

## 119 - Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

Soit  $k$  un corps commutatif et  $(E_{i,j})_{i \leq i, j \leq n}$  la base canonique de  $M_n(k)$ .

### 1 Action par multiplication à gauche (ou à droite)

Changement de base à l'arrivée. Orbite sous l'action : même noyau.

Opérations élémentaires et pivot de Gauss.

D'où des opérations de  $k$  (transvection), de  $k^*$  (dilatation), de  $\mathfrak{S}_n$  (permutation).

Action à droite : action sur les colonnes, même image, dualité.

#### 1.1 Équivalence de matrices

Changement de bases d'une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .

### 2 Action par conjugaison (similitude)

Changement de base d'un endomorphisme. Invariants : déterminant, trace...

Invariant important : polynôme caractéristique.

Invariants de similitude, jordanisation si  $k$  alg. clos.

Théorème de Weyr [Mneimné]

Topologie : Classe de similitude fermée ssi diag, adhérente à 0 ssi nilpotente.

### 3 Action par congruence

Sur les matrices symétriques.

Codiagonalisation OU restriction à  $O(q)$ ,  $q$  def. pos.

Méthode de Gauss, signature.

### 4 Action des matrices orthogonales

Changement de base orthonormale.

Trigonalisation en base orthonormée.

Formes normales des matrices orthogonales.

Action sur les sous-groupes orthogonaux, décomposition polaire, sous-groupes compacts.

## Références

Gourdon  
Perrin  
Mneimné