lambda, K, \delta)$  une constante.

*Démonstration.* Soit  $m = \max\{d(z, c) \mid z \in [x_0, y_0]\}$  le plus petit entier vérifiant le lemme, on veut montrer que  $m$  est Majoré. Soit  $z$  un point de  $[x_0, y_0]$  réalisant le max. Soit  $x_1$  situé sur la géodésique, avant  $z$ , à distance  $2m$  de  $z$  (ou alors  $x_0$ ); et  $x'_1 = c(a')$  un point de  $c$  avec  $d(x_1, x'_1) \leq m$  (si  $x_1 = x - 0$  on prend  $x'_1 = x_1 = x_0$ ). On définit  $y_1$  et  $y'_1 = c(b')$  symétriquement. On considère le chemin concaténé

$$\beta = [x_1, x'_1] \cup c_{\llbracket a', b' \rrbracket} \cup [y'_1, y_1].$$

Il est entièrement à distance  $\geq m$  du point  $z$ . D'autre part, la distance  $d(x'_1, y'_1)$  est majorée par  $6m$ ; comme  $c$  est une quasi-géodésique, la longueur de  $c_{\llbracket a', b' \rrbracket}$  est majorée par  $\lambda(6m + K)$  (remarque préliminaire numéro 2). Et la longueur de  $\beta$  est donc majorée par  $\lambda(6m + K) + 2m$ .

On applique alors l'estimée logarithmique au chemin  $\beta$ , ce qui donne :

$$[x_1, y_1] \subset V_D(c')$$

avec  $D = \delta \log_2(\lambda(6m + K) + 2m)$ . D'autre part ce segment géodésique contient le point  $x$  qui est à distance au moins  $m$  de  $c'$ , ce qui nous dit que  $m \leq D$ , c'est-à-dire

$$m \leq \delta \log_2(\lambda(6m + K) + 2m).$$

A  $\delta, \lambda, K$  fixé, le terme de gauche est linéaire en  $m$ , le terme de droite est logarithmique : cette inégalité impose donc une borne sur  $m$  qui s'exprime en termes des trois constantes  $\delta; \lambda, K$ . Ceci conclut la preuve.  $\square$

**Lemme 3.12.** *Dans un graphe quelconque, soit  $\alpha$  un segment géodésique reliant  $x$  à  $y$ , et  $C$  un ensemble connexe contenant  $x$  et  $y$ . Si  $C \subset V_s(\alpha)$ , alors  $\alpha \subset V_{2s}(C)$ .*

*Démonstration.* Soit  $w$  un point de  $\alpha$ , on cherche  $z \in C$  pas trop loin de  $w$ . Le point  $w$  découpe  $\alpha$  en deux sous-segments  $\alpha_-, \alpha_+$  (ne contenant pas  $w$ ).

Puisque  $C$  est connexe, il existe un chemin  $\beta$  reliant  $x$  à  $y$  et inclus dans  $C$ . Remarquons que  $V_s(\alpha) = V_s(\alpha_-) \cup V_s(\alpha_+) \cup V_s(\{w\})$ . Soit  $x'$  le dernier point dans  $V_s(\alpha_-)$  lorsqu'on parcourt  $\beta$  en partant de  $x$ . On suppose  $x' \neq y$  (le cas particulier  $x' = y$  n'est pas plus difficile). Soit  $y'$  le point suivant  $x'$  le long de  $\beta$ , ce point est donc dans  $V_s(\alpha_+) \cup V_s(\{w\})$ . S'il est dans  $V_s(\{w\})$ , le lemme est démontré, on suppose donc qu'il est dans  $V_s(\alpha_+)$ .

Par définition de  $V_s(\alpha_-)$  et de  $V_s(\alpha_+)$ , on peut trouver un point  $x''$  dans  $\alpha_-$  et un point  $y''$  dans  $\alpha_+$ , à distances respectives de  $x'$  et  $y'$  au plus  $s$ .

L'inégalité triangulaire, en passant par  $x'$  et  $y'$ , donne alors  $d(x'', y'') \leq 2s+1$ . Puisque  $x''$  et  $y''$  sont de part et d'autre de  $w$  sur la géodésique  $\alpha$ , l'un des deux doit être à distance inférieure ou égale à  $s$  de  $w$ . Donc l'un des deux points  $x'$  ou  $y'$  est à distance inférieure ou égale à  $2s$  de  $w$ .  $\square$

Ceci termine la preuve du lemme de Morse : par le lemme 3.11, pour  $c$  un chemin quasi-géodésique joignant  $x_0$  à  $y_0$ , alors  $[x_0, y_0] \subset V_m(c)$ , le lemme 3.12 implique alors que  $c \subset V_m([x_0, y_0])$ .  $\square$

**Exercice 18.** Dessiner un exemple montrant que  $2s$  est optimal dans le dernier lemme.

### 3.4 Produit de Gromov

**Définition 3.13.** Dans un espace métrique  $(X, d)$ , étant donnés  $x, y, w \in X$ , le *produit de Gromov* est défini par

$$\langle x, y \rangle_w = \frac{1}{2}(d(w, x) + d(w, y) - d(x, y)).$$

L'idée de cette définition est justifié par l'exercice suivant.

**Exercice 19.**

- (1) Vérifier que  $\langle x, y \rangle_w = \langle y, x \rangle_w$ .
- (2) Montrer qu'étant donnés  $x, y, z \in X$ , il existe un unique arbre métrique  $T$  à trois sommets (un "tripode") qui est isométrique au triplet  $\{x, y, z\}$ . *Indication* : les longueurs des côtés de cet arbre sont précisément  $\langle x, y \rangle_z$ ,  $\langle x, z \rangle_y$  et  $\langle y, z \rangle_x$ .

**Proposition 3.14.** *Un espace métrique  $(X, d)$  est  $\delta$ -hyperbolique si et seulement si pour tous  $w, x, y, z \in X$ , on a*

$$\langle x, z \rangle_w \geq \min(\langle x, y \rangle_w, \langle y, z \rangle_w) - \delta.$$

Cette condition est appelée *inégalité de Gromov*. Pour comprendre d'où elle vient : vérifier que pour un arbre, cette condition est vérifiée avec  $\delta = 0$ .

Nous allons donc démontrer une forme faible de l'implication réciproque : *Si l'inégalité de Gromov est satisfaite, alors l'espace est  $3\delta + 1$ -hyperbolique.* La clé de la preuve réside dans le lemme suivant, qui donne aussi une interprétation géométrique du produit de Gromov lorsque l'inégalité de Gromov est vérifiée : à constante près, le produit de Gromov de deux points vaut la distance du point base à tout chemin géodésique joignant les deux points.

**Lemme 3.15.** Soit  $(X, d)$  un graphe vérifiant l'inégalité de Gromov, et  $x, y, z \in X$ . On a :

$$\langle x, y \rangle_z \leq d(z, [x, y]) \leq \langle x, y \rangle_z + 2\delta + 1.$$

On en déduit immédiatement l'implication faible. En effet, supposons que l'inégalité de Gromov est satisfaite, et considérons un triangle géodésique de sommets  $x, y, z$ , et  $w \in [x, y]$ . Il s'agit de majorer  $\min(d(w, [x, z]), d(w, [y, z]))$ . En appliquant le lemme, puis l'inégalité de Gromov, on a

$$\begin{aligned} \min(d(w, [x, z]), d(w, [y, z])) &\leq \min(\langle x, z \rangle_w, \langle y, z \rangle_w) + 2\delta + 1 \\ &\leq \langle x, y \rangle_w + 3\delta + 1 \\ &= 0 + 3\delta + 1. \end{aligned}$$

Pour démontrer le lemme, nous avons besoin de quelques formules.

**Exercice 20.** Vérifier les identités élémentaires suivantes :

1. Si  $w \in [x, y]$  alors  $\langle x, y \rangle_w = 0$ .
2.  $\langle x, y \rangle_z \leq \langle x, y \rangle_w + d(z, w)$ ,
3.  $d(z, w) = \langle x, y \rangle_z + \langle x, z \rangle_w + \langle y, z \rangle_w - \langle x, y \rangle_w$ .

*Preuve du lemme.* (cf [DSU17], Proposition 4.3.1).

Pour la première inégalité, on prend un  $w \in [x, y]$ , et on applique les points (1) et (2) de l'exercice 20 pour obtenir  $\langle x, y \rangle_z \leq d(z, w)$ .

Montrons la seconde inégalité. Soit  $w \in [x, y]$ , l'inégalité de Gromov donne

$$\langle x, y \rangle_w = 0 \geq \min(\langle x, z \rangle_w, \langle y, z \rangle_w) - \delta.$$

Remarquons que pour  $w = x$ , le premier terme dans le minimum vaut 0, tandis que le second terme s'annule pour  $w = y$ . Si on était dans un espace continu, le théorème des valeurs intermédiaires fournirait un point  $w \in [x, y]$  pour lequel les deux termes sont égaux. En appliquant l'inégalité précédente à ce  $w$ , on obtiendrait (en passant le " $\delta$ " de l'autre côté)

$$\delta \geq \langle x, z \rangle_w = \langle y, z \rangle_w$$

On appliquerait alors l'égalité (3) de l'exercice 20, ce qui donnerait

$$d(z, [x, y]) \leq d(z, w) = \langle x, y \rangle_z + \langle x, z \rangle_w + \langle y, z \rangle_w - \langle x, y \rangle_w \leq \langle x, y \rangle_z + 2\delta.$$

On peut adapter cet argument à notre espace discret : lorsqu'on déplace le point base  $w$  d'une distance 1, la valeur du produit de Gromov basé en  $w$

change d'au plus 1 ; en parcourant  $[x, y]$  de  $x$  jusqu'à  $y$  on peut donc trouver un point  $w \in [x, y]$  tel que

$$\langle x, z \rangle_w = \langle y, z \rangle_w \pm 1.$$

Le minimum des deux termes est alors majoré par  $\delta$ , et l'autre par  $\delta + 1$ , et on conclut comme avant avec une borne de  $2\delta + 1$ .  $\square$

### 3.5 Groupes hyperboliques

On dit qu'un groupe  $G$  est *finiment engendré* s'il existe une partie finie  $\mathcal{S}$  de  $G$  qui engendre  $G$ .

On se donne donc  $G$  un groupe finiment engendré et une partie génératrice finie  $\mathcal{S}$  de  $G$ . On suppose de plus que  $\mathcal{S}$  est symétrique : si  $g \in \mathcal{S}$ , alors  $g^{-1} \in \mathcal{S}$ , et que  $\mathcal{S}$  ne contient pas le neutre de  $G$ .

On peut définir une *norme* (qui n'en est pas une) sur  $g$  associée à  $\mathcal{S}$  par :

$$\|g\|_{\mathcal{S}} = \min \{ \ell \in \mathbf{N} \mid g = g_1 \cdots g_{\ell}, g_i \in \mathcal{S} \}.$$

Cette "norme" induit une distance (qui est une distance ce coup-ci!)  $d_{\mathcal{S}}$  définie par  $d_{\mathcal{S}}(g, h) = \|gh^{-1}\|_{\mathcal{S}}$ .

#### Exercice 21.

1. Vérifier que  $d_{\mathcal{S}}$  est bien une distance, invariante par multiplication à droite :  $d_{\mathcal{S}}(g_1, g_2) = d_{\mathcal{S}}(g_1h, g_2h)$ .
2. La norme est sous-multiplicative :  $\|gh\|_{\mathcal{S}} \leq \|g\|_{\mathcal{S}} + \|h\|_{\mathcal{S}}$ .

À partir de la partie génératrice  $\mathcal{S}$ , on peut définir le *graphe de Cayley* associé  $\mathcal{C}(G, \mathcal{S})$  :

- Les sommets de  $\mathcal{C}(G, \mathcal{S})$  sont les éléments du groupe  $G$  ;
- Les arêtes de  $\mathcal{C}(G, \mathcal{S})$  sont les  $(g, gs)$ , pour  $g \in G$  et  $s \in \mathcal{S}$  (autrement dit, on relie deux éléments de  $g$  si on passe de l'un à l'autre par multiplication à droite par un élément de  $\mathcal{S}$ ).

**Proposition 3.16.** *Si  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  sont deux parties génératrices symétriques finies de  $G$ , alors les graphes de Cayley associés  $\mathcal{C}(G, \mathcal{S})$  et  $\mathcal{C}(G, \mathcal{S}')$  sont quasi-isométriques.*

*Démonstration.* Exercice.  $\square$

Cela légitime la définition suivante :

**Définition 3.17.** Un groupe (finiment engendré) est *hyperbolique* si son graphe de Cayley est Gromov-hyperbolique.

Cette définition se permet d'omettre la partie finie  $\mathcal{S}$  : par la proposition ci-dessus, si  $\mathcal{C}(G, \mathcal{S})$  est Gromov-hyperbolique, alors  $\mathcal{C}(G, \mathcal{S}')$  est quasi-isométrique à  $\mathcal{C}(G, \mathcal{S})$  et donc, par le corollaire 3.8, est lui aussi Gromov-hyperbolique.

**Exemple 1.**

- les groupes libres sont hyperboliques ;
- $PSL_2(\mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \star \mathbf{Z}3\mathbf{Z}$ , engendré par  $R = z \mapsto -1/z$  et  $S = z \mapsto 1 - 1/z$ , est hyperbolique ;
- $\mathbf{Z}^2$  n'est pas hyperbolique.

Les groupes de surface sont hyperboliques, en vertu du lemme de Milnor-Schwarz :

**Exercice 22** (Milnor-Schwarz). Soit  $X$  un espace métrique géodésique<sup>4</sup> et propre<sup>5</sup>. On suppose qu'un groupe  $G$  agit de manière proprement discontinue sur  $X$  par isométries. Si le quotient  $X/G$  est compact, alors  $G$  est finiment engendré et quasi-isométrique à  $X$ . Plus précisément, pour toute partie génératrice symétrique  $\mathcal{S}$  de  $G$  et tout point  $x_0 \in X$ , l'application

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow X \\ g &\longmapsto g \cdot x_0 \end{aligned}$$

est une quasi-isométrie.

*Démonstration.* \*\* A ECRIRE \*\*

□

### 3.6 Le graphe des courbes du tore

Le graphe du tore admet une description simple. Ce cas est atypique, donc ne permet pas de comprendre la théorie générale, mais a l'avantage de donner un exemple dessinable de graphe hyperbolique non trivial.

Pour tout  $(p, q)$ , on note  $C(p, q)$  la courbe du tore qui fait  $p$  tours dans le sens des abscisses et  $q$  tours dans le sens des ordonnées, i.e. l'image de  $t \mapsto (pt, qt)$  dans  $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ . Chaque rationnel a deux écritures irréductibles, y compris tout entier  $n = n/1 = -n/-1$ , et l'infini  $\infty = 1/0 = -1/0$ .

4. Cela signifie que deux points sont toujours reliés par un segment géodésique.

5. Cela signifie que les boules fermées sont toutes compactes.

**Proposition 3.18.** (1) L'application  $\mathbf{Q} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathcal{C}(\mathbf{T}^2)$  qui à  $p/q$ , écrit sous forme irréductible, associe la classe d'isotopie de la courbe  $C(p, q)$ , est une bijection.

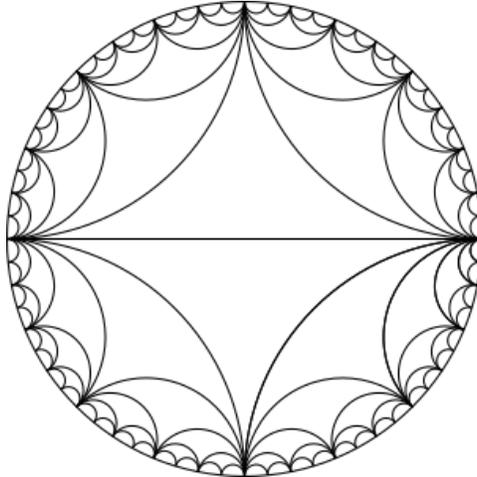
(2) Les classes d'isotopies  $C(p, q)$  et  $C(p', q')$  sont reliées par une arête dans le graphe  $\mathcal{C}(\mathbf{T}^2)$  ssi le déterminant  $pq' - p'q$  vaut  $\pm 1$ .

*Démonstration.* Comme nos courbes ne sont pas orientées,  $C(-p, -q) = C(p, q)$ . De plus chaque courbe  $C(p, q)$  est simple lorsque  $p/q$  est irréductible. Donc l'application est bien définie. Il faut vérifier que si  $(p, q) = k(p', q')$  avec  $p'/q'$  écriture irréductible et  $k > 1$  alors il n'y a pas de courbe simple dans la classe d'homotopie de  $C(p, q)$ .

– Lemme de base : sur le cylindre  $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$ , une courbe qui fait plus  $n$  tours,  $n > 1$ , n'est pas simple. Preuve : on prend un revêtement à  $n$  feuillets et compactifie avec 2 points à l'infini. Un relevé  $\hat{\alpha}$  de la courbe définit donc (si  $\alpha$  est simple) un domaine de Jordan. L'autre relevé  $\hat{\alpha} + (1, 0)$  de  $\alpha$  rencontre chaque composante du complémentaire (on le voit en considérant des points d'ordonnée minimale / maximale).

– L'action de  $SL_2(\mathbf{Z})$  est transitive sur  $\pi_1(\mathbf{T}^2) \simeq \mathbf{Z}^2$  : pour tout  $(p, q)$  primitif ( $p, q$  premiers entre eux) il existe  $S \in SL_2(\mathbf{Z})$  qui envoie  $(p, q)$  sur  $(1, 0)$  (c'est Bézout!) <sup>6</sup>. Avec le lemme du cylindre, on en déduit que la classe d'homotopie de toute courbe fermée simple est primitive.

– Enfin, pour tous  $(p, q), (p', q')$  non colinéaires, le nombre d'intersection minimal pour une paire de courbes dans ces classes est donné par le déterminant : on le voit facilement en envoyant la première classe sur  $(1, 0)$  par un élément de  $SL_2(\mathbf{Z})$ .  $\square$



6. Il revient au même de dire que  $SL_2(\mathbf{Z})$  agit transitivement sur les arêtes du graphe.

Dessin pompé de Wikipedia.

Le graphe du tore est aussi appelé *graphe de Farey*, il admet donc la description suivante : les sommets sont indexés par les rationnels, avec une arête ssi le déterminant vaut 1. Deux dessins classiques : (1) "Arbre" de Farey : à l'étape 0, on part de  $0 = 0/1, \infty = 1/0$  disposé cycliquement. A l'étape  $n + 1$ , chaque paire de "parents", rationnels obtenus à une étape antérieure et adjacents, donne naissance à un enfant avec la règle d'addition naïve :  $p/q + p'/q' = (p + p')/(q + q')$  ; on relie l'enfant à chacun de ses deux parents. On peut montrer que ceci génère tous les rationnels, et toutes les arêtes du graphe.

(2) Dessin dans le disque, avec le bord identifié à  $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$  ("triangulation idéale du disque hyperbolique"). Ce dernier dessin nous permet de montrer :

**Proposition 3.19.**  $\mathcal{C}(\mathbf{T}^2)$  est de diamètre infini.

*Démonstration.* Remarque clé : supposons  $p/q, p'/q' \neq 0, \infty$ . Si  $(p, q) - (p', q')$  alors  $p/q$  et  $p'/q'$  ont le même signe.

Interprétation : dans le dessin sur le disque, aucune arête n'intersecte l'arête  $0 - \infty$ . Avec l'action transitive de  $SL_2(\mathbf{Z})$  sur les arêtes, on en déduit que le graphe est plongé dans le disque. Ensuite il suffit de décrire une suite d'arêtes strictement emboîtée. Ca existe d'après l'action de  $SL_2(\mathbf{Z})$ , mais on peut même expliciter (cf graphe de Farey) :  $(0 - \infty), (1 - 2), (4/3 - 5/3), \dots$

Autre argument : On se donne deux (classes de) courbes  $a$  et  $b$  sur  $\mathbf{T}^2$ . Quitte à appliquer un élément de  $GL_2(\mathbf{Z})$ , on peut supposer que  $a$  est la courbe horizontale de classe  $(1, 0)$ . Alors  $d(a, b) = 1$  ssi  $b$  est de classe  $(k, \pm 1)$  pour un certain  $k \in \mathbf{Z}$ . Autrement dit,  $b = T^k S^{\pm 1} a$ , avec

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que (c'est classique)  $S$  et  $T$  engendrent  $SL_2(\mathbf{Z})$ . On retrouve ainsi le fait que  $\mathcal{C}(\mathbf{T}^2)$  est connexe. De plus,  $d(a, b)$  est le nombre minimal  $\ell$  d'entiers relatifs  $k_1, \dots, k_\ell$  tels qu'il existe  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell \in \{\pm 1\}$  satisfaisant  $b = T^{k_\ell} S^{\varepsilon_\ell} \dots T^{k_1} S^{\varepsilon_1} a$ . Or le diamètre de  $SL_2(\mathbf{Z})$  relativement à la partie génératrice  $\{S^{\pm 1}\} \cup \{T^k \mid k \in \mathbf{Z}\}$  est infini.

En effet, si ça n'était pas le cas, alors il existerait  $L > 0$  tel que l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^L \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^L &\longrightarrow SL_2(\mathbf{Z}) \\ (k_1, \dots, k_\ell, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_L) &\longmapsto T^{k_L} S^{\varepsilon_L} \dots T^{k_1} S^{\varepsilon_1} \end{aligned}$$

soit surjective. Cela impliquerait en particulier que  $SL_2(\mathbf{Z})$  serait à croissance polynomiale.  $\square$

**Proposition 3.20.** *Le graphe du tore est  $(3/2)$  - hyperbolique.*

*Démonstration.* \*\*\* EXPOSÉ \*\*\* : voir Minsky.  $\square$

**Proposition 3.21.** *Un Anosov du tore agit de façon loxodromique sur le graphe des courbes.*

NB : ceci redémontre que le diamètre est infini.

*Démonstration.* Soit  $A \in SL_2(\mathbf{Z})$  linéaire hyperbolique. On a deux directions stables/instables de pentes irrationnelles, dirigées par des vecteurs unitaires  $e_s, e_u$ . Dans cette base  $A$  est diagonale avec valeur propres  $\lambda^{-1}, \lambda$ . Les feuilletages sont minimaux : chaque feuille est dense. Plus précisément, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $M > 0$  tel que chaque segment de feuille de longueur  $> M$  est  $\varepsilon$  dense.

On introduit la fonction pente des courbes vues dans les coordonnées stables/instables :  $b((p, q)) = \log |y/x|$  où  $(p, q) = xe_s + ye_u$ . Cette fonction vaut 0 ssi la courbe est à  $45^\circ$  par rapport aux directions stables et instables. On a

$$b(A(p, q)) = b(p, q) + 2 \log(\lambda).$$

NB : C'est une fonction sur le graphe des courbes.

Pour simplifier on suppose  $A$  symétrique : les direction stables et instables sont orthogonales (sinon on doit introduire une distorsion dans les estimées qui suivent, rien de méchant).

**Lemme 3.22.** *La fonction  $b$  est lipschtzienne de  $\mathcal{C}(\mathbf{T}^2)$  dans  $\mathbf{R}$  : il existe  $C > 0$  tel que pour tous  $(p, q), (p', q')$ ,*

$$|b(p, q) - b(p', q')| \leq Cd_C(p/q, p'/q').$$

Le lemme implique immédiatement que la longueur de translation de l'action de  $A$  sur le graphe est minorée par  $\frac{2 \log(\lambda)}{C}$ .

Il reste à montrer le lemme. Il suffit de raisonner sur les courbes à distance 1 dans le graphe, i.e. de trouver  $C > 0$  tel que  $(p, q) - (p', q') \Rightarrow |b(p, q) - b(p', q')| \leq C$ . En effet, pour tout chemin  $(p_0, q_0) - (p_1, q_1) - \dots - (p_d, q_d)$  dans le graphe on aura alors, en utilisant le cas des courbes à distance 1 et l'inégalité triangulaire dans  $\mathbf{R}$ ,  $|b(p_0, q_0) - b(p_d, q_d)| \leq Cd$ ; on en déduit le lemme puisque la distance entre deux sommets du graphe est le minimum des longueurs des chemins.

Par contraposée, on va montrer que deux courbes avec des  $b$  assez différents doivent s'intersecter au moins deux fois.

Quitte à appliquer un itéré de  $A$  à la paire de courbes, on peut supposer que la première est proche de la direction diagonale, précisément que  $b(p, q) \in [\pm \log(\lambda)]$ , et que  $b(p', q')$  est arbitrairement proche de  $+\infty$ .

Or lorsque  $b(r, s)$  tend vers  $+\infty$ , la pente  $r/s$  tend vers la pente instable, et  $|r|, |s|$  tendent vers  $+\infty$  : la courbe tend vers le feuilletage instable.

Puisque  $b(p, q) \in [\pm \log(\lambda)]$ , la courbe  $C(p, q)$  a une pente bornée et est de longueur  $\geq 1$ . Par densité du feuilletage instable, il existe  $M$  tel que la feuille instable issue de 0 de longueur  $M$  traverse  $C(p, q)$  au moins 2 fois. Par convergence c'est encore vrai pour tout  $C(p', q')$  avec  $b(p', q')$  assez grand.  $\square$

**Exercice 23.** Le graphe des courbes du tore, ou du tore privé d'un point, est isomorphe au graphe des courbes de la sphère privé de 4 points, l'isomorphisme est induit par le passage au quotient par l'application  $z \mapsto -z$ .

## 4 $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^\dagger$ hyperboliques

On commence par un critère d'hyperbolicité dû à Bowditch [Bow14].

### 4.1 Un critère d'hyperbolicité

**Proposition 4.1** ("guessing geodesics"). *Pour tout entier  $h \in \mathbf{N}$ , il existe un entier  $k \in \mathbf{N}$  vérifiant la propriété suivante. Soit  $G$  un graphe connexe. Pour tout couple  $x, y$  de sommets de  $G$ , on se donne un sous-graphe connexe  $\mathcal{L}(x, y)$  de  $G$ , contenant  $x$  et  $y$ , et tel que :*

1. pour tout triplet  $x, y, z$  de sommets de  $G$ ,

$$\mathcal{L}(x, y) \subset V_h(\mathcal{L}(x, z) \cup \mathcal{L}(z, y));$$

2. pour tout couple  $x, y$  de sommets adjacents de  $G$  (i.e.  $d(x, y) \leq 1$ ), le diamètre de  $\mathcal{L}(x, y)$  est inférieur ou égal à  $h$ .

Alors  $G$  est  $k$ -hyperbolique.

En fait, on a une affreuse formule explicite pour  $k$  : si on choisit un réel  $r > 0$  tel que

$$2h(6 + \log_2 r) + 2 \leq r, \tag{2}$$

alors on peut prendre

$$k = \frac{3r - 10h}{2} - 3. \tag{3}$$

*Démonstration.* Pour  $n \in \mathbf{N}$ , on note  $f(n)$  le plus petit entier  $f \geq 0$  tel que, pour tout segment géodésique  $\alpha$  reliant  $x$  à  $y$  et de longueur au plus  $n$  (i.e.  $d(x, y) \leq n$ ), on a  $\mathcal{L}(x, y) \subset V_f(\alpha)$ . Il n'est a priori pas évident que ce nombre est fini. On va en fait montrer que  $f(n)$  est borné indépendamment de  $n$ . On commence par montrer une borne grossière sur  $f(n)$  (qui ressemble beaucoup au Lemme 3.10) :

**Lemme 4.2.** *Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on a  $f(n) \leq (2 + \lceil \log_2 n \rceil)h$ .*

*Démonstration.* Pour montrer cette première borne, l'idée est de passer par une subdivision dyadique de  $\alpha$ . Soit donc  $\alpha$  un segment géodésique de longueur  $\leq n$ , reliant les sommets  $x$  et  $y$  de  $G$ . Écrivons  $d_0 = d(x, y) \leq n$  et  $p = 2 + \lceil \log_2 d_0 \rceil$ . Soit  $z \in \alpha$  le point à distance  $\lfloor d_0/2 \rfloor$  de  $x$ , si bien que  $z$  sépare le segment géodésique  $\alpha$  en deux segments  $\alpha^-$  et  $\alpha^+$  dont les longueurs diffèrent d'au plus 1. Par la propriété 1., on a  $\mathcal{L}(x, y) \subset V_h(\mathcal{L}(x, z) \cup \mathcal{L}(z, y))$ .

On itère alors le procédé en l'appliquant aux deux segments géodésiques  $\alpha^-$  et  $\alpha^+$ . Après au plus  $p - 1$  étapes, on obtient

$$\mathcal{L}(x, y) \subset V_{(p-1)h} \left( \bigcup_{i=0}^{d_0-1} \mathcal{L}(x_i, x_{i+1}) \right),$$

où  $x = x_0, x_1, \dots, x_{d_0} = y$  sont les éléments de  $\alpha$ . On applique alors la propriété 2., qui implique que  $\mathcal{L}(x, y) \subset V_{ph}(\alpha)$ , ce qui montre que  $f(n) \leq ph$ .  $\square$

Montrons maintenant que  $f(n)$  est borné uniformément en  $n$ .

**Lemme 4.3.** *Si  $r$  est une constante vérifiant (2), alors pour tout  $n \in \mathbf{N}$  on a  $f(n) < \frac{r}{2} - 1 - 2h := s$ .*

*Démonstration. Étape 1 : Équation fonctionnelle pour  $f$*  – Soit, comme avant,  $\alpha$  un segment géodésique de longueur  $\leq n$ , reliant les sommets  $x$  et  $y$  de  $G$ , et  $w \in \mathcal{L}(x, y)$ . L'idée consiste ici à découper  $\alpha$  non pas en morceaux de longueurs (plus ou moins) égales, mais d'isoler un sous-segment géodésique  $\delta \subset \alpha$  reliant  $x' \in \alpha$  à  $y' \in \alpha$ , de longueur beaucoup plus courte que celle de  $\alpha$ , et tel que  $w \in V_{2h}(\mathcal{L}(x', y'))$  (moralement,  $\delta$  est l'ensemble des points "pas trop loin" de la "projection" de  $w$  sur  $\alpha$ , un peu comme dans la preuve du lemme de Morse, au Lemme 3.11). Il s'avère (après des calculs fastidieux) que la bonne taille pour ce segment  $\delta$  est  $2t$ , où on a posé  $t = f(n) + 2h + 1$ .

Posons donc  $d^- = \max(0, d(w, x) - t)$  et  $d^+ = \max(0, d(w, y) - t)$ . Par inégalité triangulaire, on a  $d_0 = d(x, y) \leq d^- + d^+ + 2t$ , si bien qu'on peut trouver des sommets  $x', y' \in \alpha$  découpant  $\alpha$  en trois sous-chemins  $\alpha = \alpha^- \cup \delta \cup \alpha^+$ , avec  $d(x, x') \leq d^-$ ,  $d(x', y') \leq 2t$  et  $d(y', y) \leq d^+$ . On suppose également que  $x' \neq y'$ .

On a  $d(w, \alpha^-) \geq d(w, x) - d(x, x') \geq d(w, x) - d^-$ . Ainsi, si  $d^- > 0$ , alors  $d^- = d(w, x) - t$  et donc  $d(w, \alpha^-) \geq t$ . Mais d'autre part, on a  $\mathcal{L}(x, x') \subset V_{f(n)}(\alpha^-)$ , si bien que  $d(w, \mathcal{L}(x, x')) \geq t - f(n) = 2h + 1$ . De même, on voit que si  $d^+ > 0$ , alors  $d(w, \mathcal{L}(y', y)) \geq 2h + 1$ . Mais par la propriété 1.,

$$w \in \mathcal{L}(x, y) \subset V_{2h}(\mathcal{L}(x, x') \cup \mathcal{L}(x', y') \cup \mathcal{L}(y', y)).$$

Cela implique, dans le cas où  $d^+ > 0$  et  $d^- > 0$ , que  $w \in V_{2h}(\mathcal{L}(x', y'))$ . Dans les autres cas, un raisonnement similaire mène au même résultat. Mais  $d(x', y') \leq 2t$ , donc par la définition de  $f$  on a  $\mathcal{L}(x', y') \subset V_{f(2t)}(\delta)$ . Par

conséquent,  $w \in V_{f(2t)+2h}(\delta) \subset V_{f(2t)+2h}(\alpha)$ . Par la définition de  $f$ , cela implique que

$$f(n) \leq f(2t) + 2h = f(2f(n) + 4h + 2) + 2h.$$

Rappelons que le lemme 4.2 assure que  $f(n) = O(\log n)$ , moralement l'inégalité précédente implique que  $f(n) \leq f(\log n) + Cte) + Cte'$ . On sent bien que ça force  $f$  à être petite, on rend ça rigoureux dans la fin de la preuve.

**Étape 2 : Borne uniforme pour  $f$**  – La fin de la preuve consiste alors à vérifier que cette dernière condition, combinée à l'estimation grossière du lemme 4.2, force la fonction  $f$  à être bornée. En effet, posons  $F(n) = 2f(n) + 4h + 2$ . La condition précédente sur  $f$  implique que

$$F(n) \leq F(F(n)) + 4h \tag{4}$$

pour tout  $n \in \mathbf{N}$ . D'autre part, l'estimation grossière du lemme 4.2 implique que

$$F(n) \leq 2(2 + \log_2 n)h + 4h + 2 = 2h(4 + \log_2 n) + 2.$$

Soit  $r$  vérifiant (2), on a alors  $2h(6 + \log_2 r) + 2 \leq r$  et donc, pour tout  $n \geq r$ ,  $F(n) + 4h \leq 2h(6 + \log_2 n) + 2 < n$ . Si on avait  $F(n_0) \geq r$  pour un certain  $n_0 \geq 0$ , cela impliquerait par (4) et ce qu'on vient de voir appliqué à  $n = F(n_0)$  que  $F(n_0) \leq F(F(n_0)) + 4h < F(n_0)$ , ce qui est une contradiction.

Ainsi,  $F(n) < r$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , ce qui implique que  $f(n) < r/2 - 2h - 1 = s$ .  $\square$

*Fin de la preuve de la proposition.* Par la définition même de  $f$ , le lemme précédent exprime que pour tout couple  $x, y$  de sommets de  $G$ , et  $\alpha$  un segment géodésique reliant  $x$  à  $y$ , on a  $\mathcal{L}(x, y) \subset V_s(\alpha)$  (où, rappelons-le,  $r/2 - 2h - 1 = s$ ).

La fin de la preuve découle directement du lemme 3.12 : appliqué à  $C = \mathcal{L}(x, y)$ , il donne  $\alpha \subset V_{2s}(\mathcal{L}(x, y))$ . Soient  $x, y, z$  trois sommets de  $G$ ,  $\alpha$  une géodésique de  $x$  à  $y$ ,  $\beta$  une géodésique de  $y$  à  $z$  et  $\gamma$  une géodésique de  $x$  à  $z$ . On a

$$\alpha \subset V_{2s}(\mathcal{L}(x, y)) \subset V_{2s+h}(\mathcal{L}(x, z) \cup \mathcal{L}(y, z)) \subset V_{3s+h}(\beta \cup \gamma),$$

avec  $3s + h = k \leq 3(r/2 - 2h + 1) + h$ . Cela démontre la  $k$ -hyperbolicité de  $G$ .  $\square$

## 4.2 Hyperbolicité uniforme des graphes de courbes

Le critère qu'on vient de voir permet d'avoir une preuve rapide de l'hyperbolicité uniforme des graphes de courbes sur les surfaces (due à Masur-Minsky et Bowditch).

**Théorème 4.4** (Hyperbolicité uniforme). *Il existe  $\delta > 0$  tel que le graphe des courbes  $\mathcal{C}(S)$  de toute surface fermée  $S$  est  $\delta$ -hyperbolique.*

En fait, ce théorème se généralise au cas des surfaces pointées. Pour cela, on définit le *graphe des courbes survivantes*  $\mathcal{C}^s(S \setminus F)$  sur une surface compacte pointée  $(S, F)$  : ses sommets sont des classes d'homotopie libre dans  $S \setminus F$  de courbes non contractiles sur  $S$ , et on met une arête entre deux classes d'homotopie s'il existe des représentants ayant au plus deux points d'intersection.

**Théorème 4.5** ([Ras20]). *Il existe  $\delta > 0$  tel que le graphe des courbes survivantes  $\mathcal{C}^s(S \setminus F)$  de toute surface compacte pointée  $(S, F)$  est  $\delta$ -hyperbolique.*

Il est remarquable que cette constante  $\delta$  ne dépend ni du genre de la surface, ni de son nombre de composantes de bord, ni du nombre de pointes.

**Exercice 24.** En fait, Rasmussen démontre que les graphes des courbes *non séparantes* sont uniformément hyperboliques. Montrer que ces deux énoncés sont équivalents. *Indication* : le graphe des courbes non-séparantes se plonge de manière isométrique et 1-dense dans le graphe des courbes survivantes.

Nous présentons la preuve de [PS17] du théorème 4.4, la preuve du théorème 4.5 étant similaire mais bien plus technique.

Pour démontrer le théorème 4.4, on démontre en fait l'hyperbolicité uniforme du graphe des courbes *augmenté*  $\mathcal{C}_{\text{aug}}(S)$ , où on met une arête entre deux classes d'homotopies de courbes si celles-ci ont des représentants ayant au plus deux points d'intersection.

**Exercice 25.** Montrer que pour une surface donnée, son graphe des courbes  $\mathcal{C}(s)$  et son graphe des courbes augmenté  $\mathcal{C}_{\text{aug}}(S)$  sont quasi-isométriques, avec une constante multiplicative de quasi-isométrie inférieure à 4. *Indication* : utiliser le lemme 1.22.

**Définition 4.6** (Courbes bicornes). Soient  $a$  et  $b$  deux classes d'homotopie libre de courbes sur  $S$ . Considérons leurs représentants sur  $S$  en position minimale (c'est-à-dire se coupant un nombre minimal de fois) ; nous les appellerons aussi  $a$  et  $b$  par abus de langage.

Une (classe d'homotopie de) courbe  $c$  est un *bicorne* entre  $a$  et  $b$  si soit  $c = a$ , soit  $c = b$ , soit  $c$  est une courbe simple représentée par l'union d'un sous-arc de  $a$  et d'un sous-arc de  $b$ .

Attention à ne pas confondre bicorne et bigone (définition 1.15)!

Pour  $a$  et  $b$  deux classes d'homotopie de courbes sur  $S$ , on note  $\mathcal{L}(a, b)$  l'ensemble des bicornes entre  $a$  et  $b$ .

Remarquons que par le critère du bigone, tout bicorne est non contractile.

L'idée de la preuve du théorème 4.4 est d'appliquer le critère d'hyperbolicité de la proposition 4.1 à  $\mathcal{L}(a, b)$ .

La démonstration du théorème 4.4 se réduit donc à celle de trois lemmes :

**Lemme 4.7.** *Si  $a$  et  $b$  sont adjacents dans  $\mathcal{C}_{\text{aug}}(S)$  (autrement dit si  $a$  et  $b$  ont des représentants dont l'intersection est de cardinal au plus 2), alors le diamètre de  $\mathcal{L}(a, b)$  vaut 1.*

**Lemme 4.8.** *Si  $a$  et  $b$  sont dans  $\mathcal{C}_{\text{aug}}(S)$ , alors  $\mathcal{L}(a, b)$  est connexe.*

**Lemme 4.9.** *Si  $a$ ,  $b$  et  $d$  sont dans  $\mathcal{C}_{\text{aug}}(S)$ , alors*

$$\mathcal{L}(a, d) \subset V_1(\mathcal{L}(a, b) \cup \mathcal{L}(b, d));$$

*Démonstration du lemme 4.7.* Si  $a$  et  $b$  ont au plus un point d'intersection, les seuls bicornes sont  $a$  et  $b$  eux-mêmes, et il n'y a rien à démontrer.

Si  $a$  et  $b$  ont exactement deux points d'intersection, il y a deux cas à considérer : soit ces deux intersections ont la même orientation ( $b$  croise  $a$  deux fois de la droite vers la gauche, ou bien deux fois de la gauche vers la droite), soit ces deux orientations ont des directions différentes ( $b$  croise  $a$  une fois de la droite vers la gauche, et une fois de la gauche vers la droite).

Dans le premier cas, l'intersection de deux des quatre courbes bicornes issues de  $a$  et  $b$  est soit vide, soit réduite à un singleton, et toutes ces courbes bicornes ont un seul point d'intersection avec  $a$  et  $b$ . Ainsi, le diamètre de  $\mathcal{L}(a, b)$  (dans  $\mathcal{C}_{\text{aug}}(S)$ ) vaut 1 (faire un dessin!).

Dans le deuxième cas, les quatre courbes bicornes issues de  $a$  et  $b$  sont deux-à-deux disjointes, et disjointes également de  $a$  et  $b$ , donc le diamètre de  $\mathcal{L}(a, b)$  vaut 1 (faire un dessin!).  $\square$

Pour montrer que  $\mathcal{L}(a, b)$  est connexe, on utilise un ordre sur les courbes bicornes. Notons qu'étant donné un bicorne entre  $a$  et  $b$ , ses  $a$ -arc et  $b$ -arc sont définis de manière unique<sup>7</sup>.

7. En fait c'est un peu subtil ici : on travaille avec des classes d'homotopie... le plus simple pour rendre cette dernière phrase rigoureuse est de considérer des représentants en position minimale.

**Définition 4.10.** Pour  $a$  et  $b$  des courbes de  $\mathcal{C}(S)$ , et  $c, c'$  deux bicornes entre  $a$  et  $b$ , on écrit  $c < c'$  si le  $b$ -arc de  $c$  est strictement inclus dans le  $b$ -arc de  $c'$ .

*Démonstration du lemme 4.8.* Dans toute cette preuve tous les bicornes seront des bicornes entre  $a$  et  $b$ .

On montre en fait le résultat suivant : *Si  $c$  est un bicorne différent de  $b$ , alors il existe un bicorne  $c'$  avec  $c < c'$  qui est voisin de  $c$  dans  $\mathcal{C}_{\text{aug}}(S)$ .* Cela implique que tout bicorne est relié à  $b$  par un chemin dans  $\mathcal{L}(a, b)$ , en utilisant le fait que l'ensemble des bicornes est fini, et par conséquent démontre le lemme.

Montrons maintenant le résultat. Soit  $c \neq b$  un bicorne.

Si  $c = a$ , on considère un arc  $b'$  de  $b$  ne rencontrant  $a$  qu'en ses extrémités, on vérifie facilement que les bicornes ayant  $b'$  comme  $b$ -arc intersectent  $a = c$  au plus une fois, et on peut prendre n'importe lequel de ces deux bicornes pour  $c'$  (faire deux dessins, un pour des intersections entre  $a$  et  $b$  dans le même sens, et un pour des sens différents).

Si  $c \neq a$ , on note  $a'$  son  $a$ -arc et  $b'$  son  $b$ -arc. On peut supposer  $b' \neq b$  (sinon il n'y a rien à faire). On considère alors un  $b$ -arc  $b'' \supsetneq b'$ , dont les deux points extrémaux sont sur  $a'$ , et minimal pour l'inclusion (autrement dit, on prolonge  $b'$  soit par la gauche, soit par la droite, jusqu'à rencontrer un point de  $a'$ , et on appelle ce nouvel arc  $b''$ ). Notons que dans le cas où le complémentaire de  $b'$  dans  $b$  ne rencontre pas  $a'$ , on obtient  $b'' = b$ . Ce  $b$ -arc  $b''$  délimite un unique  $a$ -arc  $a''$  (potentiellement vide) inclus dans  $a'$ ; on appelle  $c'$  le bicorne formé de  $b''$  et  $a''$  (c'est une courbe simple par construction). Comme dans le cas  $c = a$ , on vérifie facilement sur des dessins que  $c'$  intersecte  $c$  au plus une fois, et par construction on a  $c < c'$ .  $\square$

*Démonstration du lemme 4.9.* Soit  $c$  un bicorne entre  $a$  et  $b$ . On veut trouver un bicorne  $c'$  entre  $a$  et  $d$  ou entre  $b$  et  $d$  qui intersecte  $c$  au plus une fois.

Si  $c$  et  $d$  s'intersectent au plus deux fois, on peut prendre  $c' = d$ . Sinon, on considère des représentants de  $a$ ,  $b$  et  $d$  en positions deux-à-deux minimales<sup>8</sup>. On note  $a'$  et  $b'$  les  $a$ -arc et  $b$ -arc de  $c$ . On considère alors les points d'intersection de  $d$  avec  $a'$  et  $b'$ ; puisque par hypothèse  $c$  et  $d$  s'intersectent au moins trois fois, il y a au moins trois tels points d'intersection. Alors soit il existe deux points d'intersection successifs (pour l'ordre cyclique sur  $d$ ) qui sont avec le même arc ( $a'$  ou  $b'$ ), soit il existe trois points d'intersection successifs du type  $a', b', a'$  ou  $b', a', b'$ . Dans les deux cas, on trouve un  $d$ -arc

8. Par exemple, en prenant des représentants géodésiques.

$d'$  dont les deux extrémités sont soit sur  $a'$ , soit sur  $b'$ , et dont l'intérieur intersecte  $c$  au plus une fois.

On considère alors le bicorne formé de  $d'$  et du sous arc de  $a'$  délimité par les extrémités de  $d'$  (si ces extrémités sont sur  $a'$ ) ou du sous arc de  $b'$  délimité par les extrémités de  $d'$  (si ces extrémités sont sur  $b'$ ). Remarquons que par construction,  $c'$  est bien une courbe simple. Ce bicorne  $c'$  est entre  $a$  et  $d$  ou entre  $b$  et  $d$ , et on vérifie sur un dessin qu'il intersecte  $c$  au plus deux fois (en fait, il intersecte  $a'$  au plus une fois, et  $b'$  au plus une fois).  $\square$

### 4.3 Hyperbolicité des graphes de courbes fins (enfin !)

Commençons par une conséquence du critère du bigone (proposition 1.16).

**Lemme 4.11.** *Soit  $S$  une surface (pointée). Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  des courbes sur  $S$  qui sont deux-à-deux en position minimale, et  $\beta_1, \dots, \beta_m$  des courbes sur  $S$ . Alors les  $\beta_i$  peuvent être homotopées à des courbes  $\beta'_i$  telles que les courbes  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta'_1, \dots, \beta'_m$  soient deux-à-deux en position minimale.*

*Démonstration.* Par récurrence, il suffit de le faire pour  $m = 1$ .

On commence par montrer qu'à homotopie près, on peut supposer  $\beta_1$  transverse aux  $\alpha_i$ . En effet, puisque les  $\alpha_i$  sont en position minimale, leur union forme un graphe, et on peut définir un "voisinage tubulaire"  $V$  de cette union par le théorème de Homma (qui généralise Schoenflies); on peut alors homotoper chaque visite de  $\beta_1$  dans  $V$  de manière à le rendre transverse à l'union des  $\alpha_i$ .

On utilise alors le critère du bigone (proposition 1.16) de la manière suivante : on considère une courbe simple homotope à  $\beta_1$ , toujours notée  $\beta_1$ , dont le nombre d'intersections avec l'union des  $\alpha_i$  est minimal. Si cette courbe n'est pas en position minimale avec un des  $\alpha_i$ , il existe un bigone bordé par  $\beta_1$  et  $\alpha_i$ . Considérons un tel bigone, minimal pour l'inclusion parmi tous les bigones entre  $\beta_1$  et un des  $\alpha_i$ , qu'on note  $\alpha_k$ . On peut alors homotoper la courbe  $\beta_1$  dans le bigone pour que la courbe obtenue ait deux points d'intersection en moins avec  $\alpha_k$  mais le même nombre d'intersections avec les autres  $\alpha_i$ , cela contredit la minimalité du nombre d'intersections. On en déduit que la courbe  $\beta_1$  est en position minimale avec chacun des  $\alpha_i$ .  $\square$

**Lemme 4.12.** *Soient  $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^\dagger(S)$  deux courbes transverses, et supposons qu'elles sont en position minimale dans  $S \setminus F$ , où  $F \subset S$  est fini et disjoint de  $\alpha$  et  $\beta$ . Alors*

$$d_{\mathcal{C}^s(S \setminus F)}([\alpha]_{S \setminus F}, [\beta]_{S \setminus F}) = d_{\mathcal{C}^\dagger(S)}(\alpha, \beta).$$

*Démonstration.* On démontre l'égalité par double inégalité. Commençons par montrer que

$$d_{\mathcal{C}^s(S \setminus F)}([\alpha]_{S \setminus F}, [\beta]_{S \setminus F}) \geq d_{\mathcal{C}^\dagger(S)}(\alpha, \beta).$$

Prenons une géodésique  $[\alpha]_{S \setminus F} = \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k = [\beta]_{S \setminus F}$  reliant  $[\alpha]_{S \setminus F}$  à  $[\beta]_{S \setminus F}$  dans  $\mathcal{C}^s(S \setminus F)$ . On applique alors le lemme 4.11 à la surface  $S \setminus F$  et aux courbes  $\alpha_1 = \alpha$ ,  $\alpha_2 = \beta$  et  $\beta_i = \gamma_{i-1}$  (pour  $1 < i < k$ ) : il existe des courbes  $\gamma'_2, \dots, \gamma'_{k-1}$ , homotopes aux  $\gamma_i$ , telles que la famille  $\alpha = \gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_{k-1}, \gamma'_k = \beta$  soit en position minimale. En particulier, pour tout  $i$ , les courbes  $\gamma'_i$  et  $\gamma'_{i+1}$  s'intersectent au plus une fois (puisque leurs classes d'homotopie libre sont à distance 1 dans  $\mathcal{C}^s(S \setminus F)$  et ces deux courbes sont en position minimale dans  $S \setminus F$ ). Ainsi,  $d_{\mathcal{C}^\dagger(S)}(\alpha, \beta) \leq k - 1$ .

Montrons maintenant que

$$d_{\mathcal{C}^s(S \setminus F)}([\alpha]_{S \setminus F}, [\beta]_{S \setminus F}) \leq d_{\mathcal{C}^\dagger(S)}(\alpha, \beta).$$

Prenons une géodésique  $\alpha = \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k = \beta$  reliant  $\alpha$  à  $\beta$  dans  $\mathcal{C}^\dagger(S)$ . On peut alors construire une géodésique  $\alpha = \nu'_1, \nu'_2, \dots, \nu'_k = \beta$  formée des chemins  $\nu'_i$  qui sont disjoints de  $F$ . On peut le faire par récurrence sur  $i$  à l'aide du fait suivant.

**Fait 4.13.** *Il existe un chemin  $\nu'_i$  intersectant  $\nu'_{i-1}$  et  $\nu_{i+1}$  au plus une fois et disjoint de  $F$ .*

*Démonstration du fait.* La réunion d'un nombre fini de courbes est d'intérieur vide dans  $S$ . Pour chaque élément  $p$  de  $F$ , on choisit un petit disque contenant  $p$  et un homéomorphisme à support dans ce disque et envoyant  $p$  sur un point qui n'est pas sur la réunion de toutes nos courbes  $\nu_i$ . L'homéomorphisme obtenu en composant de tous ces homéomorphismes envoie  $P$  sur un ensemble disjoint de toutes nos courbes, et son support est disjoint de  $\alpha$  et  $\beta$  puisque ces deux courbes sont disjointes de  $P$ . On prend pour  $\nu'_i$  l'image de  $\nu_i$  par cet homéomorphisme.  $\square$

Maintenant que la suite  $\nu'_i$  est construite, pour tout  $i$ , on a  $d_{\mathcal{C}^s(S \setminus F)}(\nu'_i, \nu'_{i+1}) \leq 1$ , si bien que  $d_{\mathcal{C}^s(S \setminus F)}([\alpha]_{S \setminus F}, [\beta]_{S \setminus F}) \leq k - 1$ .  $\square$

On peut maintenant démontrer l'hyperbolicité des graphes de courbes, en utilisant la caractérisation de la proposition 3.14 en termes de produit de Gromov.

**Théorème 4.14.** *Le graphe des courbes fin  $\mathcal{C}^\dagger(S)$  de toute surface fermée  $S$  est Gromov-hyperbolique.*

*Démonstration.* On démontre en fait qu'ils sont tous  $\delta + 4$ -hyperboliques, où  $\delta$  est la constante du théorème 4.5. On rappelle que par la proposition 3.14, il suffit de montrer que pour tous sommets  $\alpha, \beta, \gamma, \mu$  de  $\mathcal{C}^\dagger(S)$ , on a

$$\langle \alpha, \gamma \rangle_\mu^\dagger \geq \min(\langle \alpha, \beta \rangle_\mu^\dagger, \langle \beta, \gamma \rangle_\mu^\dagger) - \delta - 4.$$

On commence par "remplacer" les courbes  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\mu$  par  $\alpha', \beta', \gamma'$  et  $\mu'$  avec  $\mu' = \mu$ ,  $d_{\mathcal{C}^\dagger(S)}(\alpha, \alpha') \leq 1$ ,  $d_{\mathcal{C}^\dagger(S)}(\beta, \beta') \leq 1$  et  $d_{\mathcal{C}^\dagger(S)}(\gamma, \gamma') \leq 1$ , et telles que les courbes  $\alpha', \beta', \gamma'$  et  $\mu'$  soient deux-à-deux transverses. Pour faire cela, on commence par considérer une courbe  $\alpha''$  homotope à  $\alpha$  et disjointe de  $\alpha$ , puis on considère  $\alpha'$  assez proche de  $\alpha''$  et transverse à  $\mu$ . On fait de même pour construire  $\beta'$  et  $\gamma'$ , en utilisant le même argument qu'au début de la preuve du lemme 4.11 (en utilisant le théorème de Homma).

On choisit alors un ensemble fini  $F \subset S$  tel que tout bigone entre deux courbes parmi  $\alpha', \beta', \gamma'$  et  $\mu'$  contienne un point de  $F$  (c'est possible car de tels bigones sont en nombre fini par transversalité des courbes). Par le lemme 4.12, pour tous  $\kappa, \lambda \in \{\alpha, \beta, \gamma, \mu\}$ , on a :

$$d_{\mathcal{C}^s(S \setminus F)}([\kappa']_{S \setminus F}, [\lambda']_{S \setminus F}) = d_{\mathcal{C}^\dagger(S)}(\kappa', \lambda').$$

De plus, par le fait que  $d_{\mathcal{C}^\dagger(S)}(\kappa, \kappa') \leq 1$  et  $d_{\mathcal{C}^\dagger(S)}(\lambda, \lambda') \leq 1$ , on a que

$$|\langle \kappa', \lambda' \rangle_{\mu'}^\dagger - \langle \kappa, \lambda \rangle_\mu^\dagger| \leq 2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \gamma \rangle_\mu^\dagger &\geq \langle \alpha', \gamma' \rangle_{\mu'}^\dagger - 2 \\ &= \langle [\alpha']_{S \setminus F}, [\gamma']_{S \setminus F} \rangle_{\mu'}^{S \setminus F} - 2 \\ &\geq \min(\langle [\alpha']_{S \setminus F}, [\beta']_{S \setminus F} \rangle_{\mu'}^{S \setminus F}, \langle [\beta']_{S \setminus F}, [\gamma']_{S \setminus F} \rangle_{\mu'}^{S \setminus F}) - \delta - 2 \\ &= \min(\langle \alpha', \beta' \rangle_{\mu'}^\dagger, \langle \beta', \gamma' \rangle_{\mu'}^\dagger) - \delta - 2 \\ &\geq \min(\langle \alpha, \beta \rangle_\mu^\dagger, \langle \beta, \gamma \rangle_\mu^\dagger) - \delta - 4. \end{aligned}$$

□

## 5 Bord à l'infini

Le but de cette section est de motiver la définition de la classification des isométries d'un espace Gromov-hyperbolique. On ne fera pas les preuves, pour celles-ci le lecteurice pourra consulter [DSU17] ou [Has22].

### 5.1 Le bord et sa topologie

On se fixe  $X$  un graphe Gromov-hyperbolique, et  $o$  un point base dans  $X$ .

**Définition 5.1.** Une suite  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de points de  $X$  est dite *de Cauchy-Gromov* si

$$\langle x_n, x_m \rangle_o \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Deux suites de Cauchy-Gromov  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$  sont dites *équivalentes* si

$$\langle x_n, y_n \rangle_o \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty;$$

on note alors  $(x_n) \sim (y_n)$ .

**Exercice 26.** (1) Vérifier que la définition ne dépend pas du choix du point base.

(2) Montrer que deux suites de Cauchy-Gromov  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$  sont équivalentes ssi

$$\langle x_n, y_m \rangle_o \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} +\infty$$

ce qui équivaut encore à

$$d(o, [x_n, y_m]) \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} +\infty.$$

(3) Montrer que la relation  $\sim$  est une relation d'équivalence.

**Définition 5.2.** Le *bord de Gromov* de  $X$ , noté  $\partial X$ , est l'ensemble des classes d'équivalence de  $\sim$ .

Le bord peut également être vu comme un espace quotient de quasi-géodésiques infinies (voir la définition 3.5)  $c : \llbracket 0, +\infty \llbracket \rightarrow X$  par la relation d'équivalence "les images sont à distance de Hausdorff bornée". Pour les détails, voir [Has22].

On va définir une topologie sur la "bordification"  $X \cup \partial X$ . Pour ça, on commence par étendre le produit de Gromov à  $X \cup \partial X$ .

**Définition 5.3.** Soient  $x, y \in X \cup \partial X$ . On définit

$$\langle x, y \rangle_o = \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n, y_n \rangle_o \mid x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y \right\}.$$

On vérifie sans trop de mal que cette définition donne bien la même valeur que le produit de Gromov classique pour des points de  $X$ .

**Définition 5.4.** On munit  $X \cup \partial X$  de la topologie dont une base d'ouverts est constituée des ensembles suivants :

- Les boules ouvertes de  $X$  ;
- Les ensembles de la forme  $\{y \in X \cup \partial X \mid \langle x, y \rangle_o > r\}$ , pour  $x \in \partial X$  et  $r > 0$ .

**Proposition 5.5** ([DSU17, Corollary 3.6.14]). *L'espace  $X \cup \partial X$  muni de la topologie ci-dessus est complètement métrisable.*

La métrique qui rend cet espace complet est définie de manière explicite (mais un peu compliquée) en termes de produits de Gromov.

Remarquons que la définition (assez simple et basique) de Gromov-hyperbolicité permet de munir ces espaces d'un bord qui le rend complet de manière canonique.

La théorie des espaces Gromov-hyperboliques est souvent exposée dans le cas *propre* c'est-à-dire quand toutes les boules fermées de l'espace sont compactes (et ce n'est bien sûr pas le cas pour les graphes de courbes, fins ou non). Sous cette hypothèse, l'espace  $X \cup \partial X$  muni de la topologie ci-dessus est compact.

Exemple : le bord de  $\mathbf{H}^2$  est le cercle... tout relevé d'une courbe fermée essentielle se prolonge au bord à l'infini.

Exemple : description du bord de  $\mathcal{C}(\Sigma)$  (théorème d'Erica Klerreich). \*\*\*  
A ECRIRE \*\*\*

Obtenir une description géométrique pour le bord du graphe fin des courbes est un problème ouvert, avec des **résultats partiels récents** de BHW.

## 5.2 Classification des isométries

Dans [Gro87], Gromov propose de classifier les isométries des espaces métriques en trois catégories :

**Définition 5.6.** Soit  $f$  une isométrie d'un espace métrique quelconque. On dit que  $f$  est

- *loxodromique*<sup>9</sup> si sa longueur de translation  $|f|$  (voir (1) et l'exercice 13) est non nulle ;
- *elliptique* si  $f$  possède une orbite bornée ;
- *parabolique* sinon.

On voit très facilement qu'une isométrie elliptique a une longueur de translation nulle, ainsi les trois cas de la définition sont mutuellement exclusifs. On voit tout aussi facilement que  $f$  est parabolique si et seulement si sa longueur de translation est nulle mais n'a pas d'orbite bornée.

Cette définition peut (doit) paraître très arbitraire en première lecture, mais la lecture familière avec la classification des isométries de  $\mathbf{H}^2$  pourra se raccrocher à cet exemple très classique. En fait, cette généralisation par Gromov de la classification des isométries de  $\mathbf{H}^2$  aux espaces Gromov-hyperboliques généraux apparaît d'autant plus pertinente que la caractérisation en termes de points fixes se généralise elle aussi. En effet, un isométrie de  $\mathbf{H}^2$

- loxodromique possède exactement deux points fixes dans  $\overline{\mathbf{H}^2}$ , qui sont dans  $\partial\mathbf{H}^2 = \mathbf{S}^1$  ;
- parabolique possède exactement un point fixe dans  $\overline{\mathbf{H}^2}$ , qui est dans  $\partial\mathbf{H}^2 = \mathbf{S}^1$  ;
- elliptique possède exactement un point fixe dans  $\overline{\mathbf{H}^2}$ , qui est dans  $\mathbf{H}^2$ .

Des propriétés similaires sont vraies pour les isométries générales des espaces Gromov-hyperboliques, comme on va le voir.

Tout d'abord, une isométrie d'un espace Gromov-hyperbolique  $(X, d)$  s'étend bien au bord de  $X$  :

**Proposition 5.7** ([DSU17, Lemma 3.4.25]). *Toute isométrie  $f$  de  $X$  s'étend de manière unique en un homéomorphisme  $X \cup \partial X \rightarrow X \cup \partial X$  (qu'on notera également  $f$ ).*

Et on a un énoncé alternatif de la classification des isométries de Gromov :

**Théorème 5.8** (Gromov, [DSU17, Section 6.1]). *Une isométrie  $f$  d'un espace métrique Gromov-hyperbolique est*

- *loxodromique ssi  $f$  n'admet aucun point fixe dans  $X$  mais deux points fixes (distincts) dans  $\partial X$  ;*
- *parabolique ssi  $f$  n'admet aucun point fixe dans  $X$  mais un point fixe dans  $\partial X$ .*

---

<sup>9</sup>. On dit aussi *hyperbolique*, mais nous éviterons de l'utiliser à cause de sa polysémie pathologique.

De plus, si  $f$  est loxodromique, on note  $f^+$  et  $f^-$  ses points fixes dans  $\partial X$ . Alors (quitte à échanger  $f^+$  et  $f^-$ ) l'application  $f|_{(X \cup \partial X) \setminus \{f^-\}}$  est une contraction de l'espace "métamétrique" complet  $(X \cup \partial X) \setminus \{f^-\}$ . L'énoncé mathématiquement rigoureux de l'assertion ci-dessus se trouve dans [DSU17, Section 6.1] (il faut entre autres définir ce qu'est une *métamétrique*, et définir convenablement une telle métamétrique), mais la morale est que l'orbite sous  $f$  de tout point de  $(X \cup \partial X) \setminus \{f^-\}$  converge exponentiellement vite vers le point fixe  $f^+$ .

### 5.3 Lemme du ping-pong

On termine cette partie en donnant un critère d'existence de sous-groupes libres dans des groupes agissant sur un ensemble.

**Lemme 5.9** (Ping-pong!). *Soit  $G$  un groupe agissant sur un ensemble  $X$ , et  $a_1, \dots, a_k$  des éléments de  $G$ . On suppose qu'il existe des ensembles non vides  $X_1^-, \dots, X_k^- \subset X$  et  $X_1^+, \dots, X_k^+ \subset X$ , deux-à-deux disjoints et tels que pour tout  $i$ , on ait*

$$a_i(X \setminus X_i^-) \subset X_i^+ \quad \text{et} \quad a_i^{-1}(X \setminus X_i^+) \subset X_i^-.$$

*Alors le groupe engendré par  $a_1, \dots, a_k$  est libre.*

Avant de démontrer ce lemme, voyons comment l'appliquer dans notre cas. On se donne  $a_1, \dots, a_k$  des isométries loxodromiques d'un espace Gromov-hyperbolique  $X$ , dont les points fixes au bord  $\partial X$ , notés  $a_1^-$  et  $a_1^+$ , sont deux-à-deux distincts. Alors il existe des voisinages  $X_i^-$  et  $X_i^+$  de respectivement  $a_i^-$  et  $a_i^+$  qui sont deux-à-deux disjoints. Les  $a_i$  étant loxodromiques, on a vu que ce sont des contractions en restriction à  $\partial X \setminus \{a_i^-\}$  de point fixe  $a_i^+$ , et que les  $a_i^{-1}$  sont des contractions en restriction à  $\partial X \setminus \{a_i^+\}$  de point fixe  $a_i^-$ . Cela implique pour tout  $i$ , il existe  $n_i \in \mathbf{N}$  tel que

$$a_i^{n_i}(X \setminus X_i^-) \subset X_i^+ \quad \text{et} \quad a_i^{-n_i}(X \setminus X_i^+) \subset X_i^-.$$

Ainsi, par le lemme, le groupe engendré par  $a_1^{n_1}, \dots, a_k^{n_k}$  est libre.

*Démonstration du lemme du ping-pong.* Soit  $w_1 \cdots w_\ell$  un mot réduit en les  $a_i^{\pm 1}$  (le mot *réduit* signifie que pour tout  $i$ , on n'a pas  $w_i w_{i+1} = 1$ ). On peut écrire  $w_\ell = a_j^{\varepsilon_j}$ , avec  $\varepsilon_j = \pm 1$ . On choisit alors  $Y = X \setminus X_j^-$  si  $\varepsilon_j = 1$  et  $Y = X \setminus X_j^+$  si  $\varepsilon_j = -1$ . Alors  $w_\ell(Y) \subset X_j^+$  si  $\varepsilon_j = 1$  et  $w_\ell(Y) \subset X_j^-$  si  $\varepsilon_j = -1$ . On peut alors itérer le processus, en écrivant  $w_1 = a_i^{\varepsilon_i}$ , on a  $w_1 \cdots w_\ell(Y) \subset X_i^+$  si  $\varepsilon_i = 1$  et  $w_1 \cdots w_\ell(Y) \subset X_i^-$  si  $\varepsilon_i = -1$ . Dans les deux cas,  $w_1 \cdots w_\ell(Y) \neq Y$ , ce qui prouve que  $w_1 \cdots w_\ell \neq 1$ . Cela implique que le groupe engendré par  $a_1, \dots, a_k$  est libre.  $\square$

## 6 BHMMW : Loxodromiques de $\mathcal{C}^\dagger(\mathbf{T}^2)$

### 6.1 Classification de Nielsen-Thurston

Cadre : on considère une surface compacte à pointe  $S$ . Dans un premier temps on peut penser qu'il n'y a pas de pointe (mais on est intéressé par le tore *avec* pointes).

**Définition 6.1.** Un homéomorphisme  $f$  de  $S$  est dit *périodique* s'il existe  $n \in \mathbf{N}^*$  tel que  $f^n = \text{Id}_S$ . Une classe d'isotopie de  $\text{Mcg}(S)$  est dite *périodique* si elle contient un homéomorphisme périodique. Théorème de Nielsen : toute classe d'isotopie périodique contient un homéo périodique.

**Définition 6.2.** Un homéomorphisme  $f$  de  $S$  est dit *réductible* s'il existe  $n \in \mathbf{N}^*$  tel que  $f^n$  préserve une courbe fermée simple essentielle non périphérique. Une classe d'isotopie de  $\text{Mcg}(S)$  est dite *réductible* si elle contient un homéomorphisme réductible.

Exemples : twists de Dehn.

Cette définition amène à une classification tautologique des éléments de  $\text{Mcg}(S)$  : une classe d'isotopie qui n'est ni périodique, ni réductible, est appelée "pseudo-Anosov".

**Exercice 27** (Le théorème de Kra : la classe d'une isotopie pousse-point est pseudo-Anosov, cf [FM12]). Soit  $\Sigma$  une surface non élémentaire,  $x$  un point de  $\Sigma$ , et  $\gamma$  un chemin basé en  $x$ . L'*isotopie pousse-point* associée est une isotopie  $t \mapsto f_t$  telle que la trajectoire  $t \mapsto f_t(x)$  est égale à  $\gamma$ . Soit  $[f_1]$  la classe de  $f_1$  dans la surface  $\Sigma$  à laquelle on ajoute une pointe en  $x$ .

Montrer que  $[f_1]$  n'est ni périodique, ni réductible.

Ce qui précède donne un sens au théorème suivant.

**Théorème 6.3** (Masur-Minsky). *Une classe d'isotopie d'homéomorphisme agit de façon loxodromique sur le graphe des courbes si et seulement si c'est une classe pseudo-Anosov.*

L'une des implications est triviale : une classe périodique ou réductible fixe une classe d'isotopie de courbe : son action sur le graphe a donc un point fixe. Dans l'autre sens, on prend une classe d'isotopie pseudo-Anosov, et on veut montrer que l'action sur le graphe est loxodromique ; dans ce cas la preuve est considérablement plus difficile.

**Théorème 6.4** ([LM91]). *Soit  $f \in \text{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$  dont l'ensemble de rotation est d'intérieur non vide. Soient  $x, y, z$  trois points  $f$ -périodiques, qui sont fixes par  $f^q$  pour un certain  $q \geq 1$ . Supposons que les vecteurs de rotation de  $x, y$  et  $z$  se sont pas alignés. Alors la classe d'isotopie de  $f^q|_{\mathbf{T}^2 \setminus \{x, y, z\}}$  est pseudo-Anosov.*

Avant de démontrer ce théorème, on en énonce quelques conséquences. Pour la première, on utilise un "joli" représentant de la classe d'isotopie, qui est appelé homéomorphisme pseudo-Anosov, qui est "le plus simple" dans sa classe d'isotopie par le théorème de semi-conjugaison de Handel (théorème 7.13).

**Corollaire 6.5.** *Soit  $f \in \text{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$  dont l'ensemble de rotation est d'intérieur non vide. Alors  $h_{\text{top}}(f) > 0$ .*

*Démonstration du corollaire.* Il "suffit" d'appliquer le théorème de semi-conjugaison de Handel (théorème 7.13) (attention au bug de la non compacité!).  $\square$

**Corollaire 6.6** ([BHM<sup>+</sup>22]). *Soit  $f \in \text{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$  dont l'ensemble de rotation est d'intérieur non vide. Alors  $|f|_{\mathcal{C}^\dagger(\mathbf{T}^2)} > 0$ , autrement dit  $f$  agit de manière loxodromique sur  $\mathcal{C}^\dagger(\mathbf{T}^2)$ .*

Ce corollaire est une conséquence immédiate du théorème ci-dessus et du lemme suivant (qu'on pourra comparer au lemme 4.12, en particulier pour le rappel des définitions des objets) :

**Lemme 6.7** ([BHW22, Lemma 4.2]). *Soit  $S$  une surface et  $F \subset S$  un ensemble fini. Soit  $f \in \text{Mcg}(S \setminus F)$  et  $h \in \text{Homeo}(S)$  tel que  $h(F) = F$  et  $f = [h]_{S \setminus F}$ .*

*Alors pour tout  $\alpha \in \mathcal{C}^\dagger(S)$  vérifiant  $\alpha \cap F = \emptyset$ , et tout  $i \in \mathbf{Z}$ , on a :*

$$d_{\mathcal{C}^s(S \setminus F)}([\alpha]_{S \setminus F}, f^i[\alpha]_{S \setminus F}) \leq d_{\mathcal{C}^\dagger(S)}(\alpha, h^i \alpha). \quad (5)$$

*De plus,  $|f|_{\mathcal{C}^s(S \setminus F)} \leq |h|_{\mathcal{C}^\dagger(S)}$  et donc  $h$  agit de manière loxodromique sur  $\mathcal{C}^\dagger(S)$  si  $f$  est une classe pseudo-Anosov.*

*Démonstration du lemme.* Puisque  $f = [h]_{S \setminus F}$ , pour tout  $i \in \mathbf{Z}$  on a  $[h^i \alpha]_{S \setminus F} = f^i[\alpha]_{S \setminus F}$ . Soit  $\alpha = \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k = h^i \alpha$  une géodésique de  $\mathcal{C}^\dagger(S)$ . On peut perturber  $\nu_2$  en  $\nu'_2 \in \mathcal{C}^\dagger(S)$  de manière à ce que  $\nu'_2$  soit disjoint à la fois de  $\nu'_1 = \nu_1$ , de  $\nu_3$  et  $F$  (ou bien ait un unique point d'intersection avec  $\nu'_1 = \nu_1$  et  $\nu_3$  dans le cas du tore à au plus une pointe). On peut

itérer ce processus pour obtenir une géodésique  $\alpha = \nu'_1, \nu'_2, \dots, \nu'_k = h^i \alpha$  de  $\mathcal{C}^\dagger(S)$  dont tous les éléments sont disjoints de  $F$ . Alors la suite de classes de courbes  $[\nu'_1]_{\mathcal{C}^s(S \setminus F)}, [\nu'_2]_{\mathcal{C}^s(S \setminus F)}, \dots, [\nu'_k]_{\mathcal{C}^s(S \setminus F)}$  est un chemin reliant  $[\alpha]_{\mathcal{C}^s(S \setminus F)}$  à  $[h^i \alpha]_{\mathcal{C}^s(S \setminus F)}$  de longueur  $d_{\mathcal{C}^\dagger(S)}(\alpha, h^i \alpha)$ , ce qui implique l'inégalité (5).

Ainsi, pour toute courbe  $\alpha$  disjointe de  $F$ ,

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{1}{i} d_{\mathcal{C}^s(S \setminus F)}([\alpha]_{S \setminus F}, f^i[\alpha]_{S \setminus F}) \leq \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{1}{i} d_{\mathcal{C}^\dagger(S)}(\alpha, h^i \alpha),$$

autrement dit  $|f|_{\mathcal{C}^s(S \setminus F)} \leq |h|_{\mathcal{C}^\dagger(S)}$ .

Enfin, si  $f$  est une classe de pseudo-Anosov, alors on a vu (au Théorème 6.3) que  $f$  agit de manière loxodromique sur  $\mathcal{C}^s(S \setminus F)$ , et donc  $0 < |f|_{\mathcal{C}^s(S \setminus F)} \leq |h|_{\mathcal{C}^\dagger(S)}$ , si bien que  $h$  agit de manière loxodromique.  $\square$

*Démonstration du théorème.* L'idée est bien sûr d'appliquer la classification de Nielsen-Thurston et de montrer que l'homéomorphisme  $f^q|_{\mathbf{T}^2 \setminus \{x, y, z\}}$  n'est ni périodique ni réductible. On posera  $S = \mathbf{T}^2 \setminus \{x, y, z\}$  et  $g$  le représentant de Nielsen-Thurston de  $f^q|_S$ .

Soit  $\alpha$  une courbe fermée simple essentielle non périphérique dans  $S$  et supposons que  $\alpha$  est stable par un itéré  $g^r$  de  $g$ . On utilise le fait que l'isotopie entre  $f^r|_S$  et  $g$  s'étend en une isotopie de  $\mathbf{T}^2$ .

Soit  $\tilde{g}$  un relevé de  $g$  au revêtement universel de  $\mathbf{T}^2 \setminus \{x, y, z\}$ , qu'on peut étendre via l'extension de l'isotopie en un homéo (toujours noté  $\tilde{g}$ ) du plan  $\mathbf{R}^2$  qui est isotope à un relevé  $\tilde{f}$  de  $f$ .

On a deux cas : le premier est celui où  $\alpha$  est contractile dans  $\mathbf{T}^2$ . Puisqu'elle est non périphérique, elle fait le tour d'au moins deux points parmi  $x, y, z$ ; sans perdre en généralité on peut supposer que c'est  $x$  et  $y$ . La courbe  $\alpha$  se relève en une courbe  $\tilde{\alpha} : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{R}^2$ , qui borde un disque  $\tilde{D}$  contenant deux relevés  $\tilde{x}$  et  $\tilde{y}$  de  $x$  et  $y$ . Puisque  $\alpha$  est stable par  $g$ , pour tout  $n$  il existe un vecteur  $v_n \in \mathbf{Z}^2$  tel que  $\tilde{g}^n(\tilde{D}) = v_n + \tilde{D}$ . En particulier, les points  $\tilde{f}^n(\tilde{x}) = \tilde{g}^n(\tilde{x}) \in v_n + \tilde{D}$  et  $\tilde{f}^n(\tilde{y}) = \tilde{g}^n(\tilde{y}) \in v_n + \tilde{D}$  restent à distance uniformément bornée en  $n$  (bornée par le diamètre de  $D$ ), ce qui contredit le fait que  $x$  et  $y$  ont des vecteurs de rotation différents.

Le second cas est celui où  $\alpha$  est essentielle dans  $\mathbf{T}^2$ . La courbe  $\alpha$  se relève en une courbe  $\tilde{\alpha} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ , qui est à distance bornée d'une droite de  $\mathbf{R}^2$  dirigée par le vecteur  $w \in \mathbf{Z}^2$ . Puisque  $\alpha$  est stable par  $g$ , il existe  $v \in \mathbf{Z}^2$  tel que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on a  $\tilde{g}^n(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha} + nv$ . On voit facilement que cette condition implique que  $\langle \rho(\tilde{g}), w^\perp \rangle$  (la projection de  $\rho(\tilde{g})$  sur l'orthogonal de  $w$ ) est un singleton. Cela empêche les vecteurs de rotation de  $x, y, z$

sous  $g$ , qui sont les mêmes que ceux de  $x, y, z$  sous  $f$ , d'être non alignés.  
Contradiction.

Ainsi, il n'existe aucune courbe fermée simple non essentielle qui est invariante par  $g$ , ce qui implique que  $g$  est pseudo-Anosov.  $\square$

## 7 Action loxodromique sur $\mathcal{C}$

### 7.1 Un exemple

Le but de ce paragraphe est de décrire un exemple d'homéomorphisme du tore dont l'ensemble de rotation est d'intérieur non vide (il contient un triangle...), et de voir comment il induit une action loxodromique sur le graphe du tore à trois pointes.

**Définition de l'homéomorphisme  $h$**  Pour fixer les idées, on considère l'homéomorphisme suivant, composé de deux rotations fibrées (cf les exemples de la section sur l'ensemble de rotation). On pose  $\phi(x) = (1 - \cos(2\pi x))/2$  (ou n'importe quelle fonction continue 1-périodique telle que  $\phi(0) = 0$  et  $\phi(1/2) = 1$ ) ;

$$F_\phi : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x, y + \phi(x)),$$

$$G_\phi : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x + \phi(y), y),$$

et  $H = G_\phi \circ F_\phi$ . Cet homéomorphisme passe au quotient à  $\mathbf{T}^2$  en  $h$ . Les trois points  $x_0 = (0, 0)$ ,  $x_1 = (0, 1/2)$ ,  $x_2 = (1/2, 0)$  sont fixes par  $h$  et ont pour vecteurs de rotation  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ . Par la convexité de  $\rho(H)$ , il contient un triangle et est donc d'intérieur non vide. Le point important pour nous est la classe d'isotopie de  $h$  relativement au trois points fixes, à laquelle on peut penser de la façon suivante. On note  $F = \{x_0, x_1, x_2\}$  et  $[h] = [h]_{S \setminus F}$  la classe d'isotopie de  $h$  dans  $S \setminus F$ . On va souvent voir  $H$  comme le temps 1 de l'isotopie  $(H_t)$  pour laquelle le point  $x_0$  ne bouge pas du tout, pour  $t$  entre 0 et 1/2 le point  $x_1$  fait un tour dans le sens vertical tandis que le point  $x_2$  ne bouge pas, puis pour  $t$  entre 1/2 et 1 le point  $x_1$  ne bouge pas tandis que le point  $x_2$  fait un tour dans le sens horizontal. En formule, par exemple :

$$H_t(x, y) = \begin{cases} F_{2t\phi} & \text{pour } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G_{2(t-\frac{1}{2})\phi} \circ F_\phi & \text{pour } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

**Itérés d'une courbe** D'après le théorème de Llibre-McKay,  $[h]$  est une classe pseudo-Anosov : aucune classe d'isotopie de courbe dans  $S \setminus F$  n'est périodique. Nous allons essayer de comprendre cette propriété. En particulier, nous voudrions comprendre le comportement de la suite des itérés d'une courbe, à isotopie près.

Pour fixer les idées, posons  $\alpha : t \mapsto (3/4, t)$ . Essayons de dessiner les premiers itérés de  $\alpha$  (à isotopie près).

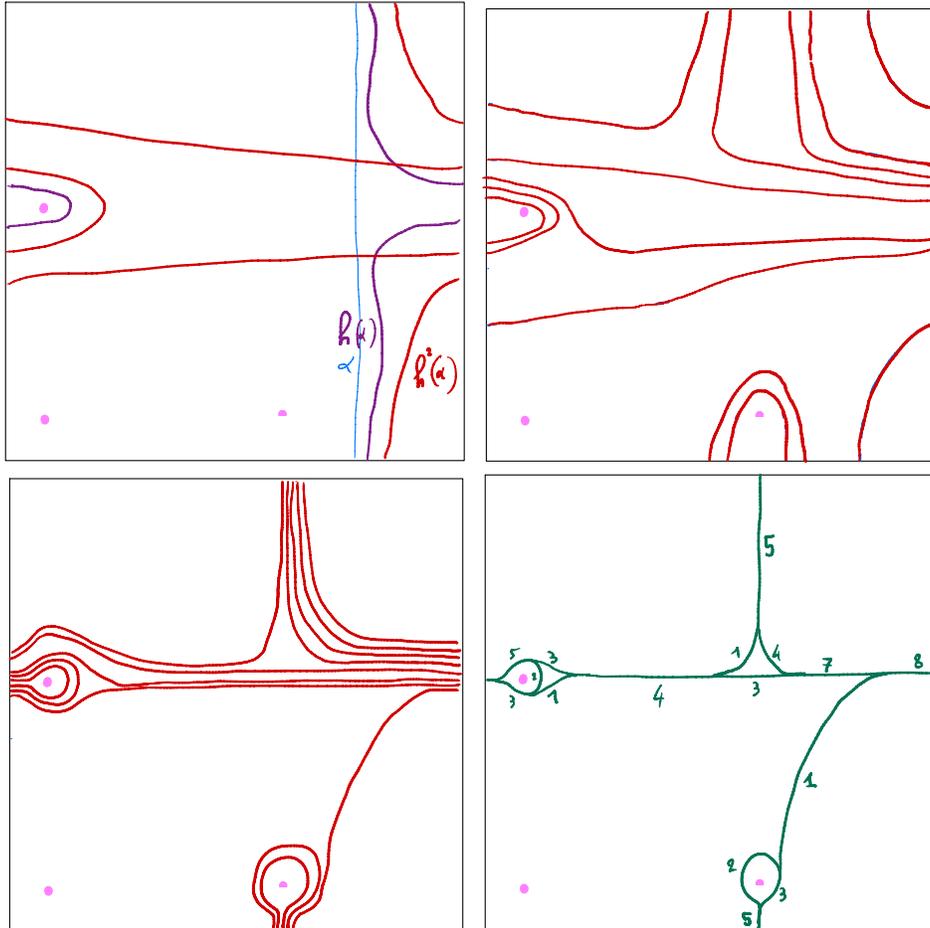


FIGURE 1 – Dessins de  $h^3(\alpha)$ , et un un chemin de fer qui le porte

On voit que la complexité de  $[h^n(\alpha)]$  (et sa longueur) semble croître rapidement, et dès que  $n \geq 3$  il devient assez difficile de dessiner ces courbes sans outil supplémentaire. D'autre part, l'itération produit visiblement une courbe qui possède de nombreux sous-arcs "parallèles"; pour simplifier le dessin, il est naturel de regrouper ces brins "parallèles". On obtient un graphe avec des poids sur les arêtes indiquant le nombre de brins. On retrouve facilement la courbe d'origine en faisant l'opération inverse, qui consiste à remplacer chaque arête par le nombre de segments correspondant au poids.

Pour itérer la courbe on peut itérer le graphe. . .

**Formalisation : les chemins de fer ("train tracks")** Un tel graphe s'appelle un *chemin de fer* ("train track").

**Définition 7.1.** (Version lisse) Un *chemin de fer* est un graphe  $\tau$  plongé dans la surface  $S \setminus F$ , dont les arêtes sont des courbes lisses, et en chaque sommet  $s$  (appelé *aiguillage*, "swift") on a un vecteur tangent  $\vec{v}$ , de sorte que toute arête incidente à  $s$  y arrive de façon tangente à  $\vec{v}$ , et pour chaque aiguillage on a au moins une arête dans chacune des deux directions (correspondant à  $\vec{v}$  et  $-\vec{v}$ ). Il y a aussi des conditions sur le complémentaire (chaque composante connexe du complémentaire est un disque topologique de  $S$  avec au plus un élément de  $F$  (une pointe); s'il ne contient pas de pointe alors son bord a au moins trois singularités ("cusps"); s'il contient une pointe, alors son bord a au moins une singularité.<sup>10</sup>

Sur l'exemple, les deux composantes connexes sans pointes sont des "triangles" (trois singularités); et on a deux (petites) composantes à pointes qui sont des monogones, et la dernière, la plus grande, est un bigone.

On dit que la classe d'isotopie d'une courbe  $\alpha$  est *portée par*  $\tau$ , et on écrit  $[\alpha] \prec \tau$ , si la courbe  $\alpha$  peut être poussée par une isotopie dans un voisinage de  $\tau$  de sorte qu'elle suive le chemin de fer de façon compatible avec les aiguillages. Voici une façon précise et visuelle de définir ceci. Considérons un voisinage tubulaire  $V(\tau)$  de  $\tau$  qui est feuilleté par des segments transverses aux arêtes (par exemple, on fixe une métrique riemannienne sur la surface, on prend  $r > 0$  assez petit, et on considère la réunion des segments géodésiques de longueur  $2r$  qui sont chacun centré en un point d'une arête et orthogonal à cette arête); on peut imaginer ces segments comme les *traverses* ("ties") sur lesquelles on fixe les rails des chemins de fer. Au voisinage de chaque aiguillage les traverses sont communes aux différentes branches arrivant du même côté.

**Définition 7.2.** Un *voisinage de traverses* ("tie neighborhood")  $V(\tau)$  du chemin de fer est un ouvert qui est feuilleté par des arcs (ensembles homéomorphes à  $[0, 1]$ ). En dehors d'un voisinage des aiguillages, on a juste un voisinage tubulaire des arêtes avec un feuilletage trivial (homéomorphe au carré  $[-1, 1]^2$  feuilleté verticalement avec l'arête correspondant à  $y = 0$ ). Près d'un aiguillage on se donne un modèle topologique unique indiqué sur

---

10. Ces conditions définissent ce qui est appelé usuellement un *grand* chemin de fer; pour un "petit" chemin de fer on autorise des composantes complémentaires qui ne sont pas des disques.

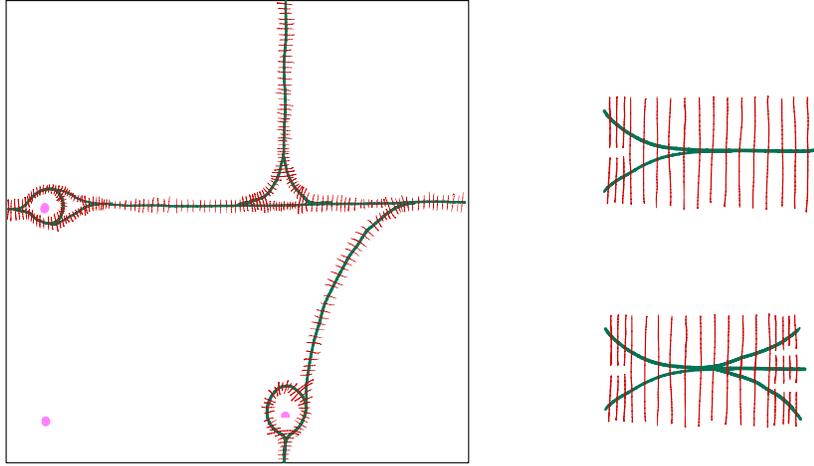


FIGURE 2 – Voisinage de traverses

le dessin (remarquer qu'on peut avoir plusieurs rails incidents de chaque côté).<sup>11</sup>

**Définition 7.3.** Une classe d'isotopie de courbes  $[\alpha]$  est *portée par le chemin de fer*  $\tau$  si et seulement si elle est isotope à une courbe incluse dans le voisinage de traverse  $V(\tau)$  et transverse au feuilletage par les traverses.

La courbe  $\alpha$  induit alors un système de poids sur les arêtes de  $\tau$ , comme indiqué sur la première figure : le poids d'une arête est simplement le nombre de fois que la courbe emprunte cette arête. Le système de poids permet de reconstituer la courbe  $[\alpha]$ . On peut donc penser aux poids comme des coordonnées sur l'ensemble des classes d'isotopie de courbes portées par  $\tau$ .

Le chemin de fer permet de faciliter le dessin à la main des itérés d'une courbe, mais ne résout pas entièrement le problème : nous voudrions maintenant pouvoir itérer le chemin de fer.

**Un chemin de fer invariant** Bestvina et Handel ont inventé un algorithme [BH92] qui produit, pour toute classe d'isotopie  $[h]$  de type pseudo-Anosov (qui n'admet aucune classe d'isotopie de courbe périodique), un chemin de fer  $\tau_0$  qui est *invariant* par  $[h]$  : il existe  $h_0$  isotope à  $h$  tel que

<sup>11</sup>. Remarquer que cette définition de voisinage de traverses nous donne aussi une façon purement topologique de définir un chemin de fer, comme un graphe  $C^0$  qui admet un voisinage de ce type, avec notamment les modèles près des aiguillages.

$h_0(V(\tau_0)) \subset V(\tau_0)$ , et qui est compatible avec le feuilletage : chaque traverse est envoyée dans une traverse.

**Théorème 7.4.** (Bestvina-Handel) *Toute classe d'isotopie pseudo-Anosov admet un chemin de fer invariant.*

L'algorithme de Bestvina-Handel a été implémenté par Toby Hall (le programme résultat est [disponible sur sa page web](#)). Voici le chemin de fer calculé par Toby pour notre homéomorphisme  $h$ .

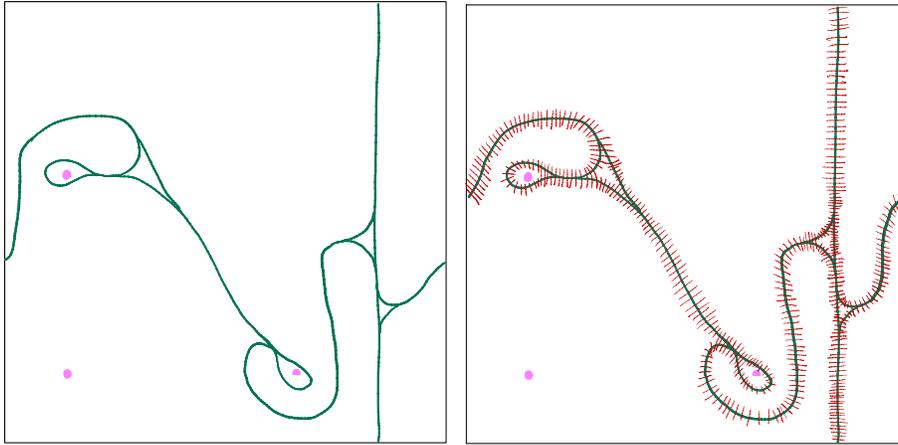


FIGURE 3 – Un autre chemin de fer et son voisinage de traverse

Pour vérifier l'invariance, on dessine l'image de  $\tau$  par  $[h]$ , et on essaye de "pousser" cette image sur  $\tau$ . Ceci permet de vérifier le théorème pour notre exemple. Les dessins suivants représentent l'image du chemin de fer poussé par l'isotopie, d'abord verticalement, puis horizontalement ; enfin on regroupe l'image pour la placer dans le voisinage de traverse, transversalement au feuilletage. Cette dernière partie est une isotopie dans  $S \setminus \{x_0, x_1, x_2\}$ , contrairement aux deux premières.

Puisque  $\tau_0$  est invariant, on peut coder l'action de  $[h]$  en retenant l'image de chaque arête, comme indiqué sur le dernier dessin. On garde une partie de cette information dans la matrice associée, dont l'entrée  $A_{i,j}$  est égale au nombre de fois où  $h_0(b_i)$  parcourt  $b_j$ .

Nous pouvons maintenant donner une description de la suite des itérés de notre courbe initiale  $[\alpha]$ . Noter que les branches  $1, 2, a, b, c, a', etc$  sont particulières, on les appelle *branches infinitésimales* ; en particulier on peut les oublier dans le codage d'une courbe (leurs poids peuvent être retrouvés si

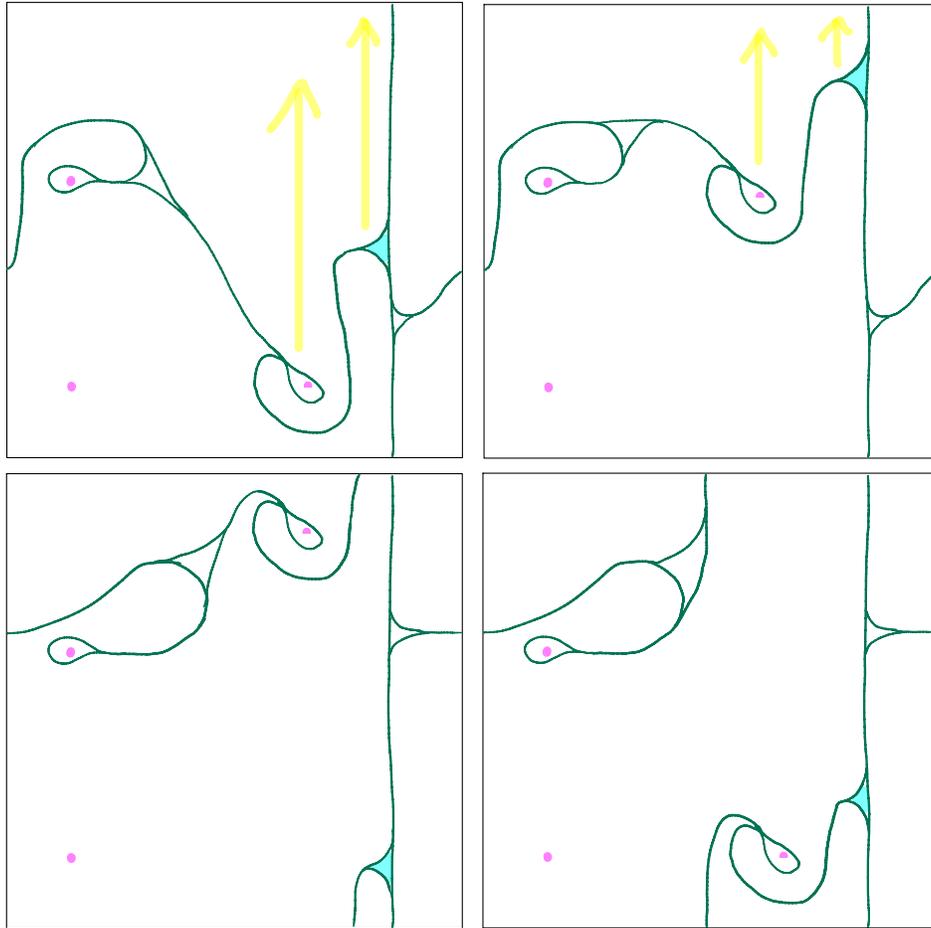


FIGURE 4 – Isotopie de l'identité à  $F_{\sin(2\pi y)}$

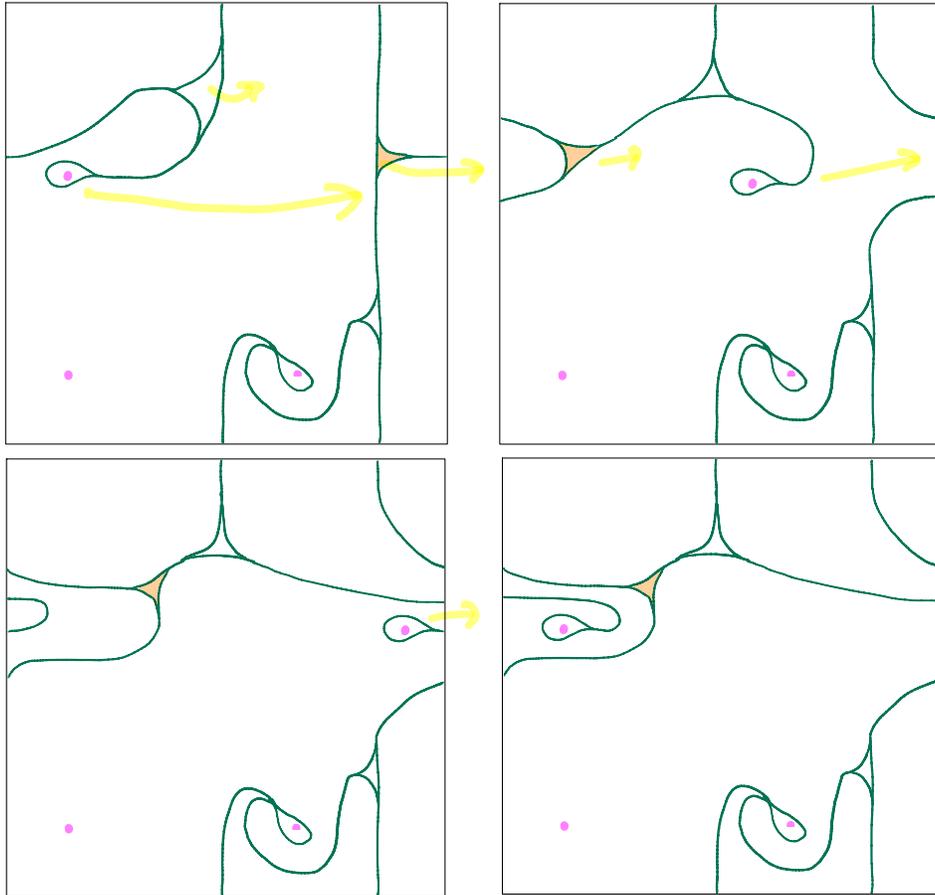


FIGURE 5 – Suite de l'isotopie aboutissant à  $H$

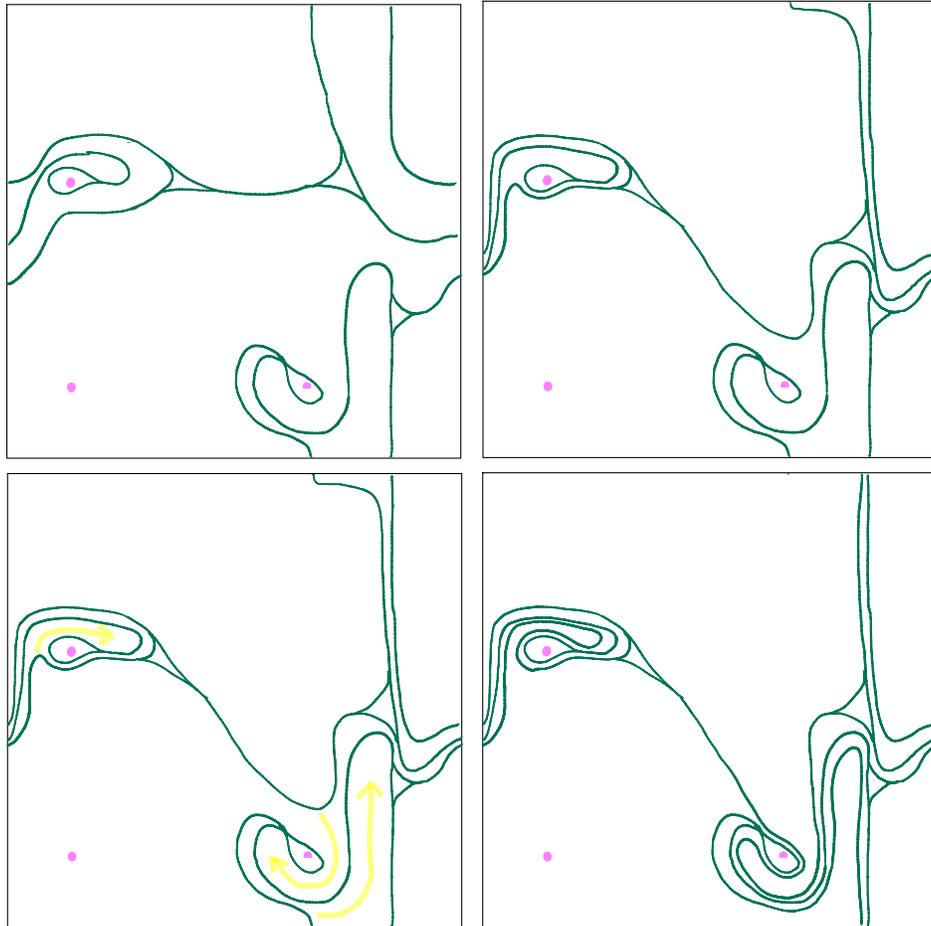


FIGURE 6 – Isotopie dans  $S \setminus \{x_0, x_1, x_2\}$

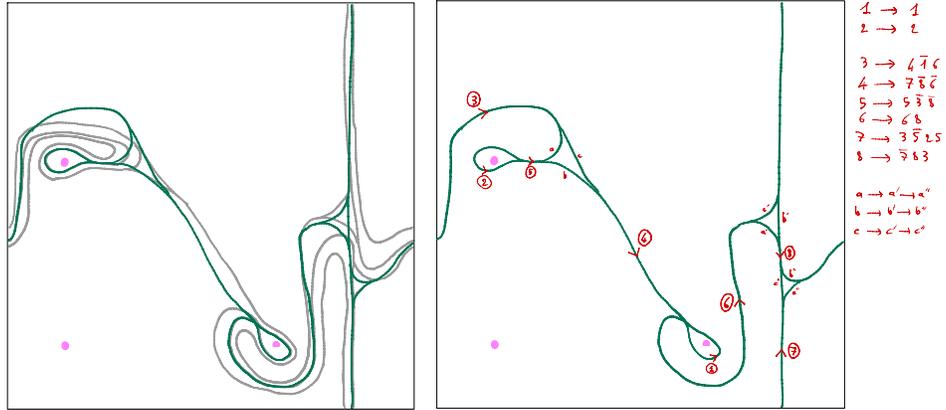


FIGURE 7 – Le chemin de fer et son image, les données combinatoires

on connaît le poids de toutes les autres branches). La courbe est ainsi codée dans le chemin de fer par le chemin  $\overline{78}$ ; on calcule ses itérés en appliquant le codage de  $h_0$  à ce chemin :

$$\begin{aligned}
 \overline{78} &\mapsto (3\overline{525})(\overline{387}) \\
 &\mapsto (3' = 4\overline{16})(\overline{5} = 83\overline{5})2(5' = 5\overline{38})(\overline{3}' = \overline{614})(\overline{8}' = \overline{387})(7' = 3\overline{525}) \\
 &= (4\overline{16})(83\overline{5})2(5\overline{38})(\overline{614})(\overline{387})(3\overline{525}) \\
 &\mapsto (4' = 7\overline{86})\overline{1}(6' = 68)(8' = \overline{783})(3' = 4\overline{16})(\overline{5}' = 83\overline{5})2(5' = 5\overline{38}) \\
 &\quad (\overline{3}' = \overline{614})(\overline{8}' = \overline{387})(\overline{6}' = \overline{86})1'(4' = 68\overline{7})(\overline{3}' = \overline{614})(\overline{8}' = \overline{387}) \\
 &\quad (7' = 3\overline{525})(3' = 4\overline{16})(\overline{5}' = 83\overline{5})2(5' = 5\overline{38}) \\
 &= (7\overline{86})\overline{1}(68)(\overline{783})(4\overline{16})(83\overline{5})2(5\overline{38})(\overline{614})(\overline{387})(\overline{86})1'(68\overline{7})(\overline{614})(\overline{387}) \\
 &\quad (3\overline{525})(4\overline{16})(83\overline{5})2(5\overline{38})
 \end{aligned}$$

On peut calculer directement le nombre de fois que  $h_0^{100}(\alpha)$  parcourt la branche 3 : ce nombre est la somme des entrées (7, 3) et (8, 3) de la matrice  $A^{100}$ . Cette matrice est de type Perron-Frobenius avec valeur propre  $\frac{3+\sqrt{5}}{2} \simeq 2,61\dots$ , et en particulier la longueur des itérés de toute courbe portée par le chemin de fer croît exponentiellement.

**Exercice 28.** Soit  $\beta$  une classe d'isotopie de courbe portée par  $\tau_0$ . Soit  $b$  une arête du chemin de fer numéroté de 1 à 8 (pas le bord d'un des petits triangles). Dessiner une courbe  $\gamma$  reliant deux pointes et coupant le chemin

de fer en un unique point, qui est dans  $b$ . Montrer que le poids de  $\beta$  sur l'arête  $b$  est égale à  $i(\beta, \gamma)$ .

En déduire que l'application qui associe à une classe d'isotopie de courbe portée par  $\tau$  son système de poids est injective.

**Action loxodromique** Expliquons maintenant comment on en déduit que l'action de  $h$  sur  $\mathcal{C}(S \setminus F)$  est loxodromique.

Soit  $P(\tau_0)$  l'ensemble des classes d'isotopie de courbes portées par notre chemin de fer invariant  $\tau_0$ , et  $\text{Inte}(P(\tau_0))$  celles dont les poids sont tous  $> 0$ , c'est-à-dire qui passent au moins une fois par chaque branche (y compris les branches 1, 2,  $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$  du dessin). Puisque le chemin de fer est invariant par  $h$ , on a  $h(P(\tau_0)) \subset P(\tau_0)$ . D'autre part, on vérifie facilement (avec les données combinatoires) que chacune des branches 3 à 8 a un itéré qui passe par toutes les branches. On a donc le fait suivant.

**Fait 7.5.** *Il existe  $n_0$  ( $n_0 = 4$  ou  $5$ ) tel que*

$$h^{n_0}(P(\tau_0)) \subset \text{Inte}(P(\tau_0)).$$

On pose  $\tau_k = h^{kn_0}(\tau_0)$ . On a donc  $P(\tau_{k+1}) \subset \text{Inte}(P(\tau_k))$  pour tout  $k$ .

Dans la preuve de l'action loxodromique due à Masur et Minsky, la remarque-clé est la suivante.

**Lemme 7.6.** *Soient  $a, b$  deux sommets du graphe des courbes  $\mathcal{C}(\mathbf{T}^2 \setminus F)$  telles que  $d_{\mathcal{C}(\mathbf{T}^2 \setminus F)}(a, b) = 1$ . Si  $a \in \text{Inte}(P(\tau_0))$ , alors  $b \in P(\tau_0)$ .*

Avec le lemme-clé et le fait, on obtient la minoration suivante.

**Corollaire 7.7.** *Si  $a \in P(\tau_k)$  et  $b \notin P(\tau_1)$  alors  $d(a, b) \geq k$ .*

*Démonstration du corollaire.* Sous les hypothèses du corollaire,  $a \in P(\tau_k) \subset \text{Inte}(P(\tau_{k-1}))$  (par le fait), donc toute courbe à distance 1 de  $a$  est dans  $P(\tau_{k-1}) \subset \text{Inte}(P(\tau_{k-2}))$  (par le lemme). Donc toute courbe à distance 2 est dans  $P(\tau_{k-2})$ , etc.. Par récurrence, toute courbe à distance plus petite que  $k$  est dans  $P(\tau_1)$ .  $\square$

Soit  $[\alpha]$  notre courbe initiale codée par  $\overline{78}$  : elle est dans  $P(\tau_0)$  mais elle ne passe pas par toutes les branches, elle n'est donc pas dans  $P(\tau_1) \subset \text{Inte}(P(\tau_0))$ . La (classe de la) courbe  $\alpha_k := h^{kn_0}(\alpha)$  est dans  $P(\tau_k)$ . D'après ce qui précède, on a

$$d_{\mathcal{C}(\mathbf{T}^2 \setminus F)}([\alpha], [h^{kn_0}(\alpha)]) \geq k.$$

La longueur de translation de  $h^{n_0}$  est donc minorée par 1, et par conséquent la longueur de translation de  $h$  est minorée par  $\frac{1}{n_0}$ . On a montré :

**Corollaire 7.8.**  $[h]$  agit de façon loxodromique sur  $\mathcal{C}(\mathbf{T}^2 \setminus F)$ , sa longueur de translation est minorée par  $\frac{1}{5}$ .

**Exercice 29.** Vérifier que  $d([\alpha], h([\alpha])) = 1$ ; en déduire une majoration de la longueur de translation de  $h$ .

**Preuve du lemme-clé pour  $\tau_0$**  Démontrons le lemme-clé pour notre chemin de fer  $\tau_0$ . Soit  $\alpha$  un représentant de la classe d'isotopie  $a$ . Puisque  $a$  est porté par  $\tau_0$ , on peut choisir  $\alpha$  inclus dans  $V(\tau_0)$  et transverse au feuilletage par traverses. Pour chaque arête  $c$  du chemin de fer qui est traversée au moins deux fois par  $\alpha$ , on choisit une (unique) traverse rencontrant  $c$  et aucune autre arête, on choisit également un segment  $\gamma_c$  inclus dans cette traverse, ayant ses deux extrémités sur  $\alpha$ , et maximal pour l'inclusion : en particulier le nombre de points d'intersection de  $\gamma_c$  avec  $\alpha$  est égal au poids de  $\alpha$  pour l'arête  $c$ . Soit  $\Gamma$  la réunion (finie) de tous ces segments.

Puisque  $\alpha$  parcourt chaque arête du chemin de fer au moins une fois, les composantes connexes de  $S \setminus (\alpha \cup \Gamma)$  sont de trois types :

1. celles qui contiennent une pointe, ce sont des disques bordés par un bigone formé d'un morceau de  $\alpha$  et d'un morceau d'un  $\gamma_c$ ;
2. celles qui contiennent le centre d'un des trois triangles  $abc, a'b'c', a''b''c''$ , et qui sont des hexagones bordés par trois morceaux de  $\alpha$  et trois segments inclus dans  $\Gamma$ ;
3. celles qui sont incluses dans le voisinage de traverses  $V(\tau_0)$ , ce sont des quadrilatères bordés par deux morceaux de  $\alpha$  et deux segments inclus dans  $\Gamma$ .

(Dessin : bouts de  $\alpha$  et les trois types de composantes)

Puisque  $d(a, b) = 1$ , on peut maintenant choisir un représentant  $\beta$  de  $b$  disjoint de  $\alpha$ . Nous cherchons un autre représentant  $\beta'$  de  $b$  qui est inclus dans  $V(\tau_0)$  et transverse au feuilletage. Pour ceci nous allons pousser  $\beta$  par des isotopies dans  $S \setminus (\{x_0, x_1, x_2\} \cup \alpha)$ .

Une première isotopie permet de déformer  $\beta$  en une courbe  $\beta'$  qui est en position minimale avec chaque arc de  $\Gamma$  : pour ceci, on commence par mettre  $\beta$  en position transverse avec  $\Gamma$ ; ensuite on pousse un à un les bigones entre  $\beta$  et  $\Gamma$ , et on obtient une courbe qui ne forme plus aucun bigone avec  $\Gamma$ , et que nous continuons par abus à noter  $\beta$ .

Considérons une composante connexe  $O$  de  $S \setminus (\alpha \cup \Gamma)$  comme décrite plus haut. Nous allons modifier  $\beta$  en une courbe  $\beta'$  ayant les propriétés voulues, et ceci indépendamment dans chaque composante connexe  $O$ .

Chaque composante connexe  $\mu$  de  $\beta \cap O$  est un arc ouvert qui a ses deux extrémités sur  $\Gamma$ . Puisque  $\beta$  est en position minimale avec  $\Gamma$ , les  $\mu$  sont en nombre fini, et elles sont bien sûr deux à deux disjointes, notons-les  $\mu_1, \dots, \mu_k$ . Il nous reste à construire une isotopie supportée dans  $O$  qui envoie chaque  $\mu_i$  sur un arc inclus dans  $V(\tau_0)$  et transverse au feuilletage.

Indiquons en détail la procédure pour une composante  $O$  du troisième type (un quadrilatère). Dans ce cas, l'adhérence de  $O$  est homéomorphe au carré  $[0, 1]^2$  feuilleté verticalement par les traverses, où les deux côtés gauche et droit sont dans  $\Gamma$  et les deux autres côtés dans  $\alpha$ . Dans ces coordonnées, chaque  $\mu_i$  a une extrémité sur le côté gauche et l'autre sur le côté droit ; notons  $\mu'_i$  le segment qui les relie : il est transverse au feuilletage. Alors les  $\mu'_i$  sont deux à deux disjointes (car les  $\mu_i$  le sont). D'après le théorème de Schoenflies, il existe un homéomorphisme supporté dans  $O$  qui envoie chaque  $\mu_i$  sur  $\mu'_i$ , et puisque l'espace des homéomorphismes supportés dans le carré est contractile, on obtient une isotopie qui déforme chaque  $\mu_i$  sur  $\mu'_i$ .

On procède de façon tout à fait analogue dans les deux autres cas. Ceci termine la preuve.

## 7.2 Homéos pseudo-Anosov

Rappel : sur le tore, difféomorphismes (linéaires) d'Anosov, feuilletages stables et instables. Analogie en genre supérieur ? Exemple : construction par revêtement.

**Définition 7.9.** Feuilletage admissible : description des singularités, chaque pointe doit être une singularité à une seule branche. Paire de feuilletages transverses.

**Définition 7.10.** Mesure transverse.

**Définition 7.11.** Homéomorphisme pseudo-Anosov.

**Théorème 7.12** (Thurston, classification non tautologique). *Toutes classe d'isotopie pseudo-Anosov contient un homéo pseudo-Anosov. De plus, il est unique à conjugaison près.*

**Théorème 7.13** (Handel). *Soit  $f \in \text{Homeo}(S)$  un homéomorphisme, et  $f_0$  le représentant de Nielsen-Thurston de la classe d'isotopie de  $f$ . On suppose que  $f_0$  est de type pseudo-Anosov. Alors il existe un ensemble fermé  $E \subset S$  et une application continue surjective  $h : E \rightarrow S$  homotope à l'inclusion telle que  $f_0 \circ h = h \circ f$ .*

## 8 Quasi-morphismes ?

Dans un groupe parfait, longueur des commutateurs, longueur stable.

Question : quel homéo vérifie  $scl > 0$  ?

Quasimorphisme, quasimorphismes homogènes non triviaux (non morphismes). Homogénéisation.

Remarque clé : un qmh s'annule sur tout commutateur.

**Lemme 8.1.**  $scl(g) \neq 0$  ssi il existe un qmh non trivial tel que  $\Phi(g) \neq 0$ .

*Démonstration.* Le sens réciproque est facile : \*\*\*\*

Le sens direct est une conséquence de la célèbre formule de dualité de Bavard.  $\square$

Tout qmh s'annule sur un  $f$  conjugué à son inverse. Pour un tel  $f$ ,  $scl = 0$ . Idem s'il existe une puissance positive de  $f$  conjugué à une puissance négative.

**Proposition 8.2.**  $scl = 0$  sur  $\text{Homeo}(\mathbf{S}^2)$ .

**Lemme 8.3.** Si  $f \in \text{Homeo}(\mathbf{S}^2)$  est supporté dans un disque, alors  $f$  est un commutateur.

*Démonstration.* Notons  $D$  le support, on prend  $h$  tel que  $h(D) \cap D = \emptyset$  et la suite des itérés de  $D$  par  $h$  converge vers un point. En transportant  $f$  par conjugaison par les puissances successives de  $h$ , on obtient des "copies" de  $f$  sur chaque itéré de  $D$  par  $h$ , qui commutent deux à deux. Notons  $F$  le produit (infini) de ces copies, qui est bien défini grâce à la propriété de commutation et de convergence des itérés du disque.

Alors  $FhF^{-1}h^{-1} = f$ .  $\square$

*Preuve de la proposition.* Fragmentation bornée + lemme.  $\square$

La preuve montre plus généralement : sur toute surface, si la norme de fragmentation de  $f$  est bornée alors  $scl(f) = 0$ .

### 8.1 Groupes libres

QM de Brooks. Définition. Preuve.

## 8.2 Groupes agissant sur un espace hyperbolique

QM de Fujiwara pour un groupe agissant sur un espace hyperbolique.

Soit  $G$  agissant sur un espace hyperbolique  $X$ . L'action s'étend au bord à l'infini, et donc aussi sur l'espace des quasi-axes qui est un sous-espace de  $(\partial X)^2$ . Pour chaque  $f$ , on note  $\partial_{\pm}f$  le couple de point fixe répulsif / attractif de  $f$ .

**Définition 8.4.** Relation d'équivalence (Fujiwara, cf Handel-Moshen) :  $f \sim g$  ssi  $\overline{G \cdot \partial_{\pm}f} = \overline{G \cdot \partial_{\pm}g}$ . Ceci équivaut à ...

**Proposition 8.5.** *Supposons  $f \not\sim f^{-1}$ . Alors il existe un qmh  $\Phi$  tel que  $\Phi(f) = 1$ . En particulier,  $scl(f) > 0$ .*

## Exposés

1. Expliquer précisément l'exemple d'homéomorphisme du tore dû à Katok (cf section 2).
2. Expliquer la construction de Kwapisz d'un homéomorphisme du tore dont l'ensemble de rotation est égal au triangle de sommets  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(0,1)$ . Source : cours de François Béguin construisant des exemples pour tout polygone rationnel, à l'aide de difféomorphismes "Axiome A" et de partitions de Markov. [Lien](#)
3. Expliquer pourquoi un homéomorphisme du tore obtenu comme le temps un d'un champ de vecteur a un ensemble de rotation d'intérieur vide. Source : article de Franks et Misiurewicz. La source est difficile, mais on peut au moins faire (1) le cas où il existe une orbite périodique qui est une courbe essentielle, (2) le cas d'une suspension d'un homéomorphisme du cercle. Ceci couvre déjà tous les cas où le champ de vecteurs n'a pas de zéro (en admettant le théorème qui dit qu'on a soit une composante de Reeb (et donc une orbite périodique), soit on est une suspension, source = livre de Hector-Hirsch).
4. Montrer que l'hyperbolicité au sens des triangles fins implique l'hyperbolicité au sens du produit de Gromov (réciproque de l'implication vue en cours). Source : par exemple livre de Bridson-Haefliger, appendice H). Ici un jeu intéressant serait de comparer diverses sources et de chercher une preuve à la fois claire et courte !
5. Expliquer pourquoi le groupe fondamental d'une surface compacte de genre au moins 2 est un groupe hyperbolique. Source : la clé est le [lemme de Milnor-Swarz](#) ; cf par exemple le livre Farb-Margalit.
6. Expliquer pourquoi le graphe fin des courbes sur le tore est hyperbolique. Source : article de Minsky, A geometric approach to the complex of curves on a surface.
7. Expliquer pourquoi le groupe des homéomorphismes d'une surface, isotopes à l'identité, est simple. Source : [livre de Abed Bounemoura](#), [mini-cours de Kathryn Mann](#).
8. Expliquer la  $SL(2)$ -largeur de l'ensemble de rotation, et ses liens avec la longueur de translation de l'action sur le graphe fin des courbes (Source : texte non encore publié de Le Roux-Passeggi-Sambarino-Wolff, disponible sur demande). Plus précisément, dans le cours nous avons montré que la longueur de translation de l'action sur le graphe fin est majorée par la largeur de l'ensemble de rotation. Il s'agit d'obtenir une inégalité dans l'autre sens : essentiellement, la largeur de

l'ensemble de rotation est minorée par (une constante multipliée par) la longueur de translation, du moment qu'on se restreint aux ensemble de rotation de largeur inférieure à une constante.

9. (sujet un peu restreint, peut-être) Démontrer l'égalité dans la preuve de la "connexité fine" sur le graphe des courbes dans le tore ; expliquer la généralisation aux surfaces de genre supérieur. Source : [Article de Le Roux-Wolff](#)

Consignes : Préparer un exposé de 20 minutes, à destination du public du cours (et pas juste des profs), avec au moins une (petite) preuve. Ne surtout pas essayer de tout démontrer pendant l'exposé. Ecrire un texte d'au plus 3 pages avec les définitions et le ou les énoncés précis utilisés ou démontrés, à distribuer au début de l'exposé. Pensez à expliquer clairement le cadre dans lequel vous vous placez, avec des exemples si ça peut aider. Faites une répétition pour vérifier que votre exposé tient en 20 minutes.

Séance(s) d'exposés la semaine après les vacances de Pâques (22 au 26 avril).

## Références

- [BH92] Mladen Bestvina and Michael Handel. Train tracks and automorphisms of free groups. *Annals of Mathematics*, 135(1) :1–51, 1992.
- [BH99] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [BHM<sup>+</sup>22] Jonathan Bowden, Sebastian Hensel, Kathryn Mann, Emmanuel Militon, and Richard Webb. Rotation sets and actions on curves. *Adv. Math.*, 408 :Paper No. 108579, 33, 2022.
- [BHW22] Jonathan Bowden, Sebastian Wolfgang Hensel, and Richard Webb. Quasi-morphisms on surface diffeomorphism groups. *J. Amer. Math. Soc.*, 35(1) :211–231, 2022.
- [Bow14] Brian H. Bowditch. Uniform hyperbolicity of the curve graphs. *Pacific J. Math.*, 269(2) :269–280, 2014.
- [DSU17] Tushar Das, David Simmons, and Mariusz Urbański. *Geometry and dynamics in Gromov hyperbolic metric spaces, With an emphasis on non-proper settings*, volume 218 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017.
- [FM90] John Franks and Michał Misiurewicz. Rotation sets of toral flows. *Proc. Am. Math. Soc.*, 109(1) :243–249, 1990.

- [FM12] Benson Farb and Dan Margalit. *A primer on mapping class groups*, volume 49 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.
- [Fra89] John Franks. Realizing rotation vectors for torus homeomorphisms. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 311(1) :107–115, 1989.
- [GdlH90] Étienne Ghys and Pierre de la Harpe. Espaces métriques hyperboliques. In *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov (Bern, 1988)*, volume 83 of *Progr. Math.*, pages 27–45. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [GM23] Pierre-Antoine Guihéneuf and Emmanuel Militon. Hyperbolic isometries of the fine curve graph of higher genus surfaces, 2023.
- [Gro87] M. Gromov. Hyperbolic groups. *Essays in group theory*, Publ., Math. Sci. Res. Inst. 8, 75-263 (1987)., 1987.
- [Has22] Yo Hasegawa. Gromov boundaries of non-proper hyperbolic geodesic spaces. *Tokyo J. Math.*, 45(2) :319–331, 2022.
- [HPW15] Sebastian Hensel, Piotr Przytycki, and Richard C. H. Webb. 1-slim triangles and uniform hyperbolicity for arc graphs and curve graphs. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 17(4) :755–762, 2015.
- [Kwa92] Jarosław Kwapisz. Every convex polygon with rational vertices is a rotation set. *Ergodic Theory Dyn. Syst.*, 12(2) :333–339, 1992.
- [Kwa95] Jaroslaw Kwapisz. A toral diffeomorphism with a nonpolygonal rotation set. *Nonlinearity*, 8(4) :461–476, 1995.
- [LC05] Patrice Le Calvez. An equivariant foliated version of Brouwer’s translation theorem. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, 102 :1–98, 2005.
- [LCT18] P. Le Calvez and F. A. Tal. Forcing theory for transverse trajectories of surface homeomorphisms. *Invent. Math.*, 212(2) :619–729, 2018.
- [LM91] J. Llibre and R. S. MacKay. Rotation vectors and entropy for homeomorphisms of the torus isotopic to the identity. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 11(1) :115–128, 1991.
- [LRW22] Frédéric Le Roux and Maxime Wolff. Automorphisms of some variants of fine graphs, 2022.
- [MM99] Howard A. Masur and Yair N. Minsky. Geometry of the complex of curves. I. Hyperbolicity. *Invent. Math.*, 138(1) :103–149, 1999.
- [MZ89] Michał Misiurewicz and Krystyna Ziemian. Rotation sets for maps of tori. *J. London Math. Soc. (2)*, 40(3) :490–506, 1989.
- [PS17] Piotr Przytycki and Alessandro Sisto. A note on acylindrical hyperbolicity of mapping class groups. In *Hyperbolic geometry and geometric group theory*, pages 255–264. Tokyo, Mathematical Society of Japan, 2017.
- [Ras20] Alexander J. Rasmussen. Uniform hyperbolicity of the graphs of nonseparating curves via bicorn curves. *Proc. Am. Math. Soc.*, 148(6) :2345–2357, 2020.

- [Sau01] Alain Sauzet. *Applications des décompositions libres à la dynamique des homéomorphismes de surface*, Thèse. 2001.