130 - Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

$n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, $A^* = {}^t\overline{A}$, $\langle A, B\rangle = Tr(A^*B)$.

1 Définitions et premières propriétés

Définition 1. Matrices symétrique, hermitienne, antisymétrique, antihermitienne.

Exemple. Symétrie orthogonale, projection orthogonale.

Proposition 1. $M_n(\mathbf{R}) = S_n(\mathbf{R}) \oplus A_n(\mathbf{R})$, $M_n(\mathbf{C}) = H_n(\mathbf{C}) \oplus A_n(\mathbf{C})$.

Définition 2 (RDO)**.** Adjoint via Riesz. Autoadjoint.

Proposition 2. *Autoadjoint ssi symétrique dans BON.*

Proposition 3. $Ker\, u^* = (Im\, u)^\perp$, $Im\, u^* = (Ker\, u)^\perp$.

Corollaire 1. *Si u autoadjoint, alors $E = Ker\, u \oplus^\perp Im\, u$.*

Définition 3. Forme bil sym/sesquilinéaire hermitienne associée, forme quadratique/hermitienne.

Proposition 4. *$M \mapsto q_M$ est un isom.*

Définition 4. Positive, définie positive.

Remarque. Notions stables par restriction !

Proposition 5. *Toute matrice $S \in S_n^{++}$ définit un produit scalaire $X \mapsto {}^tXSX$.*

Remarque. $\forall A \in M_n(\mathbf{C})$, $A^*A \in H_n(\mathbf{C})$.

Remarque. S_n^+, H_n^+ sont des cônes convexes fermés.
S_n^{++}, H_n^{++} sont denses dans S_n^+, H_n^+.
S_n, H_n sont des fermés de M_n.

Exemple (Matrice de Gram). – de Gram ssi dans H_n^+
– déterminant de Gram nul ssi famille liée

– distance

Application (Müntz).

Exemple (matrice hessienne). Lemme de Schwarz. Condition du second ordre.

Proposition 6 (Critère de Sylvester).

Application. Cf Gourdon.

2 Réduction des matrices symétriques ou hermitiennes

2.1 Énoncé

Proposition 7. *Soit* $M \in S_n(\mathbf{R}) \cup H_n(\mathbf{C})$. *Alors* $Sp_{\mathbf{C}}(M) \subset \mathbf{R}$.

Proposition 8. *Soit* $M \in S_n(\mathbf{R}) \cup H_n(\mathbf{C})$ *d'endomorphisme associé* u. *Si* F *est stable par* u, *alors* $F^{\perp}$ *est stable par* u.

Théorème 1. *Soit* $M \in S_n(\mathbf{R})$ *(resp.* $H_n(\mathbf{C})$*). Alors il existe* $P \in O_n(\mathbf{R})$ *(resp* $U_n(\mathbf{C})$*) et* D *diagonale réelle tq* $M = PDP^*$.

Corollaire 2 (Réduction simultanée). *!! Mat sym def pos !!*

Remarque. M est (définie) positive ssi ses vp sont toutes ≥ 0 (> 0).

2.2 Applications

Proposition 9. *Toute puissance d'une matrice dans* S_n (S_n^{++}) *est aussi dans* S_n (S_n^{++}).

Lemme 1. *La fonction* $\mu : S_n^{++}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R},\ M \mapsto (\det M)^{-1/2}$ *est strictement convexe.*

Proposition 10. *Pour tout* $A \in M_n(\mathbf{R})$, $|||A|||_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$. *En particulier pour* $A \in H_n^{++}$, $|||A||| = \rho(A)$.

Proposition 11. $\exp$ *réalise un homéo de* S_n *vers* S_n^{++}.

Proposition 12 (Minkowski, le retour, [FGN p. 223]). *Soit* $A, B \in S_n^{++}(\mathbf{R})$. *Alors* $(\det A)^{1/n} + (\det B)^{1/n} \leq (\det(A+B))^{1/n}$.

Proposition 13 (Racines carrées matricielles).

Corollaire 3 (Décomposition polaire).

Théorème 2 (Théorème du minmax [FGN]).

Application (cf [FGN]). Entrelacement de Cauchy et perturbation de Weyl.

3 Retour sur les formes quadratiques et hermitiennes

Définition 5. Congruence.

Proposition 14. *Méthode de Gauss.*

Remarque. Formes hermitiennes classifiées par leur rang.

Définition 6. Signature.

Théorème 3 (Loi d'inertide de Sylvester)**.**

Remarque. Def pos ssi signature $(n, 0)$.

Théorème 4 (Lemme de Morse)**.**

Définition 7. Groupe orthogonal.

Proposition 15. *Les groupes orthogonaux des fq def pos sont tous conjugués, le conjugué d'un groupe orthogonal en est un. Le stabilisateur d'un groupe orthogonal est lui-même.*

Proposition 16. *Composantes connexes, FGN.*

Théorème 5. *Sous-groupes compacts.*

Lemme supra

4 Optimisation

[Vinx p. 32, Allaire, Allaire-Kaber]. Gradient à pas optimal.

Références

Gourdon
Goblot
Chambert Loir
FGN 3