Équations fonctionnelles I

1 Un grand classique : les morphismes additifs de $\mathbf{R}$

Dans cette première partie, on s'intéresse aux morphismes additifs de $\mathbf{R}$, c'est-à-dire aux fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on ait

$$f(x + y) = f(x) + f(y). \tag{1}$$

Bien sûr, toutes les fonctions linéaires (les fonctions $f : x \mapsto ax$ pour un certain $a \in \mathbf{R}$) sont des morphismes additifs. On a même une forme de linéarité faible pour tous les morphismes additifs de $\mathbf{R}$:

Exercice 1
Soit f un morphisme additif de $\mathbf{R}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $\lambda \in \mathbf{Q}$, on a $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Néanmoins, les fonctions linéaires ne ne sont pas les seuls morphismes additifs de $\mathbf{R}$, on en construit d'autres en l'utilisant l'*axiome du choix* :

Axiome 1 (Axiome du choix)**.** Soit E un ensemble dont les éléments sont des ensembles non vides. Alors il existe une *fonction de choix* définie sur E, qui à chaque ensemble $X \in E$ associe un élément $x \in X$. De manière équivalente, l'ensemble $\prod_{X \in E} X$ est non vide (exercice : démontrer l'équivalence).

Cela amène quelques commentaires. Bien sûr, l'axiome du choix est vrai lorsque l'ensemble $E = \{X_1, \cdots, X_n\}$ est une collection *finie* d'ensembles : il suffit de choisir, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, un élément $x_i \in X_i$. L'étape suivante est de regarder ce qui se passe lorsque E est une collection *dénombrable* d'ensembles, c'est-à-dire que $E = \{X_i\}_{i \in \mathbf{N}}$; il existe une forme faible de l'axiome du choix, appelé *axiome du choix dénombrable*, qui affirme l'existence d'une fonction de choix dans ce cas. L'axiome du choix est largement utilisé (et parfois de façon cachée) en mathématiques, particulièrement en analyse. Il faut prendre garde au fait que son utilisation rend les preuves non constructives : personne, ni aucune machine, n'est capable de faire une infinité de choix simultanément (d'autant plus si cette infinité est non dénombrable !). Notez aussi que l'axiome du choix implique des résultats contre-intuitifs, tels que le paradoxe de Banach-Tarski, qui affirme qu'on peut découper une boule de l'espace en un nombre fini de morceaux et de réassembler ces morceaux (en effectuant uniquement des isométries) pour en faire deux boules de même taille que la boule initiale.

Revenons à notre problème : l'axiome du choix implique l'existence de base à tout espace vectoriel. Cela ne fait rien si vous ne savez pas ce que cela veut dire, ce qui nous intéresse c'est que cela implique qu'il existe une collection $\{e_i\}_{i\in X}$ de réels telle que tout $x \in \mathbf{R}$ s'écrive *de manière unique* $x = \sum_{i\in X} \lambda_{x,i} e_i$ où $\lambda_{x,i} \in \mathbf{Q}$ pour tout $i \in X$. On vérifie alors que pour tout choix de réels $\{a_i\}_{i\in X}$, la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x = \sum_{i\in X} \lambda_{x,i} e_i &\longmapsto \sum_{i\in X} a_i \lambda_{x,i} e_i \end{aligned}$$

est bien un morphisme additif de $\mathbf{R}$.

Nous voilà bien avancés : on vient de construire toute une famille de morphismes additifs de $\mathbf{R}$ qui sont presque tous différents des fonctions linéaires (il suffit que les a_i soient non tous égaux) et dont la définition est assez désagréable... L'exercice suivant assure qu'en fait, dès qu'on ajoute une hypothèse sur notre fonction pour qu'elle soit assez gentille, alors automatiquement celle-ci est linéaire (ouf !). Ce type d'hypothèse sera très classique dans les exercices sur les équations fonctionnelles, l'absence de régularité amenant souvent à des exemples exotiques dont la construction repose sur l'axiome du choix.

Exercice 2 (Quelques conditions qui impliquent la linéarité)
Montrer que toute fonction f vérifiant (1) est linéaire si on suppose de plus :

1. que f est continue, ou que f est monotone, ou plus généralement que f est bornée sur un intervalle de longueur non nulle ;
2. que f est aussi un morphisme multiplicatif de $\mathbf{R}$ (autrement dit pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, on a $f(xy) = f(y)f(y)$). Dans ce cas que vaut le a de (1) ? En particulier, le seul automorphisme de corps de $\mathbf{R}$ est l'identité ;
3. que pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, on a $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$.

On "rappelle" la définition de la continuité, utilisée dans l'exercice précédent :

Définition 2. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ est *continue* en $x \in I$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $|x-y| < \eta$, alors $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. La fonction f est dite *continue sur* I si elle est continue en chaque point de I.

En fait, cette définition assez formelle implique le fait plus visuel qu'on ne peut pas tracer le graphe d'une fonction continue sans lever le crayon (théorème des valeurs intermédiaires).

Théorème 3 (Valeurs intermédiaires)**.** *Soit $f : I \to \mathbf{R}$, où I est une intervalle, une fonction continue. Alors $f(I)$ est un intervalle. Autrement dit, pour tous $a, b \in I$ et tout y situé entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe c situé entre a et b tel que $f(c) = y$.*

En particulier, une fonction continue définie sur un intervalle et qui ne s'annule jamais est de signe constant.

De l'étude des morphismes additifs de $\mathbf{R}$ on déduit les propriétés des morphismes de $(\mathbf{R}, +)$ dans $(\mathbf{R}_+^*, \times)$ (c'est-à-dire les f telles que $f(x+y) = f(x)f(y)$) :

Exercice 3
Démontrer que tout morphisme continu de $(\mathbf{R}, +)$ dans $(\mathbf{R}_+^*, \times)$ est de la forme $x \mapsto e^{ax}$ pour un certain $a \in \mathbf{R}$.

On résout de même toutes les équations fonctionnelles dites *de Cauchy* :
- Toute fonction continue $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+^*$ telle que $f(xy) = f(x)f(y)$ est de la forme $x \mapsto x^a$.
- Toute fonction continue $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ telle que $f(xy) = f(x) + f(y)$ est de la forme $a\ln(x)$.

Un certain nombre d'autres équations fonctionnelles peut se ramener au cas des morphismes de $\mathbf{R}$.

Exercice 4
Trouver toutes les applications continues $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbf{R}$, on ait $f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x)f(y)$.

Un dernier exercice pour cette partie, dans le même esprit que la question 2 de l'exercice 2, mais pour les rationnels cette fois-ci, extrait des IMO 2013 :

Exercice 5
On note $\mathbf{Q}_+^*$ l'ensemble des nombres rationnels strictement positifs. Soit $f : \mathbf{Q}_+^* \to \mathbf{R}$ une fonction satisfaisant les trois conditions suivantes :

(i) pour tous $x, y \in \mathbf{Q}_+^*$, on a $f(x)f(y) \geq f(xy)$;

(ii) pour tous $x, y \in \mathbf{Q}_+^*$, on a $f(x + y) \geq f(x) + f(y)$;

(iii) il existe un nombre rationnel $a > 1$ tel que $f(a) = a$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbf{Q}_+^*$, on a $f(x) = x$.

2 Racines carrées pour la composition

Ce type d'équations fonctionnelles cherche à trouver des racines carrées de fonction pour la composition, c'est-à-dire, étant donnée une fonction φ donnée au départ, à trouver une fonction f vérifiant

$$f(f(x)) = \varphi(x)$$

pour tous les x dans un intervalle donné.

Pour résoudre le premier exercice, on a besoin de la notion de bijection.

Définition 4. Une application $f : X \to Y$ est une :

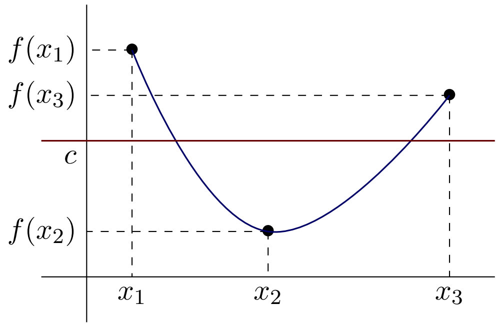

FIGURE 1 – Toute fonction continue non monotone est non injective

- *injection* si pour $x_1, x_2 \in X$, $f(x_1) = f(x_2)$ implique que $x_1 = x_2$ (à y fixé, l'équation $f(x) = y$ a au plus une solution en x) ;
- *surjection* si pour tout $y \in Y$, il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$ (à y fixé, l'équation $f(x) = y$ a au moins une solution en x) :
- *bijection* si f est une injection et une surjection (à y fixé, l'équation $f(x) = y$ a exactement une solution en x).

Et on a une caractérisation des injections continues dans le cas réel :

Théorème 5. *Une fonction continue d'un intervalle I dans $\mathbf{R}$ est strictement monotone si et seulement si elle est injective.*

Démonstration. Il est trivial qu'une fonction strictement monotone est injective. Pour montrer qu'une fonction injective et continue définie sur un intervalle est monotone, on utilise le théorème des valeurs intermédiaires. On montre en fait la contraposée : soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue qui n'est pas strictement monotone. Quitte à considérer $-f$, on se ramène au cas où il existe $x_1, x_2, x_3 \in I$, avec $x_1 < x_2 < x_3$, tels que $f(x_1) \geq f(x_2)$ et $f(x_3) \geq f(x_2)$ (voir la figure 1). Le cas où au moins l'une des deux inégalités est une égalité se traite facilement ; on peut donc supposer que ces inégalités sont strictes. Soit $c \in]f(x_2), \min(f(x_1), f(x_3))[$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x'_1 \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x'_1) = c$ ainsi que $x'_3 \in]x_2, x_3[$ tel que $f(x'_3) = c$. Par conséquent $f(x'_1) = f(x'_3)$ et donc f n'est pas injective. □

Exercice 6

Soient a et b deux réels tels que $a \notin \{0, 1\}$. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^1 (c'est-à-dire dérivables à dérivée continue) telles que $f(f(x)) = ax + b$ pour tout x.

L'exercice suivant est plus difficile, mais sa méthode de résolution est un classique.

Exercice 7
Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que $f(f(x)) = e^x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Dans le même ordre d'idées, on pourra démontrer que toutes les applications strictement croissantes de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ ayant 0 et 1 pour seuls points fixes sont conjuguées par une bijection continue de $[0, 1]$.

Indications

Exercice 2 Question 2 : on pourra montrer que f est croissante. Question 3 : on pourra utiliser la fonction $x \mapsto x + \frac{1}{x}$.

Exercice 4 Considérer $\ln f(\sqrt{x})$.

Exercice 5 Montrer que f est croissante puis que $f(x) \leq x$ sur un ensemble dense de $\mathbf{Q}$. Utiliser ensuite le fait que $f(1) \geq 1$.

Exercice 6 On pourra appliquer l'égalité donnée à $f(x)$ et dériver.

Exercice 7 Montrer que f est une bijection croissante de $\mathbf{R}$ sur $]a, +\infty[$ avec $a < 0$ et regarder la restriction de f à $]-\infty, a[$.

Solutions

Exercice 1 On commence par remplacer y par x, cela donne $f(2x) = 2f(x)$. En remplaçant maintenant y par $2x$, on obtient $f(3x) = f(2x) + f(x) = 3f(x)$. Ainsi de suite, on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $f(nx) = nf(x)$. Mais alors, pour tout $p/q \in \mathbf{Q}$, on a

$$pf(x) = f(px) = f\left(q \cdot \frac{p}{q}x\right) = qf\left(\frac{p}{q}x\right).$$

On obtient ce qui est demandé en divisant de chaque côté par q.

Exercice 2

1. Soit f un morphisme additif continu de $\mathbf{R}$. Posons $a = f(1)$. Le résultat de l'exercice 1 implique que pour tout $\lambda \in \mathbf{Q}$, on a $f(\lambda) = \lambda f(1) = a\lambda$. Or l'ensemble $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$, c'est-à-dire que pour tout point $x \in \mathbf{R}$ il existe une suite de rationnels $(\lambda_n)_n$ qui tend vers x, en particulier pour tout entier n on a $f(\lambda_n) = a\lambda_n$. Par conséquent, par continuité de f, on a $f(x) = ax$.
   Le cas où f est monotone se déduira du résultat suivant, une fonction monotone étant bornée sur tout ensemble borné.
   On suppose maintenant simplement que f est bornée sur un intervalle I de longueur non nulle, autrement dit il existe$M \in \mathbf{R}$ tel que $|f(y)| \leq M$ pour tout

$y \in I$. Quitte à prendre un sous-intervalle, on peut supposer que I est de la forme $[x-d, x+d]$, avec $d > 0$. On commence par se ramener en 0 : pour tout réel y tel que $|y| \leq d$, on a

$$|f(y)| \leq |f(x)+f(y)| + |f(x)| \leq |f(x+y)| + |f(x)| \leq M + |f(x)|,$$

par conséquent f est bornée par $M' = M + |f(x)|$ sur l'intervalle $[-d, d]$. L'étape suivante est de montrer que f est continue en 0. L'idée est d'utiliser l'équation $f(kx) = kf(x)$ valable pour tout entier k : si $|x| \leq d/k$, alors $|f(x)| = |f(kx)/k| \leq M'/k$. Cela donne la continuité en 0 ; si on veut le faire proprement on se donne $\varepsilon > 0$, alors pour $|x| \leq d\varepsilon/M'$ on a $|f(x)| \leq \varepsilon$. La continuité en un point quelconque $y \in \mathbf{R}$ découle immédiatement de la continuité en 0 et du caractère additif de f. Par conséquent, f est continue sur $\mathbf{R}$. On est donc ramenés au cas de la première question, qui assure alors que f est linéaire. Et bien sûr, toute fonction linéaire est un morphisme additif localement borné.

2. Si f est aussi un morphisme multiplicatif de $\mathbf{R}$, on montre que f est croissante. En effet, pour $x \geq 0$, on remplace x et y dans la seconde équation par $\sqrt{x}$, ce qui donne $f(\sqrt{x}\sqrt{x}) = f(\sqrt{x})f(\sqrt{x})$, i.e. $f(x) = f(\sqrt{x})^2$. En particulier $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$. Lorsqu'on injecte ce résultat dans l'équation (1), on obtient immédiatement le fait que f est croissante. Cela nous ramène à la question précédente : f est linéaire. De plus, on a $f(1) = f(1)f(1)$, si bien que $f(1) \in \{0, 1\}$. Donc $f \equiv 0$ ou $f = \mathrm{Id}$, et ces deux fonctions vérifient bien les hypothèses de l'énoncé.
3. On suppose maintenant que pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, on a $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$. L'indication suggère d'étudier la fonction φ définie sur $\mathbf{R}^*$ par $\varphi(x) = x + \frac{1}{x}$. En appliquant les hypothèses de l'exercice on obtient $f(\varphi(x)) = \varphi(f(x))$. Or en étudiant les variations de la fonction φ, on obtient $\varphi(\mathbf{R}^*) =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ (le lecteur attentif aura remarqué qu'on utilise ici le théorème des valeurs intermédiaires). En particulier pour tout $|y| \geq 2$, il existe $x \in \mathbf{R}^*$ tel que $\varphi(x) = y$. Donc pour tout $|y| \geq 2$, on a $|f(y)| = |f(\varphi(x))| = |\varphi(f(x))| \geq 2$. En passant à l'inverse on obtient l'inégalité $|f(y)| \leq 1/2$ pour tout $|y| \leq 1/2$. Ainsi f est bornée sur un intervalle de longueur 1, par la question 1 la fonction f est donc linéaire. De plus, on a $f(1) = 1/f(1)$ et donc $f(1) \in \{-1, 1\}$. On vérifie alors facilement que Id et $-\mathrm{Id}$ vérifient bien les deux équations fonctionnelles.

Exercice 3 En appliquant l'égalité fonctionnelle à $x/2$ et $x/2$ on obtient $f(x) = f(x/2 + x/2) = f(x/2)f(x/2) = f(x/2)^2$, par conséquent $f(x) \geq 0$ pour tout x. De plus, s'il existe $y \in \mathbf{R}$ tel que $f(y) = 0$, on obtient $f(x) = f(x+y-y) = f(x+y)f(y) = 0$, par conséquent f est identiquement nulle. On peut donc supposer que $f(x) > 0$ pour tout x. Cela nous permet de prendre le logarithme de f, et donne

$$\ln f(x+y) = \ln(f(x)f(y)) = \ln f(x) + \ln f(y).$$

Ainsi, $\ln f$ est un morphisme additif continu de $\mathbf{R}$, donc il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $\ln f(x) = ax$, autrement dit $f(x) = e^{ax}$. Et de telles fonctions sont visiblement des morphismes de $(\mathbf{R}, +)$ dans $(\mathbf{R}_+^*, \times)$.

Conclusion : soit f est identiquement nulle, soit f est de la forme $f(x) = e^{ax}$ pour un certain $a \in \mathbf{R}$.

Exercice 4 Tout d'abord on voit facilement que la fonction f est paire (prendre $y=0$), on se ramène donc à une étude de f sur $\mathbf{R}_+$, ce qui sera plus commode vue la présence de racines... Ensuite, en prenant $x=y=0$, on obtient $f(0)=f(0)^2$, si bien que soit $f(0)=0$, auquel cas f est identiquement nulle, soit $f(0)=1$, ce qu'on suppose désormais.

On regarde maintenant ce qui se passe lorsqu'on prend $x=y\geq 0$: on obtient $f(\sqrt{2}x)=f(x)^2$. D'une part cela montre que $f(x)\geq 0$ pour tout réel x. D'autre part, cela permet d'intuiter une expression possible de f : soit on remarque que les fonctions du type gaussiennes $x\mapsto e^{ax^2}$ satisfont cette équation, soit on se dit que pour éliminer ce fâcheux carré et cette fâcheuse racine il vaut mieux prendre le logarithme et considérer $\ln f(\sqrt{x})$. Toujours est-il que pour pouvoir prendre ce logarithme il faut d'abord démontrer que $f(x)>0$.

Supposons par l'absurde qu'il existe un réel $x>0$ tel que $f(x)=0$. Alors $f(x)=f(x/\sqrt{2})^2$, par conséquent on a aussi $f(x/\sqrt{2})=0$. Ainsi de suite, on obtient $f(x/\sqrt{2})^n=0$ pour tout $n\in\mathbf{N}$; par continuité de f on a à la limite $f(0)=0$, ce qui contredit l'hypothèse qu'on a faite plus haut. f est donc strictement positive partout.

On peut donc considérer $g(x)=\ln(f(\sqrt{x}))$, qui vérifie $g(x^2+y^2)=g(x^2)+g(y^2)$. Bingo ! En posant $X=x^2$ et $Y=y^2$, on a $g(X+Y)=g(X)+g(Y)$: g est un morphisme additif continu de $\mathbf{R}_+$. Par conséquent (on vérifiera sans peine que cette restriction à $\mathbf{R}_+$ ne pose aucun problème) la fonction g est de la forme $g(x)=ax$, si bien que $f(x)=e^{ax^2}$. Et de telles fonctions satisfont bien les conditions de l'exercice.

Conclusion : soit f est identiquement nulle, soit elle est de la forme $f(x)=e^{ax^2}$.

Exercice 5 Le fait qu'on ait des inégalités plutôt que des égalités va nous compliquer un peu la tâche... Commençons par remarquer que l'hypothèse sur l'existence de $a>1$ est nécessaire : pour tout $b\geq 1$, la fonction $f(x)=bx^2$ vérifie les deux inégalités et possède un point fixe en $1/b\leq 1$. Il est d'usage de voir ce qui se passe pour des cas particuliers aux inégalités : la première donne $f(1)f(a)\geq f(a)$ et comme $f(a)=a>0$ on en déduit que $f(1)\geq 1$. Ainsi, pour tout $x\in\mathbf{Q}_+^*$ on a $f(x)f(1)\geq f(x)$ ce qui implique, vu que $f(1)\geq 1$, que $f(x)\geq 0$. Ceci combiné à la seconde équation indique que notre fonction f est croissante. Enfin, on obtient facilement par récurrence que pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, $f(x)^n\geq f(x^n)$ et $f(nx)\geq nf(x)$.

À ce stade, il faut absolument remarquer que les deux inégalités proposées sont dans un sens opposé : on a un "sur-morphisme" pour l'addition et un "sous-morphisme" pour la multiplication. De plus, $f(1)\geq 1$ et $f(a)=a>1$. Tout cela fera que "ça coince" : toutes les inégalités deviendront des égalités et finalement f sera l'identité.

Commençons par montrer que $f(x)\leq x$ pour tout $x\in\mathbf{Q}_+^*$. On calcule $f(a^n/q)\leq f(a^n)/q\leq f(a)^n/q=a^n/q$ (on remarque que c'est ici que l'on utilise le fait que les deux inégalités ne sont pas dans le même sens : l'une sert à aller vers l'infini et l'autre sert à se ramener vers 0). Or l'ensemble des nombres a^n/q, avec $n,q\in\mathbf{N}^*$, est dense dans $\mathbf{Q}_+^*$: étant donnée $x\in\mathbf{Q}_+^*$ et $\varepsilon>0$, on veut trouver n et q tels que $|a^n/q-x|<\varepsilon$, i.e. $|a^n-qx|<q\varepsilon$; or on peut toujours trouver q

tel que $|a^n - qx| < x$ et lorsque n est assez grand cet entier q vérifie $x < q\varepsilon$. Ainsi $f(x) \leq x$ sur une partie dense de $\mathbf{Q}_+^*$ et donc sur tout $\mathbf{Q}_+^*$ par croissance de f.

Reste à montrer l'inégalité inverse $f(x) \geq x$. On a déjà vu que $f(1) \geq 1$, donc $f(n) \geq n$ (et même $f(n) = n$) pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. L'ensemble $\mathbf{Q}_+^*$ est donc régulièrement jalonné par des points qui vérifient l'inégalité inverse de celle prouvée au paragraphe précédent. Ceci combiné à la croissance de f permet de conclure : on déduit du fait que f est croissante que $f(x) \geq f(\lfloor x \rfloor) \geq \lfloor x \rfloor \geq x - 1$ pour tout x. Supposons qu'il existe $x > 1$ tel que $f(x) < x$. Mais alors il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $f(x)^n < x^n - 1$, dans ce cas $f(x^n) < f(x^n) - 1$, contradiction. Par conséquent $f(x) = x$ pour tout $x > 1$.

Le cas des $x < 1$ se déduit immédiatement du reste : pour $x > 1$ on a $f(1/x) \geq f(1)/f(x) = 1/x$ et donc $f(1/x) = 1/x$ (par le résultat du troisième paragraphe).

Conclusion : $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbf{Q}_+^*$ (et une telle fonction vérifie bien les hypothèses de l'exercice).

Exercice 6 Comme souvent dans ce type de problèmes, on raisonne par analyse-synthèse. Supposons que f soit une fonction vérifiant les hypothèses de l'exercice. Puisque $f \circ f$ est bijective, f l'est aussi, et comme elle est aussi continue elle est forcément strictement monotone (voir le théorème 5). Par conséquent, $f \circ f$ est strictement croissante et donc si on veut que l'équation fonctionnelle ait une solution il faut que $a > 0$, ce qu'on suppose vrai désormais.

On applique alors l'équation fonctionnelle en $f(x)$, cela donne $af(x) + b = f(ax + b)$. L'énoncé précise que la fonction f est dérivable ; en dérivant la dernière équation on obtient $af'(x) = af'(ax+b)$, d'où (puisque $a \neq 0$) $f'(x) = f'(ax+b)$. Là encore on utilise une méthode classique : on itère. Si on pose $x_0 = x$ et définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par la relation de récurrence $x_{n+1} = ax_n + b$, la relation précédente assure que pour tout entier n on a $f'(x_n) = f'(x_0)$. La suite x_n est dite *arithmético-géométrique*, on trouve son terme général en posant $u_n = x_n + \alpha$ et en cherchant le α tel que la suite $(u_n)_n$ devienne géométrique : on a $u_{n+1} = x_{n+1} + \alpha = ax_n + b + \alpha = a(u_n - \alpha) + b + \alpha = au_n + b + \alpha(1-a)$. On voit que si on prend $\alpha = b/(a-1)$, la suite (u_n) est géométrique de raison a. Commençons par supposer que $a < 1$; la suite (u_n) converge alors vers 0, si bien que la suite (x_n) tend vers $b/(1-a)$. Par continuité de la dérivée, on obtient $f'(x) = f'(b/(1-a))$, et cela pour tout $x \in \mathbf{R}$. La fonction f' est donc constante, le théorème fondamental de l'analyse assure que dans ce cas la fonction f est affine.

Dans le cas où $a > 1$, on applique l'équation $f'(x) = f'(ax+b)$ à $x = (y-b)/a$ et obtient $f'(y/a - b/a) = f'(y)$. On est ramené au cas précédent puisque $1/a \in]0, 1[$. Par conséquent, dans ce cas aussi, la fonction f est affine.

On peut donc écrire $f(x) = \alpha x + \beta$. Si la fonction f vérifie $f(f(x)) = ax + b$, cela donne $ax + b = \alpha(\alpha x + \beta) + \beta = \alpha^2 x + \alpha\beta + \beta$. Pour $a > 0$ cela donne deux solutions distinctes, à savoir $\alpha = \pm\sqrt{\alpha}$ et $\beta = b/(1+\alpha)$ (on a $\alpha \neq -1$ car $a \neq 1$). L'équation fonctionnelle a donc deux solutions distinctes pour tout $a > 0$, qui sont des fonctions affines.

Exercice 7 Comme à l'exercice précédent on commence par étudier les propriétés d'injectivité de la fonction f. Puisque $f \circ f$ est injective, la fonction f est injective et, puisque continue, strictement monotone. De plus, par le théorème des valeurs intermédiaires, $f(\mathbf{R})$ est un intervalle, qui contient l'image de l'exponentielle à savoir $\mathbf{R}_+^*$; or cet intervalle n'est pas $\mathbf{R}$ (sinon $f(f(\mathbf{R}))$ serait égal à $\mathbf{R}$) et n'est pas fermé (sinon par croissance de $f \circ f$ l'image $f(f(\mathbf{R}))$ serait fermée), on peut donc écrire $f(\mathbf{R}) =]a, +\infty[$, avec $-\infty < a < 0$. De plus, $f(a) = \lim_{-\infty} f \circ f = 0$ et $f(0) = f(f(a)) = e^a$.

Puisque f est strictement monotone et puisque son image "contient" $+\infty$ (plus précisément $+\infty$ est adhérent à son image), on a soit $\lim_{-\infty} f = a$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$ (cas où f est croissante), soit $\lim_{-\infty} f = +\infty$ et $\lim_{+\infty} f = a$ (cas où f est décroissante). Le deuxième cas est impossible car il implique que $f(f(\mathbf{R})) =]a, f(a)[$. Par conséquent f est croissante.

C'est ici qu'on utilise la méthode classique de résolution : on va montrer que la fonction f est déterminée par sa restriction à $I_0 =]-\infty, a]$. On commence par définir une suite d'intervalles $(I_n)_n$ par récurrence à partir de I_0 par $I_{n+1} = f(I_n)$. En utilisant la bijectivité de f et le fait que les bornes $-\infty$ et a de I_0 vérifient $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$, on montre que cette suite d'intervalles forme une partition de $\mathbf{R}$. De plus, cette suite d'intervalles est la même pour toutes les fonctions f vérifiant l'équation fonctionnelle, pour cela il suffit de remarquer que $I_{2n} = \exp^n(I_0) = \exp^n(]-\infty, a])$ et $I_{2n+1} = \exp^n(I_1) = \exp^n(]a, 0])$. Soit $x \in I_n$, avec $n > 0$, alors il existe $y \in I_{n-1}$ tel que $f(y) = x$, ainsi on a $f(x) = f(f(y)) = e^y$ et donc la restriction de f à I_n est déterminée par celle à I_{n-1}. Par récurrence, on montre que f est entièrement déterminée par sa restriction à I_0.

Prenons donc $a < 0$ un nombre négatif et g une fonction continue strictement croissante qui réalise une bijection de I_0 à I_1 (on rappelle que les intervalles I_n sont définis par $I_0 =]-\infty, a]$, $I_1 =]a, 0]$ et $I_{n+2} = \exp(I_n)$) ; on définit une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par ses restrictions aux intervalles I_n par : $f_{|I_0} = g$ et pour tout $n > 0$, si $x \in I_n$, il existe un unique $y \in I_{n-1}$ tel que $f(y) = x$ et on pose alors $f(x) = e^y = \exp(f^{-1}(x))$. Par construction, la fonction f vérifie $f \circ f = \exp$, il reste à démontrer la continuité de f. La continuité de la restriction de f à chaque intervalle I_n se démontre par récurrence ; l'initialisation découle de la continuité de g et l'hérédité se montre en utilisant la continuité de l'exponentielle d'une part, et la continuité de la restriction de f^{-1} à I_{n-1} d'autre part (c'est un résultat classique que l'inverse d'une injection continue sur un intervalle de $\mathbf{R}$ est continue). Et la continuité en les bornes des intervalles I_n se montre aussi par récurrence, en utilisant le fait que ces intervalles forment une partition de $\mathbf{R}$.

Ainsi, tout réel $a < 0$ et toute bijection continue strictement croissante $g :]-\infty, a] \to]a, 0]$ définissent une unique solution continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de l'équation fonctionnelle dont la restriction à $]-\infty, a]$ est égale à g ; de plus toutes les solutions f s'obtiennent de cette manière.