

## 111 - Anneaux principaux. Applications.

Dans toute la leçon  $A$  désignera un anneau commutatif et  $K$  un corps commutatif.

### 1 Préliminaires sur les idéaux

**Proposition 1.** *Pour  $I$  un idéal de  $A$ ,  $A/I$  est un anneau. Les idéaux de  $A/I$  sont en bijection via la projection avec les idéaux de  $A$  contenant  $I$ .*

*Exemple.* Idéaux de  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ .

**Définition 1.** Idéal principal, anneau principal.

**Définition 2.** Idéal premier, maximal.

**Proposition 2.**  $I$  maximal  $\iff A/I$  corps.

*Remarque.* Si maximal, alors premier.

**Krull?**

### 2 Divisibilité dans les anneaux intègres

On suppose que  $A$  est intègre.

#### 2.1 Éléments inversibles

Cf Perrin ! Inversibles de  $\mathbf{Z}$  faciles.

#### 2.2 Divisibilité

Cf Perrin !

**Exemples  $\mathbf{Z}$  divisibilité par 2, 3, 4, 5, 9, 11...**

### 3 Quelques classes d'anneaux

**Propriétés arithmétiques !**

### 3.1 Anneaux factoriels

**Définition 3.** Anneau factoriel.

**Pratique pour lire la divisibilité !**

**Proposition 3.** Si  $A$  est noethérien et intègre, alors il vérifie (E).

*Exemple.*  $\mathbf{Z}[i\sqrt{5}]$ .

$K[X_1, X_2, \dots]$ .

**Théorème 1.** CNSs ( $U$ ).

**Définition 4.** PGCD, PPCM.

### 3.2 Anneaux principaux

**Proposition 4.** Principal implique factoriel.

**Proposition 5.**  $p$  irréductible ssi ( $p$ ) maximal.

**Proposition 6.** Pour  $A$  principal,  $A/I$  est principal ssi  $I$  est premier.

*Exemple.*  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ .

**Théorème 2.** Bézout.

**Théorème 3** (Chinois).

### 3.3 Anneaux euclidiens

**Définition 5.** Stathme, anneau euclidien.

**Proposition 7.** Euclidien implique principal.

*Exemple.*  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Z}[i]$ ,  $K[[X]]$ .

*Exemple.*  $\mathbf{Z}[\frac{i+\sqrt{19}}{2}]$ .

**Théorème 4** (Algorithme d'Euclide).

**Proposition 8.** Critère du Perrin II.5.1.

### 3.4 Anneaux de polynômes

Gauss,  $A[X]$  principal ssi  $A$  corps. Critères d'irréductibilité dans un anneau factoriel.

## 4 Applications

### 4.1 L'anneau $\mathbf{Z}[i]$ et le théorème des deux carrés

Norme, inversibles, euclidien, th. des deux carrés et irréductibles

## 4.2 Polynômes minimaux

D'un élément algébrique. Il est irréductible (anneau intègre). Application à la théorie du degré.

D'un endomorphisme. Application aux sous-espaces cycliques, divise de polynôme caractéristique (Cayley-Hamilton). Applications à la réduction.

## 4.3 Applications du théorème chinois

Structure de  $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ , CNS  $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$  cyclique, FGN p. 124, Berlekamp, lemme des noyaux et applications.

## 4.4 Modules

Définition, exemples classiques (ev, groupe abélien, endomorphisme), module libre, de type fini.

Base adaptée et classification des modules libres de type fini.

Applications : classification des groupes abéliens de type fini, Jordan et Frobenius.

## Références

Perrin  
FGN  
FG  
Beck  
Goblot