# 106 - Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de GL(E). Applications

On fixe $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$ sur un corps $K$.

## 1 Le groupe linéaire

### 1.1 Définition et premières propriétés

**Définition 1.** On appelle *groupe linéaire* de $E$, et note $Gl(E)$, le groupe des $K$-automorphismes linéaires de $E$.

**Proposition 1.** *Soit $f \in L(E)$. Lpsse :*

*(i)* $f \in Gl(E)$

*(ii)* *$f$ est inversible à gauche*

*(iii)* *$f$ est inversible à droite*

*(iv)* *$f$ est injectif*

*(v)* *$f$ est surjectif*

*(vi)* *$f$ est de rang $n$*

*(vii)* $\det f \neq 0$

**Proposition 2.** *$Gl(E)$ et $Gl_n(K)$ sont (topologiquement dans les cas réel et complexe) isomorphes.*

*Remarque.* Pour tout sous-groupe $G$ de $K^*$, les matrices de déterminant dans $G$ forment un sous-groupe de $K^*$.

*Exemple.* L'ensemble des matrices diagonales/diagonales et à coefficients dans un sous-groupe de $K^*$/triangulaires/triangulaires et à coefficients diagonaux dans un sous-groupe de $K^*$ est un sous-groupe de $Gl_n(K)$.

**Définition 2.** On appelle *groupe spécial linéaire*, noté $Sl(E)$, le noyau de $\det : Gl(E) \to K^*$. Il est isomorphe à $Sl_n(K)$.

**Proposition 3.** *$Gl(E)$ est isomorphe à $Sl(E) \rtimes K^*$.*

**On se ramène à l'étude de $Sl(E)$.**

### 1.2 Quelques actions du groupe linéaire

Action à gauche et à droite (même image, même noyau), action par conjugaison (similitude), lien avec les invariants de similitude.

### 1.3 Générateurs et centre

**Définition 3.** Soit $H$ un hyperplan de $E$ et $f \in Gl(E) \setminus \{Id\}$ tq $H$ soit stable par $f$ et $f_{|H} = Id_H$.
On dit que $f$ est une *dilatation* d'hyperplan $H$ et de rapport $\lambda \in K^*$ s'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ soit ...
On dit que $f$ est une *transvection* d'hyperplan $H$ et de droite $D \subset H$ s'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ soit ... i.e. $f(x) = x + \varphi(x)a$, $H = Ker\varphi$ et $a \in H$.

**Proposition 4.** *Soit $\tau$ une transvection d'hyperplan $H$ et de droite $D$, et $f \in Gl(E)$. Alors $f\tau f^{-1}$ est une transvection d'hyperplan $f(H)$ et de droite $f(D)$.*
*Réciproquement, deux dilatations sont conjuguées dans $Gl(E)$ ssi elles ont même rapport. Deux transvections sont conjuguées dans $Gl(E)$ ; si $n \geq 3$ elles sont conjugées dans $Sl(E)$.*

**Théorème 1.** *$Z(Gl(E))$ est l'ensemble des homotéties de rapport $\lambda \in K^*$.*
*$Z(Sl(E))$ est l'ensemble des homotéties de rapport $\lambda \in \mu_n(K)$.*

**Théorème 2.** *Les transvections engendrent $Sl(E)$.*

**Corollaire 1.** *Les tranvections et les dilatations engendrent $Gl(E)$.*

*Application* ([FGN2 p. 179]). Pour $n \geq 2$, toute matrice de $Gl_n(K)$ s'écrit comme un produit de matrices de trace nulle.

*Remarque.* Existence du pivot de Gauss.

**Théorème 3.** *On a $D(Gl_n(K)) = Sl_n(K)$ sauf si $n = 2$ et $K = \mathbf{F}_2$.*

**$T(H)$ par Perrin p. 109.**

## 2 Cas des corps finis

**Proposition 5.** *Si $K = \mathbf{F}_q$, alors :*
- $|Gl_n(K)| = \prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i)$
- $|Sl_n(K)| = q^{n-1}\prod_{i=0}^{n-2}(q^n - q^i)$

**Proposition 6.** *L'ensemble des matrices triangulaires supérieures ayant des 1 sur la diagonale est un $p$-Sylow de $Gl_n(\mathbf{F}_p)$.*

**Proposition 7.** *Tout groupe fini de cardnal $n$ s'injecte dans $Gl_n(\mathbf{K})$. Plus précisément, le groupe des matrices de permutation est isomorphe au groupe symétrique.*

*Application.* Existence des $p$-Sylow.

*Application* (Frobénius-Zolotarev). Soit $p$ un nombre premier impair et $V$ un $\mathbf{F}_p$-e.v. de dimension finie. Alors pour tout $u \in Gl(V)$, on peut considérer $u$ comme un élément de $\mathfrak{S}(V)$, si bien qu'on peut lui associer sa signature. On a alors $\varepsilon(u) = \left(\frac{det(u)}{p}\right)$.

**Réciprocité quadra, signature Frobénius ?**

# 3 Cas réel ou complexe

## 3.1 Topologie

**Proposition 8.** *Si $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, $Gl_n(K)$ est un ouvert dense de $M_n(K)$.*

*Exemple.* Dans tout ensemble dense de de $\mathbf{R}^n$ on peut trouver une base.

*Application.* Différentielle déterminant.

**Proposition 9.** *Si $\rho(A) < 1$, alors $I_n - A$ est inversible d'inverse $\sum A^n$.*

**Proposition 10.** *Dans $Gl_n$, le produit et l'inversion sont $C^\infty$ + différentielles.*

**Proposition 11.** *Pour $k = \mathbf{C}$, l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $M_n(\mathbf{C})$. Pour $k = \mathbf{R}$, l'adhérence ensemble des matrices diagonalisables est égale à l'ensemble des matrices trigonalisables.*

*Application.* $\det \circ \exp = \exp \circ tr$.

**Proposition 12.** *$Gl_n(\mathbf{C})$ est connexe par arcs.*
*$Gl_n(\mathbf{R})$ possède exactement deux composantes connexes par arcs : $Gl_n^+(\mathbf{R})$ et $Gl_n^-(\mathbf{R})$.*

## 3.2 Quelques sous-groupes

**Proposition 13.** *L'ensemble des matrices de $Gl_n(\mathbf{R})$ de déterminant $\pm 1$ à coefficients dans $\mathbf{Z}$ est un sous-groupe de $Gl_n(\mathbf{R})$ noté $Gl_n(\mathbf{Z})$.*

**Théorème 4** ([FGN2 p. 205])**.** *Il n'y a qu'un nombre fini de sous-groupes finis de $Gl_n(\mathbf{Z})$, leur cardinal est majoré par $|Gl_n(\mathbf{F}_3)| = \prod_{i=0}^{n-1}(3^n - 3^i)$.*

**Théorème 5.** *$Sl_2(\mathbf{Z})$ est engendré par $S$ et $T$.*

**Théorème 6** (Burnside, FGN2 p.185)**.** *Soit $G$ un sous-groupe de $Gl_n(\mathbf{C})$. Alors $G$ est fini ssi il est d'exposant fini.*

**Proposition 14.** *Soit $G$ un sous-ensemble compact de $Gl_n(\mathbf{C})$ / $Gl_n(\mathbf{R})$ stable par multiplication. Alors $G$ est un groupe.*

**Théorème 7.** *Sous-groupes compacts de $Gl_n(\mathbf{C})$ / $Gl_n(\mathbf{R})$.*

**Proposition 15.** *Il n'y a pas de petit sous-groupe de $Gl_n$ (cf FGN pour une borne de la norme).*

## 3.3 Exponentielle matricielle

**Théorème 8.** $\exp : M_n(\mathbf{C}) \to Gl_n(\mathbf{C})$ *est surjective.* ***Ce n'est pas un morphisme !***

*Application.* $Gl_n(\mathbf{C}) \to Gl_n(\mathbf{C}),\ A \mapsto A^p$ est surjective pour tout $p \geq 1$.

**Théorème 9.** $\exp(M_n(\mathbf{R})) = \{M^2 \mid M \in Gl_n(\mathbf{R})\}$

**Proposition 16.** *Sous-groupes à un paramètre [Laf].*

## 3.4 Groupe orthogonal

On suppose que $K = \mathbf{R}$. On se donne $q$ un fq def pos sur $E$.

**Définition 4.** On appelle *isométrie* de $E$ les éléments $u \in Gl(E)$ tels que $q \circ u = q$. L'ensemble des isométries de $E$ forme un sous-groupe de $Gl(E)$ appelé *groupe orthogonal* et noté $O(q)$. Le noyau de $\det : O(q) \to \mathbf{R}^*$ est appelé *groupe spécial orthogonal* et noté $SO(q)$.

**Proposition 17.** *$O(q)$ (resp $SO(q)$) est topologiquement isomorphe à $O_n(\mathbf{R})$ (resp $SO_n(\mathbf{R})$).*

**Proposition 18.** *Centres*

**Théorème 10.** *$O(q)$ engendré par au plus $n$ réflexions. $SO(q)$ engendré par au plus $n$ retournements.*

### La dimension 2 et les angles

Patatipatata

**Théorème 11.** *Forme canonique/réduction.*

**Corollaire 2.** *Composantes connexes.*

**Proposition 19** (Décomposition polaire). *L'application*

$$\begin{aligned} O_n(\mathbf{R}) \times S_n^{++}(\mathbf{R}) &\to Gl_n(\mathbf{R}) \\ (O, S) &\mapsto OS \end{aligned}$$

*est un homéomorphisme.*

*Application.* $O_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $Gl_n(\mathbf{R})$.

**Proposition 20.** *Dimension 2, application aux angles.*

**Revoir les petits cas $n = 2$, $K = \mathbf{F}_2$...**
**Commutant, stabilisateur, matrices diagonales ?**