118 - Exemples d'utilisation de la notion de dimension d'un espace vectoriel.

1 En algèbre linéaire

1.1 Premières applications, rang

Proposition 1. *Critère d'isomorphie de deux ev.*

INVARIANT

Théorème 1. *F sev de E. Alors* $\dim F \leq \dim E$ *avec égalité ssi* $E = F$.

Il suffit alors de prouver une seule inclusion...

Application. $K[u]$ de dim finie, existence du polynôme minimal.

Proposition 2. *Famille libre/génératrice de card n est une base.*

Application (Carathéodory).

Théorème 2. *Lpsse : injectif, surjectif, bijectif, de rang n, inversible à gauche ou à droite.*

Théorème 3. *PJ_rQ (équivalence).*

Application. $rg(M) = rg({}^tM)$

Application. Densité de Gl_n.

Application. Tout endomorphisme somme de deux inversibles.

Proposition 3. *Pivot de Gauss.*

Application. Indépendance rang corps de base.

Proposition 4. *Déterminant, rang et déterminants extraits.*

Application. Suites linéaires récurrentes d'ordre n, équas diffs linéaires d'ordre n.

1.2 Dualité

Base duale, bidual, dimension orthogonal, applications aux espaces quadratiques et euclidiens (q non dégénérée, V non isotrope...).

1.3 Réduction et preuves par récurrence

Prendre une base : dimension. Donc matrice, poly carac : utilisation dimension.

Théorème 4. *u est trigonalisable ssi π_u est scindé, i.e. si χ_u est scindé.*

Application. On peut alors résoudre plus facilement l'équation différentielle $X'(t) = AX(t)$: on se ramène par conjugaison dans $M_n(\mathbf{C})$ à l'équation $Y'(t) = TY(t)$, avec T triangulaire inférieure. Il suffit alors de résoudre les équations linéaires scalaires au fur et à mesure.

Théorème 5. *Il existe un unique $\ell \in \mathbf{N}$ et une unique famille de polynômes $Q_1, \dots, Q_\ell$ soumise à $Q_\ell \mid Q_{\ell-1} \mid \cdots \mid Q_1$ telle que $\begin{pmatrix} \mathcal{C}(Q_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{C}(Q_\ell) \end{pmatrix}$ soit une matrice de u. Les polynômes Q_i sont appelés les* invariants de similitude *de u.*

Exemple. Si $u = \lambda Id$, alors $\ell = n$ et $Q_1 = \cdots = Q_\ell = X - \lambda$.

Corollaire 1. *Deux endomorphismes sont semblables ssi ils ont mêmes invariants de similitude.*

Application. Soit $K : k$ une extension de corps. Alors deux matrices de $M_n(k)$ sont semblables dans $M_n(k)$ ssi elles le sont dans $M_n(K)$.

Définition 1. Pour $p \in \mathbf{N}^*$ et $\lambda \in k$, on appelle *bloc de Jordan de taille p et de paramètre λ* la matrice $p \times p$:

$$J_{p,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Théorème 6. *Soit $u \in L(E)$ tq π_u soit scindé. Alors il existe une matrice de u formée de blocs daigonaux de Jordan, uniques à l'ordre des blocs près.*

Application. Toute matrice est semblable à sa transposée.

Théorème 7 (Méthode de Gauss)**.**

Théorème 8 (Réduction)**.** *On se fixe un produit scalaire $\langle \mid \rangle$ sur E. Soit q une forme quadratique sur E. Alors il existe une base orthonormée de E (relativement à $\langle \mid \rangle$) orthogonale pour q.*

Théorème 9. *Réduction des automorphismes orthogonaux.*

Application. Définition de l'angle en dimension 2.

2 Théorie des corps

Extension (degré), base télescopique, algébrique/transcendant (ex $\sqrt{2}$, existence transendant sur $\mathbf{R} : \mathbf{Q}$, corps des algébriques, constructions à la règle et au compas (Gauss-Wantzel).

3 Topologie et géométrie différentielle

3.1 Topologie

$\mathbf{R} \not\simeq \mathbf{R}^2$ (connexité), ttes app lin continues, sev fermé, Hahn-Banach, Riesz, Brouwer...

3.2 Calcul différentiel

Fonctions implicites, rang constant, changement de coordonnées.

3.3 Sous-variétés de dimension n

Définitions équivalentes.

Références

RDO alg.1
Beck
Perrin
Gourdon
Audin
Rouvière