DS 2 – Séries entières et séries de Fourier
29/03/2013 – Durée : 2h

Les documents et les calculatrices sont interdits. Toutes les réponses devront être (même rapidement) justifiées. Certaines questions en milieu d'exercices peuvent être difficiles ; on pourra utiliser les résultats de ces questions pour répondre aux questions suivantes. Enfin, comme d'habitude, les qualités de rédaction seront prises en compte dans la notation...

1 Séries entières

Exercice 1 (Question de cours)
Donner (sans justifier cette fois-ci) le rayon de convergence et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$.

Exercice 2
Calculer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n\ x^n$,
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+151,2}\ x^n$,
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n)^n\ x^n$,
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right)^{n+\sqrt{n}}\ x^n$,
5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\ x^{2n}$,

Exercice 3
Calculer les rayons de convergence et les sommes des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\ x^n$,
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$,
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\ x^{2n+1}$,

Exercice 4
Trouver une solution développable en série entière de l'équation différentielle :

$$xy' + 3y = e^x.$$

On pourra poser $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ *et développer* e^x *en série entière.*

2 Séries de Fourier

Exercice 5 (Question de cours, encore)
Donner la définition des coefficients de Fourier $c_k(f)$ d'une fonction f.

Exercice 6
Linéariser $\sin^3 x$ et exprimer $2\sin(3x) - \cos(2x)$ en fonction des puissances de $\cos x$ et $\sin x$.

Exercice 7
Soit f la fonction 2π-périodique telle que pour tout $x \in [0, 2\pi[$, $f(x) = e^x$.

1. Faire la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-4\pi, 4\pi[$.
2. Montrer que
$$c_k(f) = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi}\,\frac{1}{1 - ik}.$$
Question subsidiaire : que représente la quantité $\frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi}$ *? La représenter sur le graphique de la fonction* f*.*
3. À l'aide du théorème de Parseval, en déduire que
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + k^2} = \frac{\pi(e^{4\pi} - 1)}{(e^{2\pi} - 1)^2}.$$
4. Montrer que $\frac{e^{4\pi} - 1}{(e^{2\pi} - 1)^2} = \coth(\pi)$, où par définition $\coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.
5. En déduire que
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1 + k^2} = \frac{\pi\coth(\pi) + 1}{2}.$$

Exercice 8
Soit f la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi < x \leq -\frac{\pi}{2}. \\ \sin x & \text{si } \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{si } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

Le but de cet exercice est de calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$.

1. Faire la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi[$.
2. Montrer que $a_k(f) = 0$ et calculer $b_1(f)$.
3. Montrer que pour $k \neq 1$,

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{k+1}\sin\left((k+1)\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{k-1}\sin\left((k-1)\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{k}\left(-\cos(k\pi) + \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right)\right].$$

   On pourra utiliser l'identité $2\sin a \sin b = \cos(a+b) - \cos(a-b)$. Il peut aussi être utile de ne pas se laisser impressionner par la longueur de la formule etfaire le calcul pas à pas...
   En déduire que

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{2k}{k^2-1} + \frac{2}{k}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{2}{k}\cos(k\pi)\right].$$

4. En déduire que si k est impair, alors $b_k(f) = \dfrac{2}{k\pi}$.
5. Si k est pair, on pose $k = 2\ell$. Montrer que

$$b_{2\ell}(f) = \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{-4\ell}{4\ell^2-1} - \frac{1}{\ell}\right)(-1)^\ell - \frac{1}{\ell}\right].$$

Exercice 9
On donne f la fonction 2π-périodique donnée par $f(x) = x$ si $-\pi \leq x < \pi$ (c'est un signal en dents de scie). On rappelle que $f(x) = 2\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{\sin(kx)}{k}$. On considère l'équation différentielle

$$y'' + y = f. \tag{E}$$

Déterminer les coefficients b_k d'une solution y de (E) de la forme $y(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kx)$.