TD 3 – Espaces complets

1 Généralités, suites de Cauchy

Exercice 1
On se place dans un espace métrique (X, d).

1. Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.
2. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.
3. Montrer que toute suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence est convergente (la suite possède alors une seule valeur d'adhérence : sa limite).

Exercice 2
On rappelle qu'une série réelle $\sum_{n\geq 0} a_n$ est dite *absolument convergente* si la série $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ est convergente.

1. Montrer que toute série réelle absolument convergente est convergente (indication : montrer que la suite des sommes partielles est une suite de Cauchy).
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge.
3. On munit $M_n(\mathbf{R})$ de la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\|A\| = \sup_{x\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

   (où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne).

   a) Vérifier que $\|\cdot\|$ est bien une norme, qui de plus satisfait $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

   b) Montrer que pour tout $A \in M_n(\mathbf{R})$, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}$ converge (pour la distance issue de la norme $\|\cdot\|$). Sa limite est appelée *exponentielle* de la matrice A.

Exercice 3
Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de X. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on définit $X_k = \{x_n \mid n \leq k\}$. Prouver l'équivalence entre les conditions suivantes :

1. La suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy.
2. La suite $(\delta(X_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0 (où $\delta(A)$ désigne le diamètre de la partie $A \subset X$).

Exercice 4
Soient d, D deux distances équivalentes sur un ensemble non vide X, et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de X.

1. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy dans (X, d) si et seulement si elle est de Cauchy dans (X, D).

2. En déduire que (X,d) est complet si et seulement si (X,D) est complet.

Exercice 5 (Théorème des fermés emboîtés)
Soit (X,d) un espace métrique. On considère la propriété suivante : toute suite $(F_n)_{n\geq 0}$ décroissante de fermés non-vides de X dont le diamètre tend vers 0 (ce qui sous-entend que le diamètre de F_n est fini à partir d'un certain rang) a une intersection non-vide. Montrer que (X,d) est complet si et seulement si cette propriété est vérifiée.

Exercice 6
Soit (X,d) un espace métrique, et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de X vérifiant

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall p \in \mathbf{N}, d(x_n, x_{n+p}) < \frac{1}{n}.$$

Montrer qu'elle est de Cauchy.

Exercice 7 (Théorème de prolongement)
Soient (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques. On suppose que (Y,d_Y) est complet, et on considère une partie $A \subset X$ dense dans X. Soit $f\colon A \to Y$ une fonction uniformément continue.

Montrer qu'il existe une unique fonction continue $g\colon X \to Y$ qui prolonge f, et vérifier que g est uniformément continue.

2 Exemples d'espaces complets, ou pas

Exercice 8
En utilisant la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$x_n = \frac{\lfloor 10^n\sqrt{2}\rfloor}{10^n},$$

montrer que $\mathbf{Q}$ (muni de la distance issue de la valeur absolue) n'est pas complet.

Exercice 9
Soit ℓ^∞ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des suites bornées muni de la distance uniforme, définie de la façon suivante : pour $x = (x(k))_{k\in\mathbf{N}}$ et $y = (y(k))_{k\in\mathbf{N}}$ dans ℓ^∞, on pose

$$d(x,y) = \sup_{k\geq 0} |x(k) - y(k)|.$$

On note les éléments de ℓ^∞ comme des fonctions de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$, pour clarifier les notations concernant les suites de suites.

1. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0\dots\right).$$

   Autrement dit, $x_n \in \ell^\infty$ est définie par $x_n(k) = \frac{1}{k}$ si $k \leq n$, et $x_n(k) = 0$ sinon. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente, et donner sa limite.
2. Montrer que (ℓ^∞, d) est complet.
3. Soit c_0 le sous-espace de ℓ^∞ formé des suites qui convergent vers 0. Montrer que c_0 est fermé dans ℓ^∞, puis que c_0 est complet.
4. Soit c_{00} le sous-espace de ℓ^∞ formé des suites qui n'ont qu'un nombre fini de termes non nuls. Est-il complet ?

Exercice 10
Soit (X, d_X) un espace métrique et (E, d_E) un espace complet.

1. Montrer que l'espace $B(X, E)$, formé des fonctions bornées de X dans E, et muni de la distance
$$d(f, g) = \sup_{x \in X} d_X\big(f(x), g(x)\big)$$
est complet.
2. Montrer que $C_b^0(X, E)$, formé des fonctions continues et bornées de X dans E, est un sous-espace fermé de $B(X, E)$ pour d (et est donc complet).

3 Théorème du point fixe de Picard

Exercice 11
Soit (X, d) un espace métrique complet et $f\colon X \to X$ une application telle qu'il existe $k \in]0, 1[$ et $p \geq 1$ tels que f^p soit k-lipschitzienne. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 12
Soient $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^1 sur un intervalle ouvert I et $a \in I$ un point fixe de f.

1. On suppose que $|f'(a)| < 1$. Montrer qu'il existe un intervalle fermé J stable par f et contenant a tel que, pour tout $x_0 \in J$, la suite définie par $u_0 = x_0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n > 1$ converge vers a.
2. Sous les hypothèses de la question précédente, on suppose de plus que f' ne s'annule pas sur J. Montrer que si $x_0 \neq a$, alors $u_n \neq a$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et que $u_{n+1} - a \sim f'(a)(u_n - a)$.

4 Théorème de Baire

Exercice 13
Traduire le théorème de Baire en termes d'union de fermés. En déduire que $\mathbf{R}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 14
Un nombre réel z est appelé *nombre de Liouville* s'il est irrationnel et possède la propriété que pour tout entier $n > 0$ il existe des entiers p et q tels que $q > 1$ et
$$\left| z - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}.$$

1. Montrer que le nombre
$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{10^{k!}}$$
est un nombre de Liouville.
2. Écrire l'ensemble $I = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ des irrationnels comme une intersection dénombrable d'ouverts denses.
3. Montrer que l'ensemble $\mathcal{L}$ des nombres de Liouville est une intersection dénombrable d'ouverts denses. En déduire que tout intervalle contient une infinité de nombres de Liouville.