# 125 - Sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un espace vectoriel en dimension finie.

Notations : $K$ corps commutatif, $E$ $K$-ev de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$, $u \in L(E)$.

## 1 Ensemble des sous-espaces stables d'un endomorphisme

### 1.1 Généralités

**Définition 1.** Sous-espace stable, endomorphisme induit, $S_u(E)$ l'ensemble des sous-espaces stables de $u$.

**Proposition 1.** $\pi_{u_F} \mid \pi_u$.

**Proposition 2.** *Soit $F = Vect(e_1, \dots, e_p)$. $F$ est $u$-stable ssi dans toute base $B = (e_1, \dots, e_p, \dots, e_n)$ la matrice de $u$ est triangulaire par blocs : ... On a alors $A = mat_{B_1}(u_F)$.*

*Application.* $\chi_{u_F} \mid \chi_u$.

**Proposition 3.** *Décomposition en sous-espaces – base adaptée et représentation matricielle.*

*Remarque.* $S_u(E)$ est stable par somme et intersection. Cela permet de définir le plus petit sous-espace $u$-stable vérifiant une propriété.

**Proposition 4.** *Si $u$ et $v$ commutent, $Im\, v,\ Ker\, v \in S_u(E)$.*

*Exemple.* Les sous-espaces caractéristiques de $u$ sont $u$-stables.

**Théorème 1** (lemme des noyaux)**.** *Soit $P = P_1 \dots P_k \in k[X]$ tel que les $P_i$ soient premiers entre eux. Alors* $\ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(P_i(u))$. *De plus, les projecteurs associés à cette décompostion sont des polynômes en $u$.*

*Application.* $E$ est la somme directe des sous-espaces caractéristiques.

### 1.2 Dualité

**Définition 2.** Transposée, orthogonal, dimensions, bidual et double orthogonal...

**Proposition 5.** $F \in S_u(E) \iff F^\perp \in S_{\,{}^t u}(E^*)$.

*Application.* Tout hyperplan $u$-stable de $E$ $\sum A_i x_i$ est associé à une droite propre pour ${}^t u$ dirigée par ${}^t(a_1 \ldots a_n)$.

*Application.* Si $n$ est impair et $K = \mathbf{R}$, alors $u$ possède un hyperplan stable.

**Lemme 1.** *Soit $x \in E$ tel que $\pi_u = \pi_{u,x}$. Alors il existe un supplémentaire $G$ de $\langle x \rangle_u$ stable par $u$.*

## 2 Étude d'exemples, applications à la réduction

### 2.1 Endomorphismes diagonalisables

**Théorème 2.** *Lpsse :*

*(i)* *$u$ est diagonalisable,*

*(ii)* $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp_k(u)} E_\lambda$,

*(iii)* *$\pi_u$ est scindé à racines simples dans $k$,*

*(iv)* *il existe un polynôme annulateur de $u$ simplement scindé,*

*(v)* *si de plus $K = \mathbf{C}$, tout sous-espace stable de $u$ admet un supplémentaire stable.*

**Corollaire 1.** *Si $u$ est diag et $F \in S_u(E)$, alors $u_F$ est diag.*

**Proposition 6.** *Si $u$ est diag, alors $u$ et $v$ commutent ssi tous les $E_{\lambda,u}$ sont $v$-stables.*

**Proposition 7.** *Si $u$ est diag, alors $S_u(E) = \{\bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} H_\lambda \mid H_\lambda$ sev de $E_{\lambda,u}\}$.*

**Proposition 8.** *Réduction simultanée.*

*Application* (FGN2 p. 160). Soit $A$ diag. de vp $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ de multiplicités $n_1, \ldots, n_r$. Alors $dim\, K(A) = r$ et $dim\, C(A) = n_1^2 + \cdots + n_r^2$. Ainsi $C(A) = K(A)$ ssi $r = n$.

### 2.2 Endomorphismes nilpotents

**Définition 3.** Une famille $(E_i)_{0 \le i \le l}$ de sev de $E$ est appelée un *drapeau* si on a $\{0\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_l = E$.

**Proposition 9.** *Soit $u \in L(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice $p$. Posons pour tout $0 \le i \le p$ $E_i = \ker u^i$. Alors la famille $(E_i)$ est un drapeau.*

**Théorème 3.** *$u$ est trigonalisable ssi $\pi_u$ est scindé, i.e. si $\chi_u$ est scindé, ssi il existe un drapeau $F_1 \subset \cdots \subset F_n$ $u$-stable tel que $\forall i$, $\dim F_i = i$.*

**Théorème 4** (Dunford)**.** *Soit $u \in L(E)$ tel que $\pi_u$ soit scindé sur $k$. Alors il existe un unique $d \in L(E)$ diagonalisable et un unique $n \in L(E)$ nilpotent tels que $u = d + n$, et que $d$ et $n$ commutent.*

*Application.* Rayon spectral.

*Application.* L'image de $M_n(\mathbf{C})$ par exp est $Gl_n(\mathbf{C})$.
Si $k = \mathbf{C}$, $\exp u$ est diag. ssi $u$ l'est. Image réciproque de $I_n$.

*Application* ([FGN2 p. 186])*.* Petits sous-gpes $Gl_n$.

**Définition 4.** Pour $p \in \mathbf{N}^*$ et $\lambda \in k$, on appelle *bloc de Jordan de taille $p$ et de paramètre $\lambda$* la matrice $p \times p$ :

$$J_{p,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

**Théorème 5** (Jordanisation)**.** *Soit $u \in L(E)$ tq $\pi_u$ soit scindé. Alors il existe une matrice de $u$ formée de blocs daigonaux de Jordan, uniques à l'ordre des blocs près.*

*Application.* Toute matrice est semblable à sa transposée.

### 2.3 Endomorphismes cycliques

**Définition 5.** Sous-espace cyclique, endomorphisme cyclique.

**Proposition 10.** *dimension, base, calcul, représentation matricielle*

**Définition 6.** Matrice compagnon.

**Proposition 11.** *$F$ est $u$-cyclique ssi $\pi_{u_F} = \chi_{u_F}$.*

**Proposition 12.** $\pi_{u_{\langle x \rangle_u}} = \pi_{u,x}$.

**Proposition 13.** *Il existe $x \in E$ tq $\pi_u = \pi_{u,x}$.* ***Avec les noyaux***

*Application.* Cayley-Hamilton.

**Théorème 6** (décomposition de Frobénius)**.** *Il existe un unique $\ell \in \mathbf{N}$ et une unique famille de polynômes $Q_1, \ldots, Q_\ell$ soumise à $Q_\ell \mid Q_{\ell-1} \mid \cdots \mid Q_1$ telle que $\begin{pmatrix} \mathcal{C}(Q_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{C}(Q_\ell) \end{pmatrix}$ soit une matrice de $u$. Les polynômes $Q_i$ sont appelés les* invariants de similitude *de $u$.*

**Preuve dualité**

*Exemple.* Si $u = \lambda Id$, alors $\ell = n$ et $Q_1 = \cdots = Q_\ell = X - \lambda$.

**Corollaire 2.** *Deux endomorphismes sont semblables ssi ils ont mêmes invariants de similitude.*

*Application.* Soit $K : k$ une extension de corps. Alors deux matrices de $M_n(k)$ sont semblables dans $M_n(k)$ ssi elles le sont dans $M_n(K)$.

*Application.* Si $u$ est cyclique alors $S_u(E)$ est fini. Si $K$ est infini, le réciproque est vraie.

**Proposition 14.** *$C(A) = K(A)$ ssi $A$ est cyclique.*

### 2.4 Endomorphismes semi-simples

Cf leçon écrite [FGN2, Gou, Vinx]. Dunford généralisé [Vinx p. 160].

### 2.5 Endomorphismes normaux

Idem [Gou].