126 - Endomorphismes diagonalisables.

Soient k un corps commutatif et E un k-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

1 Généralités

1.1 Spectre

Définition 1. Soit $u \in L(E)$.
On dit que $\lambda \in K$ est *valeur propre* de u s'il existe $x \in E$ tq $f(x) = \lambda x$. Un tel x est appelé *vecteur propre* associé à la valeur propre λ.
On note $E_\lambda = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}$ le *sous-espace propre* associé à la valeur propre λ.
L'ensemble des valeurs propres de u est appelé le *spectre* de u et est noté $Sp(u)$.

Proposition 1. *Les sous-espaces propres de u sont en somme directe.*

Corollaire 1. $|Sp(u)| \leq n$.

Proposition 2. *On note π_u et χ_u les polynômes minimal et caractéristique de u. Soit $\lambda \in K$. Lpsse :*

(i) *λ est valeur propre de u,*

(ii) *λ est racine de π_u,*

(iii) *λ est racine de χ_u.*

Corollaire 2. *χ_u divise π_u^n.*

Proposition 3. *Soit λ une valeur propre de u. Notons $\alpha(\lambda)$ la multiplicité de $(X - \lambda)$ dans χ_u. Alors $1 \leq dim\ E_\lambda \leq \alpha(\lambda)$.*

1.2 Diagonalisabilité, critères de diagonalisabilité

Définition 2. u est dit *diagonalisable* s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u. De manière équivalente, u est diagonalisable s'il existe une matrice de u diagonale. Une matrice $M \in M_n(k)$ est dite *diagonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale. De manière équivalente, M est diagonalisable si l'endomorphisme $X \mapsto AX$ pour $X \in k^n$ l'est.

Théorème 1. *Lpsse :*

(i) u *est diagonalisable,*

(ii) $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp_k(u)} E_\lambda$*,*

(iii) π_u *est scindé à racines simples dans* k*,*

(iv) *il existe un polynôme annulateur de* u *simplement scindé,*

(v) *Pour toute base de* k^n*, la matrice de* u *dans cette base est diagonalisable,*

(vi) *Pour tout* $\lambda \in Sp(u)$*,* $dim(E_\lambda) = \alpha(\lambda)$*,*

(vii) *Si de plus* $k = \mathbf{C}$*, tout sous-espace stable admet un supplémentaire stable.*

Corollaire 3. *Si* χ_u *admet* n *racines distinctes dans* k*, alors* u *est diagonalisable et* $\pi_u = \chi_u$*.*

Corollaire 4. *Si* u *est diag, alors pour tout sous-espace stable* F*,* $u_{|F}$ *est diag.*

Proposition 4 (Corps fini, [Gou p. 178])**.** *Soit* E *un* $\mathbf{F}_q$*-ev et* $f \in L(E)$*. Alors* f *est diagonalisable ssi* $X^q - X$ *annule* f*.*

1.3 Diagonalisation simultanée

Proposition 5. *Soient* $u, v \in L(E)$*. Alors il existe une base de diagonalisation simultanée de* u *et de* v *ssi* u *et* v *sont diagonalisables et commutent.*

Corollaire 5. *Si* u *et* v *sont simultanément diagonalisables, alors* $u + v$ *et* $u \circ v$ *le sont aussi.*

Remarque. Ce résultat est faux en général : les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont diagonales, mais ni leur somme ni leur produit ne sont diagonalisables.

Proposition 6. *Soit* $(u_i)_{i \in I}$ *une famille arbitraire d'endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux. Alors ils sont co-diagonalisables.*

1.4 Structures liées à un endomorphisme diagonalisable

Proposition 7. *Pour tout polynôme* P *scindé unitaire de degré* n*, l'ensemble des endomorphismes diagonalisables de polynôme caractéristique* P *forme une unique classe de similitude.*

Proposition 8. *Soit* A *diag. de vp* $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ *de multiplicités* $n_1, \dots, n_r$*. Alors* $dim\, K(A) = r$ *et* $dim\, C(A) = n_1^2 + \dots + n_r^2$*. Ainsi* $C(A) = K(A)$ *ssi* $r = n$*.*

2 Exemples d'endomorphismes diagonalisables

2.1 Endomorphismes semi-simples

Proposition 9. *Soit $u \in L(E)$. Lpsse :*

(i) E se décompose en une somme directe de sev u-simples, i.e. qui n'ont aucun sev u-stable non trivial,

(ii) π_u n'est pas divisible par le carré d'un irréductible,

(iii) tout sev u-stable admet un supplémentaire u-stable

Un tel endomorphisme est dit semi-simple.

Proposition 10. *Soit M une matrice de $u \in L(E)$. Si M est diagonalisable dans une extension assez grande de k, alors u est semi-simple. C'est une équivalence si k est parfait.*

2.2 Endomorphismes normaux

On prend ici $k = \mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{C}$) et E euclidien (resp. hermitien).

Théorème 2. *Diagonalisation des endomorphismes normaux (cf leçon correspondante)*

Théorème 3. *Lpsse :*

(i) u est auto-adjoint (resp. hermitien).

(ii) u est diagonalisable en base orthnormée et toutes ses valeurs propres sont réelles.

(iii) la matrice de u dans toute base orthonormée peut s'écrire PD^tP, où P est orthogonale (resp. unitaire) et D diagonale réelle.

Remarque. Interprétation codiag f.q. dont une def. pos.

Proposition 11 (Racine carrée)**.** *On prend $k = \mathbf{R}$. Soit $u \in L(E)$ auto-adjoint positif. Alors il existe un unique $v \in L(E)$ auto-adjoint positif vérifiant $u = v^2$.*

Proposition 12 (Décomposition polaire)**.** *Soit $f \in L(E)$ un endomorphisme inversible. Alors il existe un unique un endomorphisme défini positif s, et un unique endomorphisme orthogonal u tels que $f = us$.*

Méthode de Gauss

C'est une démonstration effective par récurrence sur n de l'existence de bases orthogonales. Soit q une forme quadratique en les n variables : $q(x) = \sum_{i,j} a_{i,j} x_i x_j$. On veut exprimer q comme une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes. On a deux cas :

– Il existe i tel que $a_{i,i} \neq 0$. On peut supposer que c'est 1. Alors

$$\begin{aligned} q(x) &= a_{1,1}x_1^2 + 2A(x_2,\ldots,x_n)x_1 + B(x_2,\ldots,x_n) \\ &= a_{1,1}\left(x_1 + \frac{A}{a_{1,1}}\right)^2 + \left(B - \frac{A^2}{a_{1,1}}\right) \end{aligned}$$

– Pour tout i, $a_{i,i} = 0$. On peut supposer $a_{1,2} \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned} q(x) &= a_{1,2}x_1x_2 + A(x_3,\ldots,x_n)x_1 + B(x_3,\ldots,x_n)x_2 + C(x_3,\ldots,x_n) \\ &= \frac{a_{1,2}}{4}\left(\left(x_1 + x_2 + \frac{A+B}{a_{1,2}}\right)^2 - \left(x_1 - x_2 - \frac{A-B}{a_{1,2}}\right)^2\right) + \left(C - \frac{AB}{a_{1,2}}\right) \end{aligned}$$

3 Décompositions de Dunford et de Jordan

Théorème 4. *Soit $u \in L(E)$ tel que π_u soit scindé. Alors il existe d et n dans $L(E)$, tels que d soit diagonale et n nilpotente, que $u = d + n$, et que d et n commutent.*

Application. Rayon spectral.

Application. L'image de $M_n(\mathbf{C})$ par exp est $Gl_n(\mathbf{C})$.
Si $k = \mathbf{C}$, $\exp u$ est diag. ssi u l'est. Image réciproque de I_n.

Application ([FGN2 p. 186]). Petits sous-gpes Gl_n.

Définition 3. Pour $p \in \mathbf{N}^*$ et $\lambda \in k$, on appelle *bloc de Jordan de taille p et de paramètre λ* la matrice $p \times p$:

$$J_{p,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Théorème 5. *Soit $u \in L(E)$ tq π_u soit scindé. Alors il existe une matrice de u formée de blocs diagonaux de Jordan, uniques à l'ordre des blocs près.*

4 Applications

Proposition 13. *Calcul des puissances d'une matrice diag.*

4.1 Exponentielles de matrices et équations différentielles

Proposition 14. *Soit $A \in M_n(k)$ une matrice diagonalisable : $A = PDP^{-1}$, avec $D = diag(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. Alors $\exp(A) = PD'P^{-1}$, avec $D' = diag(e_1^\lambda,\ldots,e_n^\lambda)$.*

Remarque. Si on connaît une décomposition de Dunford de la matrice A : $A = D + N$, alors $\exp A = \exp D + \exp N$; $\exp D$ se calcule facilement par supra, et $\exp N$ est en fait un polynôme en N.

Proposition 15. *Si A est diagonalisable, alors A est un polynôme en* $\exp A$.

Proposition 16 ([FGN2 p. 213])**.** $\exp$ *est injective sur l'ensemble des matrices diagonalisables de* $\mathbf{R}$.

Proposition 17. *Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$ telle que* $\exp A$ *soit diagonalisable. Alors A est elle-même diagonalisable.*

Application. Ensemble des matrices d'image I_n par exp.

Application. Soit $A \in M_n(k)$ une matrice diagonalisable de vp α_i associées aux vecteurs propres u_i. Considérons l'EDO $X' = Ax$. Alors ses solutions sont de la forme $\sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\lambda_i t} u_i$.

4.2 Théorie des groupes

Théorème 6 (Burnside, [FGN2 p. 185])**.** *Un sous-groupe de $Gl_n(\mathbf{C})$ d'exposant fini est fini*[1].

4.3 Topologie

Proposition 18. *Pour $k = \mathbf{C}$, l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $M_n(\mathbf{C})$. Pour $k = \mathbf{R}$, l'adhérence ensemble des matrices diagonalisables est égale à l'ensemble des matrices trigonalisables.*

Application. $\det \circ \exp = \exp \circ\, ^t$.

Proposition 19. *Mesure nulle.*

Représentations linéaires ?

1. Considérer $f : G \to \mathbf{C}^m, A \mapsto (tr(AM_i))_i$ pour $(M_i)_i \in G^m$ une base de $Vect(G)$. f est injective car si $f(A) = f(B)$, alors par linéarité $tr(AB^{-1}) = n$ et par diagonalisabilité et fait que les vp sont simples, $AB^{-1} = I_n$.