107 - Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

Soit G un groupe fini d'ordre γ et V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1 Généralités sur les représentations linéaires [Ser1]

Définition 1.1. *On appelle **représentation linéaire** de G dans V tout homomorphisme ρ de G dans $GL(V)$. On notera ρ_s l'élément $\rho(s)$ de $GL(V)$ pour $s \in G$.*
*On appelle **degré** de la représentation la dimension de V.*

Définition 1.2. *Deux représentations linéaires (ρ, V) et (ρ', V') de G sont dites isomorphes lorsqu'il existe un isomorphisme linéaire $f : V \longrightarrow V'$ tel que, pour tout $s \in G$, $f \circ \rho_s = \rho'_s \circ f$.*

Remarque.
- *Deux représentations isomorphes ont même degré.*
- *La donnée d'une représentation équivaut, via le choix d'une base de V, à la donnée d'une famille de matrices inversibles $(R_s)_{s\in G}$ vérifiant $R_{st} = R_s R_t$.*
- *G étant fini, V peut être muni d'un produit scalaire invariant par G. Ainsi, en choisissant une base orthonormée de V, on obtient une représentation matricielle unitaire.*

Exemple. La représentation unité de G : $\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}^\star, s \longmapsto 1$.

La représentation régulière de G : *on suppose que $n = \gamma$ et que $(e_t)_{t\in G}$ est une base de V. Pour $s \in G$, $\rho_s(e_t) = e_{st}$.*

La représentation de permutation associée à X : *on suppose que G opère sur un ensemble X fini et que $(e_t)_{t\in X}$ est une base de V. Pour $s \in G$, $\rho_s(e_t) = e_{s.t}$.*

La représentation contragrédiente : *elle munit le dual V' d'une représentation, et vérifie $\rho_{V'\,s} = {}^t\rho_s{}^{-1}$.*

Définition 1.3. *Soit (ρ, V) une représentation de G.*
- *On appelle **sous-représentation** de V les sous-espaces vectoriels W de V invariants par G, i.e. stables par ρ_s, pour tout $s \in G$.*
- *V est dite **somme directe** des sous-représentations W et W' lorsque W et W' sont supplémentaires dans V. On note alors $V = W \oplus W'$.*

Exemple. *Si V est la représentation régulière de G, alors Vect$(\sum_{t\in G} e_t)$ est une sous-représentation de G, isomorphe à la représentation unité.*

Théorème 1.4. *Si W est une sous-représentation de V, alors il existe une sous-représentation W' de V telle que $V = W \oplus W'$.*

Définition 1.5. *Une représentation (ρ, V) de G est dite **irréductible** lorsque $V \neq \{0\}$ et que les seules sous-représentations de V sont triviales.*

Exemple. *Les représentations de degré 1 sont irréductibles.*

Théorème 1.6 (Maschke)**.** *Toute représentation est somme directe de représentations irréductibles.*

2 Les caractères [Ser1]

Définition 2.1. *Soit (ρ, V) une représentation de G. On appelle* ***caractère*** *de la représentation ρ l'application :*

$$\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}, s \longmapsto Tr(\rho_s)$$

Lorsque V est irréductible, on parlera de ***caractère irréductible****.*

Proposition 2.2. *Soit (ρ, V) et (ρ', V') deux représentations de G de caractères respectifs χ et χ', alors, pour $s, t \in G$,*

$$\chi(1) = \dim V, \qquad \chi(s^{-1}) = \overline{\chi(s)}, \qquad \chi(sts^{-1}) = \chi(t) \quad et \quad \chi_{V \oplus V'} = \chi + \chi'$$

Remarque. *Ainsi, si s et s^{-1} sont conjugués dans G, alors $\chi(s) \in \mathbb{R}$. C'est par exemple le cas de n'importe quel élément d'un groupe symétrique.*

2.1 Les relations d'orthogonalité des caractères

Proposition 2.3 (Lemme de Schur). *Soit (ρ, V) et (ρ', V') deux représentations irréductibles de G et $f \in \mathcal{L}(V, V')$ telle que $\rho'_s \circ f = f \circ \rho_s, \forall\, s \in G$. Alors :*

i) *Si ρ et ρ' ne sont pas isomorphes $f = 0$.*

ii) *Si $V = V'$ et $\rho = \rho'$, f est une homothétie.*

On munit l'espace $\mathbb{C}^G$ du produit scalaire : $\langle \phi | \psi \rangle = \frac{1}{\gamma} \sum_{t \in G} \phi(t) \overline{\psi(t)}$.

Théorème 2.4.
- *Si χ est un caractère irréductible, alors $\langle \chi | \chi \rangle = 1$.*
- *Si χ et χ' sont les caractères de deux représentations irréductibles non isomorphes, alors $\langle \chi | \chi' \rangle = 0$.*

Ainsi les caractères irréductibles forment une famille orthonormale.

Théorème 2.5. *Soit V une représentation de G de caractère ϕ et $W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ une décomposition en somme directe de représentations irréductibles de V. Si W est une représentation irréductible de caractère χ, alors le nombre de W_i isomorphe à W est $\langle \chi | \phi \rangle$.*

Corollaire 2.6.
- *Le nombre de W_i isomorphe à W ne dépend pas de la décomposition choisie.*
- *Deux représentations de même caractères sont isomorphes.*

Jusqu'à la fin de la section 2, on note $\chi_1, \ldots, \chi_h$ les différents caractères irréductibles de G, de degré respectifs $n_1, \ldots, n_s$ et associés aux représentations $W_1, \ldots, W_h$.

Toute représentation est donc isomorphe à une somme directe $m_1 W_1 \oplus \cdots \oplus m_h W_h$. Le caractère ϕ de V est $\sum_{i=1}^h m_i \chi_i$ et $m_i = \langle \phi | \chi_i \rangle$. En outre $\langle \phi | \phi \rangle = \sum_{i=1}^h m_i^2$.

Théorème 2.7. *Une représentation V de caractère ϕ est irréductible si et seulement si $\langle \phi | \phi \rangle = 1$.*

2.2 Décomposition de la représentation régulière

Proposition 2.8. *Le caractère r_G de la représentation régulière R de G est donnée par : $r_G(1) = \gamma$ et $r_G(s) = 0$ sinon.*

Corollaire 2.9. *$R = n_i W_i \oplus \cdots \oplus n_h W_h$.*

On obtient finalement deux formules importantes pour la détermination des tables de caractères :

Corollaire 2.10. *$\sum_{i=1}^h n_i^2 = \gamma$ et $\sum_{i=1}^h n_i \chi_i(s) = 0$, pour $s \neq 1$.*

2.3 Nombre des représentations irréductibles

Définition 2.11. *Une fonction $f \in \mathbb{C}^G$ est dite* ***centrale*** *lorsqu'elle est constante sur les classes de conjugaison de G.*

Exemple. *Les caractères sont des fonctions centrales.*

Proposition 2.12. *Soit (ρ, V) une représentation irréductible de G de degré n et de caractère χ. Si f est une fonction centrale sur G, alors $\sum_{t \in G} f(t) \rho_t$ est une homothétie de rapport $\frac{\gamma}{n} \langle f | \chi \rangle$.*

Théorème 2.13. *$(\chi_1, \ldots, \chi_h)$ est une base orthonormale de l'espace des fonctions centrales.*

Théorème 2.14. *Le nombre de représentations irréductibles de G (à isomorphisme près) est égal au nombre de classes de conjugaison de G.*

Proposition 2.15. *Soit $s \in G$, $c(s)$ le nombre d'éléments de la classe de conjugaison de s et $t \in G$ non conjugué à s, alors*

$$\sum_{i=1}^{h} \chi_i(s)\overline{\chi_i(s)} = \gamma/c(s) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{h} \chi_i(s)\overline{\chi_i(t)} = 0$$

Remarque. *La dernière égalité exprime que les colonnes de la table de caractères irréductibles de G sont orthogonales pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{C}^h$.*

3 Groupe dual [Ser2]

Définition 3.1. *On appelle **groupe dual** de G, noté $\widehat{G}$, le groupe des homomorphismes de G dans $\mathbb{C}^\star$. On nomme **caractères linéaires** de G les éléments de $\hat{G}$.*

Remarque.
- *Les caractères linéaires sont à valeurs dans $\mathbb{U}_\gamma$.*
- *Les caractères linéaires s'identifient aux représentations de degré 1, puisque $GL_1(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^\star$. Ainsi, en vertu du corollaire 2.6, il y a autant de caractères linéaires que de classes d'isomorphie de représentations de degré 1 de G.*

Proposition 3.2. *$\widehat{G^{ab}} \longrightarrow \widehat{G}, \chi \longmapsto \chi \circ \pi$, où $\pi : G \longrightarrow G^{ab}$ est la surjection canonique de G sur son abélianisé, est un isomorphisme.*

Corollaire 3.3. *Le nombre de représentations de degré 1 de G est égal à $[G^{ab} : 1]$.*

Proposition 3.4. *Soit G et H deux groupes.*

$$\left|\begin{array}{ccc} \widehat{G \times H} & \longrightarrow & \widehat{G} \times \widehat{H} \\ \chi & \longmapsto & (\chi(\cdot, 1), \chi(1, \cdot)) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left|\begin{array}{ccc} \widehat{G} \times \widehat{H} & \longrightarrow & \widehat{G \times H} \\ (\phi, \psi) & \longmapsto & \phi\psi \end{array}\right.$$

sont des isomorphismes réciproques.

Proposition 3.5. *Soit G, H et K trois groupes.*
- *Pour $f \in Hom(G, H)$, $f^\star : \widehat{H} \longrightarrow \widehat{G}, \chi \longmapsto \chi \circ f$ est un homomorphisme de groupes.*
- *$(id_G)^\star = id_{\widehat{G}}$ et $(g \circ f)^\star = f^\star \circ g^\star$, pour $f \in Hom(G, H)$ et $g \in Hom(H, K)$.*

3.1 Cas des groupes abéliens finis

Théorème 3.6. *G est abélien si et seulement si toutes ses représentations irréductibles sont de degré 1.*

Corollaire 3.7. *Si A est un sous-groupe abélien de G, alors les représentations irréductibles de G sont de degré inférieur à l'indice de A dans G.*

Exemple. *Les représentations irréductibles des groupes diédraux sont de degré 1 ou 2.*

On suppose ici que G est un groupe abélien fini.

Proposition 3.8. *Si H est un sous-groupe de G, alors la suite suivante est exacte*

$$0 \longrightarrow \widehat{G/H} \xrightarrow{\pi^\star} \widehat{G} \xrightarrow{i^\star} \widehat{H} \longrightarrow 0$$

Corollaire 3.9.
- *G et $\widehat{G}$ ont même ordre.*
- *Si H est un sous-groupe de G, alors tout caractère linéaire de H se prolonge en $[G : H]$ caractères linéaires de G.*

Proposition 3.10. *Pour $n \in \mathbb{N}_\star$, $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{U}_n, \chi \longmapsto \chi(1)$ est un isomorphisme. Ainsi, $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Proposition 3.11. *Si $x \in G$, l'application $\chi \longmapsto \chi(x)$ est un caractère linéaire de $\widehat{G}$; et l'homomorphisme ainsi obtenu $\varepsilon : G \longrightarrow \widehat{\widehat{G}}$ est un isomorphisme canonique.*

La proposition 3.8 permet de montrer le théorème de structure des groupes abéliens finis, qui permet d'établir que G et $\widehat{G}$ sont isomorphes :

Théorème 3.12. *Si G est un groupe abélien fini, alors il existe une suite d'entiers supérieurs à 2 $d_s|\dots|d_1$ tels que $G \simeq \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_s\mathbb{Z}$.*

Corollaire 3.13. $G \simeq \widehat{G}$.

Remarque. *Le corollaire précédent et l'isomorphisme de la proposition 3.10 permettent de déterminer entièrement la table de caractères irréductibles d'un groupe abéliens fini.*

Exemple.

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
ψ_0	1	1	1	1
ψ_1	1	i	-1	$-i$
ψ_2	1	-1	1	-1
ψ_3	1	$-i$	-1	i

V_4	$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{1})$
ψ_0	1	1	1	1
ψ_1	1	-1	1	-1
ψ_2	1	1	-1	-1
ψ_3	1	-1	-1	1

4 Exemples de représentations linéaires [Rau]

4.1 Le groupe dicyclique d'ordre 12

Il s'agit du produit semi-direct $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (i.e. la troisième classe d'isomorphie de groupes d'ordre 12 non abéliens autre que celles de D_6 et $\mathfrak{A}_4$).

Une présentation de G est donnée par $\langle a, b | a^3, b^4, bab^{-1}a^{-2}\rangle$, dont on déduit $G = \{a^\alpha b^\beta \ / \ 0 \leqslant \alpha \leqslant 2, 0 \leqslant \beta \leqslant 3\}$. De plus, $G^{ab} \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et G est formé des 6 classes de conjugaison : $\{1\}, \{b^2\}, \{a, a^2\}, \{ab^2, a^2b^2\}, \{b, ab, a^2b\}$ et $\{b^3, ab^3, a^2b^3\}$.

Ainsi, G possède 4 représentations irréductibles de degré 1 et 2 représentations irréductibles de degré 2. La première représentation irréductible de degré 2, de caractère χ_2, s'obtient comme sous-représentation de la représentation de permutation associée à l'action par conjugaison de G sur ses 3 2-Sylow. L'autre, de caractère χ_2', est donnée par la représentation matricielle suivante :

$$a \longmapsto \begin{pmatrix} -1/2 & i\sqrt{3}/2 \\ i\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit la table des caractères irréductibles suivante :

$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes Z/4\mathbb{Z}$	1	$(b^2)_1$	$(a)_2$	$(ab^2)_2$	$(b)_3$	$(b^3)_3$
ψ_0	1	1	1	1	1	1
ψ_1	1	-1	1	-1	i	$-i$
ψ_2	1	1	1	1	-1	-1
ψ_3	1	-1	1	-1	$-i$	i
χ_2	2	2	-1	-1	0	0
χ_2'	2	-2	-1	1	0	0

4.2 Le groupe diédral

4.3 Le groupe symétrique de degré 4

$\mathfrak{S}_4$ est réunion de cinq classes de conjugaison et $\mathfrak{S}_4^{ab} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, le caractère linéaire non trivial de $\mathfrak{S}_4$ étant la signature.

D'une part, $\mathfrak{S}_4$ est isomorphe au sous-groupe de $O_{3(\mathbb{R})}$ formé des isométries de $\mathbb{R}^3$ laissant invariant un tétraèdre régulier. D'autre part, $\mathfrak{S}_4$ est isomorphe au sous-groupe de $SO_{3(\mathbb{R})}$ formé des rotations de $\mathbb{R}^3$ laissant invariant un cube. On obtient ainsi les deux représentations irréductibles de degré 3 de $\mathfrak{S}_4$.

La théorie des caractères indique que la dernière représentation irréductible est de degré 2. Elle s'obtient à partir de celle de $\mathfrak{S}_3$, dans la mesure où $\mathfrak{S}_4/V_4 \simeq \mathfrak{S}_3$.

On en déduit la table des caractères irréductibles suivante :

$\mathfrak{S}_4$	id	$(ab)_6$	$(abc)_8$	$(abcd)_6$	$(ab)(cd)_3$
ψ_0	1	1	1	1	1
$\psi_1 = \varepsilon$	1	-1	1	-1	1
χ_2	2	0	-1	0	2
χ_3	3	-1	0	1	-1
χ_3'	3	1	0	-1	-1

On montre que les caractères des représentations de permutations de $\mathfrak{S}_4$ pour l'action par conjugaison sur les 4 3-Sylow et les 3 2-Sylow de $\mathfrak{S}_4$ sont respectivement : $\chi_4 = \psi_0 + \chi_{3'}$ et $\chi_3'' = \psi_0 + \chi_2$.

Références

[Ser1] J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, édition Hermann

[Ser2] J.-P. Serre, *Cours d'arithmétique*, édition puf

[Rau] G. Rauch, *Les groupes finis et leurs représentations*, édition ellipses

Développements

- Théorème de structure des groupes abéliens finis (dév. 29, ***)
- Représentations linéaires irréductibles de $\mathfrak{S}_4$ (dév. 30, ***)
- Représentations linéaires irréductibles du groupe dicyclique (dév. 31, ***)