127 - Exponentielle de matrices. Applications.

Soit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}^*$. On munit $M_n(\mathbf{K})$ d'une norme d'algèbre qui le rend complet.
Citons le théorème de Dunford qui joue un rôle central dans l'étude de l'exponentielle matricielle :

Théorème 1 (Dunford)**.** *Soit $u \in L(E)$ tel que π_u soit scindé sur k. Alors il existe un unique $d \in L(E)$ diagonalisable et un unique $n \in L(E)$ nilpotent tels que $u = d + n$, et que d et n commutent.*

1 Définition et premières propriétés

Définition 1. La série $\sum_{n \geq 0} A^n/n!$ converge normalement sur tout $M_n(\mathbf{K})$. Sa somme est appelée *l'exponentielle* de la matrice A.

Proposition 1. *Soient $A, B \in M_n(\mathbf{K})$ et $P \in Gl_n(\mathbf{K})$.*
- $\exp(0) = I_n$, *pour tout* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\exp(diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = diag(\exp \lambda_1, \ldots, \exp \lambda_n)$, *et* $\exp(trig(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = trig(\exp \lambda_1, \ldots, \exp \lambda_n)$.
- *Si* $A = PBP^{-1}$, *alors* $\exp(A) = P \exp(B) p^{-1}$
- $det(\exp A) = e^{tr(A)}$
- *l'application* $\exp$ *est continue sur* $M_n(\mathbf{K})$
- $Sp_{\mathbf{C}}(\exp(A)) = e^{Sp_{\mathbf{C}}(A)}$
- *Si N est nilpotente d'indice p, alors* $\exp(N) = \sum_{n=0}^{p-1} N^n/n!$
- $\exp(A)$ *est un polynôme en A, et donc commute avec A.*

Remarque. Pour tout $A \in M_n(\mathbf{K})$, $\exists P_A \in \mathbf{K}[X] : \exp(A) = P_A(A)$, mais il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ vérifaint cette propriété pour tout A.
On peut montrer que pour tout A, A est un polynôme en $\exp A$ (Beck).

Proposition 2. *Soient $A, B \in M_n(\mathbf{K})$ telles que $[A, B] = 0$. Alors* $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$.

Exemple. La condition de commutation est nécessaire : si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\exp(A + B) \neq \exp(A) \exp(B)$.

Exemple ([FGN2 p. 242])*.* Si A est à coefficients positifs, alors $\exp A$ aussi.

Corollaire 1. *Pour tout* $A \in M_n(\mathbf{K}), \exp(A) \in Gl_n(\mathbf{K})$ *et* $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$

Remarque. Il y a des cas de faveur pour le calcul de l'exponentielle d'une matrice :
- Si A est diagonalisable ou trigonalisable, alors son exponentielle l'est aussi
- Le calcul des puissances successives de A peut se faire dans $\mathbf{K}[X]/(\pi_A)$
- Si on a la décomposition de Dunford de A en $A = D + N$, avec D diagonalisable, N nilpotente et $[N, D] = 0$, alors $\exp(A) = \exp(D)\exp(N)$
- On peut utiliser la réduction de Jordan.

Exponentielle et réduction

Proposition 3. *Soit* $A \in M_n(\mathbf{K})$ *de polynôme minimal scindé sur* $\mathbf{K}$*. Alors* A *est diagonalisable ssi* $\exp(A)$ *l'est.*

Exemple. Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$. Alors $\exp(A) = I_n$ ssi A diagonalisable sur $\mathbf{C}$ et $Sp_{\mathbf{C}}(A) \subset 2\pi\mathbf{Z}$.

Proposition 4. *Si* A *et* B *sont diagonalisables réelles et* $\exp A = \exp B$*, alors* $A = B$*.*

2 Régularité de l'exponentielle de matrices

2.1 Différentiabilité

Théorème 2. *L'exponentielle* $\exp : M_n(\mathbf{K}) \to Gl_n(\mathbf{K})$ *est de classe* C^∞ *sur son ensemble de définition. Elle vérifie* $d\exp(0) = Id$ *et réalise donc par inversion locale un difféomorphisme d'un voisinage de 0 vers un voisinage de l'identité.*

Application. $Gl_n(\mathbf{K})$ n'a pas de sous-groupe arbitrairement petit : il existe un voisinage V de l'identité dans $Gl_n(\mathbf{K})$ tel que le seul sous-groupe de $Gl_n(\mathbf{K})$ inclus dans V soit le sous-groupe trivial.

Proposition 5. *Si* $X : \mathbf{R} \to M_n(\mathbf{K})$ *est de classe* C^1 *tel que pour tout* t*,* $X(t)$ *et* $X'(t)$ *commutent, alors* $t \mapsto \exp(X(t))$ *est de classe* C^1 *et pour tout* t *on a* $\frac{d}{dt}[\exp(X(t))] = X'(t)\exp(x(t))$*.*

Remarque. Cette propriété est en défaut pour $X(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Proposition 6 (Différentielle de l'exponentielle)**.** *Pour tout* $(X, H) \in M_n(\mathbf{K})^2$*, on a :*

$$d\exp(X).H = \exp(x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}(-ad_X)^k(H)$$

Où $ad_X : M_n(\mathbf{K}) \to M_n(\mathbf{K}),\ H \mapsto [X, H]$

Proposition 7 (Points critiques de l'exponentielle)**.**

2.2 Logarithme matriciel

Définition 2. La série $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(M-I_n)^k}{k}$ converge normalement sur $B(I_n,1)$. La somme de cette série est appelée le *logarithme* de la matrice M.

Proposition 8. – *L'application* $\log : B(I_n,1) \to M_n(\mathbf{R})$ *est analytique.*
- $\log : B(I_n,1) \to B(0,ln(2))$ *et* $\exp : B(0,ln(2)) \to B(I_n,1)$ *sont des difféomorphismes réciproques.*
- *Et c'est encore vrai pour les nilpotents...*
- *Si A et B commutent, alors* $\log(AB) = \log(A) + \log(B)$.

Proposition 9 ([FGN2 p. 253])**.** *Soient A et B dans $M_n(\mathbf{K})$.*
- *Soit $(A_k)_k$ une suite de matrices convergeant vers A, alors*

$$\exp(A) = \lim_{K\to+\infty}(I_n + \frac{1}{k}A_k)^k$$

- $\exp(A+B) = \lim_{k\to+\infty}(\exp(A/k)\exp(B/k))^k$ *(Lie-Trotter-Kato)*
- $\exp(AB-BA) = \lim_{k\to+\infty}(\exp(A/k)\exp(B/k)\exp(-A/k)\exp(-B/k))^k$

2.3 Image de l'exponentielle

Théorème 3. $\exp : M_n(\mathbf{C}) \to Gl_n(\mathbf{C})$ *est surjective.*

Application. $Gl_n(\mathbf{C})$ est connexe par arcs.

Application. $Gl_n(\mathbf{C}) \to Gl_n(\mathbf{C})$, $A \mapsto A^p$ est surjective pour tout $p \geq 1$. Ainsi on a une racine p-ième matricielle de toute matrice inversible.

Théorème 4. $\exp(M_n(\mathbf{R})) = \{M^2 \mid M \in Gl_n(\mathbf{R})\}$

3 Applications

3.1 Homéomorphismes, difféomorphismes et exponentielle

On note n_p l'ensemble des matrices nilpotentes d'indice p.

Proposition 10. *Sous-variétés.*

Lemme 1 (M-T)**.** *Critère d'inversion locale.*

Proposition 11 (M-T)**.** *(i)* exp *réalise un difféomorphisme de n_p sur $\{I_n+N \mid N \in n_p\}$ dont l'inverse est le logarithme.*

(ii) exp *réalise un difféomorphisme de $S_n(\mathbf{R})$ sur $S_n^{++}(\mathbf{R})$.*

(iii) exp *réalise un homéomorphisme de $H_n(\mathbf{R})$ sur $H_n^{++}(\mathbf{R})$.*

Remarque. On a $\exp(\theta J) = R_\theta$ [FGN3].

Application. $\exp : A_n \to SO_n$ est surjective [FGN3].

Application. Grâce à la décomposition polaire,
- $Gl_n(\mathbf{R}) \approx O_n(\mathbf{R}) \times S_n^{++}(\mathbf{R}) \approx O_n(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^{n(n-1)/2}$.
- $Gl_n(\mathbf{C}) \approx U_n(\mathbf{C}) \times H_n^{++}(\mathbf{R}) \approx U_n(\mathbf{C}) \times \mathbf{R}^{n^2}$

3.2 Sous-groupes à un paramètre

Définition 3. Morph continus φ de $\mathbf{R}$ dans Gl_n [Laf p. 37]. Et autres sous-groupes !

Proposition 12. *Alors* $\varphi(t) = \exp(tX)$.

Théorème 5 ([FGN2 p. 253])**.** *Algèbre de Lie.*

Proposition 13 ([FGN2 p. 255])**.** *Algèbre de Lie de* SO_n.

Théorème 6 ([FGN2 p. 249])**.** *Morphismes continus de* $\mathbf{S}^1$ *dans* $Gl_n(\mathbf{C})$ *et* $Gl_n(\mathbf{R})$.

Exemple. Le groupe des rotations en dimension 2.

3.3 Applications aux systèmes différentiels autonomes

Proposition 14. *Soit* I *un intervalle de* $\mathbf{R}$, $t_0 \in I$, $B : I \to \mathbf{R}^n$ *continue et* $A \in M_n(\mathbf{R})$. *Alors toute solution* Y *de (1) est donnée par la formule :*

$$Y(t) = \exp((t-t_0)A)Y(t_0) + \int_{t_0}^{t} \exp((t-s)A)B(s)ds$$

Proposition 15. *Forme générale en fonction des valeurs des racines [RDO p. 200].*

Application. Équations linéaires scalaires à coefficients constants [RDO p. 204].

Proposition 16. *Comportement en dimension 2 par les géniaux Zuily et Queffélec !*

Théorème 7 (Liapunov)**.** *[Rou].*

Ss gpe de Lie Pellerin, applications FGN ?