123 - Déterminant, exemples et applications

On considère dans l'ensemble de cette leçon un anneau commutatif et unitaire $\mathcal{A}$ ainsi qu'un $\mathcal{A}$-module libre M de rang $n \in \mathbb{N}$.

1 Formes multilinéaires

Définition 1 *On note $\mathcal{L}_p(M)$ l'ensemble des formes p-linéaires sur M.*

Définition 2 *Soit $f \in \mathcal{L}_p(M)$.*
• *On dit que f est antisymétrique si pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ et $\forall (x_1, ..., x_p) \in M^p$, $f(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}) = \epsilon(\sigma) f(x_1, ..., x_p)$.*
• *f est dite alternée si elle annule tout p-uplet d'éléments de M dont au moins deux éléments sont égaux.*

Remarque $f \in \mathcal{L}_p(M)$ est antisymétrique si et seulement si elle vérifie la condition ci-dessus pour toute transposition.

Proposition 1 *Toute forme p-linéaire alternée est antisymétrique. La réciproque est vraie si la caractéristique de $\mathcal{A}$ est différente de 2.*

Propriété 1 *Si $f \in \mathcal{L}_p(M)$ est alternée, la valeur de $f(x_1, ..., x_p)$ ne change pas si l'on ajoute à l'un des x_i une combinaison linéaire en les x_j restants. En particulier, f s'annule sur toute famille liée de M^p.*

Proposition 2 *Si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de M, une application $f : M^n \to \mathcal{A}$ est n-linéaire alternée si et seulement si pour tout $(x_1, ..., x_n) = (\sum_{i=1}^n a_{ij} e_i)_{j=1...n}$,*

$$f(x_1, ..., x_n) = \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}\right) f(e_1, ..., e_n).$$

Remarque 1 $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) \Pi_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) \Pi_{j=1}^n a_{\sigma(j),j}$.

2 Les trois notions de déterminants (cadre p = n)

2.1 Déterminant d'une famille de n éléments de M

Définition 3 *Soit $e = (e_1, ..., e_n)$ une base de M et $x = (x_1, ..., x_n) = (\sum_{i=1}^n a_{ij} e_i)_{j=1...n} \in M^n$. On appelle déterminant de x dans la base e la quantité $det_e(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) \Pi_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$.*

Notation : $\det_e(x) =: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Exemple

• Pour $n = 2$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Pour $n \geq 4$, la formule générale donnée par la définition n'est pas utilisée en pratique pour le calcul effectif d'un déterminant (coût en $n!$). Des outils de calcul faisant appel au statut n-linéaire alterné du déterminant, comme décrit dans ce qui suit, permettront un temps de calcul raisonnable.

Notons maintenant $A_n(M)$ l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur M.

Théorème 1 *det_e est une forme n-linéaire alternée, $det_e(e) = 1$ et $A_n(M)$ est un $\mathcal{A}$-module libre de rang 1 porté par det_e.*

En particulier,

Proposition 3 ***(Formule de changement de base)*** *Si e et e' sont deux bases de M, $det_{e'} = det_{e'}(e)det_e$.*

2.2 Déterminant d'un endomorphisme

Définition 4 *Soit u un endomorphisme du $\mathcal{A}$-module M. Il existe un et un seul $\lambda \in \mathcal{A}$ tel que pour toute base e de M et tout $x \in M^n$, on ait $det_e(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \lambda det_e(x_1, \dots, x_n)$. λ est appelé le déterminant de u et noté det(u).*

Proposition 4 *Pour u et v deux endomorphismes de M, $det(u \circ v) = det(u)\, det(v)$.*

2.3 Déterminant d'une matrice (carrée)

Définition 5 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$. On note det(A), et on nomme déterminant de la matrice A, le déterminant des colonnes de A dans la base canonique de $\mathcal{A}^n$.*

Remarque 3 Par la remarque 1, le déterminant d'une matrice est également le déterminant de sa transposée.

Proposition 5 • *$det(I_n) = 1$.*

• *Pour un endomorphisme u de M, son déterminant est égal à celui de toutes ses matrices représentatives.*

• *$\forall (a, A) \in \mathcal{A} \times \mathcal{M}_n(\mathcal{A}),\ det(aA) = a^n det(A)$.*

Proposition 6 *det* : $GL_n(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}^\times$ *est un homomorphisme de groupes.*

Proposition 7 *Si* $A = \begin{pmatrix} A_1 & \star & ... & \star \\ 0 & A_2 & ... & \star \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & A_p \end{pmatrix}$ *où pour tout* i A_i *est une matrice carrée, alors* $det(A) = \Pi_{i=1}^{p} det(A_i)$.

Outil Si $\mathcal{A}$ est un corps, le pivot de Gauss est un algorithme performant de calcul de déterminant (son coût est en $O(n^3)$, contre $O(n!)$ pour la formule théorique du déterminant).

Définition 6 *Soit* $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$. *Pour tout* $(i,j) \in [|1,n|]^2$, *on note* A_{ij} *la matrice* $(a_{kl})_{k \neq i, l \neq j}$ *extraite de* A *en éliminant sa* $i^{\text{ième}}$ *ligne et sa* $j^{\text{ième}}$ *colonne.*
La quantité $det(A_{ij})$ *est nommée* $(i,j)^{\text{ième}}$ *mineur de* A.
On nomme $(i,j)^{\text{ième}}$ *cofacteur de* A *la quantité* $C_{ij} = (-1)^{i+1} det(A_{ij})$.

Théorème 2 *Soit* $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$. *Soient* i_0 *et* $j_0 \in [|1,n|]$.
- *Développement selon la* $i_0^{\text{ième}}$ *ligne :* $det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} C_{i_0 j}$.
- *Développement selon la* $j_0^{\text{ième}}$ *colonne :* $det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i j_0} C_{i j_0}$.

Définition 7 *La comatrice d'une matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ *est la matrice* $Com(A) = (C_{ij})_{i,j}$ *des cofacteurs de* A.

Théorème 3 *Pour toute matrice* $A \in M_n(\mathcal{A})$, $A\,{}^tCom(A) = {}^tCom(A)A = (det(A))I_n$.

Corollaire $A \in GL_n(\mathcal{A}) \Leftrightarrow det(A) \in \mathcal{A}^\times$ et dans cette situation $A^{-1} = \left(\det(A)^{-1}\right) {}^t\mathrm{Com}(A)$.
Exemple Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathcal{A})$, $A^{-1} = (ad-bc)^{-1} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Théorème 4 *Le déterminant permer d'obtenir des sous-groupes de* $Gl_n(k)$, *comme par exemple* Sl_n.

2.4 Déterminants classiques

- Déterminant de Vandermonde (ultra classique) : si $(a_1, ..., a_n) \in \mathcal{A}^n$, on appelle matrice de Vandermonde la matrice $\left(a_i^{j-1}\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$. Son déterminant est la quantité $V(a_1, ..., a_n) = \Pi_{i<j}(a_j - a_i)$. Avec une application de FGN.
- Déterminant de coefficients binomiaux [FGN2 p. 13].

• Déterminant de Cauchy (moins classique) : cadre où $\mathcal{A}$ est un corps k, $A = ((a_i + b_j)^{-1})_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(k)$ où $\forall i, j,\, a_i + b_j \neq 0$.
On a $\det(A) \times \Pi_{i,j}(a_i + b_j) = \Pi_{i<j}(a_j - a_i)(b_j - b_i)$.

3 Applications

3.1 En algèbre linéaire

$\mathcal{A}$ est un corps k

Définition 8 *Le polynôme caractéristique de $A \in \mathcal{M}_n(k)$ est $\chi_A = det(XI_n - A)$.*

Théorème 5 (Cayley-Hamilton) *$\forall A \in \mathcal{M}_n(k)$ $\chi_A(A) = 0$.*

Proposition 8 *Le rang de A est le plus grand entier $r \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe une sous-matrice $(a_{i_k,j_l})_{k,l=1\ldots r} \in \mathcal{M}_r(k)$ de A de déterminant non nul.*

Proposition 9 *Formules de Cramer.*

3.2 Géométrie euclidienne

Définition 9 *Déterminant de Gram.*

Théorème 6 *Müntz.*

Proposition 10 *Volume.*

Théorème 7 *Ellipsoïde de John et sous-groupes compacts.*

Théorème 8 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $\mathcal{E}$ l'ensemble de ses bases. Alors la relation d'équivalence $BRB' \iff det_B(B') > 0$ possède exactement deux classes ; celles-ci sont appelées des orientations de E.*

• Trois points du plan euclidien $((x_i, y_i))_{i=1,2,3)} \in \mathbb{R}^2$ sont alignés si et seulement si $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0$.
• Trois droites du plan euclidien $(a_i x + b_i y + c = 0)_{i=1,2,3}$ sont concourantes ou parallèles (deux à deux) si et seulement si $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$.

3.3 Autour du groupe symétrique

Définition *Soit k un corps, et $n \in \mathbb{N}$. Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $P(\sigma)$ la matrice de la permutation par σ de la base canonique de k^n.*

THÉORÈME (Brauer) *Deux permutations σ et τ sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$ si et seulement si $P(\sigma)$ et $P(\tau)$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(k)$.*

Définitions *Soit $n \in \mathbb{N}$, p un nombre premier et V un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension n. Pour tout $u \in GL(V)$, $v \in \mathcal{L}(V) \mapsto u \circ v$ est une bijection de $\mathcal{L}(V)$, de cardinal $q = p^n$. u correspond donc à une permutation $\sigma_u \in \mathfrak{S}_q$. On définit sa signature $\epsilon(u)$ comme étant la signature de cette permutation.*

THÉORÈME (Frobenius-Zolotarev) *Si $p \geq 3$, $\forall u \in GL(V)$ $\epsilon(u) = \left(\frac{\det(u)}{p}\right)$.*

3.4 Régularité du déterminant

$\mathcal{A} = \mathbb{R}$

• La formule théorique du déterminant fait de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \overset{\det}{\to} \mathbb{R}$ une application polynômiale en les coefficients des matrices, donc une application de classe $\mathcal{C}^\infty$, et on a : $d(\det)_M(H) = \mathrm{Tr}\left({}^t\mathrm{Com}(M)H\right)$.

Corollaire $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\chi'_M = d(\det)_{XI_n - M}((XI_n - M)') = \mathrm{Tr}(\mathrm{Com}(XI_n - M))$.

• Par continuité de *det*, $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $GL_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}(n)$ ne sont connexes ni l'un ni l'autre.

Développements

- Théorème de Frobenius-Zolotarev
- Théorème de Müntz
- Ellipsoïde de John ?

References

D.PERRIN : Cours d'algèbre, *Ellipses.*
N. BOURBAKI : Algèbre. Chapitres 4 à 7, *Masson.*
X . GOURDON : Les maths en tête : algèbre, *Ellipses.*
V. BECK, J. MALICK, G. PEYRÉ : Objectif agrégation, *H§B.*