Séance du 30/05/2015 de ParisMaths
Ensembles convexes

Dans toute la séance, E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie d. On fera abusivement l'identification de E avec l'espace affine correspondant : on verra les éléments de E comme des vecteurs ou bien comme des points (en gardant à l'esprit que la différence entre deux points est un vecteur). Dans tous les cas, on pourra choisir brutalement $E = \mathbf{R}^d$ si on est un peu perdu avec ces considérations techniques.

L'espace E sera muni de sa structure euclidienne classique : on utilisera sans scrupule la norme euclidienne $\|\cdot\|$ et le produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Définition 1. On dit qu'un ensemble $C \subset E$ est *convexe* si pour tout couple de points $A, B \in C$, le segment $[A, B]$ est en entier inclus dans C. Ceci est équivalent à la définition formelle suivante :

$$\forall (A, B) \in C^2,\ \forall t \in [0,1],\ (1-t)A + tB \in C.$$

Exercice 1
Montrer que les ensembles suivants sont convexes :

1. une intersection d'ensembles convexes ;
2. la boule unité fermée pour la norme infinie $B_\infty(0,1) = \left\{(x_1, \cdots, x_d) \in \mathbf{R}^d \mid \max_i |x_i| \leq 1\right\}$;
3. la boule unité ouverte pour la norme infinie $\left\{(x_1, \cdots, x_d) \in \mathbf{R}^d \mid \max_i |x_i| < 1\right\}$;
4. la boule unité fermée pour la norme euclidienne $B(0,1) = \left\{x \in E \mid \|x\| \leq 1\right\}$;
5. la boule unité fermée pour n'importe quelle norme ;
6. tout cône défini de la manière suivante : si C est un convexe de E, alors le cône $\mathcal{C}$ associé est défini par $\mathcal{C} = \{\lambda x \mid x \in C, \lambda \in \mathbf{R}_+\}$.

Exercice 2
Un convexe C est stable par barycentre : si $(P_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une collection de points de C et $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ une collection de poids (i.e. $0 \leq a_i \leq 1$ et $\sum_{i=1}^n a_i = 1$), alors $\sum_{i=1}^n a_i P_i$ appartient à C.

1 Enveloppe convexe

Exercice 3
Pour un ensemble $A \subset E$, on appelle *enveloppe convexe* de A, et on note $\mathrm{conv}(A)$, l'intersection de tous les convexes contenant A. Montrer que $\mathrm{conv}(A)$ est convexe, puis qu'il coïncide avec l'ensemble des barycentres de points de A.

Exercice 4 (Théorème de Carathéodory)
Attention, cet exercice demande des connaissances de théorie de la dimension. L'enveloppe convexe d'un ensemble A de E (de dimension d) est égale à l'ensemble des barycentres d'au plus $d+1$ points de A.

Le théorème de Carathéodory sert en particulier à démontrer qu'en dimension finie, l'enveloppe convexe d'un ensemble compact est elle-même conpacte.

2 Projection sur un convexe compact

Définition 2. Un ensemble $K \subset E$ sera dit *compact* s'il est fermé et borné[1]. Et un ensemble $F \subset E$ est dit *fermé* si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de points de F convergeant vers une limite y, on a aussi $y \in F$.

On pourra utiliser sans le redémontrer le fait suivant : toute fonction continue $f : K \to \mathbf{R}$, avec K un ensemble compact, est bornée et atteint ses bornes.
Dans l'exercice suivant, on aura besoin de la notion de forme linéaire.

Définition 3. Une *forme linéaire* est une application linéaire de E dans $\mathbf{R}$.

En particulier, pour toute forme linéaire non nulle ℓ, l'ensemble

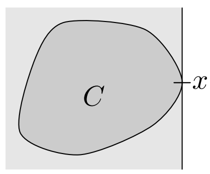
$$\ker \ell = \{x \in E \mid \ell(x) = 0\}$$

est un hyperplan de E, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim E - 1$.

Exercice 5 (Projection sur un convexe compact, et séparation d'un point et d'un convexe)
Soit C un convexe compact non vide de E, et $x \in E$.

1. Montrer qu'il existe un unique point de E, noté $p_C(x)$, tel que
$$\|x - p_C(x)\| = \min_{y\in C} \|x - y\|.$$
2. Montrer que pour tout $y \in C$, on a alors
$$\langle x - p_C(x), y - p_C(x)\rangle \leq 0.$$
3. Montrer aussi que p_C est 1-lipschitzienne : $\|p_C(x) - p_C(y)\| \leq \|x - y\|$.
4. En déduire que si $x \notin C$, il existe une forme linéaire ℓ de E, et $\alpha \in \mathbf{R}$, tels que $\ell(x) > \alpha$ et $\ell(y) < \alpha$ pour tout $y \in C$ (on commencera par montrer que $\|x - p_C(x)\| > 0$).

Avec un soupçon de compacité, on peut montrer l'existence d'*hyperplan d'appui* en tout point de la *frontière* du convexe[2], c'est-à-dire une forme linéaire ℓ telle que $\ell(y) \leq \ell(x)$ pour tout $y \in C$.



1. Attention, ce n'est pas la définition officielle !
2. Un point x est à la frontière de C si pour tout $r > 0$, la boule $B(x, r)$ contient un point de $C^{\complement}$.

3 Points extrémaux

Définition 4. Soit C un convexe de E. On dit que $x \in C$ est un *point extrémal* de C si $C \setminus \{x\}$ est encore convexe.

Exercice 6
Un point $x \in C$ est extrémal si et seulement si pour tout couple de points $y, z \in C$, la condition “il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que $x = \lambda y + (1-\lambda)z$” implique $x = y = z$.

Exercice 7 (Krein-Milman)
On se propose de démontrer le théorème de Krein-Milman : tout ensemble convexe compact de E est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

1. Soient $x \neq y$ deux points de E. Trouver une forme linéaire ℓ de E (si besoin, consulter la définition 3) telle que $\ell(x) < \alpha < \ell(y)$. *On dit alors que l'hyperplan* $\ker(\ell - \alpha)$ *sépare les points* x *et* y.
2. On dit qu'un ensemble non vide $F \subset C$ est une *face* de C si pour tous $x, y \in C$ et $\lambda \in]0,1[$, $\lambda x + (1-\lambda)y \in F$ implique que $x, y \in F$. Montrer que pour toute forme linéaire ℓ, l'ensemble
$$F_\ell = \left\{x \in C \mid \ell(x) = \max_{y \in C} \ell(y)\right\}$$
est une face de C. En particulier, ses points extrémaux sont aussi des points extrémaux de C.
3. En déduire, par récurrence sur $\dim E$, que l'ensemble des points extrémaux de C est non vide.
4. Conclure en utilisant l'exercice 5.

Définition 5. Une matrice $M \in M_n(\mathbf{R})$ est dite *bistochastique* si elle est à coefficients positifs et si pour tout $1 \leq i \leq n$, on a
$$\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n} m_{j,i} = 1.$$
Une matrice $M \in M_n(\mathbf{R})$ est dite *de permutation* s'il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $m_{i,j} = 1$ si $\sigma(j) = i$, et 0 sinon.

Exercice 8 (Birkhoff-Von Neumann)
Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Birkhoff-Von Neumann : l'ensemble $\mathcal{B}$ des matrices bistochastiques est l'enveloppe convexe dans $M_n(\mathbf{R})$ de l'ensemble des matrices de permutation.

1. Montrer qu'il suffit de prouver que les matrices de permutation sont exactement les points extrémaux de $\mathcal{B}$.
2. Montrer que les matrices de permutation sont des points extrémaux de $\mathcal{B}$.
3. Montrer que si $M \in \mathcal{B}$ n'est pas une matrice de permutation, alors ce n'est pas un point extrémal de $\mathcal{B}$. Conclure.
4. En déduire le théorème des mariages de Koenig : tout graphe biparti [3] régulier [4] admet

3. C'est-à-dire qu'il existe une partition $E \sqcup F$ de l'ensemble des sommets telle que toute arête relie un élément de E à un élément de F.
4. C'est-à-dire que le nombre de sommets partant de chaque arête est constant.

un couplage parfait [5].

Moment culturel

Le théorème de Birkhoff-Von Neumann doit une partie de son nom au mathématicien Garrett Birkhoff, à ne pas confondre avec son père George Birkhoff, lui aussi mathématicien.

4 Dualité

Définition 6. Soit $C \subset E$ un convexe. Le *polaire* de C est l'ensemble noté C^0 et défini par

$$C^0 = \{y \in E \mid \forall x \in C,\ \langle x, y\rangle \leq 1\}.$$

Exercice 9
Quelques propriétés simples du polaire.

1. Le polaire C^0 d'un convexe C est lui aussi convexe.
2. Si C contient 0 dans son intérieur, c'est-à-dire qu'il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset C$, alors C^0 est borné.
3. Réciproquement, si C est borné, alors C^0 contient 0 dans son intérieur.
4. $C \subset (C^0)^0$.

Exercice 10
Le polaire de quelques ensembles simples

1. Quel est le polaire de la boule unité (pour la norme euclidienne) ?
2. Quel est le polaire d'un ellipsoïde centré en 0 ?
3. Quel est le polaire de la boule unité pour la norme 1, définie par $B_1(0, 1) = \big\{(x_1, \cdots, x_d) \in \mathbf{R}^d \mid \sum_i |x_i| \leq 1\big\}$?
4. Quel est le polaire de la boule unité pour la norme infinie, définie par $B_\infty(0, 1) = \big\{(x_1, \cdots, x_d) \in \mathbf{R}^d \mid \max_i |x_i| \leq 1\big\}$?

5 Les polytopes convexes

Définition 7. Un *polytope* C_A est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points A. Un *polyèdre* est une intersection de demi-espaces de E (i.e. d'ensembles de la forme $\ell(x) \leq \alpha$, où ℓ est une forme linéaire et α un réel.

Exercice 11 (Lemme de Farkas)
Soient $P_1, \cdots, P_m : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ des applications affines [6]. Alors exactement l'une des conditions suivantes est vérifiée :

(i) le système d'inégalités $P_1(x), \cdots, P_m(x) \geq 0$ possède au moins une solution $x \in \mathbf{R}^d$;

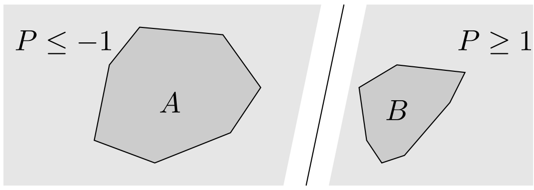
(ii) il existe des réels positifs $q_1, \cdots, q_m \geq 0$ tels que $q_1 P_1 + \cdots + q_m P_m = -1$.

Indication : on pourra raisonner par récurrence sur la dimension d.

5. C'est-à-dire qu'il existe un ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes tel que tout sommet du graphe est relié à au moins une de ces arêtes.
6. C'est-à-dire que P_i est de la forme $\ell_i + \alpha_i$, où ℓ_i est une forme linéaire et α_i est un réel.

Exercice 12 (Théorème de Hahn-Banach)
Le but de cet exercice est de démontrer une version simplifiée du théorème de Hahn-Banach : pour C_A et C_B deux polytopes disjoints de E, il existe une application affine $P : E \to \mathbf{R}$ telle que $P(x) \leq -1$ pour tout $x \in C_A$ et $P(x) \geq 1$ pour tout $x \in C_B$.

1. Montrer qu'il suffit de vérifier les conclusions du théorème pour les points de A et de B (et non plus de C_A et de C_B).
2. En déduire le théorème de Hahn-Banach, en appliquant le lemme de Farkas (exercice 11).
3. Application : montrer que si C_A est un polytope, alors $(C_A^0)^0 = C_A$ (voir la définition 6).



Le théorème de Hahn-Banach reste vrai (par exemple) dans le cas où A et B sont deux convexes compacts.

Exercice 13
Le but de cet exercice est de montrer que tout polytope est un polyèdre borné, et réciproquement. On commence par montrer que tout polyèdre borné est un polytope. On définit une *face* d'un polyèdre C comme étant un ensemble de la forme $C \cap \{x \mid \ell(x) \leq \alpha\}$, où ℓ et α sont utilisés pour définir C (comme à la définition 7). Cela permet de définir les k-faces de C par récurrence : les $d-1$ faces de C sont ses faces, et ses $k-1$ faces sont les faces de ses k-faces.

1. Montrer que les k-faces d'un polyèdre sont en nombre fini.
2. Montrer que les 1-faces d'un polyèdre forment l'ensemble de ses points extrémaux.
3. En déduire que tout polyèdre borné est un polytope.
4. En utilisant la dualité, montrer que tout polytope est un polyèdre borné.

Exercice 14 (Théorème de Helly)
Montrer le théorème de Helly pour les polyèdres : soient $C_1, \cdots, C_n$ des polyèdres tels que pour tout choix de $d+1$ d'entre-eux, ces $d+1$ polyèdres se rencontrent. Alors il existe un point qui appartient à tous le C_i. *Question bonus* : en déduire le même énoncé, mais pour des convexes quelconques[7].

6 Volumes

Nous n'avons abordé ici qu'une toute petite partie du thème « convexes en dimension finie » (et on ne parle même pas de la dimension infinie, elle aussi très intéressante !).

7. Spoiler : on pourra commencer par le cas $n = d+2$, choisir un point $a_j \in \bigcap_{i \neq j} C_i$ et $\Delta_k = \mathrm{conv}\{a_j \mid j \neq k\}$.

Nous donnons ici un aperçu de ce qu'on aurait aussi pu étudier, en se concentrant autour des questions traitant du volume des convexes.

On commence par une conjecture, énoncée en 1965.

Conjecture 8 (Busemann-Petty). *Soient C et D deux convexes centre-symétriques (i.e. symétriques par rapport à l'origine). On suppose que pour tout hyperplan H passant par l'origine, on a* $\mathrm{Vol}(C \cap H) \geq \mathrm{Vol}(D \cap H)$. *Alors* $\mathrm{Vol}(C) \geq \mathrm{Vol}(D)$.

On voit facilement que cette conjecture est vraie pour le plan, et on peut démontrer qu'elle le reste pour les dimensions 3 et 4. Par contre, un contre-exemple a été trouvé par Ball en 1986, tout simple : il concerne l'hypercube.

Théorème 9 (Ball). *Pour tout hyperplan H de E, on a* $\mathrm{Vol}(B_\infty(0,1) \cap H) \leq \sqrt{2}$, *avec égalité si et seulement si $H = u^\perp$, où u et un vecteur ayant $d-2$ coordonnées nulles et les deux restantes égales.*

À partir de la dimension 10, ce théorème fournit un contre-exemple à la conjecture, en prenant pour C une boule euclidienne et D l'hypercube $B_\infty(0,1)$: si on note $\beta(d)$ le volume de la boule unité de dimension d, alors

$$\beta(2k) = \frac{\pi^k}{k!} \quad \text{et} \quad \beta(2k+1) = \frac{2^{2k+1}\pi^k k!}{(2k+1)!}.$$

On peut aussi montrer (mais avec d'autres méthodes) que la conjecture 8 est fausse à partir de la dimension 5.

Citons aussi le résultat suivant :

Théorème 10 (John-Loewner). *Soit A un borné de E d'intérieur non vide. On considère l'ensemble des ellipsoïdes de E centrées en l'origine et contenant A. Alors il en existe un de volume minimal, et celui-ci est unique ; on l'appelle* ellipsoïde de John-Loewner *de A.*

Ce théorème possède de nombreuses applications ; on peut par exemple en déduire que pour tout convexe centre-symétrique C, il existe un ellipsoïde E tel que $E \subset C \subset \sqrt{D}E$. Il sert aussi à montrer que tout sous-groupe compact du groupe linéaire est conjugué à un groupe d'isométries linéaires.

Enfin, on n'a pas du tout parlé de l'addition de Minkowski : la *somme de Minkowski* de deux ensembles convexes C et D est définie simplement par $C + D = \{c + d \mid c \in C, d \in D\}$. On a deux résultats principaux concernant le volume de la somme. Tout d'abord l'inégalité de Brunn-Minkowski :

$$\mathrm{Vol}(C+D)^{1/d} \geq \mathrm{Vol}(C)^{1/d} + \mathrm{Vol}(D)^{1/d};$$

et ensuite la formule de Steiner-Minkowski : pour tout convexe C, il existe des nombres $(V_i(C))_{0 \leq i \leq d}$ tels que

$$\mathrm{Vol}(C + B(0,\varepsilon)) = \sum_{i=0}^{d} V_i(C)\varepsilon^i.$$