128 - Endomorphimes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

On fixe une fois pour toutes un corps k et un k-ev E de dimension finie n.

1 Endomorphismes nilpotents

1.1 Définition

Définition 1. Un endomorphisme $u \in L(E)$ est dit *nilpotent* s'il existe $m \in \mathbf{N}$ tq $u^p = 0$. Le plus petit p vérifiant cette propriété est appelé l'*indice de nilpotence* de u. On a la même définition pour les matrices $M \in M_n(k)$.

Définition 2. Pour $p \in \mathbf{N}^*$ et $\lambda \in k$, on appelle *matrice de Jordan de taille* n la matrice $n \times n$:

$$J_{p,\lambda} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple. Une matrice de Jordan de taille n est nilpotente d'indice n.

Exemple. La dérivation dans $k_n[X]$ est nilpotente.
Si A est nilpotente, alors $M \mapsto AM$ est aussi nilpotente.

Proposition 1. *L'ensemble des nilpotents est un cône (mais pas un ev).*

Exemple. La dimension 2, [Vinx].

Proposition 2. *Si u et v sont deux endomorphismes nilpotents qui commutent, alors $u + v$ et $u \circ v$ sont nilpotents.*

Définition 3. Soit $\pi_u = \prod Q_i^{\alpha_i}$ une décomposition du polynôme minimal en facteurs premiers. On appelle *sous-espaces caractéristiques* de u les s.e.v. de E de la forme $\ker Q_i^{\alpha_i}$.

Remarque. Alors $u_{F_\lambda} - Id$ est nilpotent d'indice p.

Proposition 3. *$u \in L(E)$ est nilpotent ssi $\forall x \in E, \exists p \in \mathbf{N} : u^p(x) = 0$.*

Remarque. C'est faux en dimension finie (dérivation des polynômes).

Théorème 1. *L'exponentielle réalise un homéo des endomorphismes nilpotents vers les unipotents.*

1.2 Noyaux itérés, réduction

Définition 4. Une famille $(E_i)_{0\leq i\leq l}$ de sev de E est appelée un *drapeau* si on a $\{0\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_l = E$.

Proposition 4. *Soit $u \in L(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice p. Posons pour tout $0 \leq i \leq p$ $E_i = \ker u^i$. Alors la famille (E_i) est un drapeau.*

Corollaire 1. *L'indice de nilpotence vérifie $p \leq n$.*

Corollaire 2. *Soit e une base adaptée au drapeau (E_i). Alors u a pour matrice représentative dans cette base une matrice triangulaire supérieure par blocs stricte. Réciproquement, toute matrice triangulaire supérieure stricte est nilpotente.*

Proposition 5. *Le polynôme minimal de u est alors X^p et son polynôme caractéristique est X^n. Réciproquement, un endomorphisme ayant X^p pour polynôme minimal ou X^n pour polynôme caractéristique est nilpotent.*

Application. Le vectoriel du cône nilpotent est l'ensemble des matrices de trace nulle [Vinx].

Proposition 6. *u est nilpotent ssi les traces de ses puissances itérées sont toutes nulles.*

Application. Théorème de Burnside.

Proposition 7. *Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice n. Alors pour tout $x \in E \setminus \ker u^{n-1}$, le sous-espace cyclique engendré par x est E et dans la base $(x, \dots u^{n-1}(x))$, u a pour matrice représentative un bloc de Jordan.*

Théorème 2 (Frobénius)**.** *Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice p. Posons $n_i = dim \ker u^i$. Alors la suite $(n_i)_{0\leq i\leq p}$ est strictement décroissante et concave.*

Proposition 8. *On suppose ici $k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Lpsse :*

(i) *u est nilpotent*

(ii) *u est semblable à tout λu, $\lambda \neq 0$*

(iii) *l'endomorphisme nul est dans l'adhérence de la classe de conjugaison de u.*

Tableau de Young

2 Lemme des noyaux, trigonalisation

2.1 Lemme des noyaux

Théorème 3 (lemme des noyaux)**.** *Soit $P = P_1 \dots P_k \in k[X]$ tel que les P_i soient premiers entre eux. Alors $\ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(P_i(u))$. De plus, les projecteurs associés à cette décompostion sont des polynômes en u.*

Proposition 9. *Pour tout u de $L(E)$, E est la somme directe des sous-espaces caractéristiques.*

Application. Il existe $x \in E$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$.

2.2 Trigonalisation

Définition 5. Un endomorphisme u est dit *trigonalisable* si une de ses matrices représentatives est triangulaire supérieure par blocs. Une matrice est dite *trigonalisable* si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Remarque. On peut tout aussi bien remplacer les matrices triangulaires supérieures par des matrices triangulaires inférieures : une matrice triangulaire inférieure est toujours semblable à une matrice triangulaire supérieure via la matrice de passage ayant des 1 sur son antidiagonale et des 0 ailleurs.

Théorème 4. *u est trigonalisable ssi π_u est scindé, i.e. si χ_u est scindé.*

Remarque. Si k est algébriquement clos, par exemple si $k = \mathbf{C}$, tout endomorphisme est trigonalisable.

Application. On peut alors résoudre plus facilement l'équation différentielle $X'(t) = AX(t)$: on se ramène par conjugaison dans $M_n(\mathbf{C})$ à l'équation $Y'(t) = TY(t)$, avec T triangulaire inférieure. Il suffit alors de résoudre les équations linéaires scalaires au fur et à mesure.

Corollaire 3. *Pour un endomorphisme trigonalisable, la trace est égale à la somme des valeurs propres et le déterminant à leur produit.*

Corollaire 4. *Pour tout $M \in M_n(k)$, les valeurs propres de M^p sont les λ^p, λ vp de M, avec même multiplicité.*

Proposition 10 (trigonalisation simultanée)**.** *Soient $(u_i)_i$ des endomorphismes de E trigonalisables qui commutent deux à deux. Alors ils sont co-trigonalisables.*

Proposition 11 ([FGN p.118])**.** *Trigo simultanée et rang.*

Proposition 12. *Tout sous-ensemble compact de $Gl_n(\mathbf{R})$ stable par multiplication est un groupe.*
Tout sous-groupe de $Gl_n(\mathbf{R})$ à distance au plus $\sqrt{3}$ de l'identité est réduit à l'identité.

2.3 Décomposition de Dunford

Théorème 5. *Soit $u \in L(E)$ tel que π_u soit scindé sur k. Alors il existe un unique $d \in L(E)$ diagonalisable et un unique $n \in L(E)$ nilpotent tels que $u = d + n$, et que d et n commutent. De plus n et d sont des polynômes en u.*

Application. Rayon spectral.

Application. L'image de $M_n(\mathbf{C})$ par exp est $Gl_n(\mathbf{C})$.
Si $k = \mathbf{C}$, $\exp u$ est diag. ssi u l'est. Image réciproque de I_n.

Application ([Vinx]). Pour tout M, M est un poly en $\exp M$.

Proposition 13. *Forme générale solution EDO linéaire de degré 1 en fonction des valeurs des racines [RDO p. 200].*

Application. Équations linéaires scalaires à coefficients constants [RDO p. 204].

2.4 Réduction de Jordan

Théorème 6. *Soit $u \in L(E)$ tq π_u soit scindé. Alors il existe une matrice de u formée de blocs diagonaux de Jordan, uniques à l'ordre des blocs près.*

Remarque. Cas nilpotent, cf [Vinx] p. 173.

Application. Toute matrice est semblable à sa transposée.

Application (Calcul du nombre de classes de similitude). Par le nombre de partitions de n.