101 - Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

1 Généralités

On se donne un groupe G et un ensemble non vide X.

Définition 1. Une *action de groupe* de G sur X est la donnée d'une application $G \times X \to X$; $(g, x) \mapsto g.x$ telle que :

1. $\forall g, g' \in G,\ \forall x \in X,\ g.(g'.x) = (gg').x.$
2. $\forall x \in X,\ 1.x = x.$

Il revient au même de se donner un homomorphisme $\varphi : G \to \mathfrak{S}(X)$. On fixe désormais une telle action de G sur X.

Définition 2. On dit que G opère *transitivement* sur X si $\forall x, y \in X,\ \exists g \in G : g.x = y$. On dit que G opère *fidèlement* sur X si l'homomorphisme φ est injectif.

Définition 3. La relation R définie sur X par $xRy \iff \exists g \in G : y = g.x$ est une relation d'équivalence.Pour $x \in X$, la classe de x pour R est appelée *orbite* de x et notée $G.x$.

Définition 4. On appelle *stabilisateur* de $x \in X$, et note H_x, l'ensemble $\{g \in G | g.x = x\}$. C'est un sous-groupe (non distingué en général) de G. On dit que G opère *librement* sur X si le stabilisateur de tout élément est réduit au neutre.

Théorème 1 (Formule des classes)**.** *Pour tout $x \in X$, l'application $\overline{g} \mapsto g.x$ de $G/H.x$ dans $G.x$ est une bijection. On a alors pour O un système de représentants d'orbites,*

$$|X| = \sum_{\overline{x} \in O} \frac{|G|}{|H_x|}$$

En particulier le cardinal d'une orbite divise celui de G.

Théorème 2 (Formule de Burnside)**.**

Application. Collier de perles [Cog], [Ale].

1.1 Exemples généraux

1. G agit transitivement et fidèlement sur lui-même par translation à gauche. **Espace affine**
2. G agit sur lui-même par conjugaison. L'ordre est un invariant sous cette action.

   Proposition 1 ([Ortiz p. 9]). *Soit p le plus petit facteur premier de $|G|$ et H un sous-groupe d'ordre p et distingué dans G. Alors H est central.*

   Théorème 3 (Wedderburn). *Tout corps fini est commutatif.*
3. G agit sur l'ensemble de ses sous-groupes par conjugaison. **Sylow**
4. Soit H un sous-groupe de G, G agit sur G/H par translation à gauche.

   Théorème 4. *Soit G un groupe fini, p le plus petit facteur premier de $|G|$ et H un sous-groupe d'indice p de G. Alors $H \triangleleft G$ (action de G sur G/H par translation).*

2 Applications à l'étude des groupes finis

2.1 Groupe symétrique

Théorème 5 (Cayley). *Tout groupe fini est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.*

Tout groupe de bijections d'un ensemble agit naturellement de manière transitive et fidèle sur cet ensemble. En particulier $\mathfrak{S}_n$ agit naturellement sur $[|1, n|]$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, la partition de $[|1, n|]$ selon ses orbites sous $< \sigma >$ donne la décomposition de σ en orbites à supports disjoints.

Proposition 2. *Le groupe $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les $n-1$ permutations $(i, i+1)$. De plus, il faut au moins $n-1$ permutations pour engendrer $\mathfrak{S}_n$.*

$\mathfrak{S}_n$ agit sur lui-même par conjugaison ; deux permutations sont dans la même orbite ssi les ensembles des longueurs des cycles apparaissont dans leurs décompositions en cycles à supports disjoints sont identiques.

Remarque. Le stabilisateur d'un point est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$. La réciproque est liée au automorphismes de $\mathfrak{S}_n$:

Proposition 3 (Perrin p. 30-33). *Un sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$. Si $n \neq 6$, il est égal au stabilisateur d'un point.*

2.2 Structure des groupes finis

Proposition 4. *On pose $X^G = \{x \in X | \forall g \in G, g.x = x\}$ l'ensemble des points fixes de X sous G. Si G est un p-groupe et X est fini, alors $|X| \equiv |X^G|$ $[p]$.*

Application. Le centre d'un p-groupe non trivial est non trivial. Ainsi, un groupe d'ordre p^2 est abélien, et un p-groupe possède des éléments de tous les ordres divisant son ordre [FG].

Théorème 6 (Sylow)**.** *On pose $|G| = p^\alpha m$, avec $p \wedge m = 1$ et $\alpha \in \mathbf{N}^*$. On note $S_p(G)$ l'ensemble des p-sous-groupes de Sylow de G. Alors*

1. *$S_p(G) \neq \emptyset$.*
2. *Si H est un p-sous-groupe de G, alors il est inclus dans un p-Sylow.*
3. *Les p-Sylow sont tous deux à deux conjugués.*
4. *$|S_p(G)| \mid m$ et $|S_p(G)| \equiv 1$ $[p]$.*

Application. Groupe d'ordre 255. Groupe d'ordre $p^\alpha q$, $p < q$, simple [Per p. 37].

Application. Tout groupe d'ordre pq^2, avec $p \neq q$ premiers, n'est pas simple.

Définition 5. Soient G et H deux groupes. Si G agit sur H par automorphismes (i.e. $\varphi : G \to Aut(H)$), on définit le *produit semi-direct* $H \rtimes G$ comme l'ensemble $H \times G$ muni de la loi $(h, g)(h', g') = (h(g.h'), gg')$.

Proposition 5. *Soit G un groupe et H, K des sous-groupes de G tq H distingué dans G, $H \cap K = \{1\}$ et $HK = G$. Alors G est isomorphe au produit semi-direct $H \rtimes K$, avec l'action $k.h = khk^{-1}$. De plus, lpsse :*

(i) *$G \approx H \times K$*

(ii) *$K \lhd G$*

(iii) *l'action φ est triviale.*

Application. Soit G un groupe d'ordre pq, avec p et q premiers, $p < q$. Alors
– si $p \not| q - 1$, alors $G \approx \mathbf{Z}/pq\mathbf{Z}$,
– si $p | q - 1$, alors $G \approx \mathbf{Z}/pq\mathbf{Z}$ ou $G \approx \mathbf{Z}/q\mathbf{Z} \rtimes \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

3 Actions de groupes de matrices

3.1 Actions sur les espaces vectoriels

Gl_n agit naturellement (et fidèlement) sur $\mathbf{R}^n$. L'action a deux orbites : $\{0\}$ et $\mathbf{R}^{n*}$.
$O_n(\mathbf{R})$ agit naturellement sur $\mathbf{R}^n$; les orbites sont les sphères centrées en l'origine.

3.2 Action par multiplication à gauche (ou à droite)

Changement de base à l'arrivée. Orbite sous l'action : même noyau.
Opérations élémentaires et pivot de Gauss.

D'où des opérations de k (transvection), de k^* (dilatation), de $\mathfrak{S}_n$ (permutation). **Action à droite : action sur les colonnes.**
Équivalence de matrices : changement de bases d'une application linéaire de E dans F.

3.3 Action par conjugaison (similitude)

Changement de base d'un endomorphisme. Invariants : déterminant, trace...
Invariant important : polynôme caractéristique.
Invariants de similitude, jordanisation si k alg. clos.

3.4 Action par congruence

Sur les matrices symétriques.

4 Actions de groupes et géométrie

4.1 Espaces affines

Définition 6. Un*espace affine* est un ensemble non vide $\mathcal{E}$ sur lequel agit le groupe additif d'un espace vectoriel E de manière transitive et libre. E est appelé la *direction* de $\mathcal{E}$, et l'action est notée $\vec{u}.M = M + \vec{u}$.

Proposition 6. *$\forall M \in \mathcal{E}, \forall \vec{u} \in E, \exists! N \in \mathcal{E} : N = M + \vec{u}$. On note alors $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$*

Isométries, parties dédoublables.
En faire un peu plus...

4.2 Action du groupe modulaire

On identifie $\mathbf{C}$ à $\mathbf{R}^2$. On note $\mathbf{P}$ le demi-plan de Poincaré : $\mathbf{P} = \{z \in \mathbf{C} \mid Im\, z > 0\}$. On considère le groupe modulaire $\Gamma = PSl_2(\mathbf{Z}) = Sl_2(\mathbf{Z})/\{\pm I_2\}$.

Proposition 7. *Γ agit sur $\mathbf{P}$ par homographies par $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.z = \frac{az+b}{cz+d}$. Cette action est fidèle.*

Proposition 8. *Le domaine $D = \{z \in \mathbf{P} \mid |z| \geq 1, |Re\, z| \leq 1/2\}$ est un domaine fondamental pour cette action, i.e. toute orbite sous Γ rencontre D, et deux points distincts de D dans une même orbite sont situés sur la frontière de D.*

Proposition 9. *Le groupe Γ est engendré par les matrices $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

4.3 Groupe diédral [Cal]

Définition 7. Comme un groupe d'isométries de polygone.

Proposition 10. *Cardinal, générateurs, semi direct...*