DS 3 – Transformée de Fourier et transformée en z
24/05/2013 – Durée : 2h

Les documents et les calculatrices sont interdits. Toutes les réponses devront être (même rapidement) justifiées. Certaines questions en milieu d'exercices peuvent être difficiles ; on pourra utiliser les résultats de ces questions pour répondre aux questions suivantes. Enfin, comme d'habitude, les qualités de rédaction seront prises en compte dans la notation...

1 Transformation de Fourier et convolution

Exercice 1 (Question de cours)
Donner (sans justifier cette fois-ci) la définition de la transformée de Fourier inverse.

Exercice 2
Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{-\pi x}\chi_{[0,+\infty[}(x)$.

1. Calculer la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f.
2. En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 + (2\pi p)^2}\mathrm{d}p.$$

Exercice 3
Soient a et ω deux réels strictement positifs. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f(x) = \cos(\omega x)\chi_{[-a,a]}(x)$ (on pourra utiliser la formule $\cos(y) = \mathrm{Re}(e^{iy})$).

Exercice 4
Soit $a > 0$. On définit les deux fonctions $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par

$$f(x) = e^{-ax}\chi_{[0,+\infty[}(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \chi_{[0,1]}(x).$$

Le but de cet exercice est de calculer le produit de convolution $f * g$.

1. Montrer que f et g sont des fonctions intégrables.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $(f * g)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\chi_{[0,1]}(x-t)\mathrm{d}t$.
3. Montrer que $\chi_{[0,1]}(x-t) = \chi_{[x-1,x]}(t)$.
4. En déduire que :
   (a) pour $x \leq 0$, $(f * g)(x) = 0$,
   (b) pour $x \geq 1$, $(f * g)(x) = e^{-ax}\dfrac{e^a - 1}{a}$,
   (c) pour $x \in [0,1]$, $(f * g)(x) = \dfrac{1 - e^{-ax}}{a}$.

Exercice 5

Le but de cet exercice est de trouver une solution intégrable à l'équation différentielle

$$y' + y = e^{-x}\chi_{[0,+\infty[}(x). \tag{E}$$

1. Montrer que dans l'espace des fréquences, l'équation (E) devient
$$\hat{y}(p) = \frac{1}{(1+2i\pi p)^2}.$$
2. En déduire que si f est une solution intégrable de (E), alors
$$f(x) = xe^{-x}\chi_{[0,+\infty[}(x).$$

Exercice bonus

Existe-t-il une fonction f intégrable sur $\mathbf{R}$ telle que pour toute fonction g intégrable sur $\mathbf{R}$, on ait $f * g = g$?

Quelques formules utiles (ou pas)

Pour toute fonction f intégrable dont la dérivée est intégrable, $\widehat{f'}(p) = (2i\pi p)\hat{f}(p)$.

La transformée de Fourier de $f(x) = \frac{x^k}{k!}e^{-x}\chi_{[0,+\infty[}(x)$ est $\hat{f}(p) = \frac{1}{(1+2i\pi p)^{k+1}}$.

La transformée de Fourier de $f(x) = e^{-|x|}$ est $\hat{f}(p) = \frac{2}{1+4\pi^2p^2}$.

2 Transformée en z

Exercice 6 (Question de cours)

Donner la transformée en z de la suite $u_n = 1$. Quel est l'ensemble de convergence de cette transformée en z ?

Exercice 7

À l'aide de la dérivée de la transformée en z de la suite $u_n = 2^n$, calculer la transformée en z de la suite $v_n = n.2^n$.

Exercice 8

Trouver l'original des fonctions suivantes :

1. $f(z) = \frac{1}{z}$,
2. $f(z) = \frac{z+1}{z-2}$,
3. $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$,
4. $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$.

Exercice 9

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation de récurrence $u_{n+1} - 2u_n = 1$ pour $u_0 = 0$.

1. Montrer que la transformée en z de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie $Z(u_n)(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$.
2. En déduire l'expression de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en fonction de n.