124 - Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications

On se donne un corps k, un k-e.v. E de dim finie n et $u \in L(E)$.

1 L'algèbre $k[u]$

1.1 Définition et polynôme minimal

Théorème 1. *L'application* $\begin{array}{rcl}\varphi_u : k[X] & \to & L(E) \\ P & \mapsto & P(u)\end{array}$ *est un morphisme non injectif de k-algèbre d'image une sous-algèbre commutative de $L(E)$.*

Définition 1. On note $k[u]$ l'image de φ_u. On appelle *polynôme annulateur* tout élément de $\ker \varphi_u$.

Proposition 1. *Il existe un unique polynôme unitaire engendrant* $\ker \varphi_u$*. On l'appelle* polynôme minimal *de u et le note π_u. Son degré est inférieur à n.*

Exemple. $X^2 - X$ est le polynôme minimal de projecteurs non triviaux.
$X^2 - 1$ est le polynôme minimal des symétries non triviales.
X^k est le polynôme minimal des endomorphismes nilpotents d'indice k.

1.2 Structure de $k[u]$

Remarque. k s'injecte canoniquement dans $k[u]$, u est alors algébrique sur k.
$k[u] \simeq k[X]/(\pi_u)$. Ainsi tout idéal de $k[u]$ est principal. Si π_u est irréductible, alors $k[u]$ est un corps. Si $\pi_u = Q_1 \dots Q_k$, avec les Q_i irr. non associés, alors $k[u] \simeq k[X]/(Q_1) \times \cdots \times k[u]/(Q_k)$.
Application. Berlekamp.

1.3 Une remarque topologique

Proposition 2. *Si $k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, alors $k[u]$ est fermé dans $L(E)$.*

Application. $\exp u$ est un polynôme en u. Attention, il n'existe néamoins pas de polymôme P tel que $\exp v = P(v)$ pour tout $v \in L(E)$.

2 Polynômes d'endomorphismes et sous-espaces

2.1 Sous-espaces stables

Proposition 3. *Pour tout $P \in K[X]$, $Im\, P(u)$ et $Ker\, P(u)$ sont u-stables.*

Lemme 1. *Soit $P \in k[X]$. $P(u)$ est inversible ssi P est premier à π_u.*

Proposition 4. *Soit $u \in L(E)$, $Q \in K[X]$ et $F = \ker Q(u)$. Alors $\pi_{u_F} = pgcd(Q, \pi_u)$.*

Proposition 5. *Si $E = \bigoplus E_i$ est une décomposition de E en somme de u-stables sur lesquels le polynôme minimal de u est π_i, alors $\pi_u = ppcm(\pi_i)$.*

2.2 Une réciproque : le lemme des noyaux

Théorème 2 (lemme des noyaux)**.** *Soit $P = P_1 \dots P_k \in k[X]$ tel que les P_i soient premiers entre eux. Alors $\ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(P_i(u))$. De plus, les projecteurs associés à cette décompostion sont des polynômes en u.*

Définition 2. Soit $\pi_u = \prod Q_i^{\alpha_i}$ une décomposition du polynôme minimal en facteurs premiers. On appelle *sous-espaces caractéristiques* de u les s.e.v. de E de la forme $\ker Q_i^{\alpha_i}$.

Proposition 6. *E est la somme directe des sous-espaces caractéristiques.*

Proposition 7. *Il existe $x \in E$ tq $\pi_{u_{\langle x \rangle_u}} = \pi_u$.*

Définition 3. S'il existe $x \in E$ tq $E = \langle x \rangle_u$, u est dit *cyclique*.

Proposition 8. *Si $\chi_u = \pi_u$, alors u est cyclique.*

3 Le polynôme caractéristique

3.1 Définition et premières propriétés

Définition 4. Soit $M \in M_n(k)$. On appelle *polynôme caractéristique* de M, noté χ_M, le polynôme $\det(XI_n - M)$.

Remarque. Les calculs sont faits dans $M_n(k)[X]$.

Proposition 9. *Si M et n sont deux matrices semblables, alors $\chi_M = \chi_N$. Cela permet de définir le polynôme caractéristique d'un endomorphisme de E comme étant le polynôme caractéristique d'une matrice associée à cet endomorphisme.*

Remarque. $\chi_M = X^n - \mathrm{tr} M X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det M$.
Grâce aux formules de Newton, on déduit que les coefficients du polynôme caractéristique sont polynomiaux en les traces des puissances de la matrice. Cela fournit un algorithme de calcul du polynôme caractéristique plus rapide (méthode de Leverrier, [FGN2 p. 78].

Proposition 10. *Les racines de χ_u et de π_u sont exactement les valeurs propres de u.*

Proposition 11. *Soit F un sev de E stable par u. Alors $\chi_{u_F} \mid \chi_u$ et $\pi_{u_F} \mid \pi_u$.*

3.2 Sous-espaces cycliques

Définition 5. Soit $x \in E$. On appelle *sous-espace cyclique engendré par x*, noté $\langle x \rangle_u$, le sev : $\{P(u)(x) \mid P \in k[X]\}$. C'est le plus petit sev contenant x et stable par u.

Proposition 12. *Soit $x \in E \backslash \{0\}$ et $d = dim \langle x \rangle_u$. Alors $(x, u(x), \dots u^{d-1}(x))$ est une base de $\langle x \rangle_u$. De plus, si $u^d(x) = \sum_{i=0}^{d-1} a_i u^i(x)$, alors $\pi_{u_{\langle x \rangle_u}} = X^d - \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i$.*

Définition 6. Soit $P \in k[X]$ unitaire et $d = d^\circ P$. Posant $P = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \dots + a_0$, on appelle *matrice compagnon* de P la matrice $d \times d$:

$$\mathcal{C}(P) = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix}$$

Remarque. Dans la base $(x, u(x), \dots u^{d-1}(x))$, $\mathcal{C}(P)$ est une matrice de $u_{\langle x \rangle_u}$.

Proposition 13. *Soit $P \in k[X]$ unitaire. Alors $P = \pi_{\mathcal{C}(P)} = \chi_{\mathcal{C}(P)}$.*

Théorème 3 (Cayley-Hamilton)**.** $\chi_u(u) = 0$.

Application (Kronecker,[FGN2 p.113]).

4 Applications à la réduction

4.1 Diagonalisation

Théorème 4. *u est diagonalisable ssi π_u est scindé à racines simples.*

Proposition 14. *Si u est diagonalisable et si $\chi_u = \prod(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, alors $\pi_u = \prod(X - \lambda_i)$.*

Application. On peut alors résoudre plus facilement l'équation différentielle $X'(t) = AX(t)$: on se ramène par conjugaison dans $M_n(\mathbf{C})$ à l'équation $Y'(t) = DY(t)$, avec D diagonale. Il suffit alors de résoudre les équations linéaires scalaires une par une.

Application (Burnside, [FGN2 p. 185]). Un sous-groupe de $Gl_n(\mathbf{C})$ d'exposant fini est fini [1].

Application. Soit A diag. de vp $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ de multiplicités $n_1, \ldots, n_r$. Alors $dim\, K(A) = r$ et $dim\, C(A) = n_1^2 + \cdots + n_r^2$. Ainsi $C(A) = K(A)$ ssi $r = n$. De manière générale, $C(A) = K(A)$ ssi A est cyclique.

Théorème 5. *Diagonalisation simultanée.*

Définition 7. Semi-simple.

Théorème 6 (FGN2, Gou, Vinx)**.** *Caractérisation des semi-simples.*

4.2 Trigonalisation

Théorème 7. *u est trigonalisable ssi π_u est scindé, i.e. si χ_u est scindé.*

Application. On peut alors résoudre plus facilement l'équation différentielle $X'(t) = AX(t)$: on se ramène par conjugaison dans $M_n(\mathbf{C})$ à l'équation $Y'(t) = TY(t)$, avec T triangulaire inférieure. Il suffit alors de résoudre les équations linéaires scalaires au fur et à mesure.

Théorème 8. *Trigonalisation simultanée.*

4.3 Décomposition de Dunford

Théorème 9. *Soit $u \in L(E)$ tel que π_u soit scindé sur k. Alors il existe un unique $d \in L(E)$ diagonalisable et un unique $n \in L(E)$ nilpotent tels que $u = d + n$, et que d et n commutent. De plus n et d sont des polynômes en u.*

Application. Rayon spectral.

Application. L'image de $M_n(\mathbf{C})$ par exp est $Gl_n(\mathbf{C})$.
Si $k = \mathbf{C}$, $\exp u$ est diag. ssi u l'est. Image réciproque de I_n.

Application ([FGN2 p. 186]). Petits sous-gpes Gl_n.

4.4 Décomposition de Frobénius

Théorème 10. *Il existe un unique $\ell \in \mathbf{N}$ et une unique famille de polynômes $Q_1, \ldots, Q_\ell$ soumise à $Q_\ell \mid Q_{\ell-1} \mid \cdots \mid Q_1$ telle que* $\begin{pmatrix} \mathcal{C}(Q_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{C}(Q_\ell) \end{pmatrix}$ *soit une matrice de u. Les polynômes Q_i sont appelés les* invariants de similitude *de u.*

1. Considérer $f : G \to \mathbf{C}^m, A \mapsto (tr(AM_i))_i$ pour $(M_i)_i \in G^m$ une base de $Vect(G)$. f est injective car si $f(A) = f(B)$, alors par linéarité $tr(AB^{-1}) = n$ et par diagonalisabilité et fait que les vp sont simples, $AB^{-1} = I_n$.

Exemple. Si $u = \lambda Id$, alors $\ell = n$ et $Q_1 = \cdots = Q_\ell = X - \lambda$.

Corollaire 1. *Deux endomorphismes sont semblables ssi ils ont mêmes invariants de similitude.*

Application. Soit $K : k$ une extension de corps. Alors deux matrices de $M_n(k)$ sont semblables dans $M_n(k)$ ssi elles le sont dans $M_n(K)$.

4.5 Réduction de Jordan

Définition 8. Pour $p \in \mathbf{N}^*$ et $\lambda \in k$, on appelle *bloc de Jordan de taille* p *et de paramètre* λ la matrice $p \times p$:

$$J_{p,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Théorème 11. *Soit* $u \in L(E)$ *tq* π_u *soit scindé. Alors il existe une matrice de* u *formée de blocs daigonaux de Jordan, uniques à l'ordre des blocs près.*

Application. Toute matrice est semblable à sa transposée.

Application. Dénombrement des classes de similitude à polynôme caractéristique fixé.