117 - Algèbre des polynômes à n indéterminées ($n \geq 2$). Polynômes symétriques. Applications.

A anneau commutatif unitaire, K corps commutatif, $n \in \mathbf{N}^*$.

1 Construction de $A[X_1, \dots, X_n]$.

Définition 1. Polynôme à n indéterminées, $A[X_1, \dots, X_n]$.

Définition 2. Addition, multiplications interne et externe.

Proposition 1. *$A[X_1, \dots, X_n]$ est alors une A-alg. commutative.*

Définition 3. X_i.

Proposition 2. *$P \in A[X_1, \dots, X_n]$ s'écrit de manière unique sous la forme $P = \sum_i a_i X^{(i)}$.*

Proposition 3 (PU, [Vinx p. 237])**.** *Sout B une A-alg commutative et $(b_1, \dots, b_n) \in B^n$. Alors il existe un seul morph de A-alg $\phi : A[X_1, \dots, X_n] \to B$ tq $\phi_{|A} = Id$ et que $\phi(x_i) = b_i$.*

Corollaire 1. $A[X_1, \dots, X_{n+1}] \simeq A[X_1, \dots, X_n][X_{n+1}]$.

Définition 4. Degré partiel, degré total. Ordre lexicographique.

Proposition 4. *$deg(P + Q)$, $deg(PQ)$.*

Définition 5. Dérivation partielle.

Proposition 5. *Taylor [RDO p. 195].*

Proposition 6. *Euler [RDO p. 196].*

2 Propriétés arithmétiques

Théorème 1. *Stabilité pour : intègre, noethérien, factoriel.*

Remarque. Pour $n \geq 2$, $A[X_1, \dots, X_n]$ n'est pas principal : cf $(X_1, \dots, X_n)$.

Proposition 7. *Coro p. 198 RDO.*

3 Fonctions polynomiales, identités [Goblot]

Définition 6. Fonction polynomiale. Morph de A-alg.

Proposition 8. *Supposant A intègre, injective ssi A infini.*

Exemple. Sur $\mathbf{F}_q$, $X^q - X$ est dans $Ker\varphi$.

Application. Si K est infini et E est un K-ev de dim finie, alors E n'est pas réunion finie d'hyperplans.

Proposition 9 (Prolongement des identités)**.** *Cf Goblot ou RDO.*

Proposition 10. *Coïncident sur un ouvert non vide de $\mathbf{R}^n$, sur une partie dense.*

Application. Algèbre linéaire, poly caractéristique.

4 Polynômes homogènes

Définition 7. Polynôme p-homogène. Homogènéisé.

Exemple. À la con quelconque.

Exemple. Formes quadratiques.

Proposition 11. *Méthode de Gauss.*

Proposition 12. *Si A intègre, PQ homogène ssi P et Q homogènes.*

Proposition 13. *Tout polynôme s'écrit de façon unique comme somme de polynômes homogènes.*

5 Polynômes symétriques

A intègre.

Définition 8. Action du groupe symétrique, polynôme symétrique, antisymétrique. $A[X_1, \ldots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$, $A[X_1, \ldots, X_n]^{\mathfrak{A}_n}$.

Définition 9. Polynômes symétriques élémentaires.

Proposition 14. *Relations coefficients-racines dans $A[X_1, \ldots, X_n][T]$. Applications aux polynômes.*

Application. Calcul de $\zeta(2)$ [FGN].

Théorème 2. *$\varphi : A[X_1, \ldots, X_n] \to A[X_1, \ldots, X_n]$; $P \mapsto P(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ est un morph de A-alg injectif d'image $A[X_1, \ldots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$.*

Avec l'algorithme !

Proposition 15. *Fignolage Claudine : algorithme fait aux composantes homogènes ; cas où le nombre d'indéterminées est supérieur au degré.*

Application. D'Alembert-Gauss [Samuel].

Application. Kronecker [FGN].

Proposition 16 (Formules de Newton)**.**

Remarque. Inversion des sommes en carac nulle.

Application. χ_u déterminé par les $Tr\, u^i$. En particulier pour les mat nilpotentes. Ths p.6 et 94 Mneimné.

Proposition 17. *Si* $car(K) \neq 2$, $A[X_1, \ldots, X_n]^{\mathfrak{A}_n} = A[X_1, \ldots, X_n]^{\mathfrak{S}_n} + D(X_1, \ldots, X_n)A[X_1, \ldots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$.

Lelong-Ferrand Tauvel ?

Références

RDO1
FGN
Goblot
Beck
Mneimné