

---

**Devoir n° 1**

---

Contrôle continu du vendredi 13 octobre 2017  
Durée : 1h

**L'usage de tout document ou matériel électronique est strictement interdit.**

*La qualité de la rédaction et de la présentation, ainsi que la clarté et la précision des raisonnements, constitueront des éléments importants dans l'évaluation des copies. En particulier, les résultats de cours utilisés devront être mentionnés de façon claire, et les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte.*

**Question de cours**

Montrer qu'une union d'ouverts est ouverte, et qu'une intersection finie d'ouverts est ouverte.

**Exercice 1**

Soient  $(X, d)$  un espace métrique, et  $A, B$  deux parties de  $X$ .

- 1) On suppose  $\bar{A} \cap \overset{\circ}{B} \neq \emptyset$ . Montrer qu'alors,  $A \cap B \neq \emptyset$ .
- 2) À l'inverse, si  $A \cap B \neq \emptyset$ , a-t-on nécessairement  $\bar{A} \cap \overset{\circ}{B} \neq \emptyset$  ?

**Exercice 2**

Soient  $X$  un ensemble non vide,  $d$  une distance sur  $X$ , et  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une application vérifiant les hypothèses :

- (H<sub>1</sub>) Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on a  $f(t) = 0$  si et seulement si  $t = 0$ .  
(H<sub>2</sub>)  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , i.e. pour tous  $s, t \in \mathbb{R}_+$ , on a  $f(s) \leq f(t)$  dès que  $s \leq t$ .  
(H<sub>3</sub>)  $f$  est sous-additive, i.e. pour tous  $s, t \in \mathbb{R}_+$ , on a  $f(s + t) \leq f(s) + f(t)$ .

- 1) Montrer que si  $\lambda > 0$ , alors  $\lambda f$  vérifie aussi les hypothèses (H<sub>1</sub>), (H<sub>2</sub>) et (H<sub>3</sub>). Trouver une fonction  $f$  qui n'est pas linéaire mais qui vérifie (H<sub>1</sub>), (H<sub>2</sub>) et (H<sub>3</sub>).

On pose  $D = f \circ d$ .

- 2) Montrer que l'application  $D$  ainsi obtenue est une distance sur  $X$ .

Dans la suite, étant donnés  $x \in X$  et  $r > 0$ , nous noterons  $B_d(x, r)$  et  $B_D(x, r)$  les boules ouvertes de centre  $x$  et de rayon  $r$  pour les distances  $d$  et  $D$  respectivement.

- 3) Pour tous  $a \in X$  et  $\varepsilon > 0$ , montrer que  $B_D(a, f(\varepsilon)) \subset B_d(a, \varepsilon)$ .

Désormais, nous supposons également  $f$  continue en 0.

- 4) Pour tous  $a \in X$  et  $\varepsilon > 0$ , justifier l'existence de  $\eta > 0$  tel que  $B_d(a, \eta) \subset B_D(a, \varepsilon)$ .
- 5) Dédire des questions précédentes que les distances  $d$  et  $D$  définissent les mêmes ouverts sur  $X$ .
- 6) Le résultat de la question 5) reste-t-il vrai si l'on ne suppose plus  $f$  continue en 0? (*Bonus*)