

DS de rattrapage
06/06/2013 – Durée : 1h

Les documents et les calculatrices sont interdits. Toutes les réponses devront être (même rapidement) justifiées. Comme d'habitude, les qualités de rédaction seront prises en compte dans la notation...

Exercice 1

Calculer les rayons de convergence et les sommes des séries entières suivantes :

$$1. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n,$$

$$2. \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n},$$

Exercice 2

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction 2π -périodique telle que

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi < x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

1. Montrer que si f est une fonction impaire, alors pour tout entier k , $a_k(f) = 0$ et $b_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(kt) dt$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f et donner la série de Fourier de f .

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{-2\pi|x|}$.

1. Montrer que la transformée de Fourier \hat{f} de f vérifie

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{\pi(1+p^2)}.$$

2. En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+p^2)^2} dp.$$

Exercice 4

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation de récurrence $u_{n+1} + u_n = 2$ pour $u_0 = 0$.

1. Montrer que la transformée en z de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ vérifie $Z(u_n)(z) = \frac{2z}{(z+1)(z-1)}$.
2. En déduire l'expression de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ en fonction de n .