Théorème de Lax

Définition 1. Nous noterons λ la mesure de Lebesgue. L'ensemble $\mathrm{Homeo}(I^n, \lambda)$ sera l'ensemble des homéomorphismes de I^n préservant la mesure de Lebesgue, i.e. tels que pour tout mesurable A, $\lambda(f^{-1}(A)) = \lambda(A)$.

Définition 2 (Subdivisions dyadiques)**.** Nous appellerons *cube dyadique d'ordre* m de I^n tout cube du type $\prod_{i=1}^{n}[\frac{k_i}{2^m}, \frac{k_i+1}{2^m}]$ avec $0 \leq k_i \leq 2^m - 1$ pour tout i. Nous appellerons *subdivision dyadique d'ordre* m du cube I^n, et nous notons $\mathcal{D}_m$, la collection des cubes dyadiques d'ordre m de I^n.

Théorème 3 (Lax, Alpern)**.** *Soient* $f \in \mathrm{Homeo}(I^n, \lambda)$ *et* $\varepsilon > 0$. *Alors il existe un entier* m *et une permutation dyadique cyclique d'ordre* m*, notée* f_m*, telle que* $d(f, f_m) < \varepsilon$.

Pour prouver ce théorème nous aurons besoin du « lemme de mariage » :

Lemme 4 (Lemme de mariage)**.** *Soient* E *et* F *deux ensembles finis, et* $\approx$ *une relation entre les éléments de* E *et de* F*. On suppose que :*

$$\forall E' \subset E, \quad \#E' \leq \#\left\{f \in F \mid \exists e \in E' : e \approx f\right\},$$

autrement dit l'ensemble des éléments de F *associés à un sous-ensemble* E' *de* E *est de cardinal plus grand que celui de* E'*. Alors il existe une application injective* $\Phi : E \to F$ *telle que pour tout* $e \in E$, $e \approx \Phi(e)$.

Ainsi que d'un lemme purement combinatoire :

Lemme 5 (Approximations cycliques dans $\mathfrak{S}_q$)**.** *Soient* $q \in \mathbf{N}^*$ *et* $\sigma \in \mathfrak{S}_q$ *(on voit* $\mathfrak{S}_q$ *comme le groupe des permutations de* $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$*). Alors il existe* $\tau \in \mathfrak{S}_q$ *telle que* $|\tau(k) - k| \leq 2$ *pour tout* k *(où* $|.|$ *désigne la distance dans* $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$*), et telle que la permutation* $\tau\sigma$ *soit cyclique.*

Preuve du lemme 4. Ce lemme se montre par récurrence sur le cardinal de E. La propriété est évidente pour $\#E = 1$. Supposons qu'elle soit vraie pour tout ensemble de cardinal q, et soit E un ensemble de cardinal $q + 1$. On a alors deux cas :

Premier cas : Pour tout sous-ensemble strict E' de E,

$$\#E' < \#\left\{f \in F \mid \exists e \in E' : e \approx f\right\}.$$

Choisissons alors un élément $e_0 \in E$, et un élément $f_0 \in F$ en relation avec e_0. Posons $\Phi(e_0) = f_0$. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $E \setminus \{e_0\}$ et à $F \setminus \{f_0\}$, ce qui permet de définir Φ sur $E \setminus \{e_0\}$; on a alors défini Φ sur E tout entier.

Second cas : Il existe un sous-ensemble strict E' de E tel que

$$\#E' = \#\{f \in F \mid \exists e \in E' : e \approx f\}\,.$$

Dans ce cas on peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux ensembles E' et $F' = \{f \in F \mid \exists e \in E' : e \approx f\}$, mais aussi à $E \setminus E'$ et à $F \setminus F'$; en effet, on a pour tout G inclus dans $E \setminus E'$:

$$\begin{aligned}\#(G \cup E') &\leq \#\left\{f \in F \mid \exists e \in (G \cup E') : e \approx f\right\} \\ &\leq \#\left\{f \in F' \mid \exists e \in (G \cup E') : e \approx f\right\} \\ &\quad + \#\left\{f \in (F \setminus F') \mid \exists e \in (G \cup E') : e \approx f\right\},\end{aligned}$$

d'où :

$$\#G + \#E' \leq \#F' + \#\left\{f \in (F \setminus F') \mid \exists e \in G : e \approx f\right\},$$

et donc :

$$\#G \leq \#\left\{f \in (F \setminus F') \mid \exists e \in G : e \approx f\right\}.$$

On définit ainsi Φ sur E' et $E \setminus E'$, donc sur E tout entier.

On a bien défini une application Φ dans les deux cas, ceci termine la récurrence. $\square$

Preuve du lemme 5. Posons $k = \lceil q/2 \rceil$. Pour tout $1 \leq i \leq k$, on considère la permutation r_i définie par $r_i = (2i{-}1\ 2i)$ si $2i{-}1$ et $2i$ sont dans deux cycles différents (de longueurs éventuellement 1) de σ, $r_i = \mathrm{Id}$ sinon. Remarquant que :

$$\begin{gathered}(2i{-}1\ 2i)\,(a_1 \cdots a_p\ 2i{-}1\ a_{p+2} \cdots a_r)\,(b_1 \cdots b_q\ 2i\ b_{q+2} \cdots b_s) = \\ (a_1 \cdots a_p\ 2i\ b_{q+2} \cdots b_s\ b_1 \cdots b_q\ 2i{-}1\ a_{p+2} \cdots a_r)\end{gathered} \tag{1}$$

et posant $\tau_1 = r_1 \cdots r_k$, on se rend compte que l'on a réuni deux par deux dans $\tau_1\sigma$ tous les cycles contenant $2i{-}1$ et $2i$. On recommence l'opération, mais avec cette fois-ci les couples $2i$ et $2i{+}1$. On obtient alors une permutation τ qui vérifie les conclusions du lemme. $\square$

Preuve du théorème 3. Soit $f \in \mathrm{Homeo}(I^n, \lambda)$. Considérons un entier m tel que les cubes de la subdivision $\mathcal{D}_m$, ainsi que leurs images [1] par f, aient un diamètre plus petit que ε. Pour tout couple (C, C') de cubes de $\mathcal{D}_m$, on définit une relation $\approx$ entre les éléments de $\mathcal{D}_m$ comme suit : $C \approx C'$ si et seulement si l'image de C par f intersecte C' non trivialement. Puisque f préserve le volume, l'image de l'union de k cubes intersecte au moins k cubes, ce qui fait que l'on se retrouve dans les hypothèses du lemme de mariage : il existe une application injective σ_m de $\mathcal{D}_m$ dans $\mathcal{D}_m$ (donc bijective) telle que, posant f_m la permutation dyadique d'ordre m associée à σ_m, pour tout cube C, $f_m(C)$ intersecte $f(C)$ non trivialement. Alors on a :

$$d(f, f_m) \leq \sup_{C \in \mathcal{D}_m} \big(\mathrm{diam}(C)\big) + \sup_{C \in \mathcal{D}_m} \big(\mathrm{diam}(f(C))\big) \leq 2\varepsilon$$

1. Cela est possible par uniforme continuité de f.

Reste à montrer que l'on peut prendre pour f_m une permutation cyclique. Numérotant les cubes de manière à ce que deux cubes consécutifs soient adjacents, on utilise le lemme 5, qui nous donne une permutation cyclique f'_m qui est $2\sup(\mathrm{diam}(C))$-proche de f_m. On a donc trouvé un entier m et une permutation cyclique f'_m de $\mathcal{D}_m$, qui est 4ε-proche de f en topologie uniforme. $\square$

Il existe une variante du théorème 3 dans laquelle la permutation cyclique est remplacée par une *permutation bicyclique* ; on pourrait sûrement montrer de nombreuses autres variantes du théorème 3 où les permutations cycliques seraient remplacées par d'autres types de permutations.

Définition 6 (Permutation bicyclique)**.** Nous appelerons *permutation bicylique* d'ordre m de X une permutation dyadique d'ordre m ayant exactement deux cycles, et telle que les longueurs de ces deux cycles soient premières entre elles.

Corollaire 7 (Variante du théorème de Lax)**.** *Soit un homéomorphisme* $f \in \mathrm{Homeo}(I^n, \lambda)$ *et* $\varepsilon > 0$*. Alors il existe un entier* m *et une permutation dyadique bicyclique* f_m *telle que* $d_{forte}(f, f_m) < \varepsilon$*.*

Preuve du corollaire 7. Soit $f \in \mathrm{Homeo}(I^n, \lambda)$ et $\varepsilon > 0$. Le théorème 3 donne un entier m et une permutation cyclique dyadique f_m de $\mathcal{D}_m$ à distance au plus ε de f.

Montrons tout d'abord par l'absurde qu'il existe deux cubes adjacents C_1 et $C_2 = f_m^k(C_1)$ de $\mathcal{D}_m$ tels que le temps de transition k entre ces deux cubes soit impair. Soit C_0 un cube quelconque et posons $C'_0 = f_m(C_0)$. Puisque la permutation f_m est d'ordre pair, les entiers k tels que $C'_0 = f_m^k(C_0)$ sont tous impairs. Considérons une suite de cubes adjacents allant de C_0 à C'_0. Si tous les temps de transition entre les cubes adjacents étaient pairs, alors on trouverait un temps de transition de C_0 à C'_0 pair, ce qui entrainerait une contradiction. Donc il existe deux cubes adjacents C_1 et C_2 dont le temps de transition est impair.

Soit τ une transposition dyadique[2] qui permute les deux cubes C_1 et C_2, et posons $f'_m = \tau \circ f_m$. Alors $d_{forte}(f'_m, f) < 2\varepsilon$. De plus, la permutation f'_m se décompose en deux cycles disjoints d'ordres p et q impairs (comme dans la formule 1). Puisque $p + q$ est une puissance de 2, les entiers p et q sont premiers entre eux. $\square$

2. Autrement dit une permutation dyadique qui échange deux cubes de la subdivision, et laisse invariants tous les autres.