114 - Anneau des séries formelles. Applications

Ref : Arnaudiès-Bertin tome 1 p. 148
Soit A un anneau commutatif unitaire.

1 Anneau des séries formelles

1.1 Définition, valuation [Goblot]

Définition 1. Série formelle, ensemble $A[[X]]$, lois $+$, $.$ et $\times$, structure d'algèbre.

Remarque. L'application $A[X] \hookrightarrow A[[X]]$ est un morphisme de A-algèbres injectif. On peut donc noter $X^n = (0, \dots, 1, 0, \dots)$

Définition 2. Valuation.

Proposition 1. *v est une valuation, i.e. $\forall x, y \in A[[X]]$,*

(i) $v(x) = +\infty \iff x = 0$

(ii) $v(x) = v(-x)$

(iii) $v(x + y) \geq \min(v(x), v(y))$

(iv) si de plus A est intègre, $\forall a \in A^*$, $v(a.x) = v(x)$.

Définition 3. Distance, ultramétrique (boule ouverte ssi fermée, suite de Cauchy ssi les distances de 2 élmts consécutifs tendent vers 0).

Théorème 1. *$A[[X]]$ est complet ; c'est la complétion de $A[X]$.*

2 morph continus égaux ssi égaux sur les X^n.

Proposition 2. *Si A est intègre, alors $v(xy) = v(x) + v(y)$ et donc $A[[X]]$ est intègre.*

1.2 Propriétés algébriques

Théorème 2. *$\sum_{n \geq 0} a_n X^n$ est inversible ssi $a_0 \in A^*$.*

Exemple. $\frac{1}{1-X} = \sum_{n \geq 0} X^n$.

Proposition 3 ([Lang]). *A noethérien $\implies$ $A[[X]]$ noethérien.*

1.3 Dérivée formelle

Définition, linéarité, produit, $D(X) = 1$, $v_0(D(x)) \geq v_0(x) - 1$, $D(x) = 0 \implies x \in k$ pour k de caractéristique non nulle.

1.4 Familles sommables de séries formelles [Arn p. 150]

Famille sommable : $\{i \mid a_{i,n} \neq 0\}$ fini pour tout n ssi $\sum S_i$ cv ssi $S_i \to 0$. Sous-famille sommable (associativité), produit.

1.5 Composition des séries formelles

Définition 4. Soient $S = \sum a_n X^n$ et T deux séries formelles tq $v_0(T) \geq 1$. Alors $(a_n T^n)_n$ est sommable et on peut définir $S \circ T = \sum a_n T^n$, *composée* des séries S et T.

Proposition 4 (Th V. 12 p. 153)**.** *Morphisme, associativité, dérivée.*

2 Séries formelles sur un corps

Proposition 5 (p. 75 Chambadal)**.** $k[[X]]$ *principal, idéaux* (X^i), (X) *seul idéal maximal.*

Définition 5. Exponentielle formelle

Proposition 6. *Dérivée, morphisme* exp.

Proposition 7. log *et* exp.

Définition 6. $(1+X)^\alpha = \exp(\alpha \log(1+X))$.

Proposition 8. *Expression de* $(1+X)^\alpha$.

3 Applications

3.1 Suites récurrentes linéaires [Saux Picart]

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par ses données initiales $u_0, \dots, u_{k-1}$ et la relation de récurrence $u_n = a_1 u_{n-1} + \cdots + a_k u_{n-k}$. On pose $G(X)$ la série génératrice $\sum_{n \geq 0} u_n X^n$ et $P(X)$ le polynôme $1 - \sum_{i=1}^k a_i X^i$. Alors $P(X).G(X) = -\sum_{n<k} \left(\sum_{i \leq n} u_{n-i} a_i \right) X^n$. En inversant le polynôme $P(X)$ (par décomposition en éléments simples par exemple), on obtient le terme général de la suite récurrente
Par exemple pour la suite de Fibonacci on obtient $G(X) = \frac{1}{1-X-X^2}$ et donc $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \varphi'^n)$.

3.2 Dénombrement, combinatoire

Dérangements [Goblot, Arnaudiès Berin], progressions arithmétiques (TD), nombres de Catalan, partitions de $\{1, \ldots, n\}$, partitions de n, nombre de solutions de $\alpha_1 n_1 + \cdots + \alpha_p n_p = n$ [Gou].

3.3 Séries formelles et endomorphismes nilpotents

Morphisme de K-alg. Application à l'exponentielle [Arnaudiès].

3.4 Equations différentielles

On résout l'équa diff dans l'ensemble des séries formelles, on se soucie ensuite de convergence.

Exemple ([Arn p. 191]). La série hypergéométrique $F(a,b,c,X) = \sum_{n\geq 0} \frac{\langle a\rangle_n \langle b\rangle_n}{\langle c\rangle_n n!} X^n$ où $\langle a\rangle_n = \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!}$ est solution de $X(1-X)F'' + \big(c-(a+b-1)X\big)F' - abF = 0$.

3.5 Fonctions C^∞

$$\begin{aligned} C^\infty(I,\mathbf{R}) &\to \mathbf{R}[[X]] \\ f &\mapsto \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} X^n \end{aligned}$$

est un morphisme d'algèbres stable par dérivation, non injectif (fonction plateau)

Théorème 3 (Borel)**.** *L'application est surjective.*

Bernoulli ?

Références

Arnaudiès Bertin
Arnaudiès Fraysse 1
Chambadal Ovaert
Saux Picart
Aigner
Comtet
RDO 1