TD 3 – Espaces complets

Exercice 1

On se place dans un espace métrique (X, d).

1. Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.
2. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.
3. Montrer que toute suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence est convergente (la suite possède alors une seule valeur d'adhérence : sa limite).

Corrigé :

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in X^{\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy, montrons qu'elle est bornée, autrement dit qu'il existe $y \in X$ et $R > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on ait $x_n \in B(y, R)$. Par définition, on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N} \ :\ \forall p,\ q \geq N,\ \ d(x_p, x_q) < \varepsilon. \tag{1}$$

Appliquons cela à $\varepsilon = 1$ (en particulier cela nous sort un rang $N \geq 0$, et posons

$$R = 1 + \max\big(1, \max\{d(x_n, x_N) \mid n < N\}\big).$$

On vérifie alors que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $x_n \in B(x_N, R)$. En effet :
— si $n < N$, alors $x_n \in B(x_N, R)$ puisque $R \geq d(x_n, x_N) + 1$;
— si $n \geq N$, alors $x_n \in B(x_N, R)$ par (1) appliqué à $\varepsilon = 1$.

2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in X^{\mathbf{N}}$ une suite convergente, montrons qu'elle est de Cauchy. La convergence de la suite assure de l'existence de $\ell \in X$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N} : \forall n \geq N, d(x_n, \ell) < \varepsilon.$$

Soient maintenant $p, q \geq N$. Alors

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, \ell) + d(\ell, x_q) \leq 2\varepsilon.$$

Ce qui montre bien que la suite vérifie (1) : elle est bien de Cauchy.

3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in X^{\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence, montrons qu'elle est convergente. Appelons ℓ sa valeur d'adhérence. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbf{N}, \exists n_N \geq N : d(x_{n_N}, \ell) < \varepsilon. \tag{2}$$

Appliquons cela au nombre N donné par (1), et prenons $m \geq N$. Alors

$$d(x_m, \ell) \leq d(x_m, x_{n_N}) + d(x_{n_N}, \ell).$$

Le premier terme est inférieur à ε par (1), tandis que le second est inférieur à ε par (2). Ceci prouve la convergence de la suite.

Exercice 2
On rappelle qu'une série réelle $\sum_{n\geq 0} a_n$ est dite *absolument convergente* si la série $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ est convergente.

1. Montrer que toute série réelle absolument convergente est convergente (indication : montrer que la suite des sommes partielles est une suite de Cauchy).
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge.
3. On munit $M_n(\mathbf{R})$ de la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\|A\| = \sup_{x\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

(où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne).

a) Vérifier que $\|\cdot\|$ est bien une norme, qui de plus satisfait $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

b) Montrer que pour tout $A \in M_n(\mathbf{R})$, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}$ converge (pour la distance issue de la norme $\|\cdot\|$). Sa limite est appelée *exponentielle* de la matrice A.

Corrigé :

1. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série réelle absolument convergente. Posons

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$$

la série des sommes partielles, et montrons qu'elle est de Cauchy. On sait que la suite

$$A_N = \sum_{n=0}^{N} |a_n|$$

est convergente, donc de Cauchy (par l'exercice 1 !). Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in_N : \forall p \geq q \geq N, |A_p - A_q| < \varepsilon.$$

Donc pour tous $p \geq q \geq N$, on a

$$\varepsilon > |A_p - A_q| = \Big|\sum_{n=0}^{p} |a_n| - \sum_{n=0}^{q} |a_n|\Big| = \sum_{n=q+1}^{p} |a_n|.$$

De plus,

$$|S_p - S_q| = \Big|\sum_{n=0}^{p} a_n - \sum_{n=0}^{q} a_n\Big| = \Big|\sum_{n=q+1}^{p} a_n\Big| \leq \sum_{n=q+1}^{p} |a_n|.$$

Ceci, combiné avec l'estimation précédente, nous donne $|S_p - S_q| < \varepsilon$, ce qui montre que la suite des sommes partielles est de Cauchy. Puisque $\mathbf{R}$ est complet, cela implique que cette suite est convergente, autrement dit que la série est convergente.

2. Soit $x \in \mathbf{R}$. Montrons que $\sum_{n\geq 0} \frac{|x^n|}{n!}$ est fini. Soit $N = \lfloor |x| \rfloor$, on a :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{|x^n|}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{|x^n|}{n!} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{|x^n|}{n!}.$$

Pour $n \geq N+1$, on peut écrire $n! = N!(N+1)(N+2)\cdots n \geq N!N^{n-N}$, cela donne

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} \frac{|x^n|}{n!} &\leq \sum_{n=0}^{N} \frac{|x^n|}{n!} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{|x^n|}{N!N^{n-N}} \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{|x^n|}{n!} + \frac{N^N}{N!} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{|x|}{N}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{|x^n|}{n!} + \frac{N^N}{N!} \left(\frac{|x|}{N}\right)^{N+1} \frac{1}{1-|x|/N},
\end{aligned}$$

ce qui montre que la somme est bien finie. Par la question précédente, on en déduit que la série est convergente pour tout $x \in \mathbf{R}$.

3. a) On vérifie les trois propriétés de la norme : d'une part $\|\!|A|\!\| \geq 0$, et $\|\!|A|\!\| = 0$ implique que pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, on a $\|Ax\|_2/\|x\|_2 = 0$, autrement dit que $Ax = 0$. Donc A est la matrice nulle (on le voit par exemple en prenant successivement pour vecteur x le i-ème vecteur de la base canonique) ; cela prouve la définition de la norme. L'homogénéité de na norme $\|\!|\cdot|\!\|$ vient de l'homogénéité de la norme $\|\cdot\|_2$. Enfin, pour l'inégalité triangulaire, on calcule :

$$\begin{aligned}
\|\!|A+B|\!\| &= \sup_{x\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|(A+B)x\|_2}{\|x\|_2} \\
&= \sup_{x\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax+Bx\|_2}{\|x\|_2} \\
&\leq \sup_{x\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_2+\|Bx\|_2}{\|x\|_2} \\
&\leq \sup_{x\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} + \sup_{y\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|By\|_2}{\|y\|_2} \\
&= \|\!|A|\!\| + \|\!|B|\!\|
\end{aligned}$$

par les propriétés classiques de sommes de bornes supérieures. Cela montre l'inégalité triangulaire.

Enfin, pour la propriété demandée, on a :

$$\|\!|AB|\!\| = \sup_{x\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|ABx\|_2}{\|x\|_2}.$$

On sépare la majoration de $\frac{\|ABx\|_2}{\|x\|_2}$ en deux cas. Soit $Bx = 0$, auquel cas la quantité est nulle. Soit $Bx \neq 0$, et dans ce cas

$$\frac{\|ABx\|_2}{\|x\|_2} \leq \frac{\|ABx\|_2}{\|Bx\|_2}\frac{\|Bx\|_2}{\|x\|_2}$$

et donc

$$\|\!|AB|\!\| = \sup_{x\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}, Bx\neq 0} \frac{\|ABx\|_2}{\|Bx\|_2}\frac{\|Bx\|_2}{\|x\|_2} \leq \sup_{y\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ay\|_2}{\|y\|_2} \sup_{x\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}, Bx\neq 0} \frac{\|Bx\|_2}{\|x\|_2},$$

et par conséquent $\|\!|AB|\!\| \leq \|\!|A|\!\|\|\!|B|\!\|$.

b) Montrons que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}$ est absolument convergente. On a, par la question précédente, $\sum_{n\geq 0} \|\frac{A^n}{n!}\| \leq \sum_{n\geq 0} \frac{\|A\|^n}{n!} = \exp(\|A\|)$ (où la convergence a été démontrée dans la question 2 !). La question 1 montre alors que cette série absolument convergente est convergente.

Exercice 3
Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de X. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on définit $X_k = \{x_n \mid n \leq k\}$. Prouver l'équivalence entre les conditions suivantes :

1. La suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy.
2. La suite $(\delta(X_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0 (où $\delta(A)$ désigne le diamètre de la partie $A \subset X$).

Corrigé : On va montrer les deux implications. Rappelons que le diamètre de $A \subset X$ est défini par

$$\delta(A) = \sup\{d(a, b) \mid a, b \in A\}.$$

— Supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy. Donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N} :\ \forall p, q \geq N,\ d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Soit alors $a, b \in X_N$. Alors il existe $p, q \geq N$ tels que $a = x_p$ et $b = x_q$. Donc $d(a, b) = d(x_p, x_q) < \varepsilon$, et par conséquent $\delta(X_N) < \varepsilon$. On vient de montrer que la suite $(\delta(X_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

— Réciproquement, supposons que la suite $(\delta(X_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0. Alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N} :\ \forall n \geq N,\ \delta(X_n) < \varepsilon,$$

donc pour tout $n \geq N$ et tous $a, b \in X_n$, on a $d(a, b) < \varepsilon$. Soit maintenant $p, q \geq N$. Alors $x_p, x_q \in X_N$, donc $d(x_p, x_q) < \varepsilon$. Cela montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy.

Exercice 4
Soient d, D deux distances équivalentes sur un ensemble non vide X, et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de X.

1. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy dans (X, d) si et seulement si elle est de Cauchy dans (X, D).
2. En déduire que (X, d) est complet si et seulement si (X, D) est complet.

Corrigé : Rappelons que deux distances d et D sur X sont dites équivalentes s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $x, y \in X$, on ait

$$\frac{1}{C} d(x, y) \leq D(x, y) \leq C d(x, y).$$

On vérifie facilement que cette définition est symétrique en d et D.

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy dans (X, d). Alors elle vérifie (1). Mais la condition $d(x_p, x_q) < \varepsilon$ implique que $D(x_p, x_q) < C\varepsilon$. Cela montre que la suite est aussi de Cauchy pour la distance D. Par symétrie des rôles, une suite de Cauchy pour la distance D est aussi une suite de Cauchy pour la distance d.
2. Supposons (X, d) complet, et prenons une suite de Cauchy pour D. Alors par la question précédente, elle est aussi de Cauchy pour d. Puisque (X, d) est complet, cette suite est convergente pour d. Par équivalence des distances, cette suite est aussi convergente pour D. Donc (X, D) est complet. L'autre implication est aussi vraie par symétrie des rôles.

Exercice 5 (Théorème des fermés emboîtés)
Soit (X, d) un espace métrique. On considère la propriété suivante : toute suite $(F_n)_{n\geq 0}$ décroissante de fermés non-vides de X dont le diamètre tend vers 0 (ce qui sous-entend que le diamètre de F_n est fini à partir d'un certain rang) a une intersection non-vide. Montrer que (X, d) est complet si et seulement si cette propriété est vérifiée.

Corrigé :

Sens direct Supposons (X, d) complet, et soit $(F_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de fermés non-vides de X dont le diamètre tend vers 0. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, choisissons $x_n \in F_n$. Montrons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in X^{\mathbf{N}}$ ainsi définie est de Cauchy. On sait que le diamètre de F_n tend vers 0, donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N} : \forall n \geq N, \operatorname{diam} F_n le \varepsilon.$$

Soit $p, q \geq N$, alors $x_p \in F_p \subset F_N$ et $x_q \in F_q \subset F_N$. Donc $d(x_p, x_q) \leq \operatorname{diam} F_N \leq \varepsilon$. Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in X^{\mathbf{N}}$ est de Cauchy. Puisque (X, d) est complet, cette suite converge vers une limite notée ℓ. Montrons que $\ell \in \bigcap_{n\in\mathbf{N}} F_n$. Pour tout $M \in \mathbf{N}$, la suite $(x_n)_{n\geq M}$ est une suite du fermé F_M (car $x_n \in F_n \subset F_M$) qui converge vers $\ell \in x$. Donc $\ell \in F_M$, et donc $\ell \in \bigcap_{n\in\mathbf{N}} F_n$. En particulier l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} F_n$ est non vide.

Sens indirect Supposons que (X, d) possède la propriété des fermés emboîtés, et montrons qu'il est complet. Soit donc $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in X^{\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de X, et montrons qu'elle converge. Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$F_n = \overline{\{x_p \mid p \geq n\}}.$$

Alors les ensembles F_n sont clairement fermés et emboîtés, il reste à montrer que leur diamètre tend vers 0. Par (1), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\operatorname{diam} F_n \leq \varepsilon$. Cela montre que le diamètre de F_n tend vers 0. On peut donc appliquer la propriété des fermés emboîtés : l'intersection de ces fermés est non vide. Soit ℓ dans cette intersection. Alors pour tout $n \geq N$, on a $d(x_n, \ell) \leq \operatorname{diam} F_N \leq \varepsilon$. Par conséquent, (x_n) converge vers ℓ. ceci prouve que (X, d) est complet.

Exercice 6
Soit (X, d) un espace métrique, et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de X vérifiant

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall p \in \mathbf{N}, d(x_n, x_{n+p}) < \frac{1}{n}.$$

Montrer qu'elle est de Cauchy.

Corrigé : On veut montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy, autrement dit que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N} : \forall n \geq N, p \in \mathbf{N}, d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$, et N un entier supérieur à $1/\varepsilon$. Alors, pour tous $n \geq N$ et $p \in \mathbf{N}$, on a :

$$d(x_n, x_{n+p}) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq \varepsilon,$$

ce qui démontre que la suite est de Cauchy.

Exercice 7 (Théorème de prolongement)
Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On suppose que (Y, d_Y) est complet, et on considère une partie $A \subset X$ dense dans X. Soit $f \colon A \to Y$ une fonction uniformément continue.

Montrer qu'il existe une unique fonction continue $g \colon X \to Y$ qui prolonge f, et vérifier que g est uniformément continue.

Corrigé : On commence par définir une fonction g candidate. Pour tout $x \in X$, il existe une suite $(a_n^x)_{n\in\mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}$ d'éléments de A tels que $\lim_{n\to+\infty} a_n^x = x$. Si $x \in A$, on choisit pour la suite $a_n^x = A$ pour tout x. On montre maintenant que pour tout x, la suite $f(a_n^x)$ est de Cauchy : la suite (a_n^x) est de Cauchy, donc vérifie

$$\forall \eta > 0,\ \exists N \in \mathbf{N}\ :\ \forall p,\, q \geq N,\ d_X(a_p^x, a_q^x) < \eta;$$

de plus, la fonction f est uniformément continue :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : d_X(x,y) < \eta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon;$$

en combinant ces deux faits, on obtient :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N} : \forall p,\, q \geq N, d_Y(f(a_p^x), f(a_q^x)) < \varepsilon.$$

Par conséquent, la suite $f(a_n^x) \in Y^{\mathbf{N}}$ est de Cauchy. Puisque Y est complet, cette suite converge, vers une limite que l'on note $g(x)$.

Par construction, on a $g_{|A} = f$.

Montrons que g est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$, et $x, y \in X$ tels que $d_X(x,y) < \eta/3$. Alors il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $d_X(a_n^x, x) \leq \eta/3$ et $d_X(a_n^y, y) \leq \eta/3$. En particulier, cela implique que $d_X(a_n^x, a_n^y) \leq \eta$ et donc, par uniforme continuité de f,

$$d_Y(g(a_n^x), g(a_n^y)) = d_Y(f(a_n^x), f(a_n^y)) < \varepsilon.$$

De plus, $\lim_{n\to+\infty} f(a_n^x) = g(x)$ et $\lim_{n\to+\infty} f(a_n^y) = g(y)$, donc il existe $N' \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$, on a

$$d_Y(g(x), g(a_n^x)) = d_Y(g(x), f(a_n^x)) < \varepsilon,$$

et la même chose pour y. En combinant ces deux faits, on obtient que

$$d_Y(g(x), g(y)) \leq d_Y(g(x), g(a_n^x)) + d_Y(g(a_n^x), g(a_n^y)) + d_Y(g(a_n^y), g(y)) < 3\varepsilon,$$

ce qui montre l'uniforme continuité de g.

L'unicité de la fonction g vient du fait que deux fonctions continues coïncidant sur un ensemble dense (ici l'ensemble A) sont les mêmes.

Exercice 8

En utilisant la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$x_n = \frac{\lfloor 10^n \sqrt{2} \rfloor}{10^n},$$

montrer que $\mathbf{Q}$ (muni de la distance issue de la valeur absolue) n'est pas complet.

Corrigé : La suite définie correspond à la suite d'approximations à la n-ième décimale de $\sqrt{2}$, en particulier c'est une suite à valeurs rationnelles. Or celle-ci converge dans $\mathbf{R}$ vers $\sqrt{2}$, en particulier elle est de Cauchy dans $\mathbf{R}$, et donc dans $\mathbf{Q}$ (car la distance sur $\mathbf{Q}$ est celle induite par la distance sur $\mathbf{R}$, à savoir celle venant de la valeur absolue). Si cette suite convergeait vers une limite dans $\mathbf{Q}$, elle convergerait de même vers cette même limite dans $\mathbf{R}$. Par unicité de la limite, cela implique que $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$, contradiction. Donc cette suite est de Cauchy dans $\mathbf{Q}$ et ne converge pas : $\mathbf{Q}$ n'est pas complet.

Exercice 9
Soit ℓ^∞ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des suites bornées muni de la distance uniforme, définie de la façon suivante : pour $x = (x(k))_{k\in\mathbf{N}}$ et $y = (y(k))_{k\in\mathbf{N}}$ dans ℓ^∞, on pose

$$d(x,y) = \sup_{k\geq 0} |x(k) - y(k)|.$$

On note les éléments de ℓ^∞ comme des fonctions de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$, pour clarifier les notations concernant les suites de suites.

1. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0\ldots\right).$$

   Autrement dit, $x_n \in \ell^\infty$ est définie par $x_n(k) = \frac{1}{k}$ si $k \leq n$, et $x_n(k) = 0$ sinon. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente, et donner sa limite.
2. Montrer que (ℓ^∞, d) est complet.
3. Soit c_0 le sous-espace de ℓ^∞ formé des suites qui convergent vers 0. Montrer que c_0 est fermé dans ℓ^∞, puis que c_0 est complet.
4. Soit c_{00} le sous-espace de ℓ^∞ formé des suites qui n'ont qu'un nombre fini de termes non nuls. Est-il complet ?

Corrigé :

1. On pose x_∞ la suite définie par $x_\infty(k) = 1/k$ pour tout $k \geq 1$. On voit facilement que cette suite est bornée, et que donc $x_\infty \in \ell^\infty$. On va montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ tend vers x_∞. La suite $y_n = x_\infty - x_n$ est définie par $y_n(k) = 0$ si $k \leq n$ et $y_n(k) = 1/k$ si $k > n$. Par conséquent,

$$d(x_n, x_\infty) = \sup_{k\geq 0} |y_n(k)| = 1/(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   Donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_\infty$.
2. Montrons que (ℓ^∞, d) est complet. Soit donc $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de ℓ^∞. Par définition,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0 :\ \forall p, q \geq N,\ \sup_{k\geq 0} |x_p(k) - x_q(k)| < \varepsilon. \tag{3}$$

   <u>Première étape</u> : construire le candidat limite. On fixe $k_0 \in \mathbf{N}$. On déduit de (3) que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0 :\ \forall p, q \geq N,\ |x_p(k_0) - x_q(k_0)| < \varepsilon. \tag{4}$$

   Cela indique que la suite $\big(x_n(k_0)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy. Puisque $\mathbf{R}$ est complet, on en déduit que cette suite converge vers un réel, que l'on note $x_\infty(k_0)$. Cela définit une suite x_∞.

   <u>Deuxième étape</u> : vérifier que $x_\infty \in \ell^\infty$. Pour cela, on va utiliser de manière cruciale le fait que la suite (x_n) est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$, N l'entier donné par (3) et $n \geq N$. Soit aussi $k_0 \in \mathbf{N}$. On veut majorer $x_n(k_0) - x_\infty(k_0)$ indépendamment de k_0. Mais on sait que la suite $\big(x_n(k_0)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $x_\infty(k_0)$. Donc

$$\exists N' \in \mathbf{N} :\ \forall m \geq N',\ |x_m(k_0) - x_\infty(k_0)| < \varepsilon. \tag{5}$$

   Prenons $m \geq \max(N, N')$. Alors en combinant (4) et (5), on obtient

$$|x_n(k_0) - x_\infty(k_0)| \leq |x_n(k_0) - x_m(k_0)| + |x_m(k_0) - x_\infty(k_0)| < 2\varepsilon, \tag{6}$$

   cela pour tout $n \geq N$. Or la suite x_n est bornée : il existe $R > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a $|x_n(k)| \leq R$. Par conséquent, on a, pour tout $k \in \mathbf{N}$,$|x_\infty(k)| \leq R + 2\varepsilon$: la suite x_∞ est bien bornée.

Troisième étape : vérifier que x_n converge bien vers x_∞. Cette étape est une conséquence directe de (6), qui nous dit que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N} :\ \forall k_0 \in \mathbf{N},\ |x_n(k_0) - x_\infty(k_0)| < 2\varepsilon.$$

3. On va montrer que c_0 est fermé par la caractérisation séquentielle des fermés. Soit donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de c_0 convergeant vers une suite x_∞ de ℓ^∞. On veut montrer que $x_\infty \in c_0$, autrement dit que $\lim_{k\to+\infty} x_n(k) = 0$.

   Soit donc $\varepsilon > 0$. Alors, puisque x_n converge vers x_∞, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et tout $k \in \mathbf{N}$, on a $|x_n(k) - x_\infty(k)| < \varepsilon$. De plus, on sait que $x_N \in c_0$, donc il existe $K \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $k \geq K$, on a $|x_N(k)| < \varepsilon$. On en déduit que pour tout $k \geq K$, on a

$$|x_\infty(k)| \leq |x_\infty(k) - x_N(k)| + |x_N(k)| < 2\varepsilon.$$

   Cela montre que la suite x_∞ converge vers 0, donc que c_0 est fermé.

   Puisque c_0 est un sous-ensemble fermé de l'espace complet ℓ^∞, on en déduit qu'il est lui-même complet.

4. La question 1. fournit l'exemple d'une suite d'éléments de c_{00}, convergeant dans ℓ^∞, mais de limite n'étant pas dans c_{00}. Cela montre que c_{00} n'est pas fermé dans ℓ^∞, et donc qu'il n'est pas complet.

Exercice 10

Soit (X, d_X) un espace métrique et (E, d_E) un espace complet.

1. Montrer que l'espace $B(X,E)$, formé des fonctions bornées de X dans E, et muni de la distance
$$d(f,g) = \sup_{x\in X} d_E\big(f(x), g(x)\big)$$
   est complet.
2. Montrer que $C_b^0(X,E)$, formé des fonctions continues et bornées de X dans E, est un sous-espace fermé de $B(X,E)$ pour d (et est donc complet).

Corrigé : Il y a une méthode plus ou moins générale pour démontrer qu'un espace de fonctions est complet. Elle se déroule en trois étapes : on commence par se donner une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui est de Cauchy (ici, c'est une suite de fonctions bornées de X dans E), autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N} : \forall n, m \geq N, d(f_n, f_m) < \varepsilon. \tag{7}$$

Première étape : construire le candidat limite. On commence par deviner une fonction f qui est la limite potentielle de la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Ici, cette partie est déduite du fait que E est complet. Plus précisément, pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de E est une suite de Cauchy. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ et tous $n, m \geq N$ (où N est donné par l'équation (7)), on a (par définition de la distance d)

$$d_E(f_n(x), f_m(x)) \leq d(f_n, f_m) < \varepsilon. \tag{8}$$

Puisque c'est une suite de Cauchy, elle converge vers un élément de E, que l'on note $f(x)$; ceci nous construit notre fonction f.

Deuxième étape : vérifier que $f \in B(X,E)$. C'est une étape à ne pas oublier ! Il faut donc vérifier que f est bornée. Mais puisque la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy, elle est bornée : il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $d(f_n, g) \leq C$, où g désigne une fonction de X dans E, que l'on choisit constante égale à a. Autrement dit, pour tout $x \in X$ et tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$d_E(f_n(x), a) \leq C.$$

Mais puisque pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $f(x)$, il existe un entier $n \in \mathbf{N}$ (qui a priori dépend de x) tel que

$$d_E(f(x), f_n(x)) < 1.$$

Donc, par inégalité triangulaire,

$$d_E(f(x), a) < C + 1.$$

Par conséquent, la fonction f est bornée, et appartient donc à $B(X, E)$.

Troisième étape : vérifier que f_n converge bien vers f. Il s'agit de vérifier qu'on a bien une convergence de f_n vers f *pour la distance* d (et pas seulement une convergence ponctuelle). Soit donc $\varepsilon > 0$ et $n \geq N$ (où N, de nouveau, est donné par (7)), on veut montrer que $d(f_n, f) < 2\varepsilon$. De par la définition de d, cela revient à montrer que pour tout $x \in X$, on a $d_E(f_n(x), f(x)) < 2\varepsilon$. Mais puisque la suite $(f_m(x))_{m\in\mathbf{N}}$ converge vers $f(x)$ (dans E), on sait qu'il existe $m \geq N$ tel que $d_E(f_m(x), f(x)) < \varepsilon$. On écrit donc :

$$d_E(f_n(x), f(x)) \leq d_E(f_n(x), f_m(x)) + d_E(f_m(x), f(x)) < 2\varepsilon$$

(où la première majoration par ε vient de (8)). Donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge bien vers f au sens de la métrique d, par conséquent la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente

Conclusion : l'espace $B(X, E)$ est complet.

On veut maintenant montrer que le sous-espace $C^0_b(X, E)$ de $B(X, E)$ est fermé (pour d). Il s'agit donc de montrer que si une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions de $C^0_b(X, E)$ converge vers une fonction $f \in B(X, E)$, alors $f \in C^0_b(X, E)$; autrement dit une limite uniforme de fonctions continues et bornées est elle-même continue. Soit donc x un point quelconque de X, montrons que f est continue en x. Soit $\varepsilon > 0$, et $m \in \mathbf{N}$ tel que $d(f, f_m) < \varepsilon$.

On sait que f_m est continue (en x), donc il existe $\eta > 0$ tel que si $d_X(x, y) < \eta$, alors $d_Y(f_m(x), f_m(y)) < \varepsilon$. Donc, pour tout y vérifiant $d_X(x, y) < \eta$, on a, par inégalité triangulaire :

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq d_Y(f(x), f_m(x)) + d_Y(f_m(x), f_m(y)) + d_Y(f_m(y), f(y)) \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

On vient donc de montrer que f est continue en x, pour tout $x \in X$. Conclusion : $C^0_b(X, E)$ est fermé.

Exercice 11

Soit (X, d) un espace métrique complet et $f \colon X \to X$ une application telle qu'il existe $k \in]0, 1[$ et $p \geq 1$ tels que f^p soit k-lipschitzienne. Montrer que f admet un unique point fixe.

Corrigé : L'application f^p est contractante, donc par théorème du point fixe elle admet un unique point fixe, noté x_0. Donc $f(x_0) = f(f^p(x_0)) = f^{p+1}(x_0) = f^p(f(x_0))$, autrement dit $f(x_0)$ est un point fixe de f^p. Par unicité du point fixe de f^p, cela implique que $f(x_0) = x_0$. De plus, un point fixe de f est aussi un point fixe de f^p, donc l'unicité du point fixe de f^p implique l'unicité du point fixe de f.

Exercice 12

Soient $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^1 sur un intervalle ouvert I et $a \in I$ un point fixe de f.

1. On suppose que $|f'(a)| < 1$. Montrer qu'il existe un intervalle fermé J stable par f et contenant a tel que, pour tout $x_0 \in J$, la suite définie par $u_0 = x_0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geq 1$ converge vers a.
2. Sous les hypothèses de la question précédente, on suppose de plus que f' ne s'annule pas sur J. Montrer que si $x_0 \neq a$, alors $u_n \neq a$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et que $u_{n+1} - a \sim f'(a)(u_n - a)$.

Corrigé :

1. On sait que la fonction f est de classe C^1. Par conséquent, sa dérivée est continue et donc (puisque $|f'(a)| < 1$) il existe un réel $\alpha \in [0, 1[$ et un réel $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [a - \delta, a + \delta]$, on ait $|f'(x)| \leq \alpha$. Cette dernière condition implique que la restriction de la fonction f à l'intervalle $J = [a - \delta, a + \delta]$ est α-lipschitzienne[1], et par conséquent contractante. Il s'agit maintenant de montrer que l'intervalle J est stable par f.

   Soit $x \in J$. Alors $|x - a| \leq \delta$. Par le fait que f est α-lipschitzienne sur J, cela implique que $|f(x) - f(a)| \leq \alpha\delta$. Mais $f(a) = a$ et $\alpha \in [0, 1[$, donc $|f(x) - a| \leq \delta$, autrement dit $f(x) \in [a - \alpha, a + \alpha] = J$.

   Ainsi, J est stable par f et f y est contractante. De plus, J est un segment de $\mathbf{R}$ et est donc complet. On peut donc appliquer le théorème de Picard qui nous indique que pour tout $x_0 \in J$, la suite définie par $u_0 = x_0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n > 1$ converge vers a.
2. Puisque f' ne s'annule pas sur J, on sait que f est strictement monotone sur J. En particulier, elle y est injective et donc si $f(x) = a$, alors $f(x) = f(a)$ et donc $x = a$. Donc si $u_{n+1} = f(u_n) = a$, alors $u_n = a$. Par récurrence descendente, on montre que si $u_n = a$, alors $u_0 = x_0 = a$. En considérant la contraposée, on en déduit que si $x_0 \neq a$, alors $u_n \neq a$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

   Prenons donc $x_0 \neq a$. On applique maintenant la formule de Taylor-Lagrange : pour tout n, il existe un point y_n situé entre a et u_n tel que

   $$f(u_n) = f(a) + (u_n - a)f'(y_n),$$

   d'où

   $$f(u_n) - f(a) = (u_n - a)f'(y_n),$$

   et puisque $f(u_n) = u_{n+1}$,$f(a) = a$ et $u_n \neq a$,

   $$\frac{u_{n+1} - a}{u_n - a} = f'(y_n).$$

   Or, u_n tend vers a, donc par continuité de f', $f'(y_n)$ tend vers $f'(a)$. On a donc la limite

   $$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1} - a}{u_n - a} = f'(a)$$

   et finalement $u_{n+1} - a \sim f'(a)(u_n - a)$.

Exercice 14

Un nombre réel z est appelé *nombre de Liouville* s'il est irrationnel et possède la propriété que pour tout entier $n > 0$ il existe des entiers p et q tels que $q > 1$ et

$$\left| z - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}.$$

1. Par l'inégalité des accroissements finis.

1. Montrer que le nombre
$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{10^{k!}}$$
est un nombre de Liouville.
2. Écrire l'ensemble $I = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ des irrationnels comme une intersection dénombrable d'ouverts denses.
3. Montrer que l'ensemble $\mathcal{L}$ des nombres de Liouville est une intersection dénombrable d'ouverts denses. En déduire que tout intervalle contient une infinité de nombres de Liouville.

Corrigé :

1. Posons
$$x = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{10^{k!}} \qquad \text{et} \qquad x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^{k!}}.$$
Il est alors évident que x_n est rationnel pour tout $n \geq 1$, et que de plus son dénominateur q_n est inférieur à $10^{n!}$. De plus,
$$\begin{aligned}
|x - x_n| &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^{(n+1)!+i}} \\
&= \frac{1}{10^{(n+1)!}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^i} \\
&= \frac{1}{10^{n!(n+1)}} \frac{10}{9} \\
&= \frac{1}{(10^{n!})^{n+1}} \frac{10}{9} \\
&\leq \frac{1}{q_n^{n+1}} \frac{10}{9} \\
&= \frac{1}{q_n^n} \frac{10}{9q_n} \\
&\leq \frac{1}{q_n^n}.
\end{aligned}$$
Par conséquent, le nombre x vérifie bien l'inégalité de la question. Mais encore faut-il montrer que x est irrationnel…
Supposons que x soit rationnel, on peut donc écrire $x = p/q$, avec $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$. On écrit de même $x_n = p_n/q_n$. Le calcul précédent se réécrit
$$\left| \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^n}.$$
Mais
$$\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{pq_n + qp_n}{qq_n},$$
où $pq_n + qp_n$ est un entier non nul (sinon on aurait $x = x_n$), donc
$$\left| \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{1}{qq_n},$$

on en déduit que
$$\frac{1}{qq_n} \leq \frac{1}{q_n^n} \quad \Longleftrightarrow q_n^{n-1} \leq q,$$
et ce pour tout $n \in \mathbf{N}$. Or ceci est impossible : sinon les q_n seraient égaux à 1 à partir d'un certain rang. On aboutit à une contradiction, ce qui signifie que x est irrationnel.

2. On sait que $\mathbf{Q}$ est un ensemble dénombrable : on peut écrire
$$\mathbf{Q} = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \{x_n\}.$$
Alors
$$\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{R} \setminus \{x_n\},$$
où pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'ensemble $\mathbf{R} \setminus \{x_n\}$ est un ouvert dense de $\mathbf{R}$.

3. Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble défini par $\mathcal{M} = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{M}_n$, avec
$$\mathcal{M}_n = \left\{ z \in \mathbf{R} \mid \exists p, q : \left| z - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n} \right\}.$$
On voit facilement que pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'ensemble $\mathcal{M}_n$ est ouvert lorsqu'on l'écrit comme l'union d'ouverts (en fait d'intervalles ouverts)
$$\mathcal{M}_n = \bigcup_{p \in \mathbf{Z}} \bigcup_{q \in \mathbf{N}^*} \left\{ z \in \mathbf{R} \mid \left| z - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n} \right\},$$
puis que $\mathcal{M}_n$ est dense, car il contient $\mathbf{Q}$.
Donc $\mathcal{M} \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$ est une intersection dénombrable d'ouverts denses (par la question précédente, $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ est lui-même une intersection dénombrable d'ouverts denses), et coïncide avec l'ensemble des nombres de Liouville. Le théorème de Baire nous assure alors que cet ensemble est lui-même dense ; en particulier tout intervalle de longueur non nulle contient une infinité de nombres de Liouville.