TD 7 – Calcul Différentiel

1 Différentielle, dérivées partielles

Exercice 1
Soit $f : E \to F$ une application entre deux espaces vectoriels normés, E de dimension finie, et x_0 un point de E. Quels liens logiques y a-t-il entre les propriétés suivantes ?

(i) f est différentiable en x_0,

(ii) f admet en x_0 des dérivées directionnelles suivant tout vecteur (non nul),

(iii) f admet des dérivées partielles en x_0,

(iv) f est continue en x_0.

Exercice 2
Chacune des formules suivantes définit une fonction f sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, que l'on prolonge en posant $f(0,0) = 0$. Pour chacune des fonctions obtenues, répondre aux questions suivantes. Est-elle continue en $(0,0)$? L'application admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$? Des dérivées directionnelles ? Est-elle différentiable en $(0,0)$?

$$(i)\ \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad \text{et} \qquad (ii)\ \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

Exercice 3
Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ définie par $f(x,y) = (\sin(x+y), 2xy^2, y)$.

1. (i) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ en un point (x_0, y_0) et écrire la matrice jacobienne.

   (ii) Rappeler le lien entre dérivées partielles et différentielle et donner la valeur de $Df(x_0,y_0)(\vec{h})$ pour un vecteur $\vec{h} = (h_x, h_y)$ quelconque.

   (iii) Ecrire l'approximation de $f(x_0 + \vec{h})$ fournie par la différentielle et donner la version matricielle.

2. Mêmes questions pour la fonction définie par $g(a,b,c) = (2a + b^2c, ae^b)$.

3. Comment obtient-on la matrice de l'application linéaire $D(f \circ g)(a,b,c)$ à partir de celles de Df et Dg ?

Exercice 4
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et $f : I^2 \to \mathbf{R}$ une fonction différentiable. Montrer que la fonction $g : I \to \mathbf{R}$ définie par $g(x) = f(x,x)$ est dérivable, et calculer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 5
Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ différentiable telle que $f(0) = 0$. Montrer que si Df_0 ne possède aucune valeur propre égale à 1, alors il existe un voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}^m$ tel que $f(x) \neq x$ pour chaque $x \in U \setminus \{0\}$.

Exercice 6
Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et E un espace vectoriel normé.

1. Vérifier qu'une application $\gamma : I \to E$ qui est dérivable en t_0 est aussi différentiable en t_0, et que sa différentielle est bien $D\gamma(t_0) : h \mapsto \gamma'(t_0).h$.
2. En déduire, à l'aide du théorème de composition, la formule $(f \circ \gamma)'(t_0) = Df(\gamma(t_0)).\gamma'(t_0)$.

Exercice 7
Soit f un homéomorphisme entre deux voisinages ouverts de 0 dans un espace vectoriel normé.

1. Montrer que si, autour de 0, on a $f(h) = h + o(||h||)$, alors on a aussi près de 0 : $f^{-1}(k) = k + o(||k||)$.
2. En déduire le résultat de cours suivant : si f est un homéomorphisme entre deux ouverts U et V d'espaces vectoriels normés tel qu'en un point $a \in U$ f est différentiable de différentielle inversible, alors f^{-1} est différentiable en $b = f(a)$ et $D(f^{-1})_b = (Df_a)^{-1}$.

Exercice 8
1. Soit $p : \mathbf{R}_+^* \times]0, 2\pi[\to \mathbf{R}^2$ la fonction « coordonnées polaires »

$$(r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

   Montrer que p définit un difféomorphisme entre $\mathbf{R}_+^* \times]0, 2\pi[$ et un ouvert U de $\mathbf{R}^2$.
2. Justifier l'énoncé suivant trouvé dans une livre de physique : « On écrit la fonction $z = f(x, y)$ en coordonnées polaires et on trouve

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta \quad \text{et} \quad \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta. \text{ »}$$

Exercice 9
Montrer que la boule unité ouverte de $\mathbf{R}^n$ est difféomorphe à $\mathbf{R}^n$.

Exercice 10
Soit $f : \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ définie par $f(X) = X^{-1}$.

1. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbf{R})$ (qu'on munit d'une norme subordonnée).
2. Montrer que si X est une matrice $n \times n$ telle que $\|X\| < 1$, alors $I_n - X$ est inversible et son inverse est $\sum_{k=0}^{\infty} X^k$. En déduire la différentiabilité et la différentielle de f en I_n.
3. A l'aide la formule $(A + H)^{-1} = A^{-1}(I_n + HA^{-1})^{-1}$, en déduire la différentiabilité et la différentielle de f en tout point A de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

Exercice 11
Soit $X = C^0([0, 1], \mathbf{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme. Montrer que l'application

$$f \mapsto \int_0^1 f^3(t)dt$$

de X dans $\mathbf{R}$ est différentiable, et calculer sa différentielle.

Exercice 12
Montrer que le système suivant admet une unique solution.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}\cos(x+y) \\ y = \frac{1}{3}\sin(x-y) \end{cases}$$

Aide : on pourra penser à utiliser l'inégalité des accroissements finis puis le théorème de point fixe de Picard.

Exercice 13
Un ensemble $K \subset \mathbf{R}^n$ a mesure nulle si pour chaque $\epsilon > 0$, il existe un recouvrement dénombreable de K par de cubes de côté c_i tels que $\Sigma_i c_i^n < \epsilon$. Soient $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert, $f : U \to \mathbf{R}^n$ de classe C^1, et $K \subset U$ un compact avec mesure nulle. Montrer $f(K)$ a également mesure nulle. On pourra procéder comme suit.

1. Montrer pour chaque $a \in K$, il existe une boule ouverte B_a centrée en a, un $k_a \geq 0$ tels que $\|f(x) - f(y)\|_\infty \leq k_a\|x - y\|_\infty$ pour tout $x, y \in B_a$. (Ici $\|x\|_\infty = \max |x_i|$.)
2. Montrer que $f(K \cap B_a)$ a mesure nulle.
3. Montrer que $f(K)$ peut être couvert par une réunion finie d'ensembles de mesure nulle et conclure.

Utiliser ce résultat pour montrer si $N > n$, alors l'image d'une fonction de classe C^1 de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^N$ ne peut pas contenir une boule ouverte.

2 Problèmes d'extrema

Exercice 14
On considère la fonction f de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^5 - x^2y + y.$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$ et calculer, en tout point, sa matrice jacobienne et son gradient. Déterminer les points critiques de f.

Exercice 15
Montrer que la fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, définie par

$$f(x, y) = (x^2 + y^4 - e^{-y^2} + e^{-x^2})$$

admet un minimum global, et le déterminer.

Exercice 16
On munit $\mathbf{R}^n$ du produit scalaire canonique $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de sa norme associée $\|\cdot\|$. Étant donné $a \in \mathbf{R}^n$, $a \neq 0$, on considère la fonction $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, par :

$$f(x) = \langle a, x\rangle e^{-\|x\|^2}.$$

1. Démontrer que f est différentiable sur $\mathbf{R}^n$ et calculer $\nabla f(x)$ en tout point $x \in \mathbf{R}^n$.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. En déduire les extrema de f

Exercice 17 (Un peu d'extrema liés)
Soient α et β deux nombres réels. Déterminer le maximum et le minimum sur le cercle unité $\mathbf{S}^1$ de $\mathbf{R}^2$ de la fonction $f(x, y) = \alpha x + \beta y$.

Exercice 18 (Un peu d'extrema liés, tome 2)
Let C be the subset of the plane defined by

$$C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy + x = \varphi\},$$

where $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ is the golden ratio. Determine the distance of the set C to the origin.

Exercice 19 (Fermat Point)
Let ABC be a non flat plane triangle. We want to find the minimum in the plane of the map

$$f(M) = MA + MB + MC.$$

1. Show that if ABC is a triangle of the plane, then there exists a point M of the plane minimizing the sum of the distances to A, B and C.
2. Prove that the map $x \mapsto \|x\|_2$ is differentiable on $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$. Deduce that f is differentiable on $\mathbf{R}^2 \setminus \{A, B, C\}$.
3. Prove that if $P \notin \{A, B, C\}$ is a local extremum of f, then
$$\frac{\overrightarrow{PA}}{PA} + \frac{\overrightarrow{PB}}{PB} + \frac{\overrightarrow{PC}}{PC} = 0$$
4. Deduce that $\widehat{APB} = \widehat{BPC} = \widehat{CPA} = 2\pi/3$.
5. Using the fact that for any angle α, the set of points M of the plane such that $\widehat{AMB} = \alpha$ is an arc of circle passing through A and B, prove that f has at most one local extremum different from A, B and C.
6. (difficult) Prove that if all angles of ABC are smaller than $2\pi/3$, then A, B and C are not local minima of f, and thus that f has a unique minimum, lying in the interior of ABC.

Exercice 20
Let $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ be defined by $f(x) = x_1 x_2 \dots x_n$, and X be the set

$$X = \{(x_1 \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n_+ \mid x_1 + \cdots + x_n = n\}.$$

1. Determine the maximum of f on the set X.
2. Deduce from it the inequality between arithmetic and geometric means : for any $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n_+$,
$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

3 Inversion locale, fonctions implicites

Exercice 21
Difféomorphisme ou non ?

1. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x$.
2. $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, t \mapsto e^{it}$.
3. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$.

4. Un isomorphisme linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie.
5. Un isomorphisme linéaire entre espaces de Banach.

Exercice 22
Let $F(x,y) = x^2 + y^4 - 3xy + x$.

1. Compute and represent the gradient vector at the point $(2,1)$. What can be deduced for the level line
$$L_1 = \{(x,y) | F(x,y) = 1\} \ ?$$
2. Show that the equation $x^2 + y^4 - 3xy + x = 1$ defines implicitly y as a map of x in a neighbourhood of $(2,1)$.
3. Differentiate the equation $F(x,\varphi(x)) = 0$. Deduce the derivative $\varphi'(2)$.

Exercice 23
Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Prouver que f est différentiable sur $\mathbf{R}^2$ et que $Df(x,y)$ est bijective en tout point (x,y) de $\mathbf{R}^2$. L'application f est-elle injective ?

Exercice 24
Soient U un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbf{R}$. et $\Psi : U \to M_n(\mathbf{R})$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\Psi(0) = I_n$.

1. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de 0 contenu dans U, dont l'image $\Psi(V)$ est contenue dans $GL_n(\mathbf{R})$.
2. Montrer que l'application $x \mapsto \Psi(x) \cdot x$ est un difféomorphisme au voisinage de 0.

Exercice 25
Montrer que le système d'équations

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + t = 2 \\ x^3 + y^3 + z^3 + t^2 = 0 \end{cases}$$

a une unique solution $(x,y,z) = f(t)$ proche de $(0,-1,1)$, pour t assez petit. Déterminer la dérivée de f en 0.

4 Sous-variétés

Exercice 26
Les ensembles suivants sont-ils des sous-variétés ? Si oui, déterminer leur dimension :

1. Le graphe de la fonction de la fonction $x \mapsto |x|$.
2. La sphère $\mathbf{S}^n$ définie par
$$\mathbf{S}^n = \left\{x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\right\}.$$
3. Le tore $\mathbf{T}^n$ défini par
$$\mathbf{T}^n = \left\{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n \mid |z_1| = \cdots = |z_n| = 1\right\}.$$
4. L'ensemble défini par $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^3 = y^2\}$.

5. Pour $p \in [1, +\infty[$, la boule unité de la norme $\| \cdot \|_q$

$$\mathbf{S}_q = \big\{ x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \sum_i |x_i|^q = 1 \big\}.$$

6. Le groupe orthogonal $O_n(\mathbf{R}) = \big\{ A \in M_n(\mathbf{R}) \mid A^t A = I_n \big\}$.
7. Le groupe spécial linéaire $SL_n(\mathbf{R}) = \big\{ A \in M_n(\mathbf{R}) \mid \det(A) = 1 \big\}$.

5 Différentielles secondes

Exercice 27
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u : E \to \mathbf{R}^n$ une application linéaire. On fixe $a \in \mathbf{R}^n$ et on définit $f : E \to \mathbf{R}$ par $f(x) = ||u(x) - a||_2^2$, où la norme $|| \cdot ||_2$ est la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^n$. Montrer que f est de classe C^2. Calculer $Df(x)$ et $D^2 f(x)$ pour tout $x \in E$.

Exercice 28
Soient E, F et G des espaces vectoriels de dimension finie et $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire. Montrer que B est de classe C^2 et déterminer la différentielle seconde $D^2 B$.

Exercice 29
Pour chacune des fonctions $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ suivantes, déterminer les points critiques et leur nature.

1. $f(x, y) = x^4 - x^2 + y^2$,
2. $f(x, y) = \cos x + y^2$,
3. $f(x, y) = x^2 + y^3$.

Exercice 30
Soient E un espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme quelconque, et $f : E \to \mathbf{R}_+^*$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \|D^2 f(x)\| \leq M.$$

1. Montrer que si $h \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, on a :

$$\forall x \in E, \quad f(x) + \lambda Df(x) \cdot h + \frac{\lambda^2}{2} M \|h\|^2 > 0.$$

2. En déduire que $\|Df(x)\| \leq \sqrt{2Mf(x)}$.

Exercice 31 (Rouvière p.329)
Soit U un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$ et $f : U \to \mathbf{R}$ une application deux fois différentiable sur U. Montrer que f est une fonction convexe sur U si et seulement si $D^2 f$ est une forme quadratique positive en tout point, i.e.

$$D^2 f_x(h, h) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i h_j \geq 0 \quad \forall x \in U, h \in \mathbf{R}^n.$$

(on pourra utiliser le fait qu'une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes).