

120 - Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera à la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

K corps, E K -ev.

1 Dimension finie, rang

1.1 Théorème de la dimension

Définition 1. Familles libre, liée, génératrice, base.

Base – identification K^n

Exemple. $(1, i)$ \mathbf{R} -base de \mathbf{C} , (X^n) base de $\mathbf{R}[X]$, e^{inx} famille libre de $L^2([0, 2\pi])$...

Proposition 1. *Équivalence base, libre maximale et génératrice minimale.*

Théorème 1. *Soit e une famille finie de cardinal n de E . Alors toute famille de cardinal $n + 1$ dont les éléments sont comb lin de e est liée.*

Définition 2. Dimension finie, dimension infinie.

Exemple. \mathbf{R} comme \mathbf{Q} -ev, $\mathbf{F}_{p^n} \simeq (\mathbf{F}_p)^n$...

Théorème 2 (Base incomplète).

Corollaire 1. *Tout ev de dim finie admet une base finie.*

Corollaire 2. *Base incomplète améliorée.*

Théorème 3 (de la dimension).

On suppose désormais que E est de dim finie n .

Théorème 4. *Caractérisation des bases.*

Coro de la base incomplète

Théorème 5. *Isomorphes ssi même dimension.*

Proposition 2. $\dim E \times F, \dim L(E, F)$

1.2 Sous-espaces vectoriels

Théorème 6. F sev de E . Alors $\dim F \leq \dim E$ avec égalité ssi $E = F$.

Important égalité ev

Application. $K[u]$ de dim finie, existence du polynôme minimal.

Théorème 7 (Grassman). ¹

$$\dim(+_{i=1}^m F_i) = \sum_{k=1}^m (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \dim(F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k}).$$

Proposition 3. *Existence supplémentaire.*

Proposition 4. *Caractérisation somme directe, $E = F \oplus G \implies G \simeq E/F$, $\dim E/F$, codimension.*

Définition 3. Hyperplan.

Proposition 5. *Formes linéaires et hyperplans.*

1.3 Rang

Proposition 6. *Critères d'injectivité, surjectivité par images de familles libre et liée.*

Définition 4. Rang famille de vecteurs, matrice, application linéaire.

Théorème 8 (du rang).

Théorème 9. *Lpsse : injectif, surjectif, bijectif, de rang n , inversible à gauche ou à droite.*

Application. $|Gl_n(\mathbf{F}_p)| = \dots$

Théorème 10. PJ_rQ (équivalence).

Application. $rg(M) = rg({}^tM)$

Application. Densité de Gl_n .

Application. Tout endomorphisme somme de deux inversibles.

Proposition 7. *Pivot de Gauss.*

Application. Indépendance rang corps de base.

Proposition 8. *Déterminant, rang et déterminants extraits.*

Application. Suites linéaires récurrentes d'ordre n , équas diffs linéaires d'ordre n .

1. Fausse!

1.4 Dualité

Base duale, dimension orthogonale, applications...

2 Applications

Cf leçon correspondante.

Références

RDO alg.1

Beck

Perrin

Gourdon

Audin

Rouvière