TD 2 – Suites, continuité

Exercice 1
Soient (X, d) un espace métrique, $(u_n) \in X^{\mathbf{N}}$ une suite et $\ell \in X$.

1. Montrer que si (u_n) admet une limite, alors elle est unique.
2. Montrer que si $u_n \to \ell$, alors $\{u_n : n \in \mathbf{N}\} \cup \{\ell\}$ est fermé dans X.

Exercice 2
Montrer que si une suite est convergente, alors elle est bornée.

Exercice 3
Montrer que si une suite converge vers une limite ℓ, alors chacune de ses sous-suites converge vers ℓ.

Exercice 4
Soient (X, d_X), (Y, d_Y) et (Z, d_Z) trois espaces métriques, et $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications. Montrer que si f est continue en $a \in X$ et g est continue en $f(a) \in Y$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Exercice 5
Soit la fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $x_0 \in \mathbf{R}$ fixé, la fonction $y \mapsto f(x_0, y)$ est continue. De même, pour tout $y_0 \in \mathbf{R}$ fixé, la fonction $x \mapsto f(x, y_0)$ est continue.
2. Et pourtant... prouver que f n'est pas continue en 0.

Exercice 6
Montrer que :

1. si $u_n \to a$ et $v_n \to b$, alors $u_n + v_n \to a + b$;
2. le produit de deux fonctions continues est continue.

Exercice 7
Trouver une fonction continue $f : X \to Y$ et un ouvert $O \subset X$ tels que $f(O) \subset Y$ ne soit pas un ouvert. Même question avec un fermé.

Exercice 8
On dit qu'une application $f : X \to Y$ est *uniformément continue* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : d(x,y) < \eta \implies d\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon.$$

Rappelons qu'une application $f : X \to Y$ est dite *k-lipschitzenne* si pour tous x, y,

$$d\big(f(x), f(y)\big) < kd(x,y).$$

1. Vérifier qu'une application lipschitzienne est uniformément continue.
2. Montrer qu'une application uniformément continue est continue.

Exercice 9
Soit $C^0([0,1], \mathbf{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$. On rappelle que $C^0([0,1], \mathbf{R})$ est muni d'une distance "canonique" $d_\infty(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, l'application

$$\begin{aligned} \varphi : C^0([0,1], \mathbf{R}) &\to \mathbf{R} \\ f &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

   est continue.
2. Vérifier que si $f_n \to f$ au sens de cette métrique, alors f est continue.
3. Montrer que l'ensemble des fonctions croissantes est fermé dans $C^0([0,1], \mathbf{R})$.

Exercice 10
On rappelle que $GL_n(\mathbf{R})$ désigne le sous-ensemble de $M_n(\mathbf{R})$ formé des matrices inversibles. Si on identifie $M_n(\mathbf{R})$ avec l'ensemble des familles de n vecteurs de $\mathbf{R}^n$, on voit qu'une matrice est inversible si et seulement si la famille forme une base de $\mathbf{R}^n$.

1. Montrer que $GL_n(\mathbf{R})$ est dense dans $M_n(\mathbf{R})$.

Rappelons que l'application déterminant det : $m_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ est un polynôme en les coefficients de la matrice (par exemple, $\det(M) = ad?bc$ sur $M_2(\mathbf{R})$) ; d'autre part une matrice est inversible si et seulement si son déterminant n'est pas nul.

2. Montrer que toute fonction polynomiale est continue.
3. En déduire que que $GL_n(\mathbf{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbf{R})$.
4. On rappelle que $SL_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices de déterminant 1, et que $O_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices orthogonales (i.e. telles que $M^tM = \mathrm{Id}$). Les ensembles $SL_n(\mathbf{R})$ et $O_n(\mathbf{R})$ sont-ils ouverts ? fermés ?