TD 5 – Fonctions de plusieurs variables

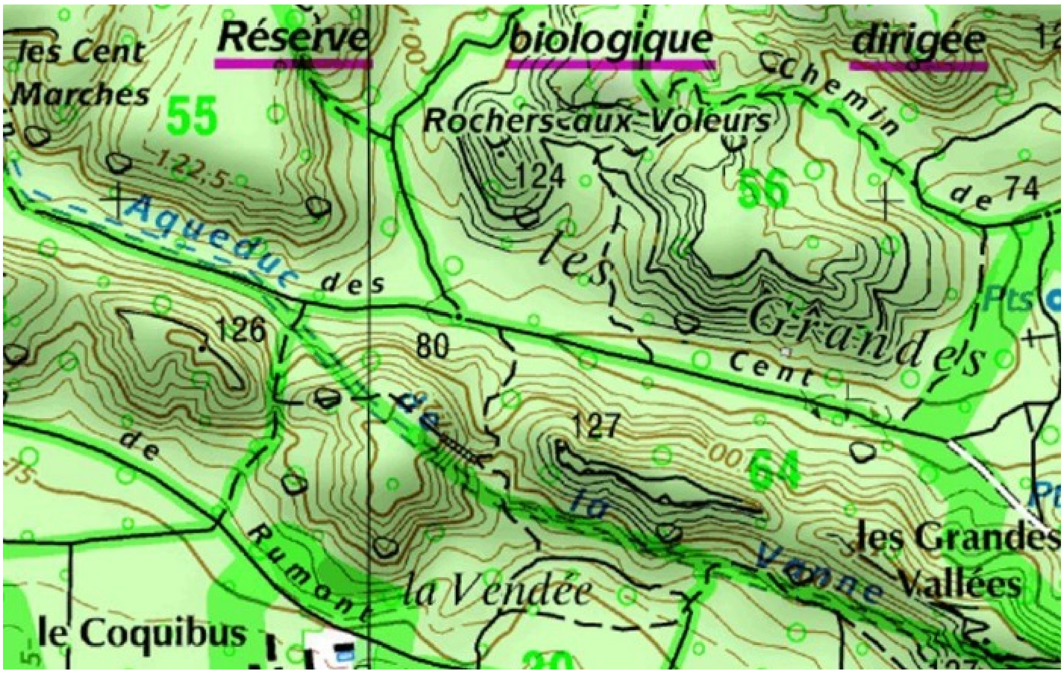

Figure 1 – Lignes de niveau : extrait d'une carte IGN

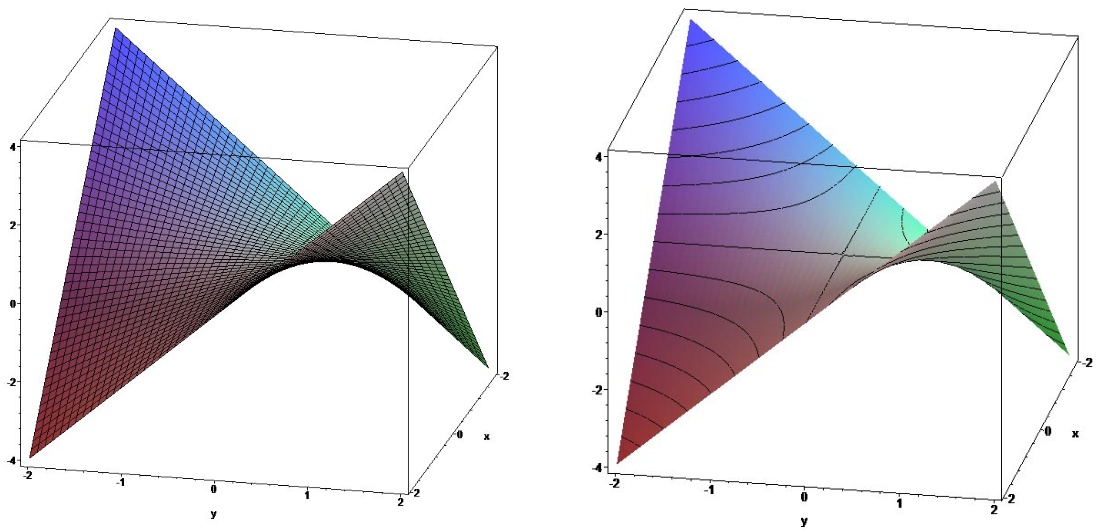

Figure 2 – Deux représentations de la fonction $f(x, y) = xy$ (paraboloïde hyperbolique)

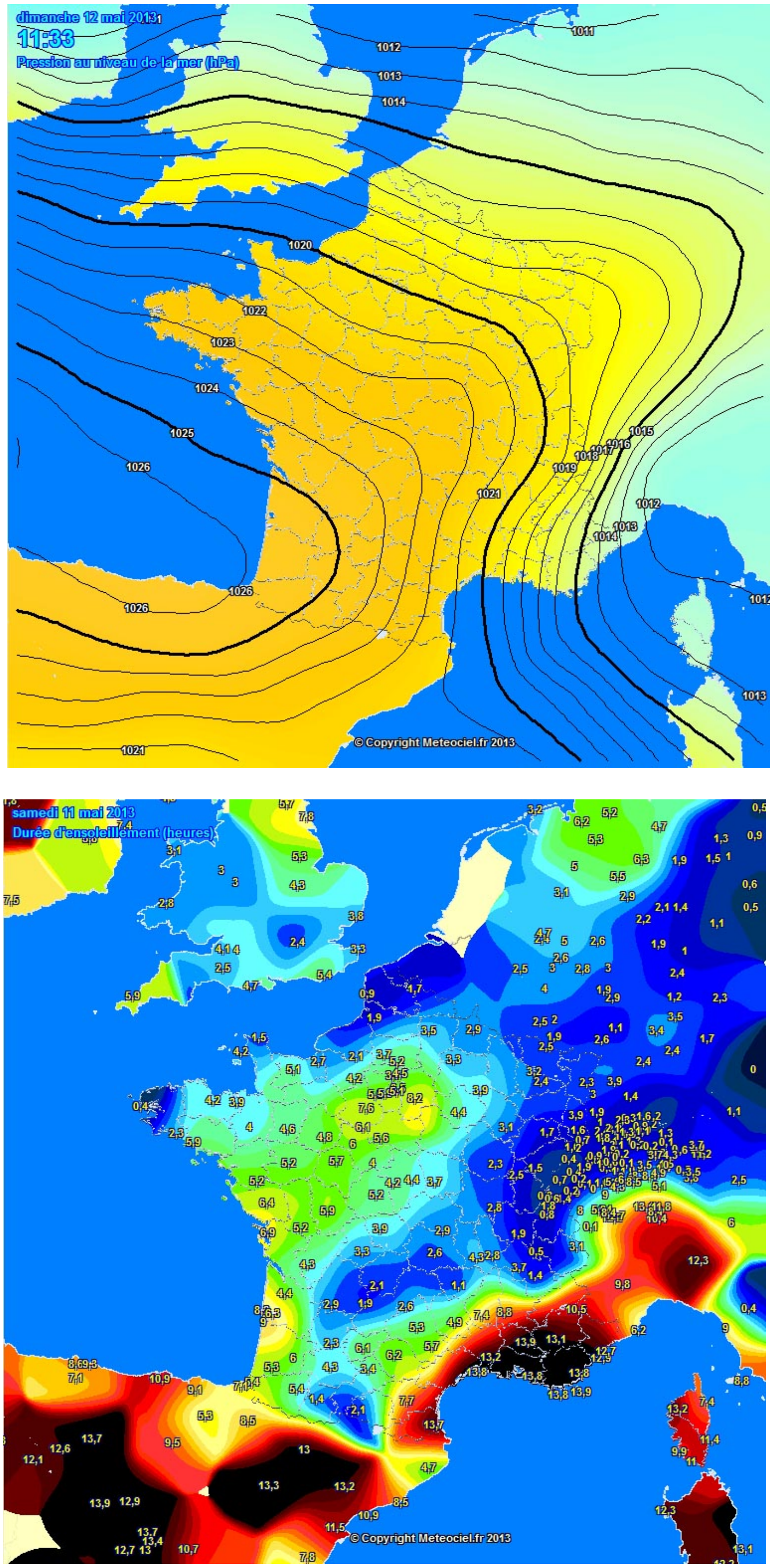

FIGURE 3 – Représentation de fonctions de deux variables en météorologie : pression au niveau de la mer et ensoleillement ; représentation par courbes de niveau (en haut) et par tableau de valeurs et dégradé de couleurs (en bas)

1 Représentations des fonctions, ensemble de définition

Exercice 1
En utilisant les lignes de niveau, donner l'allure des surfaces d'équations :

$$z = x^2 + y^2, \qquad z = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{et} \qquad z = xy.$$

Exercice 2
En utilisant le changement de variables $u = x + y$ et $v = x - y$, ainsi que les résultats de l'exercice 1, déterminer l'allure de la surface définie par l'équation $z = x^2 - y^2$.

Exercice 3
Soit $f(x, y) = x - y - |x - y|$. Étudier les lignes de niveaux de la fonction f.

Exercice 4
Identifier sur la figure 1 un sommet, un col, une ligne de crête et un thalweg.

Exercice 5
Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = \dfrac{1}{x - y}$,
2. $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{x^2 + 3x - 1}{y + 2}}$,
3. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 2y + 4x)$ (penser à la forme canonique).

2 Continuité, dérivées partielles

Exercice 6
Montrer que les fonctions suivantes sont continues en $(0, 0)$, puis tracer leurs représentations graphiques :

1. $f(x, y) = x^2 + y$,
2. $f(x, y) = \cos(x + y) + 8$,
3. $f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq 0, \\ y & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$,
4. $f(x, y) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Exercice 7
Préciser les domaines de définition, et calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = x^2 + y + 3$,
2. $f(x, y) = \cos(xy^2)$,
3. $f(x, y) = \dfrac{\ln x}{x^2 + y^2}$,
4. $f(x, y) = \exp\left(\dfrac{x - 3y}{x^2 - y + 2}\right)$.

Exercice 8
Montrer que la fonction f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

possède des dérivées partielles en 0, mais n'est pas continue en 0 (on pourra étudier $f(x, x)$ pour x tendant vers 0).

Exercice 9
Montrer que la fonction f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

possède des dérivées partielles en 0. Montrer qu'au contraire, la fonction g donnée par $g(x) = f(x,x)$ n'est pas dérivable en 0.

Exercice 10 (Équation de transport)
On considère l'équation de transport sur $\mathbf{R}^2$ pour une fonction $u(x,t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

1. Soit $y_0 \in \mathbf{R}$. On pose $f_{y_0}(y) = u(y+y_0, y)$. Montrer que $f_{y_0}(y) = u_0(y_0)$ pour tout x.
2. En déduire que $u(x,t) = u_0(x-t)$.

Exercice 11
Soit f une fonction de deux variables x et y. Résoudre les équations aux dérivées partielles :

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0,$
2. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,$
3. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$

3 Optimisation

Exercice 12
Trouver les extrema des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2,$
2. $g(x,y) = x^2y^3(3x+2y+1),$
3. $h(x,y) = x\big((\ln x)^2 + y^2\big)$ pour $x > 0$.

Exercice 13 (Une histoire de papier cadeau...)
On dispose de 1m^2 de papier cadeau. Quel est le volume maximal d'un cadeau de forme parallélépipèdique qu'il est possible d'emballer ?

Exercice 14
On a une machine dont le rendement vérifie

$$R(U,\omega) = \frac{1+\omega}{1+U^2-U\omega+\omega^2},$$

où U est une tension et ω une fréquence. Quel est le rendement optimal de la machine, et pour quelle(s) valeur(s) de U et ω est-il ateint ?

Exercice 15
Trouver le point du plan donné par l'équation $2x - y + 2z = 16$ le plus proche de l'origine.